

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. GAU

**Mémoire sur l'intégration de l'équation de la déformation  
des surfaces par la méthode de Darboux**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 42 (1925), p. 89-141

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1925\\_3\\_42\\_89\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1925_3_42_89_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION  
DE  
L'ÉQUATION DE LA DÉFORMATION DES SURFACES  
PAR LA MÉTHODE DE DARBOUX

PAR M. E. GAU

Doyen de la Faculté des Sciences de Grenoble.

---

Introduction.

Je me suis proposé dans ce Mémoire d'apporter quelques résultats nouveaux dans l'étude de la méthode de Darboux, et de les appliquer à l'équation de la déformation des surfaces.

Les deux premiers Chapitres concernent donc les équations tout à fait générales; je n'ai même pas supposé tout de suite l'équation linéaire parce que les théorèmes se démontrent aussi facilement pour les équations les plus générales; mais je n'ai pas tiré ici toutes les conséquences des résultats obtenus dans le cas général, me bornant le plus souvent à constater celles que l'on aurait à utiliser dans la troisième Partie, consacrée spécialement à l'équation de la déformation.

Je rappelle que j'ai démontré antérieurement <sup>(1)</sup> qu'il suffit d'un invariant (d'ordre  $> 3$ ), pour chaque système de caractéristiques, pour que l'on puisse appliquer la méthode de Darboux.

1. *Notations.* — Nous emploierons les notations introduites par M. Goursat <sup>(2)</sup>. Soit une équation du second ordre :

$$(1) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0;$$

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 163, 1918, p. 276, et t. 176, 1923, p. 278.

<sup>(2)</sup> GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre*, t. II, p. 78.

on peut en tirer l'expression de toutes les dérivées  $p_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k}$ , en fonction de celles d'entre elles dont le premier indice est 0 ou 1. Si, dans une expression  $\varphi(x, y, z, p, q, \dots, p_{i,k}, \dots)$ , nous remplaçons les dérivées  $p_{i,k}$  par leur valeur tirée de (1) ainsi qu'il vient d'être dit, nous aurons une nouvelle expression que nous désignerons par  $[\varphi(x, y, z, \dots, p_{i,k}, \dots)]$  et qui ne contient que des dérivées dont le premier indice est 0 ou 1.

Nous désignerons par  $m_1$  et  $m_2$  les racines de l'équation

$$M^2 - \frac{\partial f}{\partial s} M + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

que nous supposerons dans ce qui suit *distinctes*; les caractéristiques correspondantes seront désignées par I et II respectivement. Nous poserons

$$\mu = m_1 - m_2,$$

et nous supposerons toujours  $\mu \neq 0$ .

*Expressions*  $\left[ \frac{d^n f}{dy^n} \right]$ . — Dans un Mémoire antérieur <sup>(1)</sup>, j'ai étudié la forme des expressions  $\left[ \frac{d^n f}{dy^n} \right]$ , les dérivations étant faites en tenant compte de ce que  $z$  et ses dérivées dépendent de  $y$ . Je vais rappeler brièvement les résultats obtenus et les compléter sur certains points importants. Je continuerai à représenter par  $\left( \frac{d\varphi}{dy} \right)$  l'expression  $\left[ \frac{d\varphi}{dy} \right]$  où l'on a supprimé les deux termes contenant les dérivées d'ordre supérieur (Notation de M. Goursat). On a

$$(2) \quad \begin{cases} \left[ \frac{df}{dy} \right] = \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,2} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,3} + L \\ \text{avec} \\ L = \left( \frac{df}{dy} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + s \frac{\partial f}{\partial p} + t \frac{\partial f}{\partial q}, \end{cases}$$

et l'on peut remarquer en passant que

$$\left( \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial s} \right) = \frac{\partial L}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \left( \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial q}.$$

<sup>(1)</sup> *Journal des Math. pures et appliquées*, 6<sup>e</sup> série, t. VII, 1911, p. 129.

En continuant les dérivations on a

$$(3) \quad \left[ \frac{d^2 f}{dy^2} \right] = \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,3} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,4} + p_{1,2}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2 p_{1,2} p_{0,3} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + p_{0,3}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ + p_{1,2} \left[ 2 \frac{\partial L}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial p} \right] + p_{0,3} \left[ 2 \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial q} \right] + \left( \frac{dL}{dy} \right),$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{d^3 f}{dy^3} \right] = \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,4} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,5} + M_3 p_{1,3} + N_3 p_{0,4} + J_3, \\ \text{où l'on a posé} \\ M_3 = 3 \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial s} \right] + \frac{\partial f}{\partial p}, \quad N_3 = 3 \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial t} \right] + \frac{\partial f}{\partial q}, \\ J_3 = p_{1,3}^3 \frac{\partial^3 f}{\partial s^3} + 3 p_{1,2}^2 p_{0,3} \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial t} + 3 p_{1,2} p_{0,3}^2 \frac{\partial^3 f}{\partial s \partial t^2} + p_{0,3}^3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \\ + 3 p_{1,2}^2 \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial s} \right] + 3 p_{1,2} p_{0,3} \left[ 2 \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial s} \right] \\ + 3 p_{0,3}^2 \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} \right] + 3 p_{1,2} \left( \frac{d}{dy} \frac{\partial L}{\partial s} \right) \\ + p_{0,3} \left[ 3 \left( \frac{d}{dy} \frac{\partial L}{\partial t} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \right] + \left( \frac{d^2 L}{dy^2} \right), \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{d^4 f}{dy^4} \right] = \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,5} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,6} + M_4 p_{1,4} + N_4 p_{0,5} + J_4, \\ \text{avec} \\ J_4 = 3 p_{1,3}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 6 p_{1,3} p_{0,4} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + 3 p_{0,4}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ + p_{1,3} \left[ \left( \frac{dM_3}{dy} \right) + \frac{\partial J_3}{\partial p_{1,2}} \right] + p_{0,4} \left[ \left( \frac{dN_3}{dy} \right) + \frac{\partial J_3}{\partial p_{0,3}} \right] + \left( \frac{dJ_3}{dy} \right). \end{array} \right.$$

Enfin

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{d^5 f}{dy^5} \right] = \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,6} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,7} + M_5 p_{1,5} + N_5 p_{0,6} + P_5 p_{1,4} + Q_5 p_{0,5} + I_5, \\ \text{avec} \\ P_5 = \left[ \frac{dM_4}{dy} \right] + \left[ \frac{dM_3}{dy} \right] + 3 p_{1,3} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 3 p_{0,4} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + \frac{\partial J_3}{\partial p_{1,2}}, \\ Q_5 = \left[ \frac{dN_4}{dy} \right] + \left[ \frac{dN_3}{dy} \right] + 3 p_{1,3} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + 3 p_{0,4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial J_3}{\partial p_{0,3}}. \end{array} \right.$$

Un simple calcul de récurrence montre que cette forme, linéaire par rapport aux six dérivées d'ordre supérieur, persistera. On aura donc

en définitive

$$(7) \quad \left[ \frac{d^n f}{dy^n} \right] = \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,n+1} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,n+2} \\ + M_n p_{1,n} + N_n p_{0,n+1} + P_n p_{1,n-1} + Q_n p_{0,n} + I_n$$

avec les formules

$$M_n = M_{n-1} + \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial s} \right], \quad N_n = N_{n-1} + \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial t} \right], \\ P_n = P_{n-1} + \left[ \frac{dM_{n-1}}{dy} \right], \quad Q_n = Q_{n-1} + \left[ \frac{dN_{n-1}}{dy} \right].$$

On en tire facilement, au moyen des formules qui précèdent,

$$(8) \quad \begin{cases} M_n = n \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial s} \right] + \frac{\partial f}{\partial p}, & N_n = n \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial t} \right] + \frac{\partial f}{\partial q}, \\ P_n = \frac{n(n-1)}{2} \left[ \frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial f}{\partial s} \right] + n \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial p} \right], \\ Q_n = \frac{n(n-1)}{2} \left[ \frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial f}{\partial t} \right] + n \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial q} \right] + \frac{\partial f}{\partial z}. \end{cases}$$

Si l'équation (1) est quelconque, la formule (7) ne sera valable que pour  $n \geq 5$ ; mais j'ai déjà montré, dans le Mémoire cité, qu'on pourra écrire

$$(9) \quad \left[ \frac{d^n f}{dy^n} \right] = \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,n+1} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,n+2} + M_n p_{1,n} + N_n p_{0,n+1} + J_n$$

dès qu'on aura  $n \geq 3$ .

Si l'équation (1) est *linéaire* en  $r, s, t$ , la formule (7) sera valable pour  $n \geq 4$ , comme on le voit immédiatement, et la formule (9) sera valable pour  $n \geq 2$ .

*Remarque.* — En tenant compte de ce que  $\frac{\partial f}{\partial s} = m_1 + m_2$  et  $\frac{\partial f}{\partial t} = m_1 m_2$ , le calcul montre qu'on a

$$(10) \quad Q_n - m_2 P_n = \mu \frac{n(n-1)}{2} \left( \frac{\partial m_2}{\partial s} p_{1,3} + \frac{\partial m_2}{\partial t} p_{0,4} \right) \\ + \text{termes d'ordre inférieur à 4.}$$

## PREMIÈRE PARTIE.

### ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU SECOND ORDRE.

2. Soit une équation

$$(12) \quad \varphi = p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u(x, y, z, \dots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1})$$

qui forme avec (I) un système en involution pour les caractéristiques (II); dans le Mémoire cité, j'ai démontré (p. 136) que l'on a nécessairement l'identité

$$\left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] \equiv \varphi (A n + B)$$

en posant

$$(13) \quad \begin{cases} A = - \left[ \frac{dm_2}{dy} \right], \\ B = \left[ \frac{dm_2}{dy} \right] + \frac{1}{\mu} \left\{ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] + m_2 \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q} \right\}, \end{cases}$$

à condition que  $n > 3$ ; si  $n = 3$  on a

$$(14) \quad \begin{cases} \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] \equiv \varphi (3A + B) + C\varphi^2, \\ C = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial m_2}{\partial t} - m_2 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right]. \end{cases}$$

On voit que pour certaines équations, en particulier pour les équations de la forme de Monge-Ampère, on aura  $C = 0$  et la forme (14) se réduira à la formule générale.

J'ai montré alors (Mémoire cité, p. 137) comment la connaissance de plusieurs équations en involution avec (I) permet de former un invariant; mais il est clair que le raisonnement peut être fait d'une manière plus générale.

Nous appellerons *fonction principale* pour l'équation (I) toute fonction  $\varphi$ , qu'elle soit ou non de la forme linéaire (12), qui vérifie identi-

quement la relation

$$(15) \quad \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] \equiv \varphi (A\alpha + B\beta),$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes quelconques. Pour préciser, nous dirons que  $\varphi$  est une *fonction principale d'indices*  $(\alpha, \beta)$ .

Si l'équation  $\varphi = 0$  peut se résoudre par rapport aux dérivées d'ordre supérieur qu'elle contient, il est évident qu'on obtiendra ainsi une équation en involution avec (1); cela se démontrerait en utilisant la relation (15) et en raisonnant comme l'a fait M. Goursat (*Leçons*, t. II, p. 91); mais il peut arriver que l'équation  $\varphi = 0$  n'ait pas de solution.

Une fonction principale d'indices  $(0, 0)$  sera évidemment un invariant pour le système (II) de caractéristiques; mais cet invariant pourra parfois se réduire identiquement à une constante.

Enfin, un calcul très simple, indiqué d'ailleurs dans mon Mémoire cité plus haut, montre que si l'on a trois fonctions principales,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  d'indices respectifs  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)$ , l'expression

$$\varphi_1^{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2} \times \varphi_2^{\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3} \times \varphi_3^{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}$$

sera une fonction principale d'indices  $(0, 0)$ , c'est-à-dire un invariant.

Si l'on a deux fonctions principales de mêmes indices, leur rapport sera un invariant.

Il sera utile dans la suite d'avoir le résultat suivant, qui s'obtient par un calcul très simple

$$(16) \quad A\alpha + B\beta = (\beta - \alpha) \left[ \frac{\partial m_2}{\partial s} p_{1,2} + \frac{\partial m_2}{\partial t} p_{0,3} \right] \\ + \frac{\beta}{\mu} \left( \frac{\partial m_1}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial s} \right) (p_{1,2} + m_2 p_{0,3}) + \text{termes d'ordre} < 3.$$

3. *Étude, dans le cas général, des fonctions principales d'ordre supérieur à 3.* — Soit  $n$  l'ordre de la fonction principale  $\varphi$ , d'indices  $(\alpha, \beta)$ ; on a donc

$$(17) \quad \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] \equiv \varphi (A\alpha + B\beta) \quad (n > 3).$$

Le calcul que je vais développer ici sera utilisé très souvent dans la suite; je vais l'exposer une fois pour toutes.

Le deuxième membre étant d'ordre  $n$ , les termes d'ordre  $(n+1)$  doivent disparaître au premier membre; or ces termes sont, toutes

réductions faites,

$$(p_{1,n} + m_2 p_{0,n+1}) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \right);$$

donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \dots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1}, \omega)$$

en posant

$$\omega = p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n}.$$

Prenons alors comme variables  $x, y, z, \dots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1}, \omega, p_{0,n}$ ; c'est-à-dire remplaçons dans l'identité (17)  $p_{1,n-1}$  par  $\omega - m_1 p_{0,n}$ .

