J. Le Roux

Le principe de relativité et la loi de la gravitation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 50 (1933), p. 127-169
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__127_0>

LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ

ET

LA LOI DE LA GRAVITATION

PAR J. LE ROUX

I. — Le groupe de relativité en Mécanique.

1. Dans la mécanique classique, la cinématique est affranchie de l'idée de l'absolu.

La dynamique, au contraire, repose sur des principes valables seulement pour un choix particulier du système de référence et du temps. On considère comme mouvement absolu le mouvement rapporté à ces repères et l'on établit une distinction entre le mouvement absolu et le mouvement relatif.

L'expérience du pendule de Foucault semble confirmer cette distinction.

En opposition fondamentale avec ce point de vue, le principe de relativité d'Einstein exprime que :

Les lois de la physique doivent être telles qu'elles soient valables pour tous les systèmes de référence arbitrairement mobiles.

Les conséquences de ce principe, développées dans d'importants travaux, aboutissent à la loi de gravitation déduite du ds^2 d'Einstein-Schwarzschild, plus ou moins modifié. Or cette loi ne représente les phénomènes avec une certaine approximation que si les coordonnées qui y figurent sont rapportées aux mêmes repères que le mouvement absolu de la mécanique classique. Pour passer à des systèmes de référence arbitrairement mobile, il faudrait effectuer un changement de variables, exactement comme dans la mécanique classique.

Ainsi la théorie de la relativité elle-même semblerait aboutir à une loi de mouvement absolu.

J'ai pensé cependant que le principe de la relativité exprimait une idée juste et féconde et qu'il était utile d'en déduire les conséquences qu'il comporte réellement.

Le même mouvement rapporté à différents systèmes de référence arbitrairement mobiles peut présenter les aspects les plus divers. Dans cette infinie variété d'images, il y a des caractères communs, des propriétés invariantes. Les propriétés d'un mouvement rapporté à des repères particuliers résultent de l'association des propriétés invariantes avec les contingences dues au choix des repères.

Les lois compatibles avec le principe de relativité sont celles qui s'expriment par les propriétés invariantes.

La théorie des groupes de transformations de Lie est l'instrument approprié pour la découverte de ces propriétés.

Il a fallu, toutefois, l'adapter à cette étude par une extension qui a fait l'objet d'un mémoire prélimimaire sur les *Groupes de relativité* (1).

Le prolongement d'un groupe par les dérivées ou les différentielles peut être envisagé de deux points de vue différents : 1° en considérant les paramètres comme des constantes, c'est le prolongement ordinaire que nous appelons le *prolongement statique;* 2° en les considérant comme variables, au même titre que les coordonnées soumises à la transformation, c'est ce que nous appelons le *prolongement cinématique*.

Un groupe complété par le prolongement cinématique constitue un *groupe de relativité*.

Dans le groupe de relativité les dérivées des paramètres du groupe initial sont assimilées à de nouveaux paramètres au même titre que les premiers. Il en résulte que le nombre des paramètres augmente à mesure que s'élève l'ordre des dérivées. Dans le prolongement statique, au contraire, le nombre des paramètres reste fini.

Dans ce dernier cas, il peut exister des invariants différentiels qui ne subsistent pas pour le groupe de relativité. Un ds^2 de géométrie

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 2e série (Cahier n° 30).

généralisée est un de ces invariants différentiels. En prenant pour base de ces recherches un pareil invariant, la théorie courante de la relativité se mettait en opposition avec l'une des conditions du principe de relativité, l'arbitraire mobilité du système de référence.

Le groupe des mouvements relatifs est le plus simple des groupes de relativité; il a suffi d'une généralisation facile pour en étendre les propriétés au cas d'un groupe initial quelconque.

Une fois l'instrument construit, l'étude du problème général de la relativité en mécanique ne présentait plus de difficultés.

Une transformation facile de la forme jacobienne du principe de la moindre action nous permet de passer à la forme invariante, valable quel que soit le système de référence; celle-ci à son tour fournit une représentation synthétique de la loi de gravitation.

En dehors de son application à ce problème général, il apparaît que la considération du groupe relativité est appelée à jouer en mécanique un rôle particulièrement important. J'ai pu retrouver ainsi en partant du groupe de relativité des résultats relatifs à la gravitation, que j'avais obtenus antérieurement par une autre méthode.

J'étudie d'abord les notions fondamentales de mouvement, de masse et d'énergie en rapport avec les transformations infinitésimales du groupe de la relativité euclidienne.

2. *Mobile, position relative et temps.* — En géométrie le point n'a aucune existence propre; ce n'est qu'une position, définie par rapport à un système de référence. En mécanique au contraire on introduit la notion d'un *point matériel,* ou mieux d'un *élément matériel* auquel on attribue une existence indépendante de sa position.

Dans le mouvement, nous avons donc à considérer d'une part le *mobile*, élément persistant, et d'autre part les positions variables de cet élément. Les systèmes de référence auxquels on rapporte les positions sont les mêmes qu'en géométrie. Le groupe de transformations correspondant pourrait varier avec le système géométrique adopté; mais si l'on veut que les résultats soient immédiatement applicables aux mesures effectuées suivant les méthodes de la géométrie euclidienne, c'est le groupe euclidien qui s'impose à notre choix, pour raison d'opportunité.

Certains résultats d'ailleurs sont valables pour tout système géométrique.

A la considération de position, qui relève du domaine de la géométrie, la mécanique ajoute encore celle du temps. Il faudrait alors adjoindre aux transformations du groupe géométrique les formules de transformations du temps.

Il y a évidemment une grande marge d'arbitraire dans le choix du repérage du temps. *A priori* aucune nécessité ne s'impose pour établir une liaison quelconque entre les marches des chronomètres que l'on pourrait attacher à deux systèmes de référence différents.

Si l'on désigne par t et θ respectivement les variables jouant le rôle du temps dans les deux systèmes de référence, on pourrait concevoir une relation simple de la forme

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 t.$$

Le groupe de transformations comprendrait deux nouveaux paramètres α_1 et α_2, qui devraient être assimilés à des variables dans le prolongement cinématique.

On reconnaît facilement que les invariants de ce groupe seraient indépendants du temps. Mais si l'on approfondit la question, on s'aperçoit que le temps chronométrique se ramène en réalité à une coordonnée de position : position d'une aiguille sur un cadran, angle horaire du soleil ou d'une étoile. Ces positions, à leur tour, peuvent être définies à l'aide des coordonnées ordinaires de la géométrie.

Ainsi la considération du groupe géométrique suffit, mais il sera nécessaire de considérer simultanément les mouvements de tous les éléments qui sous une forme quelconque doivent intervenir dans les phénomènes à étudier. Dans le cas d'un point unique l'emploi d'une variable temps semble s'imposer; c'est en réalité une forme dissimulée de la comparaison du mouvement étudié avec celui du chronomètre.

Dans le cas des systèmes généraux, il suffit d'adjoindre le chronomètre lui-même à l'ensemble étudié. On n'aura plus à comparer que les positions géométriques de tous les éléments de cet ensemble élargi (1).

3. *Transformations infinitésimales du groupe euclidien.* — Dans le

(1) *Cf.* E. Mach, *La Mécanique*. Trad. E. Bertrand, Chap. II.

cas d'un seul point les transformations de coordonnées rectangulaires sont de la forme suivante :

$$(1)\qquad \begin{cases} X = x_0 + a x + b y + c z, \\ Y = y_0 + a' x + b' y + c' z, \\ Z = z_0 + a'' x + b'' y + c'' z. \end{cases}$$

Elle dépendent de douze paramètres ; mais, comme les neuf cosinus sont liés par six relations bien connues, le nombre des paramètres indépendants se réduit à six.

Nous prendrons d'abord les paramètres x_0, y_0, z_0 et nous considérerons ensuite les neuf cosinus comme des fonctions de trois d'entre eux, en posant

$$(2)\qquad b'' = \alpha, \qquad c = \beta, \qquad a' = \gamma.$$

Ce choix est suggéré par les notations ordinaires de la cinématique.

La transformation identique s'obtient en faisant

$$a = b' = c'' = 1, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Différentions les relations fondamentales entre les cosinus et donnons ensuite à ces cosinus les valeurs initiales indiquées ci-dessus, Nous trouvons

$$(da)_0 = (db')_0 = (dc'')_0 = 0,$$
$$(da')_0 + (db)_0 = 0, \qquad (dc)_0 + (da'')_0 = 0, \qquad (dc')_0 + (db'')_0 = 0.$$

Partant de là, nous obtenons pour les valeurs initiales des dérivées des coordonnées X, Y, Z les expressions suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial X}{\partial x_0}\right)_0 = 1, & \left(\dfrac{\partial X}{\partial y_0}\right)_0 = 0, & \left(\dfrac{\partial X}{\partial z_0}\right)_0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial X}{\partial \alpha}\right)_0 = 0, & \left(\dfrac{\partial X}{\partial \beta}\right)_0 = z, & \left(\dfrac{\partial X}{\partial \gamma}\right)_0 = -y, & \dots \end{cases}$$

Les expressions non écrites se déduisent de celles-là par simple permutation circulaire.

