Émile Picard

Quelques remarques historiques sur les fonctions analytiques uniformes d'une variable

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 43 (1926), p. 363-368

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1926_3_43__363_0>

QUELQUES REMARQUES HISTORIQUES

SUR

LES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES

D'UNE VARIABLE

PAR M. ÉMILE PICARD

Je présente ici quelques remarques d'un caractère purement historique sur mes travaux déjà anciens, concernant la théorie des fonctions uniformes d'une variable, qui se rattachent à un même ordre de considérations.

1. Dans mon Mémoire des *Annales de l'École Normale* de 1880, j'ai démontré un théorème sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé ([1]). On sait que j'ai utilisé dans ces questions certaines transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques. J'ai à plusieurs reprises insisté sur l'utilité de l'introduction de telles transcendantes dans des études de ce genre. J'écrivais notamment dans ma Notice sur mes travaux scientifiques ([2]) : « Les démonstrations auxquelles on est ainsi conduit peuvent d'abord paraître détournées; je les crois au contraire aussi naturelles que possible. Ainsi, pour ce qui concerne le premier théorème sur les fonctions entières, l'inversion du rapport des périodes de l'intégrale elliptique, considéré comme dépendant du module, donne naissance à une fonction uniforme, définie seulement dans une moitié du plan, et ne pouvant prendre ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*; il est donc

([1]) Dans mon *Traité d'Analyse* on trouve deux démonstrations de ce théorème. Ma démonstration primitive est reproduite dans le Tome III (2^e édition, p. 365). Dans le Tome II (3^e édition, p. 269), on trouve une autre démonstration due à M. Montel.

([2]) *Notice sur les travaux scientifiques de M.* ÉMILE PICARD, 1889 (p. 47).

naturel de recourir à cette fonction qui offre un exemple de la circonstance dont on se propose précisément de démontrer l'impossibilité pour les fonctions entières. »

Le développement des théories auxquelles a donné naissance mon Mémoire de 1880 a montré combien cette idée était juste. Chaque fois que dans ces questions on a voulu avoir une limite précise pour certaines déterminations, il a fallu recourir à des transcendantes de la nature de celles que j'avais utilisées. Je pense ici aux travaux de Hurwitz, de M. Landau et de M. Carathéodory dans cet ordre d'idées.

2. Passons maintenant à une autre proposition générale, relative aux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique. J'ai établi (1) que, *si entre deux fonctions analytiques, uniformes autour d'un point qui est pour elles un point singulier essentiel isolé, existe une relation algébrique, le genre de cette relation ne peut dépasser l'unité.*

Il suit de là que les points singuliers essentiels isolés d'une fonction uniforme doivent former un ensemble parfait (*eine perfecte menge*) ou former des lignes singulières. Le théorème qui vient d'être énoncé a précisément servi à Poincaré pour montrer qu'il existait des fonctions uniformes n'ayant pas de lignes singulières et ne possédant pas de points singuliers essentiels isolés; un tel exemple est fourni par les fonctions fuchsiennes de genre supérieur à l'unité et existant dans tout le plan (2).

Le théorème qui nous occupe permet aussi de répondre à une question qui se posait d'elle-même après les célèbres recherches de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes : Peut-on espérer d'exprimer d'une manière plus simple que Poincaré les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique par des fonctions uniformes d'un paramètre?

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VII, 1883, et *Acta mathematica*, t. 11, 1887, p. 1

(2) Poincaré écrit dans sa Notice sur ses travaux scientifiques (1886, p. 36) : « J'ai donné pour la première fois un exemple de fonctions, ayant un nombre infini de points singuliers, n'ayant pas de lignes singulières et n'ayant cependant pas de points singuliers isolés; ce sont les fonctions fuchsiennes qui existent dans tout le plan. En appliquant un théorème de M. Picard, on peut voir en effet que ces fonctions ne peuvent avoir de points singuliers isolés. »

La réponse est négative, je veux dire que ces fonctions devront avoir des lignes singulières ou des ensembles parfaits de points singuliers (le genre bien entendu étant supérieur à *un*).

J'ai donné du théorème énoncé plus haut deux démonstrations essentiellement différentes : la première s'appuie sur la théorie des fonctions fuchsiennes. La seconde consiste à démontrer d'abord le théorème pour une courbe hyperelliptique; on y parvient en s'appuyant seulement sur la proposition, rappelée plus haut, relative à la valeur d'une fonction dans le voisinage d'un point singulier essentiel. On passe du cas hyperelliptique au cas général en faisant correspondre à la courbe algébrique envisagée une courbe hyperelliptique pour laquelle les coordonnées d'un point sont fonctions rationnelles des coordonnées d'un point de la courbe donnée.

Des deux démonstrations précédentes, la seconde ne faisant pas intervenir la théorie des fonctions fuchsiennes a évidemment un caractère plus élémentaire. Elle est cependant beaucoup plus artificielle; comme je l'ai dit ci-dessus dans un cas analogue, il paraît plus naturel, pour démontrer l'impossibilité en question, de s'adresser précisément aux fonctions uniformes réalisant cette expression des coordonnées d'un point d'une courbe algébrique à l'aide d'un paramètre.

3. La seconde démonstration que nous venons de rappeler accuse une certaine dépendance entre les deux théorèmes des paragraphes précédents. Dans une Note très intéressante [1], M. Deirmendjian a rattaché plus intimement les deux propositions l'une à l'autre. Me plaçant à son point de vue, je reproduis la démonstration d'un théorème sur les fonctions entières, telle que je l'ai donnée dans mon cours en 1924. Nous allons établir que, *si pour une fonction entière* $G(z)$ *il existe deux fonctions rationnelles distinctes* $P(z)$ *et* $Q(z)$, *telles que les deux équations*

$$G(z) = P(z), \qquad G(z) = Q(z)$$

n'aient qu'un nombre limité de racines, $G(z)$ *est un polynome.*

---

[1] DERMENDJIAN, *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 897.

