

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ GARNIER

**Mémoire sur les fonctions uniformes de deux variables indépendantes
définies par l'intégration d'un système aux différentielles totales
du 4e ordre attaché à une surface algébrique (suite)**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 42 (1925), p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1925_3_42__1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

MÉMOIRE
SUR LES
FONCTIONS UNIFORMES DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES
DÉFINIES
PAR L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES DU 4^e ORDRE
ATTACHÉ A UNE SURFACE ALGÈBRIQUE
(Suite)

PAR M. RENÉ GARNIER

SIXIÈME PARTIE ⁽¹⁾
LES SURFACES RÉGULIÈRES

66. *Réduction à un problème* (A_2). — Il nous reste à examiner maintenant le cas où la surface F est régulière (ce qui entraîne soit $p_g = 1 = p_a$, soit $p_g = 0 = p_a$). Or, dans le cas actuel, en vertu d'une importante proposition de M. Severi ⁽²⁾, démontrée d'une manière indépendante par M. Émile Picard ⁽³⁾ les intégrales de différentielles totales de troisième espèce attachées à la surface se réduisent toutes à des combinaisons algébrico-logarithmiques; et, d'autre part,

⁽¹⁾ Ce Mémoire est la suite du travail qui termine le Tome XLI.

⁽²⁾ *Math. Ann.*, t. 62, 1905, p. 194.

⁽³⁾ *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3^e série, t. 33, 1916.

Ann. Éc. Norm., (3), XLII. — JANVIER 1925.

il n'existe aucune différentielle totale de première espèce. Par suite, lorsqu'on étudiera le système (s) dans le voisinage d'une ligne singulière Γ (soit $x = 0$), les exposants $\int B_0 dy$, $\int D_0 dy$ qu'on rencontrera dans l'un des systèmes I', ..., V' (nos 9 et 11) attachés à Γ *seront identiques à des sommes de logarithmes de fonctions rationnelles*; de plus ⁽¹⁾, *les résidus de la ligne singulière Γ seront des nombres rationnels*: ainsi, dans les équations de (s), on pourra écrire :

$$e^{\int P dx + Q dy} = [A(x, y, z)]^{\frac{m}{n}}, \quad e^{\int R dx + S dy} = [B(x, y, z)]^{\frac{p}{q}},$$

A et B étant des fonctions rationnelles; m, n, p, q étant entiers.

Mais alors, procédant comme aux nos 45 et 53, on pourra trouver ⁽²⁾ une transformation rationnelle :

$$(168) \quad x = x(X, Y, Z), \quad y = y(X, Y, Z), \quad z = z(X, Y, Z),$$

telle que $A^{\frac{m}{n}}$ et $B^{\frac{p}{q}}$ soient rationnelles en X, Y, Z, et qu'inversement, X, Y, Z soient rationnels en $x, y, z, A^{\frac{m}{n}}, B^{\frac{p}{q}}$, et par suite uniformes. Soit $\mathcal{F}(X, Y, Z) = 0$ la transformée de F par (168); le système

$$(169) \quad \begin{cases} du = \mathfrak{A}(X, Y, Z) dX + \mathfrak{B}(X, Y, Z) dY, \\ dv = \mathfrak{C}(X, Y, Z) dX + \mathfrak{D}(X, Y, Z) dY, \end{cases}$$

transformé de (s) par (168), devra avoir son intégrale générale uniforme : et l'on est ramené, encore une fois, au problème (A₂) pour une surface \mathcal{F} .

Ainsi donc (n° 46), \mathcal{F} est soit : a , une surface hyperelliptique de Picard; soit : b , un cylindre elliptique; soit : c , un plan. Or F représente une involution régulière sur l'une des surfaces précédentes; la détermination de F reposera donc sur la solution, actuellement classique, d'un problème bien connu de la théorie des surfaces algébriques. Auparavant, nous préciserons le caractère de l'involution (168) par la proposition suivante.

(1) Cf. note du n° 11, t. XLI (1924), p. 285.