Les transformations infinitésimales du groupe sont définies par les valeurs de ces dérivées. On a

$$(4)\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}, & X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}, & X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ X_4 = y\dfrac{\partial f}{\partial z} - z\dfrac{\partial f}{\partial y}, & X_5 = z\dfrac{\partial f}{\partial z} - x\dfrac{\partial f}{\partial z}, & X_6 = x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}. \end{cases}$$

Il est évident que ce groupe n'admet pas d'autres invariants que des constantes pures.

Si l'on envisage simultanément plusieurs points $P_i(x_i, y_i, z_i)$, les transformations infinitésimales deviennent

$$(5)\qquad \begin{cases} X_1 = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ X_4 = \sum'\left(y\dfrac{\partial f}{\partial z} - z\dfrac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nous écrivons seulement une transformation de chaque type.

Pour le prolongement cinématique du groupe le nombre des transformations infinitésimales se trouve porté à douze et comprend les quatre types suivants [1] :

$$(6)\qquad \begin{cases} \overline{X}_1 = \sum' \dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ \overline{X}_4 = \sum'\left[\left(y\dfrac{\partial f}{\partial z} - z\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(y'\dfrac{\partial f}{\partial z'} - z'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)\right], \\ D_1 = \sum' \dfrac{\partial f}{\partial x'}, \\ D_4 = \sum'\left(y\dfrac{\partial f}{\partial z'} - z\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right). \end{cases}$$

4. *Invariants.* — On retrouve facilement dans le groupe euclidien les propriétés générales indiquées par Lie pour les groupes géométriques.

Dans le cas de deux points le groupe initial admet un seul invariant essentiel; le système des six équations obtenues, en égalant à zéro les transformations, se ramène alors, en effet, à cinq équations indépendantes.

Toutes les solutions de ce système se ramènent à des fonctions de la distance.

Si le nombre n des points est supérieur à deux, les six équations

---

(1) J. Le Roux, *Sur les invariants du groupe des mouvements relatifs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 192, 13 avril 1931, p. 871).

sont indépendantes; le nombre des variables est égal à $3n$ et le nombre des invariants indépendants est $3n - 6$. Le nombre des distances des points considérés deux à deux est égal $\frac{n(n-1)}{2}$, mais, sur ce nombre, $3n - 6$ seulement sont indépendantes; elles fournissent un système fondamental d'invariants. Toutes les autres solutions du système sont des fonctions arbitraires de ce système fondamental.

Le prolongement cinématique n'introduit pas d'autres invariants que les dérivées des invariants du groupe initial.

Ces remarques font ressortir immédiatement les propriétés du mouvement qui subsistent indépendamment des systèmes de référence mobiles. Les notions de trajectoires et de vitesses n'ont de sens invariant que pour des systèmes de référence invariablement liés les uns aux autres. Avec la mobilité des systèmes de référence elles prennent un sens tout relatif.

Mais la distance instantanée de deux mobiles est invariante. La configuration instantanée de l'ensemble mobile et la variation de cette configuration sont des faits cinématiques indépendants du système de référence, et ce sont les seuls.

En particulier le chemin parcouru par un mobile dans l'espace n'a pas de sens.

5. *Paramètres d'entraînement et solides de référence.* — L'étude du mouvement relatif en mécanique conduit à comparer les vitesses rapportées successivement à deux systèmes de référence. Les coordonnées x, y, z, étant rapportées à un système S, les vitesses par rapport à ce système ont pour composantes les dérivées x', y', z', le temps t étant considéré comme une variable quelconque, non définie.

Les composantes suivant les axes de S de la vitesse évaluée par rapport à un autre système S_0 sont représentées par les formules bien connues

$$(7)\qquad \begin{cases} V_x = \xi + qz - ry + x', \\ V_y = \eta + rx - pz + y', \\ V_z = \zeta + pq - px + z'. \end{cases}$$

Les paramètres ξ, η, ζ, p, q, r désignent les composantes de la translation et de la rotation d'entraînement du système S par rapport à S_0. Nous les appelons les *paramètres d'entraînement.*

Dans l'étude des groupes généraux on est amené à introduire des paramètres semblables. Quand il y aura lieu de rappeler les formules générales, nous désignerons ces paramètres dans l'ordre ci-dessus par les symboles $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4, \varpi_5, \varpi_6$.

On sait que l'on a

$$
(8) \quad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= a\frac{dx_0}{dt} + a'\frac{dy_0}{dt} + a''\frac{dz_0}{dt},\\
p &= c\,\frac{db}{dt} + c'\,\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = -\left(b\frac{dc}{dt} + b'\frac{dc'}{dt} + b''\frac{dc''}{dt}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Si les paramètres d'entraînement sont connus en fonction de t, on peut déterminer les coordonnées x_0, y_0, z_0 et les cosinus directeurs en fonction de la même variable par un système d'équations différentielles de la forme suivante :

$$
(9) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dx_0}{dt} = a\xi + b\eta + c\zeta,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{da}{dt} + qa'' - ra' = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

A ces relations il faut joiudre en outre les relations entre les cosinus. Dans ces conditions l'intégration du système introduit six constantes arbitraires. Il existe donc une infinité de trièdres de référence correspondant à un système donné de paramètres d'entraînement définis en fonction de t.

Or tous ces trièdres sont invariablement liés les uns aux autres [1]. Inversement, connaissant un trièdre satisfaisant au système différentiel (9), on en déduit la solution la plus générale, représentée par l'ensemble des trièdres invariablement liés au premier et qui lui sont superposables, avec coïncidence des directions positives des axes du même nom.

Nous donnerons le nom de *solide de référence* à l'ensemble des trièdres de référencc satisfaisant à ces conditions.

---

[1] J. LE ROUX, *Principes mathématiques de la Théorie de la Gravitation*, p. 6-7.

Ainsi, à un ensemble de valeurs des paramètres d'entraînement définis en fonction d'une variable t correspond un *solide de référence* constitué par l'ensemble des trièdres invariablement liés à l'un d'entre eux.

Deux trièdres de référence appartenant à deux solides de référence différents sont nécessairement mobiles l'un par rapport à l'autre.

6. *La notion de masse en dynamique.* — A la notion d'*existence propre* du mobile, envisagée en cinématique, la dynamique ajoute une notion nouvelle, celle de *masse* de l'élément mobile. La masse en dynamique est considérée comme un *invariant* de l'élément matériel.

Ainsi, tandis que le point en géométrie n'admet pas d'invariant, l'élément matériel en dynamique en admet un, mais cet invariant n'est pas un invariant de position.

La considération de la masse comme un invariant semble en opposition avec la théorie de la relativité restreinte d'Einstein. En réalité il est facile de constater que cette opposition n'est qu'une question de mots.

Dans la théorie d'Einstein si m_0 désigne la masse au repos, la masse du mobile, en mouvement avec la vitesse v, est de la forme

$$m = m_0 \varphi(v),$$

$\varphi(v)$ désignant une fonction de la vitesse indépendante du mobile.

On constate immédiatement que si l'on considère deux points dont les masses au repos sont respectivement m_0 et m'_0 et dont les masses en mouvement, avec la même vitesse v, sont m et m', on a toujours

$$\frac{m}{m'} = \frac{m_0}{m'_0}.$$

Si donc on a choisi une *masse unité*, le rapport de la masse d'un mobile à la masse unité, dans les mêmes conditions de vitesse, est un invariant afférent à ce mobile et indépendant de la vitesse. C'est à cet invariant que nous donnons le nom de masse. S'il n'y avait qu'un seul mobile ou des mobiles identiques, il n'y aurait pas lieu d'introduire la notion de masse.

La définition d'une quantité physique se ramène en réalité au procédé expérimental qui sert à en déterminer la valeur numérique, soit par une mesure directe, soit par un calcul approprié (1). C'est la définition par les faits d'observation qui doit se substituer à la définition par les mots.

En mathématique, nous avons à dégager de ces faits les propriétés générales qui caractérisent l'égalité et la somme des masses.

La comparaison directe des masses par la pesée fait intervenir les phénomènes de la gravitation. On considère comme égales les masses de deux corps qui se font équilibre par la pesée, et l'on observe que :

1° Deux corps qui se font équilibre en un lieu se font également équilibre en tout autre lieu accessible;

2° Si deux corps A et B font respectivement équilibre à deux autres A′ et B′ la réunion de A et de B fait équilibre à la réunion de A′ et B′, quel que soit d'ailleurs le mode d'association de ces corps entre eux.

Les conditions de la comparaison supposent nécessairement que les corps sont de dimensions restreintes et assez rapprochés les uns des autres.

La traduction mathématique de ces propriétés et leur généralisation nous donne les propriétés suivantes :

Deux éléments matériels de masses égales sont échangeables dans les phénomènes de la gravitation.

La masse d'un ensemble est égale à la somme des masses des éléments composants.

II. — L'énergie cinétique relative et ses transformations infinitésimales.

7. *Énergie cinétique relative.* — Les notions fondamentales que nous avons introduites nous permettent enfin de définir l'énergie cinétique relative d'un ensemble d'éléments. Nous prendrons la définition de la mécanique classique, en observant que nous ne formulons aucune hypothèse ni sur le système de référence, ni sur le choix du temps.

---

(1) J. Le Roux, *La variation de la Masse* (*Acta mathematica*, t. 49, p. 397-405.