Le calcul consiste à écrire d'abord l'égalité des coefficients de  $p_{0,n}$  dans l'identité (17), puis à dériver cette même identité par rapport à  $\omega$ , et à combiner les deux relations ainsi obtenues. On a

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} - f \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \dots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-2}} \left[ \frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}} \right] \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-1}} p_{1,n-1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \left[ m_1 p_{1,n} + p_{0,n} \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] - \left[ \frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right] \right], \\ \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} + p_{1,1} \frac{\partial f}{\partial p} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-2}} p_{1,n-1} \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-1}} p_{0,n} + \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \left[ m_1 p_{0,n+1} + p_{1,n} + p_{0,n} \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] \right]. \end{aligned}$$

Mais on a vu que, si  $n-1 \geq 3$ , ce qui est le cas ici, on a

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right] &= (m_1 + m_2) p_{1,n} + m_1 m_2 p_{0,n+1} + M_{n-1}(\omega - m_1 p_{0,n}) + N_{n-1} p_{0,n} + J_{n-1}, \\ \left[ \frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}} \right] &= (m_1 + m_2)(\omega - m_1 p_{0,n}) + m_1 m_2 p_{0,n} + \dots; \end{aligned}$$

toutes réductions faites, on obtient

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} (p + m_2 q) + \dots \\ &\quad + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-2}} \right) (\omega - m_1 p_{0,n}) \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \left\{ p_{0,n} \left[ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. - M_{n-1}(\omega - m_1 p_{0,n}) - N_{n-1} p_{0,n} - J_{n-1} \right\}. \end{aligned} \right.$$



Écrivons d'abord que le coefficient de  $p_{0,n}$  est nul :

$$(19) \quad \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-2}} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \left\{ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] + m_1 M_{n-1} - N_{n-1} \right\} = 0.$$

Dérivons maintenant l'identité (17) par rapport à  $\omega$ , en posant  $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}$ ; il vient

$$\left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-2}} \right) - \varphi' M_{n-1} \equiv \varphi' (A\alpha + B\beta).$$

Si l'on remarque que

$$(20) \quad \frac{1}{\mu} \left\{ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] + m_1 M_{n-1} - N_{n-1} \right\} - M_{n-1} \equiv A\alpha + B,$$

la relation précédente devient, en tenant compte de (19),

$$(21) \quad \left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] \equiv \varphi' [A(\alpha - n) + B(\beta - 1)],$$

ce qui prouve que  $\varphi'$  est à son tour une fonction principale d'indices  $(\alpha - n, \beta - 1)$  <sup>(1)</sup>.

On voit en passant que  $\varphi'$  ne pourra être une constante que si le crochet du second membre est nul; cela se vérifie en particulier pour  $\varphi' = 1$ , c'est-à-dire si  $\varphi$  est de la forme (12), avec  $\alpha = n$  et  $\beta = 1$ .

Il est clair que l'on peut répéter l'opération sur (21) et l'on aura, en posant  $\varphi'' = \frac{\partial \varphi'}{\partial \omega}$ , une fonction principale  $\varphi''$  d'indices  $(\alpha - 2n, \beta - 2)$ .

Cela fait trois fonctions principales qui permettent de former l'invariant  $\left[ \frac{\varphi \varphi''}{\varphi'^2} \right]^{n\beta - \alpha}$ , suivant la règle du paragraphe 2 (p. 94).

Supposons alors que l'on sache que l'équation (1) n'admet pas d'invariant d'ordre inférieur à  $(n + 1)$ ; le précédent doit donc se réduire identiquement à une constante. On en tire les conséquences suivantes :

(1) On peut déduire de là une démonstration plus simple et plus générale que celle que j'ai déjà donnée de l'existence d'un deuxième invariant, dès qu'on en connaît un premier (*C. R. Acad. Sci.*, t. 166, 1918, p. 276).

Si  $\alpha = n$  et  $\beta = 1$ , la relation (21) montre que  $\varphi'$  est une constante, c'est-à-dire que  $\varphi$  est de la forme (12).

Si  $\beta \neq 1$  mais  $\alpha = \beta n$ , les relations (17) et (21) montrent que  $\varphi'^{\frac{1}{\beta-1}} \varphi^{-\frac{1}{\beta}}$  est un invariant et par suite

$$\varphi' \varphi^{\frac{1-\beta}{\beta}} \equiv k,$$

d'où

$$\varphi = k_1 (p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u)^\beta \quad (k_1 = \text{const.});$$

enfin, si  $\alpha \neq \beta n$ , on a  $\frac{\varphi \varphi''}{\varphi^2} \equiv \text{const.}$

C'est la relation obtenue par Clairin (1); on en déduit immédiatement que (si  $n > 3$ ),  $\varphi$  a l'une des formes

$$(I) \quad \varphi = (p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u)^\gamma U,$$

$$(II) \quad \varphi = e^{(p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u)V},$$

$\gamma$  étant une constante,  $U, V, u, v$ , des fonctions d'ordre  $\leq n$ .

En reportant ces expressions dans les équations (17) et (21), on voit immédiatement que  $p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u$ ,  $U$ , ainsi que  $V$  sont des fonctions principales, cette dernière d'indices  $(-n, -1)$ .

En appliquant ces résultats à l'étude des fonctions  $U$  et  $V$  ci-dessus, on arrive à une classification plus précise des formes que peut affecter  $\varphi$ . Nous nous en tiendrons là pour le cas présent et nous résumerons ces résultats par le :

THÉORÈME I. — *S'il n'existe pas d'invariant d'ordre inférieur à  $(n+1)$  pour les caractéristiques (II), toute fonction principale d'ordre  $n > 3$  aura l'une des formes ci-dessus, où  $V$  est une fonction principale d'indices  $(-n, -1)$  et  $(p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u)$  une fonction principale d'indices  $(n, 1)$  (involution).*

4. *Étude spéciale des fonctions principales du troisième ordre.* — L'étude précédente ne donne aucun résultat pour les fonctions

(1) CLAIRIN, *Sur les invariants des caractéristiques*, etc. (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1920, p. 107-116).

d'ordre  $\leq 3$ , ni pour les fonctions principales de la forme (12); nous allons étudier ces deux cas dans ce paragraphe et le suivant.

Supposons d'abord  $\varphi$  du troisième ordre :

En opérant comme dans le cas général (paragraphe précédent), on voit d'abord immédiatement que l'on a

$$\varphi = (x, y, z, p, q, s, t, \omega), \quad \omega = p_{1,2} + m_1 p_{0,3}.$$

En égalant les coefficients de  $p_{0,3}$  dans l'identité (17), on a

$$\begin{aligned} & -\mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \left\{ \left( \frac{dm_1}{dx} \right) + m_2 \left( \frac{dm_1}{dy} \right) - \frac{\partial m_1}{\partial s} \left( \frac{df}{dy} \right) + m_1 \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q} \right. \\ & \quad \left. + 2\mu \left( \frac{dm_1}{dy} \right) + \omega \left( 2\mu \frac{\partial m_1}{\partial s} - \frac{\partial m_2}{\partial t} + m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right) \right\} \\ & \equiv (\beta - \alpha) \varphi \left( \frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right) - \beta \varphi \left( \frac{\partial m_1}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial s} \right). \end{aligned}$$

En dérivant (17) par rapport à  $\omega$ , et en posant  $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}$ , il vient

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \\ & \quad + \varphi' \left\{ p_{0,3} \left( \mu \frac{\partial m_1}{\partial s} - \frac{\partial m_2}{\partial t} + m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2\omega \frac{\partial (m_1 + m_2)}{\partial s} - 2 \left( \frac{d(m_1 + m_2)}{dy} \right) - \frac{\partial f}{\partial p} \right\} \\ & \equiv \varphi (\beta - \alpha) \frac{\partial m_2}{\partial s} + \frac{\beta \varphi}{\mu} \left( \frac{\partial m_1}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial s} \right) + \varphi' (A\alpha + B\beta). \end{aligned}$$

En tirant  $\left( \frac{d\varphi}{dt} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)$  de la première relation et en portant dans celle-ci, le calcul montre qu'on a

$$(22) \quad \left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] \equiv \varphi' [A(\alpha - 3) + B(\beta - 1)] + (\beta - \alpha) \varphi C,$$

C ayant la valeur (14); cette relation se réduit à la forme générale (21) lorsque C est nul, ou bien lorsque  $\alpha = \beta$ .

En posant  $\psi = \text{Log } \varphi$ , cette relation s'écrit

$$(23) \quad \left[ \frac{d\psi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\psi'}{dy} \right] \equiv -\psi' (3A + B) + (\beta - \alpha) C.$$

Or cette relation ne diffère de la forme (17) que par le terme  $(\beta - \alpha)G$ , qui est du deuxième ordre au plus; comme les opérations faites sur (17), dans le paragraphe précédent, n'ont porté que sur les termes du troisième ordre, nous pourrons les répéter sans aucun changement sur l'identité précédente; en posant  $\psi'' = \frac{\partial \psi'}{\partial \omega}$ , nous obtiendrons une relation analogue à (22) (avec  $\alpha = -3$ ,  $\beta = -1$ ) :

$$(24) \quad \left[ \frac{d\psi''}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\psi''}{dy} \right] \equiv -\psi''(6A + 2B) + 2\psi' C,$$

ce qui montre en passant que  $\psi''$  ne peut être nul en général.

Multiplions les deux membres de (23) par  $2\psi'$ , ceux de (24) par  $(\alpha - \beta)$ , et ajoutons membre à membre; il vient

$$(25) \quad \left[ \frac{d}{dx} [\psi'^2 + (\alpha - \beta)\psi''] \right] + m_2 \left[ \frac{d[\psi'^2 + (\alpha - \beta)\psi'']}{dy} \right] \\ \equiv (\psi'^2 + (\alpha - \beta)\psi'')(-6A - 2B).$$

Posons

$$\theta = \psi'^2 + (\alpha - \beta)\psi'' \equiv \frac{1}{\varphi^2} [(\alpha - \beta)\varphi\varphi'' + (\beta - \alpha + 1)\varphi'^2].$$

La relation (25) montre que  $\theta$  est une fonction principale, d'indices  $(-6, -2)$ .

Trois cas peuvent se présenter :

1° Ou bien  $\theta$  est identiquement nulle; on en tire immédiatement

$$\psi = \log V(\omega + u)^{\alpha - \beta} \quad \text{et par suite} \quad \varphi = V(\omega + u)^{\alpha - \beta},$$

et en reportant cette expression dans (17) et dans (22), on voit sans difficulté que

$$\omega + u = p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

est en involution avec l'équation proposée.

2° Ou bien  $\theta$  est une fonction principale d'ordre inférieur à 3, non identiquement nulle et d'indices  $(-6, -2)$ .

3° Ou bien  $\theta$  est une fonction principale du troisième ordre; on peut alors évidemment la traiter comme la fonction  $\varphi$  ci-dessus, sauf que l'on aura dans ce cas  $\alpha = -6$ ,  $\beta = -2$ . On obtiendra une fonction principale  $\theta_1$ , déduite de  $\theta$  comme  $\theta$  se déduit de  $\varphi$ , et d'in-

dices  $(-6, -2)$

$$\theta_1 = \frac{1}{\theta^2} [-4\theta\theta'' + 5\theta'^2],$$

par suite l'expression  $\frac{\theta_1}{\theta}$  serait un invariant; si cet invariant ne se réduisait pas identiquement à une constante, on en déduirait évidemment une (et même une infinité) involution du troisième ordre.

Si l'on a identiquement

$$\theta_1 \equiv k\theta \quad (k \text{ const.}),$$

c'est-à-dire

$$-4\theta\theta'' + 5\theta'^2 \equiv k\theta^3,$$

on tire, en intégrant,

$$\theta'^2 \equiv -k\theta^3 + \theta^{-\frac{5}{2}}\nu(x, y, z, p, q, s, t).$$

Cette équation différentielle s'intègre en prenant comme fonction inconnue  $\theta^{-\frac{1}{2}}$ ; suivant que  $\nu$  est, ou non, identiquement nulle, on a

$$\theta^{-\frac{1}{2}} = -k\omega + \nu_1(x, y, z, p, q, s, t)$$

ou

$$\theta^{-\frac{1}{2}} = \frac{\nu}{16}(\omega + \nu_1)^2 + \frac{k}{\nu}.$$

Or, on vérifie facilement, en partant de ce que  $\theta$  est une principale d'indices  $(-6, -2)$ , que  $\theta^{-\frac{1}{2}}$  est une fonction principale d'indices  $(3, 1)$ ; d'après une remarque faite (§ 2), si l'on peut résoudre l'équation  $\theta^{-\frac{1}{2}} = 0$  par rapport à  $\omega$ , on obtiendra ainsi une équation du troisième ordre en involution avec la proposée.

On voit, d'après les expressions ci-dessus, que cette résolution sera toujours possible, sauf si  $k = 0$ ; mais dans ce cas, l'expression  $\theta^{-\frac{1}{2}}$  correspondante serait une principale d'ordre inférieur à 3, non identiquement nulle, et d'indices  $(3, 1)$ .

En réunissant les résultats obtenus dans cette discussion, on peut donc dire :

THÉORÈME II. — *Si il existe une fonction principale d'ordre 3 pour le système (II) de caractéristiques, il existe au moins une involution du troi-*

sième ordre, ou bien une fonction principale non identiquement nulle, d'ordre  $< 3$  et de premier indice  $\alpha \neq 0$ , ou bien enfin un invariant d'ordre  $< 3$ .

La méthode de calcul exposée dans ce paragraphe permettrait d'ailleurs de préciser les formes possibles pour une fonction principale du troisième ordre; je me suis borné à indiquer ici les résultats qui seront utilisés dans la suite (').

### 5. Étude spéciale des fonctions principales de la forme

$$\varphi = p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u(x, y, z, \dots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1}) \quad (\text{involutions}).$$

On a alors  $\alpha = n$ ,  $\beta = 1$ , si  $n > 3$ , c'est-à-dire

$$(26) \quad \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] = \varphi(A n + B).$$

Dans le Mémoire cité plus haut, j'ai déjà étudié sommairement cette relation (p. 133), et j'ai montré qu'on en déduit

$$\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} = K_n,$$

en posant

$$(27) \quad K_n = \frac{1}{\mu} \left[ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] + m_1 M_{n-1} - N_{n-1} \right] \equiv A n + B + M_{n-1}.$$

Nous allons supposer tout de suite  $n \geq 6$ . Alors,  $K_n$  n'étant que du troisième ordre, la relation en  $u$  ci-dessus donne

$$u = K_n p_{0,n-1} + v(x, y, z, \dots, p_{1,n-3}, p_{0,n-2}, \omega),$$

en posant

$$\omega = p_{1,n-2} + m_1 p_{0,n-1}.$$

En portant ceci dans la relation (26), et en remarquant qu'on a  $n - 1 \geq 5$ , ce qui permet d'appliquer le développement (7), il vient

$$(28) \quad \left[ \frac{dv}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dv}{dy} \right] + p_{0,n-1} \left\{ \left[ \frac{dK_n}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dK_n}{dy} \right] \right\} \\ - [P_{n-1} p_{1,n-2} + Q_{n-1} p_{0,n-1} + I_{n-1}] = (K_n p_{0,n-1} + v)(A n + B).$$

---

(1) J'ai d'ailleurs fait cette classification dans un Mémoire déposé sous pli cacheté à l'Académie des Sciences, le 26 septembre 1921 (voir *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 176, 1923, p. 278).

Nous allons faire, sur cette équation en  $\varphi$ , les opérations faites sur  $\varphi$  au paragraphe 3; les calculs développés à cet endroit servent en ce qui concerne l'expression  $\left[\frac{d\varphi}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{d\varphi}{dy}\right]$ .