(2) Par exemple, on posera $x = X, y = Y, z = \alpha A^{\frac{m}{n}} + \beta B^{\frac{p}{q}} + \gamma Z$.

67. LEMME SUR L'INVOLUTION RÉGULIÈRE (168). — *L'involution (168) est engendrée par un groupe fini de transformations birationnelles de \mathcal{F} en elle-même.*

En effet, faisons décrire à un point M de \mathcal{F} un chemin L d'origine M_i , d'extrémité M_j , M_i et M_j étant deux quelconques des n points qui, sur \mathcal{F} , correspondent à un point m_0 de F . Sur F , le point m correspondant à M décrira une courbe fermée; par suite, les valeurs primitives de u et v seront remplacées à la fin par $Au + B$ et $Cv + D$ (A, B, C, D restant constants lorsqu'on modifiera M et L par continuité). Si donc, pour l'une des coordonnées (soit X_i) de M_i on a $X_i = f_i(u, v)$, on en déduira pour la coordonnée correspondante de M_j

$$X_j = f_j(Au + B, Cv + D);$$

et l'on aurait de même $X_i = f_i\left(\frac{u-B}{A}, \frac{v-D}{C}\right)$. Mais f_i et f_j sont des fonctions *uniformes* de u et v ; les coordonnées de M_j sont donc rapportées à celles de M_i d'une manière *biunivoque*; et puisque les relations entre ces coordonnées sont algébriques, il est bien établi que l'on passe de M_i à M_j par une transformation birationnelle.

C. Q. F. D.

68. *Forme des systèmes (s).* — Revenons maintenant à la détermination de la surface F . On sait que toute involution appartenant à une surface rationnelle \mathcal{F} est représentable sur une surface rationnelle ⁽¹⁾; et que, plus généralement, toute involution sur une surface réglée \mathcal{F} est représentable sur une nouvelle réglée dont le genre $-p_a$ ne dépasse pas celui de la première ⁽²⁾; *dans les cas b et c du n° 66, la surface régulière F est donc rationnelle.*

D'après les résultats de M. Painlevé rappelés au n° 46, il est aisé de préciser la nature des intégrales uniformes de (s) : x, y, z seront des fonctions rationnelles de l'un des systèmes de fonctions suivants :

$$\frac{e^{u_1 + p(v_1)}}{e^{v_1}}; \quad \text{ou} \quad \begin{cases} e^{u_1 + p(v_1)} \\ v_1 \end{cases}; \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 \\ v_1 \end{cases};$$

⁽¹⁾ G. CASTELNUOVO, *Math. Ann.*, t. 44, p. 125.

⁽²⁾ G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES, *Ann. di Mat.*, série 3, t. 6, 1901, p. 214.

$p v_1, p' v_1$ et

$$e^{u_1 + \varphi(v_1)}, \quad \text{ou} \quad e^{u_1 + \varphi(v_1) + h \zeta v_1} \frac{\mathcal{Z}(v_1 - \alpha)}{\mathcal{Z} v_1}, \quad \text{ou} \quad u_1 + \varepsilon \zeta v_1 \quad (\varepsilon = 0, \text{ ou } 1);$$

$$p \left[u_1 + \rho(v_2) + \sum_i h_i \text{Log}(v_2 - \alpha_i) \right],$$

$$p' \left[u_1 + \rho(v_2) + \sum_i h_i \text{Log}(v_2 - \alpha_i) \right],$$

et

$$v_2 = v_1 \quad \text{ou} \quad e^{v_1}$$

$[\rho(t)$, fonction rationnelle; $\varphi(v_1)$, fonction elliptique; $u_1 = au + bv$; $v_1 = cu + dv$; a, b, c, d constantes numériques].