Dans l'expression de l'énergie cinétique relative d'un élément

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

nous trouvons :

1° Le facteur m, qui est un invariant propre de l'élément, indépendant du système de référence;

2° Le facteur ds^2, qui est un invariant différentiel du groupe statique; il conserve la même valeur pour tous les systèmes de référence invariablement liés les uns aux autres, mais varie avec le solide de référence;

3° La différentielle dt qui se rapporte actuellement à une variable non désignée et qui pourrait d'ailleurs disparaître de nos calculs, si l'on considérait les différentielles au lieu des dérivées.

L'énergie cinétique relative d'un ensemble est la somme des énergies cinétiques relatives des éléments, *pour un choix donné de la variable t*. En la désignant par T, nous avons donc la formule de la mécanique classique

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}.$$

Dans cette expression, outre les propriétés essentielles de la masse, on observe encore une autre propriété caractéristique : c'est la symétrie par rapport aux éléments mobiles. Chaque élément y figure par quatre nombres, la masse m et les trois coordonnées x, y, z. La fonction T ne change pas quand on permute les éléments d'une manière quelconque : elle admet le groupe symétrique des substitutions des éléments.

8. *Transformations infinitésimales de l'énergie cinétique.* — Appliquons à l'énergie cinétique les transformations infinitésimales définies par les formules (6). Nous commencerons par substituer les variables accentuées x', y', z' aux dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, ce qui donne

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2). \tag{10}$$

Nous avons d'abord, quel que soit l'indice h,

$$\overline{X}_h(T) = 0$$

en vertu de l'invariance de T par les transformations du groupe statique.

Nous trouvons ensuite :

$$(11) \qquad \begin{cases} D_1(T) = \Sigma m x', \\ D_4(T) = \Sigma m (y z' - z y'). \end{cases}$$

On reconnaît immédiatement les expressions des projections de la résultante de translation et du moment résultant des quantités de mouvement de la mécanique classique.

Nous poserons en général :

$$(12) \qquad D_h(T) = T_h.$$

A ces expressions, appliquons de nouveau les mêmes transformations infinitésimales, et posons

$$(13) \qquad D_k(T_h) = T_{hk}.$$

Comme les transformations D_h sont permutables, on a

$$T_{hk} = T_{kh}.$$

Or ces résultats assimilables à des dérivées du second ordre ont aussi une signification intéressante. On a, en effet,

$$(14) \qquad \begin{cases} T_{11} = T_{22} = T_{33} = \Sigma m, \\ T_{23} = T_{31} = T_{12} = 0, \\ T_{44} = \Sigma m (y^2 + z^2), \\ T_{14} = 0, \\ T_{15} = \Sigma m z, \\ T_{16} = - \Sigma m y, \\ T_{45} = - \Sigma m x, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nous aboutissons donc à ce résultat remarquable que la considération de l'énergie cinétique relative nous donne successivement, par l'application des transformations infinitésimales du groupe :

1° La quantité de mouvement résultante et le moment cinétique résultant;

2° La masse totale de l'ensemble, le centre de gravité et les moments d'inertie.

Ces notions qui se présentent, dans la mécanique classique, comme indépendantes et séparées, se rattachent en réalité à une notion unique par l'intermédiaire du groupe de relativité.

9. *Énergie cinétique invariante.* — L'énergie cinétique s'est présentée jusqu'ici avec un caractère essentiellement relatif. Nous pouvons en déduire une forme invariante par l'application d'une méthode générale que j'ai indiquée ailleurs. Dans le cas actuel cette méthode nous conduit à un problème considéré par MM. Levi-Civita et Amaldi.

Déterminer le minimum de l'énergie cinétique relative d'un ensemble mobile (¹).

Soit S un premier système de référence pour lequel l'énergie cinétique est T. Désignons par S_0 un second système qui se déduit du premier par les paramètres d'entraînement ξ, η, ζ, p, q, r. L'énergie cinétique relative de l'ensemble considéré, rapporté à S_0, sera d'après les formules (7)

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2). \tag{15}$$

Nous cherchons à déterminer les paramètres d'entraînement par la condition de rendre minima l'expression de Φ. Nous aurons donc, quel que soit le paramètre d'entraînement ϖ_h,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varpi_h} = 0. \tag{16}$$

Ces équations se ramènent ~~aux~~ deux types suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varpi_1} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \Sigma m V_x = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varpi_4} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial p} = \Sigma m(y V_z - z V_y) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{17}$$

(¹) Levi-Civita et Amaldi, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, 1re Partie, p. 307, 309.

Elles expriment que, dans le mouvement rapporté à S_0, la quantité de mouvement résultante et le moment cinétique résultant sont nuls. Le système S_0 est donc l'un des systèmes envisagés par M. Appell dans une Note *Sur la notion d'axes fixes et de mouvement absolu* ([1]).

Examinons la formation des équations (17).

La fonction Φ est un polynome du second degré non homogène des paramètres d'entraînement. On pourrait la développer par la formule de Mac-Laurin suivant les puissances de ces paramètres. Nous aurions à calculer pour cela les valeurs de la fonction Φ et de ses dérivées partielles premières et secondes pour les valeurs nulles des paramètres.

Désignons ces valeurs par l'indice zéro. Nous avons successivement

$$(18)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0 = T, \qquad \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varpi_h}\right)_0 = D_h(T) = T_h, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \varpi_h \partial \varpi_k}\right)_0 = D_k D_h(T) = T_{hk} = T_{kh}. \end{array} \right.$$

L'expression générale de l'équation (16) prend donc la forme

$$(19)\qquad T_{h1}\varpi_1 + T_{h2}\varpi_2 + \ldots + T_{h6}\varpi_6 + T_h = 0.$$

Le déterminant des équations (19) est du sixième ordre. Nous poserons :

$$(20)\qquad \Delta = \| T_{hk} \|.$$

En tenant compte des valeurs des transformations infinitésimales T_{hk} données par les formules (14) il est facile de vérifier que le déterminant Δ est différent de zéro si l'ellipsoïde d'inertie de l'ensemble est un véritable ellipsoïde.

Dans ces conditions le système (19) admet une solution unique, bien déterminée pour les paramètres ϖ_h.

Calculons l'expression correspondante de l'énergie cinétique minima Φ.

Nous pouvons à cet effet utiliser un artifice couramment employé en géométrie analytique pour la réduction au centre des équations des coniques ou des quadriques.

([1]) *Principes mathématiques de la Théorie de la Gravitation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 166, 1918, p. 518).

Nous rendons homogène, par rapport aux paramètres, le polynome du second degré Φ, en introduisant une septième variable ϖ_7 que nous égalerons ensuite à l'unité. En vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes nous avons alors

$$\Sigma_1^7 \varpi_h \frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_h} = 2\Phi.$$

En tenant compte des équations (19) et faisant $\varpi_7 = 1$ cette relation donne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varpi_1} - 2\Phi = 0$$

ou, en développant,

$$T_1 \varpi_1 + T_2 \varpi_2 + \ldots + T_6 \varpi_6 + 2T - 2\Phi = 0. \tag{21}$$

Éliminons maintenant les paramètres ϖ_h entre les équations (19) et (21); nous trouvons

$$\begin{vmatrix} & & & & & & T_1 \\ & & & & & & T_2 \\ & & & & & & T_3 \\ & & & \Delta & & & T_4 \\ & & & & & & T_5 \\ & & & & & & T_6 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & 2T - 2\Phi \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Désignons par $\Theta(T_h)$ la forme quadratique des quantités T_h définie par la formule suivante :

$$\Theta(T_h) = -\frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} & & & T_1 \\ & & & T_2 \\ & \Delta & & \vdots \\ & & & T_6 \\ T_1 & T_2 & \ldots\ T_6 & 0 \end{vmatrix}. \tag{23}$$

La fonction Θ est une forme quadratique définie positive des transformations infinitésimales premières T_h. Nous l'étudierons plus loin.

L'équation (22), résolue par rapport à Φ, donne

$$\Phi = T - \Theta. \tag{24}$$

L'énergie cinétique minima diffère donc de T par une forme quadratique définie positive Θ des composantes de la quantité de mouvement résultante et du moment cinétique résultant.

D'après un théorème général de la théorie des groupes de relativité la forme Φ annule toutes les transformations infinitésimales du groupe ([1]). C'est donc un invariant différentiel du groupe de relativité.

C'est pourquoi nous lui donnons le nom d'énergie cinétique invariante.

10. *Énergie de déformation et énergie d'entraînement.* — En vertu des conditions d'invariance et des propriétés générales des groupes de relativité, l'énergie cinétique invariante Φ est une fonction des distances mutuelles des éléments mobiles et de leurs dérivées. Si le nombre des éléments considérés est n, celui de leurs distances mutuelles est $\frac{n(n-1)}{2}$, mais le nombre des distances indépendantes se ramène à $3n-6$. Il existe entre les distances $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ relations identiques. Il en résulte que l'expression de l'énergie Φ, en fonction des distances et de leurs dérivées, est susceptible d'une infinité de formes équivalentes. Mais il faut mettre à part la forme symétrique qui ne change pas quand on permute d'une manière quelconque l'ordre des éléments de l'ensemble mobile.

Pour ce qui suit nous aurons simplement à retenir que l'invariant Φ ne dépend que des distances mutuelles et de leurs dérivées, et que, par rapport à ces dérivées, il constitue une forme quadratique essentiellement positive. La condition nécessaire et suffisante pour que Φ s'annule, c'est que ces dérivées soient nulles simultanément.