On remplace d'abord  $p_{1,n-2}$  par  $\omega - m_1 p_{0,n-1}$  et l'égalité des coefficients de  $p_{0,n-1}$  donne

$$-\mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-2}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-3}} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \mu K_{n-1} + \left[ \frac{dK_n}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dK_n}{dy} \right] + m_1 P_{n-1} - Q_{n-1} \equiv K_n (A n + B).$$

D'autre part, en dérivant l'identité (28) par rapport à  $\omega$ , et en posant  $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}$ , il vient

$$\left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-2}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-3}} \right) - \varphi' M_{n-2} - P_{n-1} \equiv \varphi' (A n + B).$$

Éliminons  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-2}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-3}} \right)$  entre ces deux relations, en tenant compte de l'identité (27); on obtient ainsi la formule fondamentale

$$(29) \quad \left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] = A \varphi' + \frac{1}{\mu} \left[ K_n (A n + B) + Q_{n-1} - m_2 P_{n-1} - \left[ \frac{dK_n}{dx} \right] - m_2 \left[ \frac{dK_n}{dy} \right] \right].$$

Nous poserons, pour simplifier,  $\varphi' = W - \frac{K_n}{\mu}$ ; il vient alors

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{dW}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW}{dy} \right] \equiv A W + H, \\ H \equiv \frac{1}{\mu} \left\{ K_n [A(n-1) + B] + Q_{n-1} - m_2 P_{n-1} - \frac{K_n}{\mu} \left[ \left[ \frac{d\mu}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\mu}{dy} \right] \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Il est à remarquer que  $H$  est du quatrième ordre, en général; les dérivées quatrièmes ne figurent d'ailleurs que dans  $(Q_{n-1} - m_2 P_{n-1})$ ; en se reportant à la formule (10), on a

$$H = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left[ \frac{\partial m_2}{\partial s} p_{1,3} + \frac{\partial m_2}{\partial t} p_{0,4} \right] + \text{termes d'ordre} < 4.$$

L'équation (30), en  $W$ , ne diffère de (17) que par le terme  $H$ ; il est donc évident que si  $W$  est d'ordre supérieur à 4, les opérations faites sur la relation (17) se feront de même sur celle-ci, le terme  $H$  n'ayant pas à intervenir.

Par conséquent, si  $W$  est d'ordre  $k \geq 4$ , on en déduira une fonction principale  $W'$ , d'indices  $(1-k, -1)$ . On pourra appliquer à cette fonction principale les résultats obtenus dans les paragraphes précédents.

En posant d'ailleurs  $W = W'(p_{1,k-1} + m_1 p_{0,k} + \omega)$  et en portant dans l'équation (30), on obtient une relation analogue, ce qui permettrait d'étudier la forme de  $W$ .

*Cas où  $W$  est d'ordre 4.* — Les opérations indiquées pour l'équation (17) et rappelées ci-dessus donnent ici les résultats suivants, en posant

$$\begin{aligned} p_{1,3} + m_1 p_{0,4} &= \omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial \omega} = W', \\ -\mu \left( \frac{\partial W}{\partial p_{0,3}} - m_1 \frac{\partial W}{\partial p_{1,2}} \right) + W' \mu K_4 &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left( \frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right), \\ \left[ \frac{dW'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW'}{dy} \right] + \left( \frac{\partial W}{\partial p_{0,3}} - m_1 \frac{\partial W}{\partial p_{1,2}} \right) - W' M_3 \\ &= A W' + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{\partial m_2}{\partial s}, \end{aligned}$$

et par suite, en éliminant  $\left( \frac{\partial W}{\partial p_{0,3}} - m_1 \frac{\partial W}{\partial p_{1,2}} \right)$ ,

$$(31) \quad \left[ \frac{dW'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW'}{dy} \right] = W'(-3A - B) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} C.$$

Deux hypothèses peuvent se présenter ici :

Si  $W'$  dépend encore de  $\omega$ , on traitera cette relation comme on a traité (17), le terme  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} C$  n'intervenant pas; on aboutira ainsi à une fonction principale  $W''$ , d'indices  $(-7, -2)$  et non identiquement nulle. Celle-ci donnera à son tour les résultats indiqués au théorème II.

Si  $W'$  est d'ordre inférieur à 4, elle aura la forme

$$W' = W_1(x, y, z, p, q, s, t, \omega), \quad \omega = p_{1,2} + m_1 p_{0,3}.$$



On a ainsi

$$\left[ \frac{dW_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW_1}{dy} \right] = -W_1(3A + B) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} C,$$

équation qui a exactement la forme (23), sauf que  $(\alpha - \beta)$  est remplacé ici par  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . On en déduira donc encore une fonction principale :

$$\theta = W_1^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} W_1' \quad [\text{indices } (-6, -2)].$$

Cette fonction  $\theta$  ne serait identiquement nulle que si l'on avait

$$\frac{1}{W_1} = - \frac{2[\omega + u(x, y, z, p, q, s, t)]}{(n-1)(n-2)}$$

et en portant cette valeur de  $W_1$  dans l'équation ci-dessus en  $W_1$ , on obtient précisément l'identité (14) qui caractérise les involutions du troisième ordre.

Dans ce cas on obtient donc une équation  $\omega + u = 0$  du troisième ordre, en involution.

*Cas où  $W$  est d'ordre  $k \leq 3$ .* — Dans ce cas on a

$$\left[ \frac{dW}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW}{dy} \right] \equiv (p_{1,3} + m_2 p_{0,4}) \left( \frac{\partial W}{\partial p_{0,3}} - m_1 \frac{\partial W}{\partial p_{1,2}} \right) + \text{termes d'ordre} \leq 3.$$

Si l'on se reporte à l'identité (30) et à la valeur de  $H$ , on voit que l'identité n'est possible que si

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = m_2 \frac{\partial m_2}{\partial s}.$$

Cette condition n'est d'ailleurs évidemment pas suffisante, mais l'étude complète de ce cas nous entrainerait trop loin du sujet qui fait l'objet de ce Mémoire; il suffit d'avoir exposé la méthode que nous utiliserons dans le cas particulier envisagé plus loin.

On peut résumer ainsi les résultats de ce paragraphe :

**THÉOREME III.** — *Si l'équation (1) est telle que  $\frac{\partial m_2}{\partial t} \neq m_2 \frac{\partial m_2}{\partial s}$  (c'est-à-dire n'admet pas de caractéristique II du premier ordre), et si elle admet*

*une équation en involution d'ordre  $n \geq 6$ , elle admet nécessairement une fonction principale, non identiquement nulle, d'ordre inférieur à  $n$  et de premier indice  $\alpha \neq 0$ , ou bien une involution du troisième ordre.*

Si l'on réunit les résultats fournis par les trois théorèmes et si l'on remarque qu'il ne peut exister de principale d'ordre inférieur à 3 lorsque  $\frac{\partial m_2}{\partial t} \neq m_2 \frac{\partial m_2}{\partial s}$  [comme le montrent immédiatement le calcul du début du paragraphe 3 et la formule (10)] on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — Si  $\frac{\partial m_2}{\partial t} \neq m_2 \frac{\partial m_2}{\partial s}$ , l'équation (1) ne peut admettre d'involution d'ordre  $\geq 6$  pour les caractéristiques II, sans admettre une involution d'ordre  $\leq 5$  relative à ces mêmes caractéristiques.

La méthode de calcul exposée dans ce Chapitre permet d'ailleurs l'étude des involutions d'ordre 5 et 4, ainsi qu'on en verra un exemple dans le Chapitre suivant.

## DEUXIÈME PARTIE.

### ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE (1).

Nous allons dans ce Chapitre appliquer, en les précisant, les résultats précédents aux équations linéaires; on aura ici  $C \equiv 0$ .

6. Nous aurons ici l'équation

$$(32) \quad r + (m_1 + m_2)s + m_1 m_2 t + \lambda(x, y, z, p, q) = 0,$$

soit

$$f = (m_1 + m_2)s + m_1 m_2 t + \lambda.$$

Nous poserons

(1) On peut faire une étude analogue pour les équations de la forme de Monge-Ampère, il n'y a aucune difficulté.

$$(33) \quad \omega = s + m_1 t, \quad C' = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial m_2}{\partial q} - m_2 \frac{\partial m_2}{\partial p} \right).$$

Le calcul montre qu'on a :

$$(34) \quad A\alpha + B\beta = a\omega + bt + c$$

avec

$$(35) \quad \begin{cases} a = (\beta - \alpha) \frac{\partial m_2}{\partial p} - \beta \frac{\partial m_1}{\partial p} - \beta C', \\ b = -\mu(\beta - \alpha) \frac{\partial m_2}{\partial p} + \beta \mu \frac{\partial m_1}{\partial p} + (\beta - \alpha) \mu C', \\ c = (\beta - \alpha) \left[ \frac{\partial m_2}{\partial y} + q \frac{\partial m_2}{\partial z} \right] + \frac{\beta}{\mu} \left[ \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial y} + \frac{\partial m_1}{\partial z} (p + m_2 q) \right. \\ \quad \left. + m_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial q} - \lambda \frac{\partial m_1}{\partial p} \right]. \end{cases}$$

On remarquera que

$$a + \frac{b}{\mu} \equiv -\alpha C',$$

La relation (14), qui caractérise les involutions du troisième ordre, rentre ici dans la forme générale puisque C est nul. Nous allons tout d'abord chercher une condition analogue pour que

$$(36) \quad \varphi = s + m_1 t + u(x, y, z, p, q) \equiv \omega + u = 0$$

soit en involution avec (32). Le calcul utilise l'identité suivante, facile à vérifier :

$$(37) \quad t \left[ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] \right] - \left( \frac{df}{dy} \right) = -\frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} \omega^2 + \delta \omega t + \alpha' \omega + b' t + c',$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \delta &= \mu \frac{\partial m_1}{\partial p} + m_1 \frac{\partial m_2}{\partial p} - \frac{\partial m_2}{\partial q} = \mu \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} - \mu C', \\ \alpha' &= -\frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial y} - q \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial p}, \\ b' &= \frac{\partial m_1}{\partial x} + p \frac{\partial m_1}{\partial z} - \lambda \frac{\partial m_1}{\partial p} + m_1 \frac{\partial m_1}{\partial y} + m_1 q \frac{\partial m_1}{\partial z} + m_1 \frac{\partial \lambda}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial q}, \\ c' &= -\frac{\partial \lambda}{\partial y} - q \frac{\partial \lambda}{\partial z}. \end{aligned}$$

En écrivant qu'il y a involution entre (32) et (36) (c'est-à-dire que les équations obtenues en dérivant celles-ci par rapport à  $x$  et  $y$  se réduisent à trois distinctes), on trouve :

$$(37 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial q} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{1}{\mu} (b' - \delta u), \\ \left( \frac{du}{dx} \right) + m_2 \left( \frac{du}{dy} \right) - \frac{u}{\mu} (b' - \delta u) - \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} u^2 - a' u + c' - \lambda \frac{\partial p}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

On vérifie sans peine que ces deux conditions sont équivalentes à l'identité

$$(38) \quad \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] \equiv \varphi(2A + B) + \varphi^2 C'.$$

Cette relation est donc nécessaire et suffisante pour l'involution du second ordre considérée; on constate qu'elle est tout à fait semblable à (14),  $C'$  jouant ici le rôle de  $C$ .

Il faut donc s'attendre à ce que les résultats de l'étude actuelle reproduisent ceux du cas général, les fonctions du deuxième ordre jouant le rôle qu'avaient celles du troisième dans le Chapitre précédent.

Les calculs du paragraphe 1 montrent que le développement (9) est valable ici pour  $n \geq 2$ , et le développement (7) pour  $n \geq 4$ .

On a ici :

$$(39) \quad Q_n - m_2 P_n = \frac{n(n-1)}{2} \left[ \mu \left[ \frac{d^2 m_2}{dy^2} \right] + 2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] \left[ \frac{dm_2}{dy} \right] \right] \\ + n \left\{ \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial q} \right] - m_2 \left[ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial p} \right] \right\} + \frac{\partial f}{\partial z},$$

les termes d'ordre le plus élevé dans cette expression sont

$$\frac{n(n-1)}{2} \mu \left[ \frac{\partial m_2}{\partial p} p_{1,2} + \frac{\partial m_2}{\partial q} p_{0,3} \right] \\ + n(p_{1,2} + m_2 p_{0,3}) \left( \frac{\partial m_1}{\partial q} - m_2 \frac{\partial m_1}{\partial p} \right) + n(p_{1,2} + m_1 p_{0,3}) \mu C'.$$

Cela posé, l'étude des fonctions principales faite au paragraphe 3 s'appliquera ici, même pour l'ordre 3, et l'on obtiendra le résultat suivant :

THÉORÈME V. — *Si une équation linéaire (32) n'admet pas d'invariant*

d'ordre  $\leq n$  pour les caractéristiques II, toute fonction principale d'ordre  $n > 2$  aura l'une des formes

$$\varphi = (p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u)^\gamma U \quad \text{ou} \quad \varphi = e^{(p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u)^\gamma V} \quad (\gamma = \text{const.}),$$

V étant elle-même une fonction principale d'ordre inférieur à  $n$ , non identique à D et de premier indice  $\alpha \neq 0$ , et  $(p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u)$  une fonction principale d'indices  $(n, 1)$  (involution).