Reste le cas où \mathcal{F} est hyperelliptique. Or les travaux de MM. Bagnera et de Franchis ⁽¹⁾, et ceux de MM. Enriques et Severi ⁽²⁾ ont montré précisément que les seules involutions régulières appartenant à une surface hyperelliptique de Picard sont rationnelles ou hyperelliptiques. Si F est rationnelle, x, y, z seront des fonctions hyperelliptiques de u et v ; si F est hyperelliptique, il doit exister une transformation birationnelle qui change F en l'une des surfaces VIII, ..., XX de MM. Bagnera et de Franchis; nous allons construire les systèmes (s) correspondants.

Observons d'abord que les variables u et v figurant dans (169) coïncident (à une substitution linéaire près) avec les arguments U, V de la représentation hyperelliptique normale des surfaces F et \mathcal{F} ⁽³⁾. Or, d'après le lemme du n° 67, l'involution appartenant à \mathcal{F} est engendrée par un groupe de substitutions de la forme

$$Su = Au + B; \quad Sv = Cv + D.$$

Dès maintenant nous pouvons donc exclure les surfaces XV, ..., XX

⁽¹⁾ *Mem. Soc. Ital. delle Scienze* (dei XL), 3^e série, t. 13, 1908, p. 251. — On observera que, dans le problème actuel, le lemme du n° 67 montre d'emblée que l'involution appartenant à \mathcal{F} est engendrée par des transformations birationnelles de \mathcal{F} ; il est donc loisible d'étayer notre solution sur les résultats de MM. Bagnera et de Franchis, tout aussi bien que sur ceux de MM. Enriques et Severi.

⁽²⁾ *Acta math.*, t. 32, p. 283; t. 33, p. 321.

⁽³⁾ U et V sont identiques aux paramètres u et v de MM. Bagnera et de Franchis.

à involutions diédriques de MM. Bagnera et de Franchis, en sorte que les seules surfaces possibles sont :

a. Les surfaces VIII, IX, X (surfaces régulières de genre 0 et de bigenre 1).

b. Les surfaces XI (surfaces de Kummer, et généralisations, à diviseur > 1 , de L. Remy et de M. Traynard), de plurigenres égaux à 1.

c. Les surfaces XII, XIII, XIV, de plurigenres égaux à 1.

Toutes ces surfaces sont des images d'involutions engendrées sur une surface de Picard par un groupe G de substitutions dont l'une au moins a la forme ⁽¹⁾

$$SU = \lambda U, \quad SV = \mu V,$$

avec $\lambda \neq \mu$ (exception faite des surfaces XI, pour lesquelles on a $\lambda = -1 = \mu$). Or, nous savons qu'on doit avoir dans le premier cas du n° 46 (t. XLI, p. 356)

$$(170) \quad u = \alpha U + \beta V, \quad v = \gamma U + \delta V;$$

chignons comment il faut choisir les constantes numériques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que le système (170) soit un système (8).

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit (cf. n° 65) que, si l'on effectue sur U et V l'une quelconque des substitutions de G, *du* et *dv* restent invariants (à des multiplicateurs près). On doit donc avoir

$$\alpha\lambda dU + \beta\mu dV = \Lambda(\alpha dU + \beta dV),$$

ce qui exige $\alpha\beta = 0$ (pour $\lambda \neq \mu$); et l'on doit avoir de même $\gamma\delta = 0$ (pour $\lambda \neq \mu$).

Le résultat ne s'applique plus aux surfaces XI: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *peuvent alors être quelconques* (pourvu que $\alpha\delta - \beta\gamma$ soit différent de zéro).

En définitive, lorsque F est une surface hyperelliptique régulière des types

$$(a) \quad [\text{VIII, IX, X}; p_g = 0 = p_a]$$

ou

$$(c) \quad [\text{XII, XIII, XIV}; p_g = 1 = p_a],$$

⁽¹⁾ A des constantes additives près.