Si cet invariant est constamment nul l'ensemble se meut sans déformation.

La forme Θ n'est pas un invariant du groupe de relativité, mais son interprétation est nécessaire pour achever de faire connaître la signification de l'invariant Φ.

Considérons de nouveau l'expression de Φ sous forme de polynome

---

([1]) *Les Groupes de Relativité*, *loc. cit.*, p. 141-143.

du second degré des paramètres ϖ_h et désignons par $\Psi(\varpi)$ l'ensemble homogène des termes du second degré

$$\Psi(\varpi) = \frac{1}{2} \sum_{h,k} T_{hk} \varpi_h \varpi_k. \tag{25}$$

On reconnaît immédiatement que la fonction $\Theta(T_h)$ définie par la formule (23) n'est autre que la forme adjointe de la forme $\Psi(\varpi)$, dans laquelle les quantités T_h jouent le rôle de variables contravariantes des paramètres ϖ_h.

Les équations (19) pourraient s'écrire

$$T_h = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varpi_h}. \tag{19'}$$

On en déduit immédiatement, d'après les propriétés bien connues des formes adjointes,

$$\varpi_h = -\frac{\partial \Theta}{\partial T_h}. \tag{26}$$

D'autre part, si l'on remplace dans l'équation (23) les quantités T_h par les valeurs (25), on trouve l'équivalence

$$\Theta(T_h) = \Psi(\varpi_h).$$

En d'autres termes, les formes Θ et Ψ sont équivalentes en vertu des équations (19) ou (25).

Or le polynome $\Psi(\varpi_h)$ se ramène à l'énergie cinétique relative de l'ensemble mobile par rapport au système S_0 dans le cas où les dérivées x', y', z' seraient nulles, c'est-à-dire dans le cas où l'ensemble serait invariablement lié au système S et se trouverait entraîné dans son mouvement par rapport à S_0. Ce mouvement d'entraînement n'altère pas la configuration de l'ensemble.

Si l'on écrit l'équation (24) sous la forme

$$T = \Phi + \Theta, \tag{27}$$

on reconnaît que T se trouve décomposé en deux parties dont la première ne dépend que de la déformation et la seconde, du mouvement d'entraînement.

Nous donnons donc à l'énergie cinétique invariante le nom d'*énergie de déformation de l'ensemble* et au terme complémentaire Θ le nom d'*énergie d'entraînement*.

Nous retrouvons ici une décomposition qui avait été indiquée par Poincaré [1] et que j'ai également considérée d'un autre point de vue à propos de la théorie de la gravitation.

11. *Solide de référence principal.* — Supposons que le mouvement de l'ensemble rapporté à S soit défini par l'expression des coordonnées des éléments en fonction d'une variable quelconque t. On connaît donc, aussi en fonction de t, les valeurs des paramètres d'entraînement ϖ_h définies par les équations (26). Les équations du système (9) permettront ensuite de déterminer en fonction de la variable t les paramètres du groupe de transformations. Nous avons déjà remarqué (n° 5) que tous les trièdres de référence déduits du même système de valeurs des paramètres d'entraînement sont invariablement liés les uns aux autres, et nous avons appelé *solide de référence* l'ensemble de ces trièdres.

Le solide de référence particulier qui correspond aux valeurs (26) des paramètres satisfait à la condition que, dans le mouvement de l'ensemble, rapporté à ce solide, l'énergie cinétique relative est constamment égale au minimum Φ,

Nous lui donnons le nom de *solide de référence principal de l'ensemble* [2].

La considération du solide principal me paraît être l'une des notions les plus essentielles de la mécanique des ensembles. C'est l'une des bases de la théorie de la gravitation.

Il est inutile d'entrer ici dans le détail des propriétés de ce solide. Je renvoie à cet effet aux *Principes mathématiques* déjà cités.

Je signale cependant quelques remarques essentielles. Appelons T_0 l'énergie cinétique relative de l'ensemble par rapport au solide principal.

On a, par les résultats précédents,

$$T_0 = \Phi. \tag{28}$$

---

(1) Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 32.
(2) *Principes mathématiques de la Théorie de la Gravitation*, p. 7.

Cette égalité, toutefois, ne constitue pas une identité. Le premier membre est une forme quadratique définie positive des dérivées des $3n$ coordonnées de l'ensemble; le second membre est exprimable à l'aide de $3n-6$ distances indépendantes et de leurs dérivées.

L'égalité (28) a lieu en vertu des six conditions de définition du solide principal. C'est une simple équivalence.

Les paramètres ϖ_h considérés jusqu'ici représentent le mouvement du système de référence S par rapport au solide principal; les mêmes paramètres changés de signe représenteraient les composantes, suivant les axes de S, de la translation et de la rotation instantanées du mouvement du solide principal par rapport à S.

Il én résulte que l'énergie cinétique d'entraînement de l'ensemble dans le mouvement du solide principal par rapport à S est égale à Θ comme dans le mouvement de S par rapport au solide principal.

Je rappelle également les propriétés suivantes :

1° Le solide principal est indépendant du choix de la variable t qui sert à exprimer les coordonnées;

2° Le centre de gravité est fixe dans le mouvement de l'ensemble rapporté au solide principal, et le moment cinétique résultant est nul.

Cette dernière propriété entraîne une conséquence importante. Aucun mouvement limité à un élément unique de l'ensemble ne peut avoir lieu par rapport au solide principal. En effet, les autres éléments auront nécessairement des quantités de mouvement dont l'ensemble devra équilibrer la quantité de mouvement de l'élément considéré.

Ainsi, dans le mouvement rapporté au solide principal de l'ensemble, il y a une apparence d'actions mutuelles à distance qui se manifeste dans la considération des quantités de mouvement des éléments. Il est évident que cette propriété ne correspond à aucune action physique : elle caractérise simplement le choix du système de référence.

Dans le cas d'un ensemble limité à deux éléments matériels, le solide référence principal n'est pas complètement déterminé. Il y a une infinité de solutions qui se déduisent les unes des autres par une rotation autour de la droite de jonction des deux éléments. Mais l'énergie cinétique minima est déterminée. Si l'on appelle m_1

et m_2 les masses et ρ la distance, on trouve, par un calcul facile,

$$\Phi = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\rho'^2.$$

Le mouvement rapporté à l'un quelconque des solides principaux est un mouvemet rectiligne suivant la droite de jonction des éléments; dans ce mouvement le centre de gravité reste fixe.

C'est évidemment en vertu de cette condition que les quantités de mouvement des deux éléments sont égales et opposées.

12. Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction en mécanique classique s'applique aux forces et se manifeste en dynamique par la quantité d'accélération (produit de la masse par l'accélération), J'ai démontré (¹) que ce principe exprime une propriété du système de référence et non une propriété physique de la matière, et j'ai déterminé tous les systèmes de référence pour lesquels le mouvement semble dû à des actions mutuelles deux à deux égales et directement opposées.

L'ensemble étant rapporté à un trièdre de référence quelconque S on pourra déterminer tout autre solide de référence par les paramètres d'entraînement ξ, η, ζ, p, q, r.

L'énergie cinétique relative par rapport au solide cherché sera de la forme connue

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2).$$

En écrivant que la résultante de translation et le moment résultant des quantités de mouvements par rapport à ce solide sont constants, on a les conditions suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) + q\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right) - r\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + q\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) - r\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Le mouvement de l'ensemble par rapport à S, étant supposé connu,

(¹) *Principes mathématiques de la Théorie de la Gravitation*, Chap. III.

ces équations ne contiennent d'autres inconnues que les paramètres d'entraînement.

Le solide principal donne évidemment une solution; c'est la seule qui soit indépendante du choix de la variable t.

Si les composantes de la rotation sont nulles, on a $\frac{\partial T}{\partial \xi} = \text{const}$. Cette équation et les deux autres semblables expriment que le centre de gravité de l'ensemble est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport au solide cherché. L'uniformité du mouvement est relative à la variable t considérée.

III. — Caractères des lois invariantes.

13. *Conditions d'invariance d'un système d'équations.* — Les propriétés étudiées précédemment subsistent, quelles que soient les lois physiques du mouvement; elles s'appliquent à tous les ensembles mobiles, quelle qu'en soit la composition et quels que soient les mouvements de leurs éléments.

Il reste à étudier les conditions auxquelles doivent satisfaire les lois compatibles avec le principe de relativité.

Toutes les lois exprimables par des relations entre les coordonnées rapportées à un système S devront s'exprimer par des relations semblables entre les coordonnées des mêmes éléments rapportés à tout autre système qui se déduit de S par un mouvement arbitraire.

Dans la théorie des groupes, le problème se formule de la manière suivante : Soient respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ deux systèmes de coordonnées rapportées aux systèmes de référence S_x et S_y qui sont reliés entre eux par les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si l'on suppose que l'expression d'une loi naturelle se formule par un système d'équations

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{29}$$

dans le système S_x, elle devra se formuler dans le système S_y par les équations

$$F_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \tag{29'}$$

Les deux systèmes (29) et (29′) devront donc être équivalents quels que soient les paramètres de liaison a.

On dit alors que le système (29) est invariant par les transformations du groupe considéré ou qu'il admet les transformations du groupe.

Lie a établi les conditions d'invariance d'un système d'équations (1). Les résultats essentiels de cette théorie peuvent être obtenus très simplement de la manière suivante.