7. *Étude spéciale des fonctions principales du second ordre.* — Une telle fonction sera de la forme  $\varphi(x, y, z, p, q, \omega)$  et vérifiera

$$(40) \quad \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] \equiv \varphi(A\alpha + B\beta);$$

développons et posons  $\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \varphi'$ ; il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} (p + m_2 q) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) (\omega - \mu t) \\ - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \varphi' \left\{ t \left[ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] \right] - \left( \frac{df}{dy} \right) \right\} \equiv \varphi(A\alpha + B\beta); \end{aligned}$$

en utilisant les formules (35) et (37), il est facile d'écrire cette relation en gardant comme variable  $\omega$  au lieu de  $s$ ; nous ferons ensuite les opérations habituelles; écrivons l'inégalité des termes en  $t$  :

$$- \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) + \varphi' (\delta \omega + b') \equiv \varphi b,$$

ensuite dérivons (40) par rapport à  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \\ + \varphi' \left[ -2\omega \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} + \delta t + a' \right] \equiv \varphi'(A\alpha + B\beta) + \varphi a. \end{aligned}$$

On déduit de ces deux relations :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] + \varphi' \left[ -2\omega \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} + \delta t + a' + \frac{\delta}{\mu} \omega + \frac{b'}{\mu} \right] \\ \equiv \varphi'(A\alpha + B\beta) + \varphi \left( a + \frac{b}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Or il est facile de constater par les formules (34) que le facteur de  $\varphi'$  au premier membre est précisément égal à  $2A + B$ ; on a remarqué en outre que  $a + \frac{b}{p} = -\alpha C'$ ; on a donc

$$(41) \quad \left[ \frac{d\varphi'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi'}{dy} \right] \equiv \varphi' [A(\alpha - 2) + B(\beta - 1)] - \alpha \varphi C'.$$

En posant  $\psi = \text{Log } \varphi$ , on aura

$$(42) \quad \left[ \frac{d\psi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\psi}{dy} \right] \equiv -\psi' (2A + B) - \alpha C',$$

équation analogue à (23) et que nous traiterons semblablement. Nous referons donc, en partant de (42), les opérations faites ci-dessus à propos de la relation (40), le terme  $-\alpha C'$  n'intervenant pas puisqu'il est du premier ordre; cela nous donnera une équation de la forme (41) mais où  $\alpha = -2$  et  $\beta = -1$ ; soit

$$(43) \quad \left[ \frac{d\psi''}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\psi''}{dy} \right] \equiv \psi'' [-4A - 2B] + 2\psi' C'.$$

Si nous ajoutons membre à membre les relations (43) et (42) après avoir multiplié celle-ci par  $2\psi'$  et l'autre par  $\alpha$ , il vient

$$\left[ \frac{d(\alpha\psi'' + \psi'^2)}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d(\alpha\psi'' + \psi'^2)}{dy} \right] \equiv (\alpha\psi'' + \psi'^2)(-4A - 2B),$$

ce qui montre que

$$\theta = \alpha\psi'' + \psi'^2 \equiv \frac{1}{\varphi^2} [\alpha\varphi\varphi'' + (1 - \alpha)\varphi'^2]$$

est une fonction principale d'indices  $(-4, -2)$ .

On peut continuer le raisonnement et la discussion comme au paragraphe 4 (p. 99); les seuls changements sont que nous aurons ici :

$\alpha$  au lieu de  $\alpha - \beta$  (ce qui revient à faire  $\beta = 0$ ) et « fonction du deuxième ordre » au lieu de troisième ordre.

On aboutira donc à la conclusion suivante :

**THÉORÈME VI.** — *S'il existe, pour une équation linéaire, une fonction principale d'ordre 2, pour le système II de caractéristiques, il existe au moins une involution du deuxième ordre, ou bien une fonction principale*

non identiquement nulle, de premier indice  $\alpha \neq 0$  et d'ordre inférieur à 2, pour le même système.

*Remarque sur les fonctions principales d'ordre  $< 2$ .* — S'il existe une fonction  $\varphi(x, y, z, p, q)$ , l'identité fondamentale s'écrira

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} (p + m_2 q) - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p} + (s + m_2 t) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \equiv \varphi (A\alpha + B\beta)$$

en écrivant l'identité en  $t$ , et en  $\omega = s - m_1 t$ , au moyen des formules (34) et (35) on voit que cela entraîne plusieurs conditions et en particulier  $\alpha C' = 0$ .

Il ne pourra donc exister de telles fonctions, à premier indice  $\alpha \neq 0$ , comme celles qui figurent dans les théorèmes ci-dessus, que si l'on a  $C' = 0$ , condition d'ailleurs non suffisante.

#### 8. Étude spéciale des fonctions principales de la forme

$$(p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u)$$

(involutions). — En se reportant au paragraphe 5, on voit que toute fonction principale  $\varphi = p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u$  conduira à l'équation (30) en  $W$ , à condition que  $n \geq 5$  (et non plus 6, car l'expression  $H$  n'est ici que du troisième ordre).

Si  $W$  est d'ordre  $k > 3$ , on en déduira une fonction principale  $W'$  d'indices  $(1 - k, -1)$ , le premier indice n'étant par conséquent pas nul.

*Cas où  $W$  est d'ordre 3.* — En posant  $\omega = p_{1,2} + m_1 p_{0,3}$ , on aura

$$W = W(x, y, z, p, q, s, t, \omega),$$

l'équation en  $W$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial x} + m_2 \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} (p + m_2 q) \\ & + \frac{\partial W}{\partial p} (-m_1 s - m_1 m_2 t - \lambda) + \frac{\partial W}{\partial q} (s + m_2 t) \\ & + \left( \frac{\partial W}{\partial t} - m_1 \frac{\partial W}{\partial s} \right) (p_{1,2} + m_2 p_{0,3}) - \frac{\partial W}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial W}{\partial \omega} \left\{ p_{0,3} \left[ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] \right] - \left( \frac{d^2 f}{dy^2} \right) \right\} = A W + H. \end{aligned}$$

En opérant comme d'habitude, on en tire les deux relations :

$$\begin{aligned} -\mu \left( \frac{\partial W}{\partial t} - m_1 \frac{\partial W}{\partial s} \right) + W' \mu K_3 &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left( \frac{\partial m_2}{\partial q} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial p} \right) \\ &\quad - (n-1) \left( \frac{\partial m_1}{\partial q} - m_2 \frac{\partial m_1}{\partial p} \right), \\ \left[ \frac{dW'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW'}{dy} \right] + \left( \frac{\partial W}{\partial t} - m_1 \frac{\partial W}{\partial s} \right) - W' M_2 \\ &= A W' + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{\partial m_2}{\partial p} + \frac{n-1}{\mu} \left( \frac{\partial m_1}{\partial q} - m_2 \frac{\partial m_1}{\partial p} \right) + (n-1) C' \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$(44) \quad \left[ \frac{dW'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW'}{dy} \right] = -W'(2A+B) + \frac{n(n-1)}{2} C'.$$

Si  $W'$  est effectivement du troisième ordre, le terme  $\frac{n(n-1)}{2} C'$  n'étant que du premier, on traitera cette équation comme on l'a fait pour (17) au paragraphe 3, et l'on obtiendra une fonction principale  $W''$ , non identiquement nulle et d'indices  $(-5, -2)$ .

Si  $W'$  est d'ordre inférieur à (3), on aura  $W' = W_1(x, y, z, p, q, \omega)$ , en écrivant ici

$$z = s + m_1 t,$$

par suite

$$\left[ \frac{dW_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW_1}{dy} \right] = -W_1(2A+B) + \frac{n(n-1)}{2} C;$$

cette relation ne diffère de (42) (p. 109) que par la substitution de  $\frac{n(n-1)}{2}$  à  $-z$ . On peut donc en conclure que l'expression

$$\theta = -\frac{n(n-1)}{2} W'_1 + W_1^2$$

est une fonction principale d'indices  $(-4, -2)$ .

Celle-ci ne serait identiquement nulle que si l'on avait :

$$\frac{1}{W_1} = -\frac{2}{n(n-1)} [\omega + u(x, y, z, p, q)]$$

et en portant alors cette valeur de  $W_1$  dans la relation ci-dessus en  $W_1$



on obtient

$$\left[ \frac{d(\omega + u)}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d(\omega + u)}{dy} \right] \equiv (2A + B)(\omega + u) + C'(\omega + u)^2$$

qui caractérise les involutions du second ordre  $\omega + u = 0$ .

*Cas où W est d'ordre inférieur à 3.* — Dans ce cas  $W' = 0$  et l'équation (44) montre que  $C'$  doit alors être nul.

Cette condition n'est pas suffisante, nous en reprendrons l'étude au paragraphe 14.

*En résumé*, si nous nous bornons aux équations linéaires pour lesquelles  $C' \neq 0$ , en tenant compte des théorèmes V et VI et de la remarque qui suit le théorème VI, on voit qu'il ne peut exister de fonction principale (et en particulier d'involution) d'ordre supérieur à 4 que s'il en existe d'ordre 2, 3 ou 4,

Nous allons réduire encore cet ordre dans le paragraphe suivant.

9. *Étude spéciale des involutions du quatrième ordre.* — Soit

$$\varphi = p_{1,3} + m_1 p_{0,4} + u(x, y, z, \dots, p_{1,2}, p_{0,3}),$$

on aura, d'après ce qui a été vu au paragraphe 5 [équations (26), (27) et (28)] que l'on peut utiliser ici puisque  $An + B$  et  $K_n$  sont du deuxième ordre :

$$\begin{aligned} u &= K_4 p_{0,3} + v(x, y, z, p, q, s, t, \omega), \\ \omega &= p_{1,2} + m_1 p_{0,3} \\ (46) \quad \left[ \frac{dv}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dv}{dy} \right] \\ &+ p_{0,3} \left\{ \left[ \frac{dK_4}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dK_4}{dy} \right] \right\} - J_3 \equiv (K_4 p_{0,3} + v)(4A + B). \end{aligned}$$

L'expression  $\left[ \frac{dv}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dv}{dy} \right]$  se calcule comme dans la formule (18).  
On a ici :

$$\begin{aligned} 4A + B &= a(s + m_1 t) + bt + c \quad [\text{formule (34) avec } \alpha = 4, \beta = 1], \\ K_4 &= 4A + B + M_3 \quad [\text{formule (27)}] \end{aligned}$$

et par suite

$$K_4 = (s + m_1 t) \left[ a + 2 \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} \right] + t \left[ b + 3 \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial q} - 2 m_1 \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} - \frac{\partial m_1 m_2}{\partial p} \right] + \text{termes d'ordre } < 2.$$

Enfin, la formule (4) montre que l'on a

$$J_3 = D_1 \omega^2 + D_2 \omega p_{0,3} + D_3 p_{0,3}^2 + D_4 \omega + D_5 p_{0,3} + D_6,$$

les quantités  $D$  étant du deuxième ordre. On a, en particulier,

$$\begin{aligned} D_1 &= 3 \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p}, & D_3 &= -3\mu \left( \frac{\partial m_1}{\partial q} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial p} \right), \\ D_2 &= 3 \left( \frac{\partial m_1}{\partial q} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial p} \right) + 3 \left( \frac{\partial m_2}{\partial q} - m_2 \frac{\partial m_2}{\partial p} \right) - 3\mu \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p}, \end{aligned}$$

on remarque l'identité

$$\mu D_1 + D_2 + \frac{D_3}{\mu} \equiv 3\mu C'.$$

Remarquons enfin que  $\left[ \frac{d(s + m_1 t)}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d(s + m_1 t)}{dy} \right]$  est une expression du second ordre seulement. Par suite, si nous appelons  $h$  le coefficient de  $t$  dans  $K_4$ , on aura

$$\begin{aligned} h &= 3 \left( \frac{\partial m_1}{\partial q} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial p} \right) + 2\mu \frac{\partial m_1}{\partial p}, \\ \left[ \frac{dK_4}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dK_4}{dy} \right] &\equiv h(\omega - \mu p_{0,3}) + \text{termes d'ordre } \leq 2. \end{aligned}$$

Cela posé, en gardant comme variable  $\omega$  au lieu de  $p_{1,2}$  dans l'identité (46), on constate au premier membre un terme du second degré en  $p_{0,3}$ ; en annulant son coefficient, on obtient la condition

$$\mu h + D_3 = 0.$$

Celle-ci se réduit à  $\frac{\partial m_1}{\partial p} = 0$ , condition nécessaire, mais que nous n'utiliserons pas sous cette dernière forme. Écrivons que le terme en  $p_{0,3}$  est nul dans (46); il vient [en utilisant la formule (19)] :

$$\begin{aligned} -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial t} - m_1 \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \frac{\partial v}{\partial \omega} \mu K_3 + \left\{ \left[ \frac{dK_4}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dK_4}{dy} \right] + \mu h p_{0,3} \right\} \\ - [D_2 \omega + D_5] \equiv K_4 (4A + B). \end{aligned}$$

Dérivons l'identité (46) par rapport à  $\omega$ , en utilisant toujours le même calcul de la page 95; on obtient

$$\left[\frac{dv'}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{dv'}{dy}\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - m_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right) - v' M_2 + h p_{0,3} - (2 D_1 \omega + D_2 p_{0,3} + D_4) \equiv v' (4A + B).$$

En éliminant  $\left(\frac{\partial v}{\partial t} - m_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right)$  entre ces deux relations, on a

$$\begin{aligned} \left[\frac{dv'}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{dv'}{dy}\right] &= v' A + \frac{1}{\mu} \left\{ K_4 (4A + B) - \left[\frac{dK_4}{dx}\right] \right. \\ &\quad \left. - m_2 \left[\frac{dK_4}{dy}\right] - h \mu p_{0,3} + D_2 \omega + D_3 \right\} \\ &\quad + 2 D_1 \omega + D_2 p_{0,3} + D_4 - h p_{0,3}. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$v' = W - \frac{K_4}{\mu},$$

et nous tiendrons compte en outre de ce que  $\mu h + D_3 = 0$ ; on a alors

$$(47) \quad \left[\frac{dW}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{dW}{dy}\right] \equiv A W + H$$

avec

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\mu} \left\{ K_4 (3A + B) - \frac{K_4}{\mu} \left[ \left[\frac{du}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{du}{dy}\right] \right] \right. \\ &\quad \left. + D_2 \omega + 2 D_3 p_{0,3} + D_3 + 2 D_1 \mu \omega + D_2 \mu p_{0,3} + D_4 \mu \right\}. \end{aligned}$$

Cette relation est semblable à (30) et nous la traiterons de la même manière, c'est-à-dire en somme que nous recommencerons les opérations ci-dessus : prenons d'abord les termes en  $p_{0,3}$  :

$$- \mu \left( \frac{dW}{dt} - m_1 \frac{dW}{ds} \right) + W' \mu K_3 \equiv \frac{1}{\mu} (2 D_3 + D_2 \mu),$$

dérivons (47) par rapport à  $\omega$  :

$$\left[\frac{dW'}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{dW'}{dy}\right] + \left(\frac{\partial W}{\partial t} - m_1 \frac{\partial W}{\partial s}\right) - W' M_2 \equiv W' A + \frac{1}{\mu} (D_2 + 2 \mu D_1),$$

d'où en éliminant  $\left(\frac{\partial W}{\partial t} - m_1 \frac{\partial W}{\partial s}\right)$  :

$$\left[\frac{dW'}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{dW'}{dy}\right] \equiv -W'(2A + B) + \frac{2}{\mu} \left(D_2 + \mu D_1 + \frac{D_3}{\mu}\right).$$

D'après l'identité remarquée à la page 113, on aura en définitive :

$$\left[\frac{dW'}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{dW'}{dy}\right] \equiv -W'(2A + B) + 6C'.$$

Or c'est exactement là l'équation (44) où l'on aurait fait  $n = 4$ . Nous en tirerons les mêmes conséquences.