On aura nécessairement, en effet, dans le domaine du point ∞, c'est-à-dire à l'extérieur d'un cercle Γ de rayon suffisamment grand,

$$G(z) - P(z) = z^p e^{S(z)},$$
$$G(z) - Q(z) = z^q e^{\Sigma(z)},$$

p et q étant des entiers positifs ou négatifs, et $S(z)$, ainsi que $\Sigma(z)$, étant des séries de Laurent de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n z^n.$$

Des deux relations précédentes on déduit, en retranchant,

$$\frac{z^q e^{\Sigma(z)}}{P(z) - Q(z)} - \frac{z^p e^{S(z)}}{P(z) - Q(z)} = 1.$$

On peut supposer que $P(z) - Q(z)$ n'a pas de racine en dehors de Γ. Si nous posons alors

$$z = u^4, \qquad x^4 = \frac{u^{4q} e^{\Sigma(u^4)}}{P(u^4) - Q(u^4)}, \qquad y^4 = \frac{u^{4p} e^{S(u^4)}}{P(u^4) - Q(u^4)},$$

x et y sont des fonctions uniformes de u dans le domaine de $u = \infty$, et elles satisfont à la relation

$$x^4 - y^4 = 1.$$

Cette courbe est du genre *trois*; donc, d'après le théorème du paragraphe 2, $u = \infty$ ne peut être un point singulier essentiel pour x et y. Par suite dans $S(z)$ et $\Sigma(z)$, il n'y a pas de puissances positives de z. On en conclut que $z = \infty$ n'est pas un point singulier essentiel pour $G(z)$, *qui est par suite un polynome*, comme on voulait l'établir. On pourrait donner beaucoup d'autres généralisations.

4. Les considérations employées dans la démonstration du théorème du paragraphe 2 peuvent être utilisées dans diverses questions concernant les courbes de genre supérieur à *un*, de façon à obtenir des propositions présentant une grande analogie et aussi des différences très sensibles avec des résultats aujourd'hui classiques pour une seule fonction uniforme.

Il s'agit tout d'abord d'une généralisation d'un théorème de M. Landau sur une fonction donnée par le développement

$$a_0 + a_1 z + \dots$$

convergent dans un cercle de rayon R, la fonction ne devenant jamais égale ni à *zéro* ni à *un* dans ce cercle. Il arrive alors que le rayon R est au plus égal à une certaine fonction

$$R(a_0, a_1)$$

dépendant uniquement de a_0 et a_1.

Pour une courbe *de genre supérieur à un*

$$f(x, y) = 0,$$

j'ai généralisé (¹) le théorème de Landau, en me servant d'une fonction se présentant dans la théorie des fonctions fuchsiennes, dans le cas où l'on a deux développements tayloriens pour x et y autour de $z = 0$, soit pour x

$$x = a + a_1 z + \dots.$$

Le résultat est que x et y ne pourront être simultanément méromorphes dans un cercle de rayon R supérieur à une certaine expression

$$R(a, a_1)$$

dépendant seulement de a et a_1. L'analogie, on le voit, est grande, mais la différence aussi est profonde. *Rien ne remplace ici la condition relative aux valeurs exceptionnelles zéro et un.*

5. Une autre conséquence du même genre d'analyse dans une question différente est encore la suivante, que j'ai étudiée dans le Mémoire cité ci-dessus.

On connaît de nombreux théorèmes sur les suites de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \dots, \quad f_n(z), \quad \dots$$

holomorphes dans un cercle C. Ainsi, si l'on a, quel que soit n,

$$|f_n(z)| < g \qquad (g \text{ fixe})$$

(¹) É. Picard, *Sur les couples de fonctions uniformes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXXIII, 1912, 1er semestre, p. 254).

et si $f_n(z)$ a une limite, n grandissant indéfiniment, pour une infinité de points de C ayant au moins un point de condensation à l'intérieur de C, on peut affirmer (Vitali) que $f_n(z)$ a une limite pour tous les points de l'intérieur du cercle, et cette limite est une fonction holomorphe dans C.

MM. Carathéodory et Landau ont ensuite établi que la condition

$$|f_n(z)| < g$$

peut être remplacée dans l'énoncé précédent par la condition qu'aucune des fonctions $f_n(z)$ ne prend dans le cercle C les valeurs a et b (a et b étant deux constantes distinctes).

Nous devons nous attendre à avoir, *dans le domaine des courbes de genre supérieur à un*, un théorème analogue à ceux de M. Vitali et de MM. Carathéodory et Landau, *mais où l'énoncé n'aura pas à envisager des limitations de modules ou des valeurs exceptionnelles.*

Soient donc la courbe

$$f(x, y) = 0$$

de genre supérieur à *un*, et

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n), \quad \ldots$$

des couples de fonctions de la variable z, méromorphes dans un cercle C et satisfaisant aux équations

$$f(x_n, y_n) = 0.$$

On peut démontrer le théorème suivant : *Si le couple (x_n, y_n) a une limite pour une infinité de points d'un cercle C, possédant au moins un point de condensation à son intérieur, le couple (x_n, y_n) aura une limite pour tous les points de l'intérieur de C, et les coordonnées de ce couple limite sont des fonctions méromorphes de z.*

Les exemples de ces analogies et de ces différences pourraient être multipliés. Certains problèmes fonctionnels se présentent plus simplement pour les courbes de genre supérieur à *un*, que pour les courbes de genre *zéro* ou *un*, et ceci est intimement lié à la théorie des fonctions fuchsiennes.