L'équivalence des systèmes (29) et (29′) est évidemment assurée si les fonctions F_k sont des invariants ou si les équations considérées se ramènent à des relations entre invariants; mais cette condition n'est pas nécessaire, il y a d'autres solutions.

Dans les équations (29′), considérons les y comme des fonctions des x et des a. Ce système étant vérifié quelles que soient les valeurs des a, il en résulte que les dérivées

$$\frac{\partial F_k(y)}{\partial a_h} = \sum \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial a_h}$$

devront s'annuler en vertu des équations du système. Donnons aux paramètres a_h les valeurs a_h^0 qui correspondent à la transformation identique; la dérivée $\frac{\partial F_k(y)}{\partial x_h}$ a pour limite la transformation infinitésimale

$$X_h F_k(x) = \sum \xi_{hi} \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i}.$$

Donc les équations

$$X_h F_k(x) = 0 \tag{30}$$

sont elles-mêmes des conséquences du système (29).

14. *Changement de variables.* — Effectuons un changement de variables indépendant des paramètres a, en prenant comme nouvelles variables respectivement dans les deux systèmes

$$\begin{array}{llll} u_1(x), & u_2(x), & \ldots, & u_n(x), \\ u_1(y), & u_2(y), & \ldots, & u_n(y). \end{array}$$

---

(1) Lie Engel, Band I, Kap. XIV, p. 222-245.

Les coefficients ξ_{hi} des transformations infinitésimales sont remplacés pour les nouvelles variables par des coefficients semblables

$$\zeta_{hi} = X_h(u_i) \tag{31}$$

et la transformation infinitésimale $X_h(f)$ devient, avec les nouvelles variables,

$$X_h(f) = \sum \zeta_{hi} \frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum X_h(u_i) \frac{\partial f}{\partial u_i}. \tag{32}$$

Supposons maintenant que la matrice des coefficients ξ_{hi} des transformations infinitésimales primitives soit de rang p; il existera alors $n-p$ invariants indépendants, que nous prendrons pour nouvelles variables.

Le nouveau système de variables comprendra en conséquence :

1° p variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sur lesquelles nous ne faisons aucune hypothèse;

2° $n-p$ variables $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_n$, qui seront des invariants du groupe.

L'ensemble sera assujetti à la seule condition que le déterminant fonctionnel des u, par rapport aux x, soit différent de zéro.

15. *Forme canonique.* — La matrice des ξ_{hi}, étant de rang p, nous supposerons que les indices soient rangés dans un ordre tel que le déterminant d'ordre p, déduit de la matrice et occupant dans le tableau le coin supérieur de gauche, soit différent de zéro. Nous le désignerons par δ :

$$\delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1p} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{p1} & \xi_{p2} & \ldots & \xi_{pp} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{33}$$

Écrivons ensuite un déterminant Δ, d'ordre n, constitué de la manière suivante :

1° Les p premières lignes de Δ seront les p premières lignes de la matrice des ξ_{hi};

2° Dans les $n-p$ dernières lignes, tous les éléments des p premières colonnes seront nuls; les $n-p$ dernières colonnes formeront un déterminant dont les éléments de la diagonale principale seront égaux à l'unité et dont les autres éléments seront nuls. On aura donc

$$(34) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1p} & \xi_{1p+1} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2p} & \xi_{2p+1} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \xi_{p1} & \xi_{p2} & \dots & \xi_{pp} & \xi_{pp+1} & \dots & \xi_{pn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

La valeur de Δ se réduit évidemment à celle de δ.

Multiplions maintenant le déterminant Δ par le déterminant fonctionnel des u, par rapport aux x,

$$(35) \qquad \frac{d(u_1, u_2, \dots, u_n)}{d(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \mathrm{J}.$$

En effectuant la multiplication lignes par lignes et tenant compte de l'invariance de celles des nouvelles variables u dont l'indice est supérieur à p, on trouve

$$\Delta . \mathrm{J} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}_1(u_1) & \mathrm{X}_1(u_2) & \dots & \mathrm{X}_1(u_p) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{X}_2(u_1) & \mathrm{X}_2(u_2) & \dots & \mathrm{X}_2(u_p) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & . & . & \dots & . \\ \mathrm{X}_p(u_1) & \mathrm{X}_p(u_2) & \dots & \mathrm{X}_p(u_n) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial u_2}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial u_{p+1}}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial u_{p+2}}{\partial x_{h+1}} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_{p+1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_{p+2}} & \frac{\partial u_2}{\partial x_{p+2}} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x_{p+2}} & \frac{\partial u_{p+1}}{\partial x_{p+2}} & \frac{\partial u_{p+2}}{\partial x_{p+2}} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_{p+1}} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x_n} & \frac{\partial u_{p+1}}{\partial x_n} & \dots\dots & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Ce nouveau déterminant se réduit évidemment au produit du déterminant d'ordre p qui occupe dans le tableau le coin supérieur de gauche par le déterminant d'ordre $n-p$ qui occupe le coin inférieur de droite.

Nous désignerons le premier par δ'; le second se réduit au déterminant fonctionnel des invariants $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_n$ par rapport aux variables $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, dont les indices ne figurent pas dans le déterminant δ.

On a donc l'identité

$$\Delta . J = \delta . J = \delta' \frac{d(u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_n)}{d(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)}. \tag{36}$$

Le premier membre étant différent de zéro, le second l'est aussi.

16. *Systèmes d'équations invariantes.* — Nous sommes maintenant en mesure d'établir les conditions d'invariance du système (29). Les équations de ce système permettent de définir les valeurs d'un certain nombre de variables u en fonction des autres.

Supposons d'abord qu'en portant ces valeurs dans l'expression du déterminant δ' on obtienne un résultat non nul.

En égalant à zéro les p transformations infinitésimales de F_k,

$$Z_h(F_k) = \sum_{i=1}^{i=p} X_h(u_i) \frac{\partial F_k}{\partial u_i} = 0, \tag{37}$$

on obtient un système de p équations linéaires et homogènes par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_i} \qquad (i < p+1).$$

Le déterminant de ce système étant différent de zéro, on a, comme conséquence des équations (29),

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_1} = \frac{\partial F_k}{\partial u_2} = \ldots = \frac{\partial F_k}{\partial u_p} = 0.$$

Le système considéré établit donc des relations entre les seules variables u dont l'indice est supérieur à p, c'est-à-dire entre les invariants du groupe.

Nous appellerons *système régulier* tout système analogue à (29) satisfaisant à cette condition.

Ces conclusions sont en défaut quand les solutions des équations (29) annulent le déterminant δ'.

Dans le changement de variables effectué on aurait pu conserver les p premières $x_1, x_2, \ldots, x_p$ supposées non invariantes, en prenant

$$u_1 = x_1, \qquad u_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad u_p = x_p.$$

On a alors $\delta' = \delta$. Ce déterminant a été supposé non identiquement nul, tant que les variables du système restent indépendantes. Mais il peut arriver que la solution $\delta = 0$ soit une conséquence des équations du système considéré. S'il existe un autre déterminant d'ordre p qui ne s'annule pas dans ces conditions, on le substituera à δ. Notre raisonnement subsiste alors.

Le seul cas singulier est celui où tous les déterminants d'ordre p déduits de la matrice des ξ_{hi} s'annulent en vertu des équations (29). Le rang de la matrice s'abaisse alors à un nombre $p' < p$. Cette propriété se conserve par un changement de variables quelconque et, par conséquent, pour toutes les transformations du groupe considéré.

Considérons inversement l'ensemble des équations obtenues en écrivant que le rang de la matrice s'abaisse de p à p'.

Ce système permettrait de définir un certain nombre des variables u, $u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots, u_{\alpha_3}$ en fonction des autres, $u_{\beta_1}, u_{\beta_2}, u_{\beta_t}$.

Portons ces valeurs dans le système (29). Deux cas peuvent se présenter :

1° Le système (29) est complètement vérifié par les valeurs considérées, auquel cas il exprime simplement l'abaissement du rang de la matrice sans y ajouter aucune condition nouvelle;

2° Après la substitution indiquée, il subsiste dans le système (29) un certain nombre de relations indépendantes entre les variables $u_{\beta_1}, u_{\beta_2}, \ldots$.

Avec les variables restantes, on peut constituer un groupe réduit auquel s'applique le même raisonnement.

On doit, d'ailleurs, observer que l'abaissement du rang de la matrice correspond à une singularité dans l'intégration des équations aux dérivées partielles qui définissent les invariants.

En résumé, tout système d'équations admettant un groupe donné G peut comprendre deux sortes de relations :

1° Les solutions régulières qui se réduisent à des relations entre invariants;

2° Les solutions singulières qui expriment l'abaissement du rang de la matrice des transformations infinitésimales.

Les premières peuvent être arbitraires, les secondes sont entièrement déterminées par la connaissance des transformations infinitésimales du groupe.

Si l'on considère seulement des relations dépendant de constantes arbitraires, de telle manière qu'il soit impossible d'en déduire par élimination des relations indépendantes de ces constantes, les relations de la seconde catégorie se trouvent exclues.