Nous concluons donc, comme au paragraphe précédent :

**THÉORÈME VII.** — *S'il existe, pour une équation linéaire, dans laquelle  $\frac{\partial m_2}{\partial q} \neq m_2 \frac{\partial m_2}{\partial p}$ , une fonction principale (et en particulier une involution) d'ordre supérieur à 3, il existe nécessairement une involution d'ordre 2 ou 3 relative au même système de caractéristiques.*

## TROISIÈME PARTIE.

### ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE LA DÉFORMATION DES SURFACES.

Nous allons appliquer les résultats obtenus à l'équation de la déformation des surfaces.

10. On sait que la recherche des surfaces admettant un élément linéaire donné se ramène à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, de la forme de Monge-Ampère <sup>(1)</sup>.

Cette équation est susceptible de formes différentes suivant la nature des coordonnées curvilignes auxquelles on rapporte les surfaces en question ; mais si le passage d'un système de coordonnées à un autre ne dépend que de la solution d'équations différentielles, les équations

---

<sup>(1)</sup> Voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Livre VII, Chap. IV.

correspondantes s'intègrent, ou non, ensemble par la méthode de Darboux (<sup>1</sup>).

C'est pourquoi nous pourrions supposer les surfaces rapportées à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales, c'est-à-dire que nous prendrions l'élément linéaire sous la forme

$$(49) \quad ds^2 = dX^2 + \Gamma^2(X, Y) dY^2.$$

Nous poserons, pour abréger l'écriture :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial X} = \Gamma', \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2} = \Gamma'', \quad \dots$$

L'équation dont dépend le problème est alors (<sup>2</sup>)

$$(50) \quad RT - S^2 + R \left[ P \Gamma \Gamma' - \frac{Q}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial Y} \right] + 2SQ \frac{\Gamma'}{\Gamma} + \Gamma \Gamma'' (1 - P^2) - Q^2 \left[ \frac{\Gamma''}{\Gamma} + \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma} \right)^2 \right] = 0.$$

Appliquons à cette équation la transformation d'Ampère suivante

$$\begin{aligned} X = q, \quad Y = x, \quad Z = z - qy, \quad P = -y, \quad Q = p, \\ R = -\frac{1}{t}, \quad S = \frac{s}{t}, \quad T = \frac{rt - s^2}{t}, \quad RT - S^2 = -\frac{r}{t}; \end{aligned}$$

il vient alors

$$\Gamma(X, Y) = \Gamma(q, x), \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial q} = \Gamma', \quad \dots$$

et l'équation prend la forme linéaire

$$(51) \quad r + (m_1 + m_2)s + m_1 m_2 t + \lambda(x, y, p, q) = 0$$

avec

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= -2p \frac{\Gamma'}{\Gamma}, \\ m_1 m_2 &= \Gamma \Gamma'' \left( y^2 + \frac{p^2}{\Gamma^2} - 1 \right) + p^2 \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma} \right)^2, \\ \lambda &= -\frac{p}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - y \Gamma \Gamma'. \end{aligned}$$

(<sup>1</sup>) GOURSAT, *Leçons sur les équations du second ordre*, p. 226.

(<sup>2</sup>) DARBOUX, *loc. cit.*, t. III, p. 262.

On en tire

$$m_1 = -p \frac{\Gamma'}{\Gamma} + e, \quad m_2 = -p \frac{\Gamma'}{\Gamma} - e, \quad \mu = 2e$$

avec

$$e^2 = \Gamma \Gamma'' \left( 1 - \gamma^2 - \frac{p^2}{\Gamma^2} \right).$$

Toutes ces quantités sont indépendantes de la variable  $z$ .

L'équation (51) est de la forme étudiée dans le Chapitre précédent; les conclusions que l'on peut tirer du théorème VII dépendent de la valeur de l'expression

$$(52) \quad C' = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial m_2}{\partial q} - m_2 \frac{\partial m_2}{\partial p} \right] = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial q} \text{Log}(\Gamma^3 \Gamma'').$$

On peut remarquer d'ailleurs que

$$\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial m_1}{\partial q} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial p} \right) = -C'.$$

Cette expression ne sera identiquement nulle que si

$$\frac{\partial}{\partial q} (\Gamma^3 \Gamma'') = 0,$$

d'où

$$\Gamma^2 = Y_1 q^2 + 2 Y_2 q + Y_3 \quad (Y_1, Y_2, Y_3 \text{ fonctions de } x);$$

on aurait donc, pour les surfaces considérées :

$$(53) \quad ds^2 = dX^2 + [Y_1(Y)X^2 + 2Y_2(Y)X + Y_3(Y)] dY^2.$$

C'est l'élément linéaire d'une surface réglée  $(S_1)$ ; les courbes  $Y = \text{const.}$  sont des génératrices rectilignes sur  $(S_1)$ .

Toutes les surfaces  $(S)$  admettant l'élément linéaire (53) sont applicables sur  $(S_1)$ ; les géodésiques  $Y = \text{const.}$  correspondent aux génératrices rectilignes de  $(S_1)$  dans la déformation.

Considérons une famille de géodésiques différente de  $Y = \text{const.}$ ; celle-ci ne s'appliquera pas sur les droites de  $(S_1)$ , mais elle pourrait s'appliquer, peut-être, sur les génératrices rectilignes d'une autre surface réglée  $(S_2)$  : on sait que cela n'est possible que si les surfaces  $(S_1)$  et  $(S_2)$ , et par suite toutes les surfaces  $(S)$ , sont applicables sur une même quadrique  $(Q)$ , de telle manière que les droites de  $(S_1)$

et  $(S_2)$  correspondent respectivement aux deux systèmes de droites de  $(Q)$  dans la déformation  $(^1)$ .

Dans ce cas toutes les surfaces  $(S)$  seraient applicables sur  $(Q)$ , les deux familles de géodésiques considérées ci-dessus venant coïncider avec les droites de  $(Q)$ . Mais si nous choisissons alors sur  $(S)$  une troisième famille de géodésiques, différente des précédentes, il est clair que celle-ci ne pourra pas correspondre par déformation aux génératrices rectilignes d'une surface réglée, puisqu'elles ne correspondent certainement pas à un système de droites de  $(Q)$ .

Ce raisonnement serait en défaut si la quadrique  $(Q)$  admettait plus de deux systèmes de droites, c'est-à-dire si elle était formée de plans : dans ce cas les surfaces  $(S)$  seraient développables. Nous écarterons naturellement ce cas, pour lequel la question est résolue depuis longtemps.

Si l'on prend alors pour nouvelles lignes de coordonnées la troisième famille de géodésiques  $(y_1 = \text{const.})$  et leurs trajectoires orthogonales  $(x_1 = \text{const.})$ , le nouveau  $ds^2$  aura toujours la forme (49), mais  $\Gamma^2$  n'aura pas la forme (53) et par conséquent on aura  $C' \neq 0$ .

Or la détermination de  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x_1$  et  $y_1$  dépend de l'intégration d'équations différentielles bien connues ; par conséquent, si l'équation (51) admet une involution, le changement de variables ne modifiera pas cette propriété, ce qui est d'ailleurs presque évident dans le cas actuel. On pourra donc toujours, sauf dans le cas des surfaces développables, supposer  $C' \neq 0$ .

Le théorème VII nous fournit alors la conclusion suivante :

L'équation (51) ne peut admettre d'involution d'ordre quelconque que si elle admet une involution d'ordre 2 ou 3, pour le même système de caractéristiques.

Il reste donc à voir sous quelles conditions l'équation (51) admet une involution d'ordre 3 ou 2.

#### 11. *Involution du troisième ordre :*

$$\varphi = p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u(x, y, z, p, q, s, t).$$

---

(<sup>1</sup>) DARBOUX, *Surfaces*, t. III, p. 239.

On doit avoir l'identité

$$\left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] \equiv \varphi(3A + B)$$

qui s'écrit encore

$$(54) \quad \left[ \frac{du}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{du}{dy} \right] + p_{0,3} \left\{ \left[ \frac{dm_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dm_1}{dy} \right] \right\} - \left( \frac{d^2 f}{dy^2} \right) \\ = (p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u)(3A + B).$$

Remarquons tout d'abord que, si nous posons  $\frac{\partial u}{\partial z} = u'$ , on aura

$$\left[ \frac{du'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{du'}{dy} \right] \equiv u'(3A + B)$$

puisque les coefficients de  $f$  sont indépendants de  $z$ ; donc  $u'$  serait une fonction principale du deuxième ordre et d'après le paragraphe 7 il existerait une involution du deuxième ordre, cas qui sera étudié plus loin. Nous pourrions donc nous borner au cas où  $\frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$ . On a ici

$$\left( \frac{d^2 f}{dy^2} \right) = M_2 p_{1,2} + N_2 p_{0,3} + \left( \frac{dL}{dy} \right) \quad [\text{voir formule (3)}];$$

en identifiant les termes du troisième ordre dans la relation (54), il vient

$$(55) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - m_1 \frac{\partial u}{\partial s} = 3A + B + M_2.$$

Si nous posons

$$\omega = s + m_1 t,$$

$$u(x, y, z, p, q, s, t) \equiv v(x, y, p, q, \omega, t),$$

l'équation précédente s'écrit, en utilisant les formules (35) :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avec} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = 2V_1 \omega + V_2 \omega + V_3 \\ V_1 = -\mu C', \quad V_2 = \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} + \frac{\partial m_2}{\partial p} - C', \\ V_3 = 2 \frac{\partial m_1}{\partial y} + \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial y} + m_1 \frac{\partial \lambda}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial q} - \lambda \frac{\partial m_1}{\partial p} \right]. \end{array} \right.$$



On en déduit

$$v = V_1 t^2 + V_2 \omega t + V_3 t + W(x, y, p, q, \omega).$$

Nous porterons cette expression dans l'équation (54); les termes du troisième ordre disparaissent, et il reste une identité en  $x, y, p, q, \omega, t$ . Comme  $W$  est une fonction inconnue, mais indépendante de  $t$ , on pourra exprimer l'identité par rapport à  $t$ .

Le calcul montre, en partant de la formule (2), que

$$\left(\frac{dL}{dy}\right) = L_1 t + L_2 t^2 + L_3 t^3$$

avec

$$(56 \text{ bis}) \left\{ \begin{aligned} L_1 &= \omega^2 \left[ \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2(m_1 + m_2)}{\partial p \partial q} \right] + 2 \omega \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q \partial y}, \\ L_2 &= \omega \left[ \frac{\partial^2(m_1 + m_2)}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial p \partial q} - 2 m_1 \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial p^2} - 4 m_1 \frac{\partial^2(m_1 + m_2)}{\partial p \partial q} \right] \\ &\quad + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} - 2 m_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q} + 2 \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial q \partial y}, \\ L_3 &= \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial q^2} - m_1 \frac{\partial^2(m_1 + m_2)}{\partial q^2} - 2 m_1 \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial p \partial q} \\ &\quad + m_1^2 \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial p^2} + 2 m_1^2 \frac{\partial^2(m_1 + m_2)}{\partial p \partial q}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (54) s'écrit ainsi, en utilisant la formule (37) et en donnant à  $a, b, c$  les valeurs correspondant à  $\alpha = 3, \beta = 1$  dans les formules (35) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v}{\partial y} + (\omega - \mu t) \left( \frac{\partial v}{\partial q} - m_1 \frac{\partial v}{\partial p} \right) - \lambda \frac{\partial v}{\partial p} \\ &\quad + \frac{\partial v}{\partial \omega} \left[ - \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} \omega^2 + \delta \omega t + a' \omega + b' t + c' \right] \\ &\equiv L_1 t + L_2 t^2 + L_3 t^3 + v(a \omega + b t + c). \end{aligned}$$

L'identification en  $t$  se fait aisément; on constate d'ailleurs que les termes en  $t^3$  et  $t^2$  disparaissent; il reste donc deux équations

$$(57) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial q} - m_1 \frac{\partial W}{\partial p} - \frac{\partial W}{\partial \omega} \left( \frac{\delta \omega + b'}{\mu} \right) \equiv -W \frac{b}{\mu} + H_0 + H_1 \omega + H_2 \omega^2, \\ &\frac{\partial W}{\partial x} + m_2 \frac{\partial W}{\partial y} - \lambda \frac{\partial W}{\partial p} + \frac{\partial W}{\partial \omega} \left[ -C' \omega^2 + \left( c + \frac{\partial m_2}{\partial y} \right) \omega + c' \right] \\ &\equiv W(-3C' \omega + c) - (H_0 \omega + H_1 \omega^2 + H_2 \omega^3); \end{aligned} \right.$$

où  $H_0, H_1, H_2$  sont certaines fonctions de  $(x, y, p, q)$ .

On vérifie facilement que les conditions précédentes sont équivalentes à l'identité suivante :

$$(58) \quad \left[ \frac{dW}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW}{dy} \right] \equiv W(a\omega + bt + c) - \mu t[H_0 + H_1\omega + H_2\omega^2].$$

Faisons sur cette identité les opérations habituelles, expliquées en détail au paragraphe 3; en posant  $\frac{\partial W}{\partial \omega} = W'$ , on arrive à

$$(59) \quad \left[ \frac{dW'}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW'}{dy} \right] + W' \left[ \frac{\partial m_2}{\partial p} \omega + (\delta - b)t + \frac{\partial m_2}{\partial y} \right] \\ \equiv -3C'W - (H_2\omega^2 + H_1\omega + H_0) - \mu t[2H_2\omega + H_1];$$

en opérant toujours de même, on obtient ainsi successivement :

$$(60) \quad \left[ \frac{dW''}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW''}{dy} \right] + W'' \left[ \left( a + 2 \frac{\partial m_2}{\partial p} \right) \omega + (2\delta - b)t + c + 2 \frac{\partial m_2}{\partial y} \right] \\ \equiv -4C'W' - [4H_2\omega + 2H_1 + 2H_2\mu t],$$

$$(61) \quad \left[ \frac{dW'''}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW'''}{dy} \right] + W''' \left[ \left( 2a + 3 \frac{\partial m_2}{\partial p} \right) \omega + (3\delta - b)t + 2c + 3 \frac{\partial m_2}{\partial y} \right] \\ \equiv -3C'W'' - 6H_2,$$

$$(62) \quad \left[ \frac{dW^{IV}}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW^{IV}}{dy} \right] + W^{IV} \left[ \left( 3a + 4 \frac{\partial m_2}{\partial p} \right) \omega \right. \\ \left. + (4\delta - b)t + 3c + 4 \frac{\partial m_2}{\partial y} \right] \equiv 0.$$

On vérifie facilement, au moyen des formules (35), que le coefficient de  $W^{IV}$  est précisément égal à  $5A + 3B$ . L'équation ci-dessus s'écrit donc

$$\left[ \frac{dW^{IV}}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW^{IV}}{dy} \right] \equiv W^{IV}[-5A - 3B]$$

et nous aurons encore dans ce cas une fonction principale du deuxième ordre, à moins que  $W^{IV}$  ne soit identiquement nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$W = \omega_0 + \omega_1\omega + \omega_2\omega^2 + \omega_3\omega^3.$$

On porte cette valeur dans le système (57) et l'on obtient ainsi huit équations en  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  dont il faut voir si elles admettent une solution.