le système (s) est de la forme

$$u = U, \quad v = V,$$

à l'interversion près de u et v (U, V , paramètres de Bagnera et de Franchis); lorsque F est une surface du type

$$(b) \quad [XI; p_g = 1 = p_a; \text{surfaces de Kummer}],$$

le système (s) est de la forme ⁽¹⁾

$$u = \alpha U + \beta V, \quad v = \gamma U + \delta V \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ constantes numériques; } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Il reste à envisager le sixième cas du n° 46 (t. XLI, p. 358). Or, en procédant comme plus haut, on montrera que, dans les hypothèses a et c , le système (s) se réduit nécessairement à l'une des formes

$$u = U + \int f(V) dV, \quad v = V; \\ u = U, \quad v = V + \int g(U) dU;$$

et l'on préciserait aisément les formes que doivent avoir dans chaque cas les fonctions elliptiques $f(V)$, $g(U)$ ⁽²⁾. Enfin les surfaces de

⁽¹⁾ Par exemple, pour la surface des ondes de Fresnel, d'équation

$$\varphi\psi - Sa^2(b^2 + c^2)x^2 + a^2b^2c^2 = 0 \quad (\text{avec } \varphi \equiv Sx^2, \psi \equiv Sa^2x^2),$$

on trouve aisément

$$dU = \frac{d\varphi}{2A}, \quad dV = \frac{d\psi}{2B},$$

$$\text{avec } A^2 = \frac{(\varphi - a^2)(\varphi - b^2)(\varphi - c^2)}{c^2 - a^2}, \quad B^2 = \frac{(\psi - b^2c^2)(\psi - c^2a^2)(\psi - a^2b^2)}{b^2(c^2 - a^2)},$$

et l'on a, de plus, sur F ,

$$bAB = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)xyz,$$

relation qui permet de prendre pour u et v des combinaisons linéaires de U et V .

⁽²⁾ Observons, d'ailleurs, que les surfaces XII (ou XIII, XIV) doivent alors représenter une involution sur une surface de Jacobi du type elliptique : or ceci exige que la période τ des tableaux de MM. Bagnera et de Franchis satisfasse à une équation de la forme

$$A\tau + Bi + C = 0 \quad (\text{ou } A\tau + B\varepsilon + C = 0),$$

A, B, C étant des entiers réels.

Kummer (du type elliptique) admettent encore le système

$$\begin{aligned} u &= \alpha(aU + bV) + \beta \left[cU + dV + \int f(aU + bV) d(aU + bV) \right], \\ v &= \gamma(aU + bV) + \delta \left[cU + dV + \int f(aU + bV) d(aU + bV) \right], \end{aligned}$$

où f est une fonction elliptique impaire.

SEPTIÈME PARTIE

LES SYSTÈMES SINGULIERS

69. *Forme générale des coefficients de (s).* — Nous commencerons par étudier les parties principales de du et dv dans le voisinage d'une courbe C qui est pour dI et dJ (n° 1) une ligne polaire d'ordre > 1 .

Tout d'abord, par une transformation birationnelle convenable, on pourra ramener la courbe C dans le plan $x = 0$, et, comme au n° 8, on aura ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} I \equiv \int P dx + Q dy &= \frac{a_m(y)}{x^m} + \dots + \frac{a_1(y)}{x} + a \log x \\ &+ \int A(y) dy + x a^{(1)}(y) + \dots, \end{aligned}$$

a étant une constante, et les coefficients $a_i(y)$, $A(y)$, $a^{(i)}(y)$ étant des fonctions rationnelles du point (y, z) de la courbe C ; d'ailleurs, moyennant une transformation birationnelle $x \mapsto x\lambda(y)$, on peut toujours admettre que $a_m(y)$ contient effectivement y . On aura ainsi :

$$du = e^{\frac{a_m}{x^m} + \dots + \frac{a_1}{x} + a \log x + \int A dy + \dots} [(c_0 + c_1 x + \dots) dx + (d_0 + d_1 x + \dots) dy],$$

$c_0, c_1, \dots, d_0, d_1, \dots$ étant des fonctions rationnelles du point (y, z) . La condition d'intégrabilité de du donne alors $d_0 = 0, a'_m c_0 = -m a_m d_1$; or on peut supposer que c_0 n'est pas nul (quitte à modifier a), de sorte qu'on aura $d_1 \neq 0$ et qu'en modifiant au besoin $A(y)$ on pourra