17. *Cas du groupe euclidien.* — Dans le cas du groupe euclidien appliqué à un ensemble de n points, la matrice des transformations infinitésimales comprend six lignes et $3n$ colonnes. Elle est constituée par des suites de 3 colonnes pour chaque élément groupées de la manière suivante :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{matrix}$$

La matrice est en général de rang *six* quand n est supérieur à *deux*.

Pour que le rang s'abaisse à *cinq*, il est nécessaire et suffisant que tous les points considérés soient en ligne droite.

Cette condition peut se formuler à l'aide des invariants. Pour exprimer que trois points A, B, C sont en ligne droite, il suffit d'écrire, en effet, que l'on a $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, et l'on sait que les distances $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ sont des invariants de l'ensemble des trois points relativement au groupe euclidien.

Dans ce cas, les solutions singulières s'expriment comme les solutions régulières par des relations entre invariants.

Donc :

Dans le mouvement d'un ensemble de n éléments, les seules conditions compatibles avec le principe de relativité, auxquelles puissent satisfaire les positions de ces éléments, sont exprimables par des relations entre les distances mutuelles ou, plus généralement, entre les quantités géométriques qui peuvent servir à déterminer la configuration de l'ensemble.

Inversement, il est évident que toute relation entre invariants se conserve par les transformations du groupe.

Mais une telle relation ne traduit une loi physique que si elle se retrouve dans tous les phénomènes du même genre.

Les observations qui précèdent s'appliquent évidemment aux groupes prolongés. En ce qui concerne le prolongement cinématique, il ne peut y avoir d'abaissement du rang de la matrice à moins qu'il ne se produise un abaissement correspondant pour le groupe initial.

IV. — Possibilité d'une forme invariante de la loi de gravitation. Le principe de la moindre action.

18. *Considérations sur la loi de Newton et la loi d'Einstein.* — Nous avons déterminé les conditions imposées aux lois du mouvement par le principe de relativité. Il s'agit maintenant de trouver parmi les lois satisfaisant à ces conditions celles qui représentent les phénomènes observés. Examinons d'abord les hypothèses actuelles.

La mécanique classique formule la loi de l'inertie comme la loi fondamentale de la dynamique.

D'après cette loi le mouvement d'un élément isolé devrait être rectiligne et uniforme.

Du point de vue de la relativité la loi de l'inertie, ainsi interprétée, n'a pas de sens. Le mouvement ou le repos d'un élément isolé n'existe pas. L'élément peut être en repos par rapport à certains systèmes de référence, et en mouvement par rapport à d'autres; la trajectoire varie de forme suivant le mouvement du système de référence; le caractère uniforme ou varié du mouvement dépend à la fois du système de référence géométrique et du mode de repérage du temps.

Si l'on fait intervenir d'autres éléments pour définir les repères, la loi que l'on formule ne s'applique plus à un élément isolé.

La loi de gravitation de Newton fait intervenir deux éléments et l'on admet que ces éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance.

La loi de Newton, pas plus que le principe de l'inertie, n'est pas compatible avec le principe de relativité.

En effet un ensemble de deux éléments n'admet qu'un seul invariant de position, c'est la distance, ou une fonction quelconque de la distance. La seule loi que l'on puisse exprimer par une équation c'est que la distance est constante. Il existe alors des systèmes de référence pour lesquels l'ensemble est en repos.

Soit ρ la distance; en prolongeant le groupe au premier ordre, on introduit un nouvel invariant $\rho' = \frac{d\rho}{dt}$, t étant paramètre quelconque. Une relation entre ρ et $\frac{d\rho}{dt}$,

$$\frac{d\rho}{dt} = \varphi(\rho),$$

définit le paramètre t en fonction de l'invariant ρ; elle ne fournit aucune propriété du mouvement.

En exprimant toutefois que l'invariant t, ainsi défini, procède constamment par valeurs croissantes, on formule une loi de succession des valeurs de ρ.

Mais il est impossible d'aller plus loin.

La loi de Newton ne prend un sens déterminé que par rapport à un solide de référence et à un temps, définis, l'un et l'autre, par des éléments extérieurs à l'ensemble des deux éléments. Elle n'exprime pas une propriété afférente à cet ensemble considéré isolément.

La loi de gravitation d'Einstein rapproche dans une même formule l'inertie et la gravitation proprement dite. Mais cette loi est également incompatible avec le principe de relativité. Il est évident en effet que l'expression de la loi d'Einstein n'est pas valable pour des systèmes de référence arbitrairement mobiles; elle suppose, comme la loi de Newton, un solide de référence déterminé et un temps déterminé.

Elle consiste essentiellement, au point de vue mathématique, à représenter le mouvement d'un point par une géodésique d'une forme quadratique de différentielles à quatre variables, x_1, x_2, x_3, x_4.

Soit $F(x, dx)$ la forme considérée. Un changement de variables transforme la fonction F en une autre fonction $\Phi(y, dy)$. Les géodésiques se déduisent de Φ par des formules semblables à celles qui s'appliqueraient à la forme F. Mais les relations qu'on en déduit entre les variables y ne se déduisent pas par une simple transposition de celles qui concernent les variables x. La forme $\Phi(y, dy)$ diffère de $F(y, dy)$. Pour que la loi d'Einstein fût compatible avec le principe de relativité, il faudrait que la forme considérée conservât la même expression pour tous les systèmes de référence qui se déduisent les uns des autres par un mouvement arbitraire, et que l'on eût, par conséquent,

$$F(x, dx) = F(y, dy).$$

En d'autres termes, il faudrait que $F(x, dx)$ fût un invariant du groupe.

Pour déterminer F on s'est servi de relations entre les invariants de la forme, mais on a omis d'exprimer que la forme elle-même est un invariant du groupe des changements des systèmes de référence mobiles.

D'ailleurs tout mouvement d'un point, représentable par la loi d'Einstein, peut également se représenter par la loi de Newton pour un autre système de référence et un autre choix du temps.

Tous les mouvements d'un ensemble de deux éléments dans lesquels la distance présente la même succession de valeurs sont réductibles les uns aux autres par un changement de repères. On peut les considérer comme des aspects différents d'un même mouvement.

19. *Le Principe de la moindre action sous la forme invariante.* — Le principe de la moindre action de Maupertuis a été mis par Jacobi (1) sous une forme indépendante du temps, et M. Darboux (2) en a déduit

---

(1) C. G. J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, 1866, p. 43 et suiv.
(2) Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, t. II, Chap. VII et VIII.

un parallélisme intéressant entre le problème des géodésiques et le problème général de la mécanique des ensembles.

Une légère modification de forme nous permet de passer de l'*action relative* à l'*action invariante*.

Sous la forme primitive, le principe de Maupertuis exprime que parmi les mouvements possibles admettant la même force vive

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = (U + h);$$

les mouvements naturels sont ceux pour lesquels l'intégrale

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \Sigma m v \, ds \tag{38}$$

est minima.

Dans ces formules, U désigne la fonction des forces, P_1 et P_2 deux positions données de l'ensemble mobile.

En remplaçant v par sa valeur $\frac{ds}{dt}$, on a

$$dt^2 = \frac{\Sigma m \, ds^2}{2(U + h)} \tag{39}$$

et

$$\Sigma m v \, ds = \frac{\Sigma m \, ds^2}{dt} = \sqrt{2(U + h)}\sqrt{\Sigma m \, ds^2}.$$

L'intégrale A prend alors la forme de Jacobi

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{2(U + h)}\sqrt{\Sigma m \, ds^2}. \tag{40}$$

L'élimination du temps constitue un premier pas dans la voie de la relativité par la suppression du repérage correspondant.

Mais le résultat restant dépend encore du système de référence géométrique par le facteur $\sqrt{\Sigma m \, ds^2}$ et par la forme de la fonction U.

Pour arriver à une forme invariante il suffira d'astreindre la fonction U à être elle-même invariante, et de remplacer le facteur différentiel $\sqrt{\Sigma m \, ds^2}$ par le facteur correspondant déduit de la considération de l'énergie cinétique invariante. L'expression de Φ définie par l'équation (24) est une forme quadratique des dérivées des coordonnées x', y', z'. En remplaçant ces dérivées par les différentielles correspondantes, nous obtenons une forme quadratique de différentielles $\Phi(dx)$.

Nous poserons :

$$d\sigma^2 = 2\Phi(dx),$$

et nous substituerons à l'intégrale de Jacobi l'intégrale

$$B = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{2(U+h)}\, d\sigma. \tag{41}$$

L'intégrale B est entièrement indépendante du système de référence. Nous lui donnerons le nom *d'action invariante*.

L'élément d'intégrale étant exprimé à l'aide des coordonnées et de leurs différentielles, les conditions de minimum s'obtiennent en égalant à zéro la variation première

$$\sum \left[d\frac{\partial}{\partial\, dx}\left(\sqrt{2(U+h)}\, d\sigma\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2(U+h)}\, d\sigma\right)\right]\delta x = 0, \tag{42}$$

la somme Σ s'étendant à toutes les coordonnées de l'ensemble mobile. Si les variations δx ne sont assujetties à aucune liaison, le coefficient de chacune d'elles devra être nul ; dans le cas contraire l'équation (42) devra être vérifiée en vertu des liaisons.

La forme de l'équation (42) subsiste quand on effectue sur les variables une transformation quelconque suivant la méthode de Lagrange.

