

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. TZITZÉICA

Sur certaines courbes gauches

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 42 (1925), p. 379-390

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1925_3_42__379_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
CERTAINES COURBES GAUCHES

PAR M. G. TZITZÉICA



Si l'on désigne, comme d'habitude, par T le rayon de torsion en un point M d'une courbe gauche, par d la distance d'un point fixe O pris pour origine des axes au plan osculateur et par θ l'angle de la binormale en M avec l'axe Oz , il est aisé de voir que les expressions Td^2 et $T \cos^2 \theta$ jouissent de propriétés d'invariance par rapport à certains groupes linéaires. En effet, comme on a

$$Td^2 = \frac{|x'' x' x^2|}{|x''' x'' x'|}, \quad T \cos^2 \theta = \frac{(x' y'' - y' x'')^2}{|x''' x'' x'|},$$

où les expressions entre barres sont des déterminants, il est manifeste que Td^2 se reproduit, à un facteur constant près, si l'on applique une transformation linéaire de la forme

$$X = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad Y = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad Z = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

qui ne change ni l'origine ni le plan de l'infini, et qu'il en est de même de $T \cos^2 \theta$ par rapport aux transformations de la forme

$$X = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad Y = a_2 x + b_2 y + c_2, \quad Z = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3$$

qui laissent invariables le plan de l'infini et le point à l'infini de l'axe Oz .

On est naturellement conduit à s'occuper des courbes appartenant à l'une ou à l'autre des classes :

- (1) $Td^2 = \text{const.},$
- (2) $T \cos^2 \theta = \text{const.}$

J'ai étudié les courbes de la classe (1) dans un Mémoire publié, en 1911, dans ces *Annales*. J'étudierai maintenant les courbes de la classe (2), en ajoutant à la fin quelques propriétés nouvelles des courbes (1). Une partie des résultats de ce Mémoire a été communiquée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. 180, 8 juin 1925, p. 1715).

1.

1. Remarquons tout d'abord que dans les transformations qui laissent invariante la classe des courbes (2), les coordonnées x et y jouent le même rôle, différent de celui de la coordonnée z . Je prendrai donc z comme variable indépendante, de sorte que l'on aura $x = f(z)$, $y = g(z)$. L'équation

$$\frac{(x'y'' - y'x'')^2}{|x''x''x'|} = \text{const.}$$

qui définit les courbes (2) devient alors

$$(3) \quad \frac{(x'y'' - y'x'')^2}{x''y'' - y''x''} = \text{const.}$$

En tenant compte des transformations que peuvent subir x et y , on peut considérer ces fonctions comme intégrales d'une équation différentielle linéaire de la forme

$$(4) \quad \theta''' + p\theta'' + q\theta' = 0,$$

où p et q sont des fonctions de z . L'équation (3) devient alors

$$\frac{x'y'' - y'x''}{q} = \text{const.},$$

où ni le numérateur ni le dénominateur ne peuvent être nuls qu'en des points isolés de la courbe. On tire de la dernière équation

$$pq + q' = 0,$$

et alors l'équation (4) donne

$$\frac{\theta''}{q} + \theta = \text{const.}$$

On a donc

$$\frac{x''}{q} + x = a, \quad \frac{y''}{q} + y = b,$$

a et b étant des constantes, d'où

$$(x - a)y'' - (x - b)x'' = 0,$$

que l'on intègre immédiatement

$$xy' - yx' + bx' - ay' + c = 0$$

ou bien

$$(5) \quad x dy - y dx + b dx - a dy + c dz = 0.$$

On a donc le résultat suivant : *Toute courbe de la classe (2) appartient à un complexe linéaire.*

2. Réciproquement, considérons une courbe appartenant à un complexe linéaire non spécial. On a

$$(6) \quad A(y dz - z dy) + B(z dx - x dz) + C(x dy - y dx) \\ + A_1 dx + B_1 dy + C_1 dz = 0,$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont des constantes et $AA_1 + BB_1 + CC_1 \neq 0$. En désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à une courbe du complexe et en posant, pour abrégé,

$$(7) \quad P = Bz - Cy + A_1, \quad Q = Cx - Az + B_1, \quad R = Ay - Bx + C_1,$$

l'équation (6) peut s'écrire

$$(8) \quad P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0,$$

d'où l'on tire, en dérivant par rapport à l'arc et en employant les formules bien connues de Frenet,

$$(9) \quad P\alpha_1 + Q\beta_1 + R\gamma_1 = 0$$

et de celle-ci

$$(10) \quad P\alpha_2 + Q\beta_2 + R\gamma_2 = T(A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2).$$

Les valeurs (7) de P, Q, R montrent que l'on a la relation

$$(11) \quad PA + QB + RC = AA_1 + BB_1 + CC_1.$$

D'autre part, de (8) et (9) on voit que

$$P = \lambda\alpha_2, \quad Q = \lambda\beta_2, \quad R = \lambda\gamma_2.$$

Si l'on introduit ces valeurs de P, Q, R dans les relations (10) et (11) et que l'on élimine ensuite λ , on obtient

$$T \cos^2 \theta = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{A^2 + B^2 + C^2},$$

θ étant l'angle de la binormale avec la direction ayant pour paramètres directeurs A, B, C. Donc : *Toute courbe appartenant à un complexe linéaire fait partie de la classe (2)*, l'axe Oz étant remplacé par l'axe du complexe.