(1) Pour ne pas compliquer inutilement l'écriture, on a supposé que I est développable suivant les puissances entières de x .

prendre $d_i = a'_m$, d'où $c_0 = -ma_m$. Remplaçons enfin a par $a + m + 1$; nous aurons

$$du = e^{\frac{a_m}{x^m} + \dots + \frac{a_1}{x} + a \operatorname{Log} x + \int \mathfrak{A} dy + \dots} \left[\left(-\frac{ma_m}{x^{m+1}} + \dots \right) dx + \left(\frac{a'_m}{x^m} + \dots \right) dy \right].$$

On voit ainsi que lorsque x tend vers o le rapport $xH : K$ formé à l'aide des coefficients du système (s) (n° 1) tend vers une limite finie $\left(-\frac{ma_m}{a'_m} \right)$.

D'une façon plus générale, on montrerait, moyennant des changements d'écriture aisés, que l'expression de du , par exemple, peut s'écrire :

$$du = e^I \left[\left(\frac{\partial I'}{\partial x} + c'_0 + c'_1 x + \dots \right) dx + \left(\frac{\partial I'}{\partial y} + d'_0 + d'_1 x + \dots \right) dy \right],$$

avec

$$I' \equiv \frac{a_m}{x^m} + \dots + \frac{a_1}{x} + a \operatorname{Log} x + \int \mathfrak{A}(y) dy$$

et

$$I \equiv I' + xa^{(1)}(y) + \dots$$

Ces préliminaires établis, on tire de (s) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= H_1 e^{-I}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= K_1 e^{-I}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= L_1 e^{-J}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= M_1 e^{-J}, \end{aligned}$$

avec

$$H_1 : K_1 : L_1 : M_1 : 1 = M : -L : -K : H : HM - KL;$$

on peut donc remplacer (s) par le système

$$(171) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \left[\left(-\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \frac{L}{M} \right] \xi^2,$$

$$(172) \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \bar{\xi}, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} = \left[\left(-\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial J}{\partial y} + \frac{1}{L_1} \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) \frac{H}{K} \right] \bar{\xi}^2,$$

$$\begin{aligned} (173) \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} = \left[\left(-\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \frac{H}{K} \right] \xi \bar{\xi} \\ &= \left[\left(-\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial J}{\partial y} + \frac{1}{L_1} \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) \frac{L}{M} \right] \xi \bar{\xi}, \end{aligned}$$

$$(174) \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \eta = -\frac{L}{M} \xi,$$

$$(175) \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \bar{\eta} = -\frac{H}{K} \bar{\xi}.$$

Nous montrerons d'abord que si le coefficient de ξ^2 dans $(171)_2$ présente C comme courbe polaire d'ordre $i > 1$, l'intégrale générale du système ne peut être uniforme. Faisons (1) , en effet, dans (171) , (174) , la transformation

$$(176) \quad x \mapsto \varepsilon x, \quad \xi \mapsto \varepsilon^i \xi;$$

d'après le résultat qu'on a établi tout à l'heure, on peut écrire :

$$\frac{L}{M} = \frac{L_0(y) + \varepsilon x L_1(y) + \dots}{\varepsilon x M_0(y) + \varepsilon^2 x^2 M_1(y) + \dots};$$

il viendra donc :

$$(177) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \varepsilon^{i-1} \xi, & \frac{\partial \xi}{\partial u} = \left[\frac{f(y)}{x^i} + \varepsilon(\dots) \right] \xi^2, \\ \frac{\partial y}{\partial u} = -\varepsilon^{i-1} \left[\frac{L_0(y)}{x M_0(y)} + \varepsilon(\dots) \right] \xi. \end{cases}$$