Introduisons maintenant un paramètre t défini par la formule

$$dt = \frac{d\sigma}{\sqrt{2(U+h)}}. \tag{43}$$

La variable t est un invariant du groupe de relativité. Prenons-la comme variable indépendante et reconstituons de nouveau avec cette variable la forme de dérivées Φ, dans laquelle la variable indépendante a été jusqu'ici laissée indéfinie

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2. \tag{44}$$

L'équation (42) se ramène alors à la forme ordinaire des équations de Lagrange quand on divisa tous les termes par dt

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial x'} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \right] \delta x = 0. \tag{45}$$

Nous donnerons à cette variable t le nom de *temps propre* de l'ensemble mobile.

On peut considérer le temps propre comme une variable canonique, permettant de ramener à la forme de Lagrange les équations différentielles qui correspondent au minimum de l'action invariante. Nous ne pouvons pas *a priori* affirmer que cette variable ait un rapport défini avec le temps de la mécanique classique.

20. *Propriétés de l'action invariante.* — L'action invariante ne définit pas le mouvement par rapport à un système de référence, elle détermine seulement la déformation de l'ensemble.

Les équations différentielles déduites de l'équation (45) sont en effet toujours en nombre inférieur à celui des coordonnées indépendantes.

Si l'ensemble est entièrement libre et comprend n éléments, les coordonnées indépendantes sont au nombre de $3n$ et le nombre des équations déduites de (45) est aussi égal à $3n$. Mais, en vertu de l'invariance de la fonction U et de la forme Φ, ces équations peuvent s'exprimer à l'aide des invariants du groupe et de leurs dérivées. Le nombre des invariants indépendants étant égal à $3n-6$, celui des équations différentielles indépendantes devra également se réduire à $3n-6$.

Il est d'ailleurs facile de vérifier qu'il existe entre ces équations différentielles six relations identiques. En effet, s'il existe des liaisons, ces liaisons elles-mêmes devront s'exprimer par des relations invariantes par rapport au groupe de relativité. On pourra donc dans l'équation (45) donner aux variations δx_i les valeurs particulières qui correspondent aux variations infiniment petites dues à la variation des paramètres du groupe.

Posons, en conséquence,

$$\delta x_i = \xi_{hi}\, \delta a_h,$$

et supprimons le facteur commun δa_h.

Nous poserons, en outre,

$$\frac{d\xi_{hi}}{dt} = \xi'_{hi},$$

et nous remarquons que l'on a

$$\xi_{hi}\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial x'_i} = \frac{d}{dt}\left(\xi_{hi}\frac{\partial\Phi}{\partial x'_i}\right) - \xi'_{hi}\frac{\partial\Phi}{\partial x'_i}.$$

Rappelant enfin les notations de la théorie des groupes :

$$\sum_i \xi_{hi}\frac{\partial U}{\partial x_i} = X_h(U),$$

$$\Sigma\left(\xi_{hi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \xi'_{hi}\frac{\partial\Phi}{\partial x'_i}\right) = \overline{X}_h(\Phi),$$

$$\Sigma\xi_{hi}\frac{\partial\Phi}{\partial x'_i} = D_h(\Phi),$$

nous déduisons de l'équation (45) le résultat suivant :

$$\frac{d}{dt}D_h(\Phi) - \overline{X}_h(\Phi) - X_h(U) = 0. \tag{46}$$

Or ce résultat se réduit à une identité en vertu de l'invariance de Φ et de U.

Les identités (46) sont au nombre de six, correspondant aux six transformations infinitésimales du groupe.

L'existence de ces relations identiques met en évidence un des caractères essentiels du principe de relativité. Une loi de mouvement compatible avec le principe de relativité ne définit pas complètement tous les aspects du phénomène rapporté à un système de référence particulier. Elle détermine seulement les propriétés communes qui subsistent quel que soit le système de référence.

21. *Cas du système de référence principal.* — Considérons un mouvement satisfaisant au principe de la moindre action sous la forme jacobienne, la fonction U étant supposée invariante par les transformations du groupe.

En désignant par dS^2 la forme de différentielles $\Sigma m\, ds^2$ et en prenant pour variable indépendante la variable t définie par l'égalité

$$dt = \frac{dS}{\sqrt{2(U+h)}};$$

on met sous la forme de Lagrange les équations différentielles définissant le minimum :

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial x'} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \right] \delta x = 0.$$

Une transformation analogue à celle qui nous a donné l'identité (46) nous donne ici l'équation

$$(47) \qquad \frac{d}{dt} D_h(T) - \overline{X_h}(T) - X_h(U) = 0,$$

T étant un invariant du prolongement statique, on a

$$X_h(T) = 0,$$

mais la transformée $D_h(T)$ n'est pas identiquement nulle.

Tenant compte de l'invariance de U, l'équation (47) se réduit donc à

$$(48) \qquad \frac{d}{dt} D_h(T) = 0.$$

On en tire, en désignant par c_h une constante arbitraire,

$$(49) \qquad D_h(T) = c_h.$$

Supposons qu'à un instant quelconque du mouvement on ait $D_h(T) = 0$; en vertu de l'équation (49) la même condition subsistera pendant toute la durée du mouvement. Si elle a lieu, pour toutes les valeurs de h, le système de référence considéré appartient au solide de référence principal.

Dans ce cas l'énergie cinétique relative est équivalente à l'énergie cinétique invariante et il en est de même des actions A et B.

Nous arrivons donc à l'importante proposition suivante :

Si le principe de la moindre action, sous la forme invariante s'applique au mouvement d'un ensemble, il existe un solide de référence tel que le mouvement rapporté à ce solide satisfait également au principe de la *moindre action sous la forme jacobienne, avec la condition que les six constantes d'intégration des quantités de mouvement et des moments cinétiques soient nulles.*

La réciproque a également lieu :

Si le principe de la moindre action sous la forme jacobienne est applicable, avec la condition énoncée pour les constantes, il s'applique également sous la forme invariante, valable quel que soit le système de référence.

V. — Application à l'Univers réel.

22. La proposition que nous avons obtenue au chapitre précédent est en relation évidente avec les caractères généraux des mouvements observés dans l'univers réel.

Dans les limites de nos constatations, le principe de la moindre action sous la forme jacobienne s'applique aux mouvements des astres, rapportés au système de référence de la Mécanique céleste.

Mais, si nous nous bornons au système solaire, nous constatons que le solide principal de l'ensemble est en rotation par rapport au système de référence auquel s'applique le principe de la moindre action.

Si au contraire nous étendons de plus en plus le domaine de nos observations, nous devons tenir compte du fait que la rotation du système de référence par rapport aux astres éloignés est pratiquement nulle.

Nous sommes donc amenés à rechercher s'il n'y a pas coïncidence entre le système de référence de la Mécanique céleste et le solide principal de cet ensemble très étendu, embrassant une portion de plus en plus considérable de l'univers observable.

23. *Rotation.* — Prenons un des trièdres de référence de la Mécanique céleste et considérons la matière intérieure à une surface convexe Σ' de dimensions aussi grandes qu'on le voudra dans toutes les directions.

Nous supposerons qu'à l'instant considéré l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de gravité de l'ensemble et que les axes de coordonnées soient les axes principaux d'inertie. Le temps t sera celui de la Mécanique céleste.

L'expression de l'énergie d'entraînement Θ définie par la formule (23) prendra alors la forme suivante, où M désigne la masse totale et A, B, C les moments d'inertie principaux :

$$(50) \qquad \Theta = \frac{1}{2}\left(\frac{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}{M} + \frac{T_4^2}{A} + \frac{T_5^2}{B} + \frac{T_6^2}{C}\right).$$

Les composantes de la rotation du système de référence, par rapport au solide principal, deviennent par les formules (26) :

$$p = \varpi_4 = -\frac{T_4}{A}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

On a, d'ailleurs,

$$T_4 = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$

ou, en prenant des coordonnées polaires ρ et θ dans le plan YOZ,

$$T_4 = \sum m\rho^2\frac{d\theta}{dt}.$$

L'observation révèle que, pour les astres très éloignés, la vitesse angulaire apparente $\frac{d\theta}{dt}$ est négligeable, et qu'elle n'a une valeur sensible que pour les astres rapprochés.

Décomposons, d'après cela, l'ensemble total en deux portions par une surface intérieure Σ_1 homothétique à Σ par rapport à l'origine. Nous désignerons par E_1 la portion intérieure à Σ_1 et, par E_2 la portion comprise entre Σ_1 et Σ.

Le moment d'inertie total A se trouvera lui-même décomposé en deux parties correspondantes A_1 et A_2.

Nous supposerons la surface Σ_1 assez étendue pour que la vitesse angulaire des éléments compris entre Σ_1 et Σ_2 soit inférieure à un nombre ε, tandis qu'à l'intérieur de Σ_1 cette vitesse angulaire admette une valeur moyenne ω telle que l'on ait

$$\sum{}' \rho^2\frac{d\theta}{dt} = A_1\omega$$

le symbole Σ' désignant une somme étendue à tous les éléments de l'ensemble intérieurs à Σ'.

On aura, dans ces conditions,

$$|T_4| < A_1\omega + A_2\varepsilon,$$

d'où

$$(51)\qquad |p| < |\omega| \frac{A_1}{A} + \varepsilon \frac{A_2}{A}.$$

Les deux termes du second membre prennent des valeurs très petites, le premier à cause du facteur $\frac{A_1}{A}$ et le second à cause du facteur ε.