3. En revenant à l'équation (5) et en remarquant que l'on a nécessairement $c \neq 0$, on peut poser $y = f'(x)$ et l'on a alors

$$z = a_1(xf' - 2f) + b_1f' + c_1x,$$

a_1, b_1, c_1 étant des constantes arbitraires. On a ainsi le résultat suivant : *Sur tout cylindre, à génératrices parallèles à Oz, il y a une infinité de courbes de la classe (2)*.

II.

4. Il n'est pas difficile de prouver que toute courbe C' conjuguée, par rapport à un complexe linéaire K_1 , d'une courbe C appartenant à un complexe linéaire K, appartient, elle aussi, à un complexe linéaire K'. On obtient de cette manière des transformations des courbes de la classe (2) en des courbes de la même classe.

Il est plus intéressant d'étudier les transformations asymptotiques de ces courbes, c'est-à-dire, étant donnée une courbe de la classe (2), trouver une autre courbe de la même classe, telle que la droite qui joint les points correspondants engendre une surface réglée admettant les deux courbes comme lignes asymptotiques.

Il est d'autant plus intéressant d'étudier ces transformations, car il se présente dans ce cas une circonstance remarquable, En effet, sur toute surface réglée passant par une courbe C, qui appartient à

un complexe linéaire, et l'admettant comme ligne asymptotique, il existe, d'après un théorème de Sophus Lie et de M. Picard, une deuxième ligne asymptotique C' appartenant au même complexe.

Il s'agit donc d'étudier des surfaces réglées admettant des lignes asymptotiques de la classe (2).

5. Considérons tout d'abord le cas général, où la surface réglée n'a pas de plan directeur. On peut représenter alors la surface, rapportée à ses lignes asymptotiques, par les formules de M. Goursat

$$x = (U_2 U_3' - U_3 U_2') \frac{2}{u + v} - \int (U_2' U_3'' - U_2'' U_3') du$$

et des expressions analogues pour y et z . (Voir pour ces formules mon Mémoire des *Annales* de 1911.) On a pour le rayon de torsion d'une ligne asymptotique $v = \text{const.}$

$$T = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2,$$

où $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont des paramètres directeurs de la normale à la surface ayant pour valeurs

$$\theta_i = U_i' - \frac{2U_i}{u + v} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Si la direction fixe, avec laquelle la binormale de la courbe fait l'angle θ , a pour paramètres directeurs l, m, n , l'équation (2) devient

$$l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3 = \text{const.},$$

ou bien, en posant $U = lU_1 + mU_2 + nU_3$,

$$U' - \frac{2U}{u + v} = \text{const.}$$

le long de la ligne asymptotique $v = \text{const.}$ appartenant à la classe (2).

En dérivant par rapport à u la dernière équation on a d'abord

$$(12) \quad U'' - \frac{2U'}{u + v} + \frac{2U}{(u + v)^2} = 0,$$

ensuite de là

$$U''' - \frac{2U''}{u + v} + \frac{4U'}{(u + v)^2} - \frac{4U}{(u + v)^3} = 0,$$

d'où $U''' = 0$, ou

$$U = au^2 + 2bu + c$$

et alors (12) donne

$$(13) \quad av^2 - 2bv + c = 0,$$

c'est-à-dire *la surface considérée ne peut avoir une ligne asymptotique de la classe (2) sans en avoir deux.*

6. On peut retrouver ici un théorème de M. Voss, à savoir, que *les flecnodales de la surface coupent harmoniquement chaque segment de toute génératrice, compris entre les deux lignes asymptotiques de la classe (2).*

En effet, si l'on suppose, comme nous l'avons fait dans notre Mémoire de 1911, que U_1, U_2, U_3 sont des intégrales de l'équation

$$(14) \quad U''' = pU'' + qU' + rU,$$

alors les lignes flecnodales de la surface sont données par

$$(15) \quad r(u + v)^2 + 2q(u + v) + 2p = 0.$$

Or, par hypothèse, l'équation (14) admet la solution $U = au^2 + 2bu + c$, donc

$$2pa + 2q(au + b) + r(au^2 + 2bu + c) = 0,$$

qui exprime précisément que les racines des équations (13) et (15) forment une division harmonique.