Développée suivant les puissances croissantes de ε , l'intégrale générale de (177) devra avoir tous ces coefficients uniformes; or on trouve d'abord :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon^{i-1} x_1 + \dots, & y &= y_0 + \varepsilon^{i-1} y_1 + \dots & (x_0, y_0, \text{const.}), \\ \frac{1}{\xi} &= \frac{1}{\xi_0} - \frac{f(y_0)(u - u_0)}{x_0^i} + \varepsilon \xi_1 + \dots & (\xi_0, \text{const.}), \end{aligned}$$

et $x_1 = \int \frac{du}{\frac{1}{\xi_0} - \frac{f(y_0)(u - u_0)}{x_0^i}}$ ne peut être uniforme. Si donc e^1 et e^2 admettent une ligne essentielle C, le coefficient de ξ^2 dans $(171)_2$ et celui de $\bar{\xi}^2$ dans $(172)_2$ ne peuvent admettre C que comme courbe polaire d'ordre 1 au plus (2) .

70. *Les systèmes réduits. Extension du théorème I.* — Supposons donc qu'il en soit ainsi, et faisons les substitutions (176) (avec $i = 1$); à la

(1) Cf. PAINLEVÉ, *Bull. Soc. math.*, t. 28, 1900, p. 215.

(2) Le résultat précédent paraît devoir jouer un rôle important dans l'étude des systèmes singuliers.

limite, elles transformeront (171), (174) en le système réduit ⁽¹⁾

$$(178) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\alpha \xi^2}{x}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{L_0(y)}{M_0(y)} \frac{\xi}{x}.$$

Pour que l'intégrale générale du système précédent soit uniforme, il faut d'abord que l'on ait $\alpha = 1 - \frac{1}{\mu}$ (μ étant un entier ou l'infini); on aura alors

$$x = (au + b)^\mu \quad \text{ou} \quad x = e^{au+b}$$

et y sera donnée par la formule

$$-\int \frac{M_0(y)}{L_0(y)} dy = \mu \text{Log}(au + b) + c \quad \text{ou} \quad au + c.$$

$M_0 : L_0$ étant une fonction rationnelle du point (y, z) de C , on voit déjà que *l'intégrale générale de (s) ne peut être uniforme que si le genre de la courbe C est, au plus, égal à 1* : il est donc bien établi que le théorème I reste encore valable dans le cas singulier ⁽²⁾. Mais en vue de l'extension du théorème III, il nous faut approfondir l'étude du système différentiel (171)-(175).

Tout d'abord, on peut procéder sur (172) et (175) comme sur (171) et (174); on aura donc, en se bornant aux parties principales :

$$(179) \quad \begin{cases} -\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} - \left(-\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \frac{L}{M} = \frac{\alpha}{x} + \dots & \left(\alpha = 1 - \frac{1}{\mu} \right), \\ -\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} - \left(-\frac{\partial J}{\partial y} + \frac{1}{L_1} \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) \frac{H}{K} = \frac{\gamma}{x} + \dots & \left(\gamma = 1 - \frac{1}{\nu} \right) \end{cases}$$

(ν entier ou ∞). Soit alors

$$\frac{\beta(y)}{x^i} \quad (\beta \neq 0),$$

⁽¹⁾ Le système (178) définit les premiers termes des développements des solutions du système primitif suivant les puissances de ε . Pour simplifier l'écriture nous avons supprimé l'indice 0.

⁽²⁾ Bien entendu, la démonstration actuelle s'applique aussi au cas normal. Mais elle ne nous dispensait pas de maintenir la démonstration de la première partie, qui nous était nécessaire pour le but que nous avions en vue.

le terme prépondérant du coefficient de $\xi\bar{\xi}$ dans (173); exprimant que le système (171), (173) est complètement intégrable, on devra annuler identiquement une expression

$$(180) \quad -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha+i}{x^{i+1}}\beta(\gamma) - \frac{\beta^2(\gamma)}{x^{2i}}$$

(en n'écrivant que les termes prépondérants). Si donc on avait $i > 1$, on en déduirait $\beta \equiv 0$ contre notre hypothèse. Faisant alors $i = 1$, on tire de (180):

$$(\alpha - \beta)(\beta - 1) = 0,$$

et l'on obtiendrait de même la relation $(\gamma - \beta)(\beta - 1) = 0$. Il y aura donc deux cas à distinguer.