Il n'est pas possible de calculer pour ces nombres des valeurs précises, mais on peut se faire une idée de l'ordre de petitesse que peut atteindre le rapport $\frac{A_1}{A}$ en observant que, pour une répartition uniforme de la matière, le rapport des moments d'inertie est égal à la cinquième puissance du rapport d'homothétie. Par exemple si l'on prend pour Σ_1 une sphère dont le rayon soit égal à une année de lumière et pour Σ une autre sphère de rayon mille fois plus grand, le rapport $\frac{A_1}{A}$ serait de l'ordre $\frac{1}{10^{15}}$. L'observation de la répartition des astres nous permet de conclure que la limite définie par l'inégalité (51) est de l'ordre des erreurs d'observation, et qu'on peut la considérer comme pratiquement nulle.

Ainsi la coïncidence d'orientation entre le solide principal de l'ensemble et le solide de référence de la mécanique classique se trouve vérifiée par la discussion des observations. Les deux solides ne peuvent différer que par une translation.

24. *Translation.* — Les équations du mouvement de la Mécanique céleste étant mises sous la forme

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

se conservent identiquement lorsqu'on fait subir aux axes de coordonnées une translation rectiligne et uniforme, la fonction U restant elle-même inaltérée par une translation.

Il y a donc un ensemble de solides de référence définis par cette relation. Parmi ces solides il y en a un qui se trouve lié invariablement au centre de gravité.

C'est le solide principal de référence de l'ensemble.

25. *Forme invariante de la loi de gravitation.* — Les équations du mouvement admettent l'intégrale des forces vives

$$\frac{1}{2}\sum m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \mathrm{U} + h.$$

La constante h varie suivant le mouvement de translation uniforme du solide de référence. Nous désignerons par h_0 celle qui correspond au solide principal.

Le mouvement par rapport au solide principal sera alors défini par les conditions de minimum de l'intégrale

$$\int \sqrt{2(\mathrm{U}+h_0)}\sqrt{\Sigma m\, ds^2}$$

jointes aux conditions initiales relatives aux quantités de mouvement et aux moments cinétiques.

Et, d'autre part, les conditions de minimum de l'intégrale invariante

$$\int \sqrt{2(\mathrm{U}+h_0)\, d\sigma}$$

exprimeront les propriétés communes à toutes les formes du même mouvement, rapporté à des systèmes de référence arbitrairement mobiles, se déduisant les uns des autres par des mouvements euclidiens.

En d'autres termes, le principe de la moindre action sous la forme invariante définit la déformation continue de l'ensemble quels que soient les axes auxquels il est rapporté.

Sous cette forme le caractère invariant du résultat est tout intuitif.

Le temps canonique de la Mécanique céleste défini par la formule

$$dt^2 = \frac{\Sigma m\, ds^2}{2(\mathrm{U}+h_0)}$$

dans le mouvement rapporté, au solide principal, et le temps défini semblablement par la formule invariante

$$dt^2 = \frac{d\sigma^2}{2(U - h_0)}$$

sont identiques.

26. *Forme de la fonction* U. — Nous n avons fait jusqu'ici sur la fonction U aucune hypothèse en dehors de l'invariance par rapport au groupe euclidien.

En vertu de cette invariance la fonction ne peut dépendre que des distances mutuelles des éléments.

Pour retrouver complètement les résultats de la mécanique classique, il suffit de prendre

$$U = f \sum \frac{m_i m_k}{r_{i_k}},$$

f désignant un coefficient constant, m_i. m_u les masses de deux éléments, r_{i_k} leur distance.

Le coefficient f est arbitraire; une variation de cette constante correspond à un changement dans les unités de temps ou de masse.

En tenant compte de cette variation et du changement d'origine, on vérifie que toutes les déterminations possibles du temps invariant sont des fonctions linéaires de l'une quelconque d'entre elles.

La forme de la fonction U n'est pas basée uniquement sur les résultats de l'observation.

On trouvera dans les *Principes mathématiques de la Théorie de la Gravitation* des propriétés théoriques qui la distinguent de toutes les autres.

On peut y ajouter encore les suivantes ;

1° La fonction U admet le groupe symétrique des substitutions des éléments.

2° Le système des équations aux dérivées partielles définissant la fonction U,

$$\Delta_i(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z_i^2} = 0.$$

admet lui-même le groupe des transformations euclidiennes.

27. *Caractère synthétique de la loi de gravitation.* — Dans le calcul de la fonction U comme dans celui de l'invariant différentiel $d\sigma$ on doit

considérer en principe tous les éléments matériels composant l'univers observable.

La loi de gravitation exprime donc une propriété synthétique s'appliquant à l'ensemble de l'univers observable et non une résultante d'actions individuelles séparées et indépendantes. Le point de vue synthétique de la théorie de la relativité s'oppose ainsi au point de vue analytique de la mécanique classique. Cependant une discussion attentive aurait également conduit la mécanique de Newton au concept synthétique.

Les équations du mouvement par rapport au solide principal sont de la même forme que celles du mouvement absolu de la mécanique classique

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Elles contiennent au second membre des termes dépendant de tous les éléments, même les plus éloignés. Mais ces termes y figurent sous la forme additive, de sorte que l'influence de l'ensemble sur le mouvement de l'un des éléments semble se présenter comme une résultante d'actions individuelles, qui sont uniquement des actions d'accélérations. Chacune de ces actions aurait son existence propre et se trouverait définie indépendamment des autres. Si l'on adjoignait d'autres éléments à l'ensemble, la seule modification des équations serait l'addition de nouveaux termes au second membre.

Ces remarques justifient en apparence le point de vue de la mécanique classique.

Mais observons maintenant que le système de référence est défini par les propriétés de l'ensemble lui-même et qu'il en est de même du temps, et que d'autre part le solide principal d'une fraction d'un ensemble diffère en principe de celui de l'ensemble total.

Nous en conclurons que l'addition de nouveaux éléments aurait pour effet de changer le solide de référence et le temps auxquels se rapporte la forme canonique des équations du mouvement.

Cette variation du solide de référence présente un caractère essentiellement synthétique par rapport à l'ensemble.

En fait dans la mécanique classique les astres éloignés servent pour la détermination du système de référence et du temps et les astres rapprochés pour le calcul de l'accélération. On obtient ainsi une représentation approchée du mouvement rapporté à un système de référence canonique.

Le nombre des éléments qui interviennent dans les observations et dans les calculs effectifs est nécessairement limité; ces éléments sont choisis de manière à approcher le plus possible des résultats théoriques.

Le caractère synthétique de la gravitation, le fait qu'il est impossible de la considérer comme une superposition d'effets semblables, mais distincts et d'origines diverses, rend peu probable l'existence d'une propagation du phénomène.

28. *Relation entre la théorie classique et la théorie déduite du principe de la relativité.*

Il existe une différence profonde, du point de vue des principes, entre la théorie classique et la théorie relativiste de la gravitation. Nous venons de signaler le caractère analytique de l'une et le caractère synthétique de l'autre.

Mais avec des points de départ différents elles aboutissent à des résultats identiques, en ce sens que les propriétés définies par la loi invariante se retrouvent, associées à d'autres propriétés spéciales dues au système de référence, dans le mouvement que la mécanique classique qualifie de mouvement absolu.

Nous n'aboutissons donc pas à une loi nouvelle, nous dégageons simplement des circonstances accessoires les caractères physiques proprement dits que la mécanique classique nous présente noyés dans des contingences étrangères au fait essentiel.

La loi de l'attraction inversement proportionnelle au carré de la distance avait paru, au début, absurde à Newton lui-même, qui se refusait à y voir autre chose qu'une apparence inexpliquée. Les objections de la théorie de la relativité seraient d'un autre ordre. La loi d'action mutuelle à distance paraît dénuée de sens en tant que réalité physique, mais l'existence de systèmes de référence, pour lesquels il existe une apparence d'actions mutuelles est un fait de nécessité logique.

L'existence du solide de référence principal explique ainsi certaines singularités des principes de la mécanique classique.

La notion de force n'est pas intervenue dans nos recherches. Cette notion paraît être surtout d'origine statique. Comme nous avions pour but d'exprimer sous forme invariante une loi de mouvement, nous n'avons pas eu à nous en occuper.

Au point de vue formel la notion de force telle qu'elle intervient en mécanique classique ne présente rien d'illogique. Au point de vue de la relativité elle ne correspond pas à un invariant.

La définition de la force se rattache au principe de l'inertie; mais le principe de l'inertie ne se sépare pas de la loi de gravitation.

La solidarité des éléments de l'univers se manifeste dans un mouvement rectiligne et uniforme aussi bien que dans tout autre mouvement, si l'on observe que le système de référence et le temps se trouvent définis par l'ensemble de ces éléments.

Le principe de la moindre action sous la forme invariante résume à la fois le principe de l'inertie et la loi de gravitation. Si la fonction U se réduisait à une constante, tous les mouvements des éléments par rapport au solide principal seraient rectilignes et uniformes. Mais un univers ainsi constitué serait un univers instable (1).

Parmi les propriétés qui caractérisent la forme newtonienne de la fonction U se trouve en effet celle de n'être pas incompatible avec la stabilité de l'ensemble.

(1) *Principes mathématiques de la Théorie de la Gravitation*, p. 53.