7. Supposons qu'il y ait sur la surface réglée une autre courbe de la classe (2). Dans ce cas la surface appartient à une congruence linéaire et par conséquent elle a deux directrices rectilignes. Les lignes asymptotiques appartiennent toutes à la classe (2), par couples jouissant de la propriété de faire partie du même complexe linéaire variant d'un couple à l'autre et coupant harmoniquement le segment de chaque génératrice compris entre les deux directrices.

8. Considérons maintenant les surfaces réglées à plan directeur. Soient a_1, a_2, a_3 les paramètres directeurs de la normale à ce plan. On

doit avoir

$$(16) \quad a_1 \frac{\partial x}{\partial v} + a_2 \frac{\partial y}{\partial v} + a_3 \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

si $u = \text{const.}$ sont les génératrices rectilignes de la surface. Or, d'après les formules bien connues de M. Lelievre, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v},$$

où $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont des intégrales d'une équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = h \theta.$$

L'équation (16) devient

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & \theta_1 \\ \theta_1 & \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \end{array} \right| = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial v} = A \theta_i + B a_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

En dérivant par rapport à u et en éliminant a_i , on trouve

$$h \theta_i = A \frac{\partial \theta_i}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial u} \theta_i + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial v} - A \theta_i \right),$$

qui doit être identique, autrement la surface serait développable. On a donc

$$A = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial u} = 0, \quad h = 0;$$

comme B ne peut être nul, parce qu'alors la surface se réduirait à une courbe, on peut prendre $B = 1$, par un changement de la variable v . On a donc

$$\theta_i = U_i + a_i v \quad (i = 1, 2, 3)$$

et

$$x = (a_3 U_2 - a_2 U_3) v - \int (U_2 U_3' - U_3 U_2') du,$$

ce sont les formules qui remplacent les formules de M. Goursat.

Supposons maintenant que sur une telle surface nous ayons une

courbe de la classe (2), la direction Oz étant remplacée par celle de paramètre l, m, n . On aura

$$l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3 = \text{const.},$$

ou bien en posant $lU_1 + mU_2 + nU_3 = U$ et $la_1 + ma_2 + na_3 = a$,

$$U + av = \text{const.}$$

pour la ligne asymptotique $v = \text{const.}$ de la classe (2). Ceci demande que l'on ait $V = \text{const.}$ et alors la relation précédente est vérifiée pour toutes les lignes asymptotiques de la surface. Donc *sur une surface réglée à plan directeur il ne peut y avoir une ligne asymptotique de la classe (2) sans que toutes appartiennent à cette classe.*

9. Cependant il y a deux cas essentiels à considérer, selon que $a = 0$ ou $a \neq 0$.

Prenons d'abord le premier cas

$$a = la_1 + ma_2 + na_3 = 0,$$

où l'axe du complexe linéaire auquel appartient la courbe est parallèle au plan directeur. On a alors

$$T \cos^2 \theta = \text{const.}$$

avec la même constante pour toutes les lignes asymptotiques. Toutes les lignes asymptotiques de la surface appartiennent au même complexe linéaire.

Pour étudier de plus près la surface et simplifier les calculs je suppose que l'axe du complexe linéaire est parallèle à Oz , donc

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n \neq 0, \quad a_3 = 0, \quad U_3 = \text{const.} = 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned} x &= U_2 - a_2 v, & y &= -U_1 + a_1 v, \\ z &= (a_2 U_1 - a_1 U_2) v - \int (U_1 U_2' - U_2 U_1') du. \end{aligned}$$

Il est facile de calculer les coefficients α et β de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial u} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

vérifiée par x, y, z . On trouve que β ne dépend que de la variable u . Comme les lignes flecnodales sont données par les deux valeurs de v qui annulent β , il résulte que ces valeurs sont infinies et par conséquent que *les deux lignes flecnodales de la surface sont confondues avec la droite de l'infini du plan directeur.*

La réciproque est vraie. Un calcul que j'ometts prouve que toute surface réglée à plan directeur, dont les deux lignes flecnodales sont rejetées à l'infini, a toutes ses lignes asymptotiques de la classe (2), appartenant au même complexe linéaire.

D'après un théorème connu d'Enneper on a le long de cette surface

$$(17) \quad K \cos^2 \theta = \text{const.},$$

K étant la courbure totale en un point M et θ l'angle de la normale en M avec l'axe du complexe linéaire. Si la direction de cet axe est Oz , les surfaces précédentes sont par conséquent les surfaces réglées intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$rt - s^2 = \text{const.}$$

dont les surfaces jouissent de la propriété (17) et qui ont été déterminées par DARBOUX (*Théorie des surfaces*, 3^e Partie, p. 253).