Ce calcul est trop long et trop pénible pour être reproduit ici intégralement; je vais indiquer simplement comment on peut le conduire,

de la manière qui me paraît la plus pratique; posons

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{\partial \omega}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \omega}{\partial p}, \\ F(\omega) &= \frac{\partial \omega}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \omega}{\partial p}. \end{aligned}$$

Si, dans les équations (57), nous écrivons l'égalité des coefficients de  $\omega^3$ , nous obtenons

$$(63) \quad E(\omega_3) = \omega_3 \frac{3\delta - b}{\mu},$$

$$(64) \quad F(\omega_3) = -\omega_3 \left[ 2c + 3 \frac{\partial m_2}{\partial y} \right] - C' \omega_2 - H_2.$$

Prenons maintenant les coefficients de  $\omega^2$  dans la première

$$(65) \quad E(\omega_2) = 3\omega_3 \frac{b'}{\mu} + \omega_2 \frac{2\delta - b}{\mu} + H_2.$$

On peut éliminer  $\omega_2$  entre ces deux dernières équations et obtenir ainsi une deuxième équation ne contenant que  $\omega_3$ ; on a en effet, d'après (63) et (64) :

$$\begin{aligned} E[F(\omega_3)] - F[E(\omega_3)] &= -\omega_3 \left[ E \left( 2c + 3 \frac{\partial m_2}{\partial y} \right) + F \left( \frac{3\delta - b}{\mu} \right) + 3C' \frac{b'}{\mu} \right] \\ &\quad + \omega_2 \left[ \frac{\partial}{\mu} C' - E(C') \right] - E(H_2) + H_2 \left( \frac{3\delta - b}{\mu} - C' \right). \end{aligned}$$

On tire  $\omega_2$  de l'équation (64) et l'on porte dans celle-ci. On a ainsi deux équations en  $\omega_3$  qui doivent admettre une solution; ces équations s'écrivent, en remplaçant  $\omega_3$  par  $\omega$ , afin d'abrégier l'écriture :

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \omega}{\partial p} = \omega \frac{3\delta - b}{\mu}, \\ &\frac{\partial \omega}{\partial x} \left[ \frac{\delta}{\mu} - \frac{E(C')}{C'} \right] + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left\{ E(m_2) + m_2 \left[ \frac{\delta}{\mu} - \frac{E(C')}{C'} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\partial \omega}{\partial p} \left[ F(m_1) - E(\lambda) - \lambda \frac{\delta}{\mu} + \lambda \frac{E(C')}{C'} \right] \\ &= W \left\{ \left[ \frac{E(C')}{C'} - \frac{\delta}{\mu} \right] \left( 2c + 3 \frac{\partial m_2}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - E \left( 2c + 3 \frac{\partial m_2}{\partial y} \right) - F \left( \frac{3\delta - b}{\mu} \right) - 3 \frac{C' b'}{\mu} \right\} \\ &\quad - E(H_2) + H_2 \left[ \frac{2\delta - b}{\mu} - C' + \frac{E(C')}{C'} \right]. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de ces équations se calculent très facilement au moyen des formules suivantes, en partant des formules (51) : on a vu

$$\frac{\partial m_2}{\partial q} - m_2 \frac{\partial m_2}{\partial p} = \mu C', \quad \frac{\partial m_1}{\partial q} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial p} = -\mu C', \quad C' = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial q} \text{Log}(\Gamma'' \Gamma^3);$$

on en déduit

$$E(C') = \frac{\partial C'}{\partial q} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \text{Log}(\Gamma'' \Gamma^3),$$

$$E(m_2) = \mu C' - \mu \frac{\partial m_2}{\partial p}, \quad E(m_1) = -\mu C',$$

d'où

$${}_2E(e) = E(\mu) = E(m_1) - E(m_2) = \mu \frac{\partial m_2}{\partial p} - {}_2\mu C'.$$

On trouve par le calcul

$$c = -\frac{1}{e} \gamma \Gamma \Gamma'' + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \text{Log}(\Gamma'' \Gamma^3),$$

$$b' = \frac{e}{2} \frac{\partial}{\partial x} \text{Log}\left(\frac{\Gamma''}{\Gamma}\right),$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial y} = -\frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{e} \gamma \Gamma \Gamma'',$$

$$F(e) = \frac{1}{2e} F(e^2) = \gamma \Gamma \Gamma'' + \frac{e}{2} \frac{\partial}{\partial x} \text{Log}(\Gamma \Gamma'').$$

Rappelons enfin que

$$\frac{\partial}{\mu} = \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} - C', \quad \frac{b}{\mu} = \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} + \frac{\partial m_2}{\partial p} - {}_2C',$$

$$V_2 = \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} + \frac{\partial m_1}{\partial p} - C' = \frac{{}_3\partial - b}{\mu},$$

$$\mu H_2 = \frac{\partial V_2}{\partial q} - m_1 \frac{\partial V_2}{\partial p} + V_2 \left( \frac{\partial m_2}{\partial p} + C' \right) - \left[ \frac{\partial^2(m_1 m_2)}{\partial p^2} + {}_2 \frac{\partial^2(m_1 + m_2)}{\partial p \partial q} \right].$$

Il faut alors voir si les équations (66) ont une solution; on peut employer la méthode classique, mais il est plus simple de remarquer que la fonction  $u$  de l'équation (54) est unique, sans quoi l'on aurait deux involutions du troisième ordre, donc un invariant dont le dénominateur serait une fonction principale de deuxième ordre et dont l'existence entraînerait par conséquent des conditions étudiées au paragraphe suivant.

On peut donc supposer que la solution du système (66) est unique; comme les coefficients de ce système sont tous rationnels en  $y, p$  et  $e$ , l'intégrale le sera aussi; en tenant compte de la valeur de  $e$ , on voit que l'on pourra écrire

$$w = U(y, p) + eV(y, p),$$

$U, V$  rationnels en  $y$  et  $p$  mais dépendant en outre de  $x, q$ . La discussion conduit à une impossibilité dans tous les cas.

On verra un exemple d'un calcul analogue, mais plus simple, dans le paragraphe suivant.

En résumé, dans l'hypothèse toujours possible  $C' \neq 0$ , nous trouvons que l'équation (51) ne peut admettre d'involution du troisième ordre sans en admettre également du deuxième.

12. *Involution du second ordre*  $\varphi = s + m_1 t + u(x, y, z, p, q)$ . — On doit avoir l'identité

$$(68) \quad \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d\varphi}{dy} \right] \equiv \varphi(2A + B) + C'\varphi^2$$

avec

$$\begin{aligned} 2A + B &= a\omega + bt + c, \\ a &= -\frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} - C', \quad b = \mu \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} - \mu C', \\ c &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \text{Log}(\Gamma''\Gamma^3). \end{aligned}$$

L'identité (68) se décompose en deux :

$$(69) \quad \begin{cases} E(u) = \frac{\partial u}{\partial q} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p} = \gamma u + \varepsilon, \\ F(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + m_2 \frac{\partial u}{\partial y} + (p + m_2 q) \frac{\partial u}{\partial z} - \lambda \frac{\partial u}{\partial p} = C' u^2 + \xi u + \eta \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma &= C' + 2 \frac{\Gamma'}{\Gamma}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \text{Log} \left( \frac{\Gamma''}{\Gamma} \right), \\ \xi &= c = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \text{Log}(\Gamma''\Gamma^3), \quad \eta = -c' = -\Gamma\Gamma'. \end{aligned}$$

On remarque que, dans les équations (69), tous les coefficients des seconds membres sont indépendants de  $y$  et de  $p$ . Nous poserons dans

la suite

$$g^4 = \frac{\Gamma}{\Gamma''}, \quad \text{d'où} \quad \Gamma'' \Gamma^3 = \frac{\Gamma^4}{g^4},$$

et

$$e^2 = \frac{\Gamma^2}{g^4} \left( 1 - \gamma^2 - \frac{p^2}{\Gamma^2} \right), \quad \int \frac{dq}{g^2} = K(q, x).$$

Je dis tout d'abord que les équations (69) doivent admettre une solution indépendante de  $z$  : en effet, l'identité (68) s'écrit aussi

$$\left[ \frac{d \frac{1}{\varphi}}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{d \frac{1}{\varphi}}{dy} \right] = - \frac{1}{\varphi} (2A + B) - C';$$

en dérivant par rapport à  $z$ , on voit que  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varphi} \right) = - \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial u}{\partial z}$  est une fonction principale d'indices  $(-2, -1)$ ; par suite, l'expression

$$\varphi_1 = \frac{\varphi^2}{\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{(\omega + u)^2}{u'} \quad \left( u' = \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

est une fonction principale d'indices  $(2, 1)$ . Il en est évidemment de même pour  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ ; le quotient de ces deux fonctions principales ne peut être identique à une constante; ce serait donc un invariant, ainsi que toutes ses dérivées successives par rapport à  $z$ ; si  $C' \neq 0$ , on en déduit la propriété énoncée, laquelle peut d'ailleurs se tirer directement des conditions d'intégrabilité du système (69).

Le système (69) se réduit donc à

$$(70) \quad \begin{cases} E(u) = \frac{\partial u}{\partial q} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p} = \gamma u + \varepsilon, \\ F(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + m_2 \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \frac{\partial u}{\partial p} = C' u^2 + \xi u + \eta. \end{cases}$$

Nous allons faire subir à ce système quelques transformations :

Posons

$$\frac{p}{\Gamma \sqrt{1 - \gamma^2}} = \sin(\theta - K), \quad K(q, x) = \int \frac{dq}{g^2}$$

et gardons la variable  $\theta$  au lieu de  $p$ ; on a

$$(71) \quad \begin{cases} u(x, y, z, p, q) = \psi(x, y, z, \theta, q), \\ \frac{\partial \psi}{\partial q} = \gamma \psi + \varepsilon, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} + u_1 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = C' \psi^2 + \xi \psi + \eta \end{cases}$$

avec

$$(72) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \left[ \Gamma' \cos(\theta - K) - \frac{\Gamma}{g^2} \sin(\theta - K) \right], \\ v_1 = m_2 = -\sqrt{1-y^2} \left[ \Gamma' \sin(\theta - K) + \frac{\Gamma}{g^2} \cos(\theta - K) \right]. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$\int \frac{dq}{g\Gamma} = K_1(q, x), \quad \psi = g\Gamma[K_1(q, x) + \Pi(x, y, z, \theta, q)].$$

Le système devient alors

$$(73) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 & \Pi = \Pi(x, y, z, \theta), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \Pi}{\partial y} + u_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \lambda_1 \Pi^2 + \mu_1 \Pi + v_1 \end{cases}$$

avec

$$(74) \quad \begin{cases} \lambda_1 = C'\Gamma g, \\ \mu_1 = 2K_1\lambda_1 - 2 \frac{\partial \text{Log } g}{\partial x}, \\ v_1 = \lambda_1 K_1^2 - 2K_1 \frac{\partial \text{Log } g}{\partial x} - \frac{\Gamma'}{g} - \frac{\partial K_1}{\partial x}. \end{cases}$$

Du système (73) on déduit, en indiquant par des accents les dérivations par rapport à  $q$  :

$$(75) \quad \begin{cases} v_1' \frac{\partial \Pi}{\partial y} + u_1' \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \lambda_1' \Pi^2 + \mu_1' \Pi + v_1', \\ v_1'' \frac{\partial \Pi}{\partial y} + u_1'' \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \lambda_1'' \Pi^2 + \mu_1'' \Pi + v_1''. \end{cases}$$

On a ici :

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} u'_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{g^2} + \frac{2\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left[ \frac{\Gamma g'}{g^3} \sin(\theta - K) + \frac{\Gamma}{g^4} \cos(\theta - K) \right], \\ u''_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial q} \frac{1}{g^2} + \frac{2\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left\{ \left( \frac{\Gamma'}{g^4} - \frac{5\Gamma g'}{g^5} \right) \cos(\theta - K) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\Gamma}{g^6} + \left( \frac{\Gamma g'}{g^3} \right)' \right] \sin(\theta - K) \right\}, \\ v'_1 &= -2\sqrt{1-\gamma^2} \left[ \frac{\Gamma}{g^4} \sin(\theta - K) - \frac{\Gamma g'}{g^3} \cos(\theta - K) \right], \\ v''_1 &= -2\sqrt{1-\gamma^2} \left\{ \left( \frac{\Gamma'}{g^4} - \frac{5\Gamma g'}{g^5} \right) \sin(\theta - K) \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{\Gamma}{g^6} + \left( \frac{\Gamma g'}{g^3} \right)' \right] \cos(\theta - K) \right\}. \end{aligned} \right.$$

*Étude du système (75).* — Remarquons tout d'abord que si  $\Pi$  ne dépend pas de l'une des variables  $\gamma, \theta$ , il ne dépendra pas non plus de l'autre : cela se voit immédiatement sur les équations (71). D'autre part, il est facile de vérifier que l'on ne peut jamais avoir

$$\frac{u''_1}{u'_1} = \frac{v''_1}{v'_1} = \frac{\lambda''_1}{\lambda'_1} = \frac{\mu''_1}{\mu'_1} = \frac{\nu''_1}{\nu'_1};$$

les deux premiers rapports donnent en effet

$$g'' + 2 \frac{g'^2}{g} + \frac{1}{g^3} = 0, \quad \text{d'où} \quad g' = \pm \frac{\sqrt{X^2 - g^2}}{g^2},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\Gamma X_1}{g^2} \quad (X, X_1 \text{ fonctions de } x).$$

Ces relations permettent de calculer les éléments qui figurent dans les derniers rapports et l'on obtient un ensemble de conditions incompatibles. Dans ces conditions, posons

$$\Delta = v'_1 u''_1 - v''_1 u'_1.$$

Si l'on avait  $\Delta = 0$ , l'existence d'une solution pour les équations (75)



entraînerait en particulier

$$\frac{\nu_1''}{\nu_1'} = \frac{\lambda_1'' \Pi^2 + \mu_1'' \Pi + \nu_1''}{\lambda_1' \Pi^2 + \mu_1' \Pi + \nu_1'},$$

d'où l'on tirerait pour  $\Pi$  une valeur indépendante de  $\gamma$ , puisque les rapports ci-dessus sont indépendants de  $\gamma$ .