On voit, par ce qui précède, l'analogie de propriétés entre les surfaces réglées de la classe (17) et celles de la classe analogue

$$(18) \quad Kd^2 = \text{const.}$$

que j'ai étudiée antérieurement.

10. Il reste à étudier le cas où

$$a = la_1 + ma_2 + na_3 \neq 0.$$

Prenons, comme dans le cas précédent, $l = m = 0$, $n = 1$, la relation

$$l\theta_1 + m\theta_2 + n\theta_3 = \text{const.}$$

deviendra

$$\theta_3 = U_3 + a_3 v = \text{const.},$$

ce qui exige que l'on ait $U_3 = \text{const.}$, que l'on peut réduire, par un

changement de la variable v , à $U_3 = 0$. On peut prendre $a_3 = 1$. On a donc

$$\theta_3 = v = \text{const.}$$

et l'on constate que la constante varie avec l'asymptote considérée.

La surface est actuellement définie par les formules

$$x = U_2 v, \quad y = -U_1 v, \quad z = (a_2 U_1 - a_1 U_2) v - \int (U_1 U_2' - U_2 U_1') du;$$

elle a un plan directeur

$$a_1 x + a_2 y + z = 0$$

et une directrice l'axe Oz , c'est donc un conoïde. Il a une équation cartésienne de la forme

$$z + a_1 x + a_2 y = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

On a donc le résultat suivant : *Toute ligne asymptotique d'un conoïde appartient à la classe (2).*

III.

11. Il nous reste à donner quelques propriétés nouvelles des courbes de la classe (1). Il y a deux points du Mémoire de 1911 que je voudrais compléter ici.

Considérons tout d'abord les surfaces réglées qui admettent seulement deux lignes asymptotiques de la classe (1). J'ai démontré, dans le Mémoire cité, que *l'une des lignes flecnodales de la surface est rejetée à l'infini, l'autre partage le segment de chaque génératrice rectiligne, compris entre les deux lignes asymptotiques de la classe (1), dans un rapport constant*. On peut montrer que *cette deuxième ligne flecnodale est la courbe de contact de la surface avec le cône qui lui est circonscrit et qui a pour sommet l'origine*. On a en effet, avec les notations du Mémoire cité,

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z = -S_1 + \frac{2S_1}{u+v} = -S_1 - \frac{r}{q} S_0 = 0,$$

qui prouve la proposition. Ces propriétés font voir que toute transfor-

mation par polaires réciproques, par rapport à une quadrique ayant l'origine pour centre, transforme une surface réglée de la classe précédente en une surface de la même classe.

12. Je passe au second point qui doit être complété. Dans le Mémoire de 1911 je n'ai considéré que les surfaces réglées générales. Je veux démontrer que sur une surface réglée à plan directeur il ne peut y avoir plus d'une ligne asymptotique de la classe (1). En effet, considérons une telle surface définie au n° 8 et écrivons que l'on a le long d'une ligne asymptotique de la classe (1)

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z = \text{const.}$$

ou, en posant

$$f_1(u) = - \int (U_2 U_3' - U_3 U_2') du, \quad f_2(u) = \dots, \quad f_3(u) = \dots$$

et

$$S_0 = \Sigma U_i f_i(u), \quad S = \Sigma a_i f_i(u),$$

on a

$$S_0 + S v = \text{const.},$$

d'où

$$S_0' + S' v = 0.$$

Cette relation ne peut être vérifiée pour plus d'une valeur constante de v que si $S_0' = S' = 0$. On a dans ce cas

$$a_1 f_1(u) + a_2 f_2(u) + a_3 f_3(u) = \text{const.},$$

donc

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = \text{const.},$$

et la surface serait plane.

13. L'étude que nous avons faite en 1911 des courbes de la classe (1) et celle que nous venons de faire des courbes de la classe (2) conduisent aux conclusions suivantes.

Toute transformation asymptotique d'une de ces courbes donne à la surface réglée correspondante des propriétés géométriques qui la caractérisent. Ces propriétés concernent spécialement les lignes flecnodales de la surface. Ce fait a une explication géométrique en quelque sorte qualitative. Il est naturel qu'une propriété différentielle

du troisième ordre d'au moins deux lignes asymptotiques de la surface ait comme conséquence une propriété différentielle de la surface touchant quatre génératrices infiniment voisines, c'est-à-dire une propriété des lignes flecnodales de la surface. Cependant il s'agissait de trouver ces propriétés sous la forme géométrique la plus simple, et c'était là toute la difficulté du problème.