Par suite la valeur de  $\Pi$  serait indépendante de  $\gamma$  et de  $p$  d'après les remarques précédentes.

Supposons maintenant  $\Delta \neq 0$ ; on tire alors des équations (75)

$$(77) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} = H_0 + H_1 \Pi + H_2 \Pi^2, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = K_0 + K_1 \Pi + K_2 \Pi^2; \end{cases}$$

d'où, en dérivant par rapport à  $q$ ,

$$(78) \quad \begin{cases} H_0' + H_1' \Pi + H_2' \Pi^2 = 0, & K_0' + K_1' \Pi + K_2' \Pi^2 = 0, \\ H_0'' + H_1'' \Pi + H_2'' \Pi^2 = 0, & K_0'' + K_1'' \Pi + K_2'' \Pi^2 = 0; \end{cases}$$

s'il y avait plusieurs solutions, on devrait donc avoir

$$\frac{H_0''}{H_0'} = \frac{H_1''}{H_1'} = \frac{H_2''}{H_2'}, \quad \frac{K_0''}{K_0'} = \frac{K_1''}{K_1'} = \frac{K_2''}{K_2'}.$$

Ces relations doivent être des identités en  $\gamma$  et  $\theta$ ;  $\gamma$ , en particulier, y figure d'une façon assez simple et le calcul montre que les conditions ainsi obtenues entraînent  $H_0 = H_1 = H_2 = K_0 = K_1 = K_2 = 0$ ; c'est-à-dire que  $\Pi$  serait encore indépendant de  $\gamma$  et de  $p$ .

Reste le cas où le système (75) admettrait une solution unique. Celle-ci sera une racine commune aux équations du second degré (78) et par conséquent sera rationnelle en  $\gamma$  et  $\sqrt{1-\gamma^2}$  puisque les coefficients de ces équations le sont aussi. On aura donc

$$\Pi = P(\gamma) + Q(\gamma)\sqrt{1-\gamma^2},$$

$P$  et  $Q$  dépendant aussi de  $x$  et de  $\theta$  mais étant rationnels en  $\gamma$ . En portant cette expression dans les conditions (77), chacune se décompose en deux; on peut d'ailleurs la porter aussi dans l'équation (73) qui se décompose alors en deux; en écrivant  $P$  et  $Q$  sous forme décomposée

en éléments simples, on voit sans difficulté que la partie entière est de degré nul pour P et Q, et que les pôles sont les mêmes et du premier ordre :

$$P = \sum \frac{P_\alpha}{y - \alpha} + P_0, \quad Q = \sum \frac{Q_\alpha}{y - \alpha} + Q_0.$$

La discussion des équations (78) montre encore dans ce cas que l'on doit avoir nécessairement

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0.$$

Mais alors, en revenant au système (70) et aux variables primitives, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

et l'on est ramené à étudier le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial q} &= \gamma u + \varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= C' u^2 + \xi u + \eta. \end{aligned}$$

Posons

$$u = \Gamma \Phi;$$

il vient alors

$$(79) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial q} = \Phi \left( C' + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \right) - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \text{Log } g}{\partial x}, & C' + \frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{\partial \text{Log } g}{\partial q}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi^2 C' \Gamma - \Phi \frac{\partial \text{Log } g}{\partial x} - \Gamma', & C' \Gamma = \Gamma \frac{\partial}{\partial q} \left( \text{Log } \frac{g}{\Gamma} \right). \end{cases}$$

Il est à remarquer que ces équations ne changent pas si l'on y permute  $m_1$  et  $m_2$ . Par conséquent, s'il en existe une solution  $u(x, q)$ , on aura une involution pour *chacun* des systèmes de caractéristiques

$$s + m_1 t + u = 0, \quad s + m_2 t + u = 0.$$

Or ce système se rencontre également dans la question suivante :

13. *Conditions pour qu'une surface puisse devenir réglée par déformation.*

Soit une surface qui a pour élément linéaire :

$$ds^2 = du^2 + \Gamma^2(u, v) dv^2,$$

il faut voir sous quelles conditions il existera une transformation

$$U = U(u, v), \quad V = V(u, v),$$

telle que l'élément ci-dessus prenne la forme

$$ds^2 = dU^2 + (\alpha U^2 + 2\beta U + \gamma) dV^2,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  fonctions de  $V$ .

On posera

$$g^2 = \alpha U^2 + 2\beta U + \gamma$$

et l'on peut d'ailleurs toujours supposer  $\alpha\gamma - \beta^2 \equiv 1$ . Darboux a donné, pour résoudre ce problème, une méthode générale (1); nous allons, dans ce cas, opérer directement. On doit avoir

$$(80) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + (\alpha U^2 + 2\beta U + \gamma) \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 = 1, \\ \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + (\alpha U^2 + 2\beta U + \gamma) \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} = 0, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + (\alpha U^2 + 2\beta U + \gamma) \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 = \Gamma^2. \end{cases}$$

On sait d'ailleurs que la courbure totale est un invariant; on aura donc

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial u^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial U^2} = \frac{1}{g^4},$$

d'où

$$g^4 = \frac{\Gamma}{\Gamma''}$$

en posant

$$\Gamma' = \frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \quad \Gamma'' = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial u^2}, \quad \dots$$

La deuxième équation (80) s'écrit alors,  $\lambda$  étant arbitraire,

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \lambda \frac{\partial V}{\partial v}, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = -\frac{g^2}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial u}.$$

(1) DARBOUX, *Surfaces*, t. III, Chap. II.

Mais alors, la première et la troisième montrent que  $\lambda = \frac{g}{\Gamma}$ , et par suite on a, au lieu de (80), le système suivant (1) :

$$(81) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{g}{\Gamma} \frac{\partial V}{\partial v}, & \frac{\partial U}{\partial v} = -\Gamma g \frac{\partial V}{\partial u}, \\ \frac{g^2}{\Gamma^2} \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 + g^2 \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 = 1. \end{cases}$$

Posons

$$(82) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{1}{g} \sin V_1, \\ \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\Gamma}{g} \cos V_1. \end{cases}$$

La troisième équation (81) sera toujours vérifiée et il vient

$$(82 \text{ bis}) \quad \frac{\partial U}{\partial u} = \cos V_1, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = -\Gamma \sin V_1.$$

Il suffit maintenant d'exprimer que les systèmes (82) et (82 bis) sont compatibles; ce qui donne

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{g} \sin V_1 \right)}{\partial v} = \frac{\partial \left( \frac{\Gamma}{g} \cos V_1 \right)}{\partial u}, \quad \frac{\partial (\cos V_1)}{\partial v} = -\frac{\partial (\Gamma \sin V_1)}{\partial u};$$

on constate, en développant, que ce système peut s'écrire

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial V_1}{\partial u} &= \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \text{Log } g}{\partial v} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \text{Log } g}{\partial v} \cos 2 V_1 - \frac{\partial \text{Log } g}{\partial u} \sin 2 V_1, \\ 2 \frac{\partial V_1}{\partial v} &= \left( 2 \Gamma' - \Gamma \frac{\partial \text{Log } g}{\partial u} \right) - \Gamma \frac{\partial \text{Log } g}{\partial u} \cos 2 V_1 + \frac{\partial \text{Log } g}{\partial v} \sin 2 V_1. \end{aligned}$$

En posant enfin

$$\Phi = \cotang V_1,$$

ce système prend la forme

$$(83) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \Phi \frac{\partial \text{Log } g}{\partial u} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \text{Log } g}{\partial v}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \Phi^2 \Gamma \frac{\partial}{\partial u} \left( \text{Log } \frac{g}{\Gamma} \right) - \Phi \frac{\partial \text{Log } g}{\partial v} - \Gamma'. \end{cases}$$

---

(1) En réalité, on trouve  $\lambda = \pm \frac{g}{\Gamma}$ , mais la suite montre que le signe est indifférent.

On retrouve le système (79), les variables  $q, x$  étant changées respectivement en  $u$  et  $v$ .

Or les variables  $q, x$  correspondent à  $X$  et  $Y$  dans le  $ds^2$  primitif.

*Le problème de l'existence des involutions du second ordre pour l'équation (51) est donc exactement le même que celui de l'existence de transformations permettant de mettre l'élément linéaire (51) sous la forme (53).*

La discussion faite à la page 118 nous donne donc la conclusion suivante :

1° Si les surfaces (S), correspondant à l'élément linéaire donné (51), ne sont pas applicables sur une surface réglée, l'équation n'admet pas d'involution du second ordre; par suite elle ne peut admettre *aucune* involution d'ordre  $> 1$ .

Elle n'admet donc *aucun invariant*, pour *aucun des systèmes* de génératrices.

2° Si les surfaces (S) sont applicables sur une surface réglée, mais non sur une quadrique, l'équation de la déformation admettra *une seule involution du second ordre* pour chaque système de caractéristiques.

Nous reviendrons sur l'étude de ce cas au paragraphe suivant.

3° Si les surfaces (S) sont applicables sur une quadrique, l'équation de la déformation admettra *deux involutions du second ordre distinctes*.

Il ne saurait y avoir plus de deux involutions que si la transformation de l'élément linéaire était possible de plus de deux manières différentes, c'est-à-dire si les surfaces sont développables.

D'ailleurs, l'identité fondamentale (38) montre bien que si l'on a trois involutions, on peut en déduire un invariant, c'est-à-dire une infinité d'involutions du second ordre.

14. *Surfaces applicables sur une surface réglée.* — Nous prendrons alors l'élément linéaire sous la forme caractéristique (53), c'est-à-dire que nous prendrons, après la transformation d'Ampère,

$$\Gamma^2 = Y_1 q^2 + 2 Y_2 q + Y_3.$$

$Y_1, Y_2, Y_3$  sont trois fonctions de  $x$ , et l'on peut toujours supposer  $Y_1 Y_3 - Y_2^2 = 1$ , si les surfaces ne sont pas développables. Par suite

$$\Gamma''\Gamma^3 = 1, \quad \text{d'où} \quad g = \Gamma \quad \text{et} \quad C' = 0.$$

Nous avons vu que si les surfaces (S), correspondant à cet élément linéaire, ne sont pas applicables sur une quadrique, la transformation (80) n'est possible que d'une seule manière : ces équations ne peuvent admettre que la solution identique  $U = u, V = v$ , ce qui donne  $V_1 = 0$ ; il ne lui correspond donc pas de solution pour les équations (83), car la solution  $\Phi = \infty$  n'a aucun sens ici.

Par conséquent, dans ce cas, les équations (79) n'ont aucune solution.

*En prenant  $ds^2$  sous la forme (53), l'équation de la déformation n'admet plus d'involution du second ordre si les surfaces (S) ne sont pas applicables sur une quadrique. Si elles sont applicables sur une quadrique, il existera encore une involution et une seule, à moins que les surfaces (S) ne soient développables, auquel cas il en existera une infinité.*

Bornons nous ici aux surfaces non applicables sur une quadrique.

Le fait qu'il n'existe aucune involution du second ordre ne permet pas de conclure qu'il n'existe aucune autre involution, puisque nous avons supposé  $C' \neq 0$  pour établir le théorème VII.

Mais il est aisé de voir que cette hypothèse n'a été introduite qu'en deux occasions :

1° Au paragraphe 7, page 110, pour en conclure la non-existence de fonctions principales d'ordre inférieur à 2 et de premier indice non nul;

2° Au paragraphe 8, page 112, pour en conclure qu'il n'existe pas de fonction  $W$  d'ordre inférieur à 3.

Nous allons reprendre l'étude de ces deux questions avec les valeurs actuelles des coefficients; nous avons remarqué d'ailleurs que la condition  $C' = 0$  n'était pas suffisante pour les conclusions obtenues, mais seulement nécessaire.

D'abord la deuxième question; si  $W$  est d'ordre inférieur à 3,

l'équation (30) s'écrit

$$(84) \quad \frac{\partial W}{\partial x} + m_2 \frac{\partial W}{\partial y} + (p + m_2 q) \frac{\partial W}{\partial z} \\ + \left( \frac{\partial W}{\partial q} - m_1 \frac{\partial W}{\partial p} \right) (s + m_2 t) - \lambda \frac{\partial W}{\partial p} \\ + \left( \frac{\partial W}{\partial t} - m_1 \frac{\partial W}{\partial s} \right) (p_{1,2} + m_2 p_{0,3}) - \frac{\partial W}{\partial s} \left( \frac{df}{dy} \right) \equiv AW + H.$$

La valeur de H est donnée aux formules (30); elle se calcule assez facilement en utilisant les formules (35) et (39). On trouve ainsi la forme suivante

$$H = H_1 \omega^2 + H_2 \omega t + H_3 t^2 + H_4 \omega + H_5 t + H_6 + V(p_{1,2} + m_2 p_{0,3})$$

en posant

$$V = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{\partial m_2}{\partial p} + (n-1) \frac{\partial m_1}{\partial p}, \quad \omega = s + m_1 t,$$

les quantités  $H_1, H_2, \dots$  étant du premier ordre.

L'identification des termes du troisième ordre dans l'équation (84) donne

$$\frac{\partial W}{\partial t} - m_1 \frac{\partial W}{\partial s} = V,$$

d'où

$$W = Vt + W_1(x, y, z, p, q, \omega)$$

et l'équation (84) s'écrit

$$(85) \quad t \left\{ \left[ \frac{dV}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dV}{dy} \right] \right\} + \left[ \frac{dW_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW_1}{dy} \right] = A(Vt + W_1) + H'.$$

On a

$$\left[ \frac{dV}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dV}{dy} \right] = \frac{\partial V}{\partial x} + m_2 \frac{\partial V}{\partial y} + \left( \frac{\partial V}{\partial q} - m_1 \frac{\partial V}{\partial p} \right) (\omega - \mu t) - \lambda \frac{\partial V}{\partial p}, \\ \left[ \frac{dW_1}{dx} \right] + m_2 \left[ \frac{dW_1}{dy} \right] = \frac{\partial W_1}{\partial x} + m_2 \frac{\partial W_1}{\partial y} + (p + m_2 q) \frac{\partial W_1}{\partial z} \\ + \left( \frac{\partial W_1}{\partial q} - m_1 \frac{\partial W_1}{\partial p} \right) (\omega - \mu t) - \lambda \frac{\partial W_1}{\partial p} \\ + \frac{\partial W}{\partial \omega} \left[ - \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial p} \omega^2 + \partial \omega t + a' \omega + b' t + c' \right],$$

enfin

$$A = - \left[ \frac{\partial m_2}{\partial y} + \frac{\partial m_2}{\partial p} (\omega - \mu t) \right].$$

On porte ces expressions dans l'équation (85) et l'on écrit l'identité en  $t$ ; l'égalité des termes en  $t^2$  donne

$$(86) \quad -\mu \left[ \frac{\partial V}{\partial q} - m_1 \frac{\partial V}{\partial p} \right] = \mu V \frac{\partial m_2}{\partial p} + H_3.$$

Or, le calcul de  $H$  donne

$$H_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left[ \mu^2 \frac{\partial^2 m_2}{\partial p^2} - 2\mu \left( \frac{\partial m_2}{\partial p} \right)^2 \right] \\ + (n-1)(n-2)\mu \frac{\partial m_1}{\partial p} \frac{\partial m_2}{\partial p} + (n-1) \frac{\zeta}{\mu}$$

avec

$$\zeta = -\mu m_1 \left( \frac{\partial m_1}{\partial p} \right)^2 + m_2 (2m_2 - m_1) \left( \frac{\partial m_2}{\partial p} \right)^2 \\ + \mu (2m_2 - m_1) \frac{\partial m_1}{\partial p} \frac{\partial m_2}{\partial p} + m_1 (2m_2 - m_1) \frac{\partial^2 m_1}{\partial p^2}.$$

En remplaçant  $V$  et  $H_3$  par leurs valeurs, on trouve sans difficulté que l'identité (86) est impossible.

Donc il n'existe encore pas de fonction  $W$  d'ordre inférieur à 3 dans le cas actuel.

*Étude des fonctions principales du premier ordre :  $\varphi(x, y, z, p, q)$ . —* Posons  $\psi = \text{Log } \varphi$ ; cette fonction  $\psi$  doit vérifier les identités [qui se déduisent de (17)]

$$(87) \quad \begin{cases} E(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \psi}{\partial p} = a, \\ F(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + (p + m_2 q) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial p} = c. \end{cases}$$

En partant des formules (34), le calcul montre qu'on a ici

$$a = (2\beta - \alpha) \frac{\partial m_2}{\partial p} + 2\beta \frac{\Gamma'}{\Gamma}, \quad c = \frac{2\beta - \alpha}{e} \gamma \Gamma \Gamma''.$$



On utilisera ici quelques formules de la page 123, en particulier

$$\begin{aligned} E(\mu) &= \mu \frac{\partial m_2}{\partial p}, & E(m_1) &= 0, \\ F(\mu) &= 2F(e) = 2\gamma\Gamma\Gamma'' + e \frac{\partial}{\partial x} (\text{Log}\Gamma\Gamma''), \end{aligned}$$

enfin on a ici

$$\Gamma'' = \frac{1}{\Gamma^3}.$$

Dans ces conditions la première équation (87) s'intègre immédiatement et donne

$$(88) \quad \psi = 2\beta \text{Log}\Gamma + (2\beta - \alpha) \text{Log}\mu + \text{Log}\Phi(x, y, z, m_1)$$

où  $\Phi$  reste arbitraire; la deuxième équation donne alors

$$\begin{aligned} 2\frac{\beta}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{2\beta - \alpha}{\mu} F(\mu) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial m_1} F(m_1) \\ + \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (p + m_2 q) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = c. \end{aligned}$$

Le calcul montre que

$$F(m_1) = 2\gamma\Gamma\Gamma'' + \frac{\partial \lambda}{\partial q} - m_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p}.$$

Finalement, en opérant quelques réductions, il vient

$$\begin{aligned} (89) \quad & \frac{\partial \text{Log}\Gamma}{\partial x} + \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \frac{\partial \Phi}{\partial z} - p \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial m_1} \left[ \gamma \left( \frac{1}{\Gamma^2} - \Gamma'^2 \right) - p \frac{\partial^2 \text{Log}\Gamma}{\partial x \partial q} - p \frac{\Gamma'}{\Gamma^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - e \frac{\partial \text{Log}\Gamma}{\partial x} \right] = 0. \end{aligned}$$

Or, la condition  $E(m_1) = 0$  montre qu'on a

$$p + m_1 q = \theta(x, y, m_1).$$

Le calcul direct de  $p + m_1 q$  donne d'ailleurs très facilement l'expression de cette fonction  $\theta$ . Nous pouvons donc garder comme variable  $m_1$ , au lieu de  $p$ , et la relation (89) devra être vérifiée identiquement en

$$x, y, z, m_1, q$$

quand on y remplace  $p$  par  $\theta - m_1 q$ .

Or la fonction  $\Phi$  ne dépend pas de  $q$ ; en outre les divers coefficients de l'équation (89) sont tous, à l'exception de  $e$ , rationnels en  $q$ ; on a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{Log} \Gamma}{\partial x} &= \frac{1}{2\Gamma^2} \frac{\partial \Gamma^2}{\partial x}, & \Gamma'^2 &= \frac{(\Gamma \Gamma')^2}{\Gamma^2}, \\ \frac{\partial^2 \text{Log} \Gamma}{\partial x \partial q} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Gamma \Gamma'}{\Gamma^2} \right), & \frac{\Gamma'}{\Gamma^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= \frac{\Gamma \Gamma'}{2\Gamma^4} \frac{\partial \Gamma^2}{\partial x};\end{aligned}$$

$\Gamma^2$  étant rationnel,  $\Gamma \Gamma'$  l'est aussi, donc tous les coefficients ci-dessus.

L'identité (89) entraîne donc l'annulation du coefficient de  $e$  :

$$(90) \quad \frac{\partial \Gamma^2}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial m_1} \equiv 2\Gamma^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} - q \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

avec

$$\Gamma^2 \equiv Y_1(x)q^2 + 2Y_2(x)q + Y_3(x);$$

on en déduit tout d'abord

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Une discussion très simple montre alors que l'on a, en désignant par  $Y'_1, Y'_2, Y'_3$  les dérivées de  $Y_1, Y_2, Y_3$ , ou bien

$$(91) \quad \frac{Y'_1}{Y_1} = \frac{Y'_2}{Y_2} = \frac{Y'_3}{Y_3},$$

ou bien

$$\Phi \equiv \text{const.} \quad \text{et} \quad \alpha = 0.$$

Ceci nous montre en premier lieu que :

*Dans le cas des surfaces réglées, l'équation (51) admet toujours la fonction principale*

$$\varphi = k(\Gamma \mu)^{2\beta} \quad [\text{d'indices } (0, \beta)].$$

Toutes ces fonctions se ramènent d'ailleurs à une seule distincte

$$(92) \quad \varphi_1 = (\Gamma \mu)^2 \quad [\text{d'indices } (0, 1)].$$

Cela montre, en particulier, que l'équation admet l'intégrale inter-

médiaire  $\mu^2 = 0$ , soit

$$y^2 + \frac{\rho^2}{\Gamma^2} - 1 = 0.$$

C'est une propriété connue de l'équation de la déformation (').

On ne peut pas raisonner de même pour l'équation  $\Gamma^2 = 0$  car les intégrales de cette équation rendent infinis les coefficients de l'équation proposée.

Examinons l'autre condition (91), pour voir s'il peut exister d'autres fonctions que  $\varphi_1$ ; on aura

$$\frac{Y'_1}{Y_1} = \frac{Y'_2}{Y_2} = \frac{Y'_3}{Y_3} = \frac{\partial}{\partial x} \text{Log } v(x) \quad (v \text{ arbitraire}),$$

d'où

$$Y_1 = k_1 v, \quad Y_2 = k_2 v, \quad Y_3 = k_3 v \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ constantes})$$

et

$$ds^2 = dX^2 + v(Y)[k_1 X^2 + 2k_2 X + k_3] dy^2;$$

il est clair qu'une transformation convenable de la variable  $Y$  nous permettra de supposer  $v \equiv 1$ .

Donc on peut prendre

$$Y_1 = k_1, \quad Y_2 = k_2, \quad Y_3 = k_3 \quad (k_1 k_3 - k_2^2 = 1).$$

Alors

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0.$$

La condition (90) donne  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ , et en portant dans (89) il vient

$$\frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial m_1} y \frac{1 - \Gamma^2 \Gamma'^2}{\Gamma^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial m_1} = 0$$

ou

$$1 - \Gamma^2 \Gamma'^2 = 0,$$

(<sup>1</sup>) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 155.

L'équation  $\Delta z = 1$  est ici  $Q^2 + \Gamma^2 P^2 = \Gamma^2$ , qui, après transformation d'Ampère, donne justement  $p^2 + \Gamma^2 y^2 = \Gamma^2$ ; les solutions communes à cette intégrale intermédiaire et à l'équation (51) ne conviennent justement pas au problème de la déformation.

condition incompatible avec

$$k_1 k_3 - k_2^2 = 1.$$

On trouve donc la solution  $\Phi = \text{const.}$ , mais  $\alpha$  reste quelconque.

Par conséquent, si l'élément linéaire donné a la forme

$$(93) \quad ds^2 = dX^2 + [k_1 X^2 + 2k_2 X + k_3] dY^2,$$

l'équation de la déformation admet toujours la fonction principale du premier ordre

$$\varphi = \frac{(\Gamma\mu)^2\beta}{\Gamma\alpha} k \quad (\alpha, \beta, k \text{ arbitraires}).$$

Ces fonctions se ramènent d'ailleurs à deux distinctes :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\Gamma\mu)^2 && [\text{déjà trouvée dans tous les cas, indices } (0, 1)], \\ \varphi_2 &= \Gamma && [\text{indices } (1, 0)]. \end{aligned}$$

Les surfaces en question, d'élément linéaire (93), sont les surfaces réglées applicables sur une surface de révolution; c'est-à-dire, si  $k_1 \neq 0$ , des alysséides; si  $k_1 = 0$ , des surfaces engendrées par la révolution de la développée d'une chaînette autour de la base de cette courbe.

*Conclusion.* — En dehors des surfaces ci-dessus, les surfaces pour lesquelles  $C' = 0$  admettent bien une fonction principale du premier ordre, mais celle-ci a un premier indice nul.

L'hypothèse  $C' \neq 0$  n'est donc pas nécessaire, pour l'équation de la déformation, pour l'établissement du théorème VII, et celui-ci se trouve exact lorsque  $C' = 0$ , sauf peut-être pour les surfaces applicables à la fois sur une surface réglée et sur une surface de révolution, et aussi, naturellement, pour les surfaces développables.

Comme nous avons constaté qu'il n'y avait pas en général d'involution du second ordre, il n'y a donc aucune autre involution pour les surfaces générales.

Nous résumerons comme il suit les résultats obtenus en ce qui concerne l'équation (51) de la déformation des surfaces.

## CONCLUSION GÉNÉRALE.

---

Remarquons que tous les calculs précédents donnent les mêmes résultats si l'on y remplace  $(e)$  par  $(-e)$ ; donc, l'étude faite pour les caractéristiques (II) reste valable pour l'autre système.

Appelons (S) les surfaces correspondant à l'élément linéaire

$$ds^2 = dX^2 + \Gamma^2(X, Y) dY^2$$

et rappelons qu'il est toujours possible, par des moyens algébriques, de voir si les surfaces (S) sont applicables sur une surface réglée, c'est-à-dire si le système (83) admet une solution. On a alors les résultats suivants :

1° *Les surfaces (S) ne sont pas applicables sur une surface réglée.* — Il n'existe aucune équation en involution avec l'équation de la déformation.

Il est évident que l'équation n'est pas intégrable dans ce cas; on peut affirmer de plus qu'il n'existe aucune autre équation admettant avec celle-ci une intégrale commune avec une infinité de constantes arbitraires.

2° *Les surfaces (S) sont applicables sur une surface réglée, mais non applicables sur une quadrique.* — Il existe alors une involution du second ordre pour chaque système de caractéristiques :

$$\begin{cases} s + m_1 t + u(x, q) = 0, \\ r + (m_1 + m_2)s + m_1 m_2 t + \lambda = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} s + m_2 t + u(x, q) = 0, \\ r + (m_1 + m_2)s + m_1 m_2 t + \lambda = 0. \end{cases}$$

On sait <sup>(1)</sup> trouver par des quadratures toutes les surfaces réglées applicables sur une surface réglée; ces surfaces sont certainement comprises parmi les solutions des deux systèmes précédents, mais peut-être ces systèmes donnent-ils en outre des solutions nouvelles. En tout cas ils donnent ces surfaces par un moyen nouveau, qui se

---

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. III, Chap. VI.

prête plus facilement à la solution et à la discussion de certains problèmes, en particulier du problème de Cauchy. On sait, en effet, l'analogie remarquable qui existe entre un système en involution et une équation du premier ordre.

*De plus*, si les surfaces  $S$  ne sont pas applicables sur une surface de révolution, il n'existe *aucune autre* involution et l'équation de la déformation n'est pas intégrable, *a fortiori*, par la méthode de Darboux.

Si les surfaces  $(S)$  sont applicables sur une surface de révolution, il existe deux fonctions principales du premier ordre et nous ne pouvons conclure en ce qui concerne l'existence des invariants.

3° *Les surfaces  $(S)$  sont applicables sur une quadrique.* — Il existe alors *deux* involutions du second ordre pour chaque système de caractéristiques. On peut répéter ici ce qui vient d'être dit pour les surfaces simplement réglées, et il est probable qu'on pourra tirer de ces quatre systèmes en involution des solutions nouvelles du problème de la déformation des quadriques. En tout cas ces systèmes, très faciles à former, donnent toutes les surfaces réglées applicables sur une quadrique, et se prêtent aisément à la recherche de ces surfaces lorsqu'elles sont définies par des conditions aux limites.

On peut remarquer en outre qu'en accouplant une équation en involution relative aux caractéristiques (I) avec une équation relative aux caractéristiques (II), et en y joignant l'équation donnée, on peut former quatre systèmes *complètement intégrables* <sup>(1)</sup>; cela permet d'obtenir très simplement quatre groupes de surfaces, dépendant chacun de trois constantes arbitraires, applicables sur une quadrique donnée.

En ce qui concerne l'existence d'invariants, nous ne pouvons pas conclure.

---

(1) GOURSAT, *Leçons sur les équations du second ordre*, t. II, p. 97-98.