a. $\alpha = \beta = \gamma \left(= 1 - \frac{1}{\mu} \right)$. — Dans ce cas, l'intégrale générale du système (178), complétée par les équations analogues en v et par l'équation $\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\alpha \bar{\xi}}{x}$, sera donnée par les formules

$$(181) \quad x = (au + bv + c)^\mu \quad \text{ou} \quad x = e^{au+bv+c} \quad (a, b, c, \text{ const. arbitr.}),$$

et l'on aura

$$(182) \quad \begin{cases} -\frac{M_0(\gamma)}{L_0(\gamma)} \frac{\partial \gamma}{\partial u} = \frac{a\mu}{au+bv+c} \text{ ou } a, \\ -\frac{K_0(\gamma)}{H_0(\gamma)} \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \frac{b\mu}{au+bv+c} \text{ ou } b. \end{cases}$$

Or, si l'on pose

$$-\frac{L_0}{M_0} \equiv f(\gamma), \quad -\frac{H_0}{K_0} \equiv \lambda f(\gamma),$$

la condition d'intégrabilité de ce dernier système s'écrit

$$\mu \lambda' f + 1 - \lambda = 0,$$

ou $\lambda' = 0$, pour $\mu = \infty$, d'où encore deux hypothèses :

a₁. $\lambda' = 0$ ($\lambda = 1$ ou $\mu = \infty$). — Le système (182) équivaut à

$$(183) \quad \int \frac{d\gamma}{f(\gamma)} = \mu \text{Log}(au + bv + c) + d \quad \text{ou} \quad au + bv + d$$

(d , constante arbitraire); d'ailleurs $f(y)$ est toujours une fonction rationnelle du point (y, z) de C .

a_2 . $\lambda' \neq 0$. — Le système (182) s'écrit alors (pour $\mu \neq \infty$):

$$\frac{\lambda'}{\lambda-1} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{a}{au + bv + c}, \quad \frac{\lambda'}{\lambda(\lambda-1)} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{b}{au + bv + c};$$

son intégrale générale est

$$(184) \quad \lambda(y) = \frac{d - au - c}{bv + d},$$

et comme $\lambda(y) \left(\equiv \frac{H_0 M_0}{K_0 L_0} \right)$ est une fonction rationnelle de (y, z) , les fonctions uniformes y et z , algébriques en u et v sont rationnelles : la courbe C est donc rationnelle. Supposons l'équation de cette courbe ramenée à $z = 0$; moyennant une substitution linéaire sur y on pourra prendre $\lambda(y) \equiv y$.

b. $\beta = 1$ (avec $\alpha = 1 - \frac{1}{\mu}$, $\gamma = 1 - \frac{1}{\nu}$) — On trouve

$$x = a(u + b)^\mu (v + c)^\nu \quad \text{ou} \quad x = e^{au+b} (v + c)^\nu, \quad \dots$$

et

$$\int f(y) dy = \text{Log}[(u + b)^\mu (v + c)^\nu] \quad \text{ou} \quad au + b + \text{Log}(v + c)^\nu, \quad \dots;$$

$f(y)$, fonction rationnelle de y et z ; μ' et ν' ne sont pas nécessairement entiers. On retombe sur les systèmes du n° 9.

71. *Extension du théorème III.* — Revenons maintenant à l'extension de nos théorèmes généraux. Tout d'abord, par sa nature même, le théorème II s'applique à des expressions u et v de formes quelconques. Passons donc au théorème III.

Procédons comme au n° 14 et supposons que l'intégrale $j(x, y, z)$ admette pour courbe polaire une ligne singulière C de du ou dv . On ramènera dans le plan $x = 0$, et l'on fera la transformation $x | \varepsilon x$ dans l'intégrale double de première espèce \mathfrak{J} .

Conformément à la discussion du n° 70, il y aura plusieurs cas à distinguer,

a_1 . D'après (181) et (183), les premiers termes des développements des intégrales de (171), ..., (175) suivant les puissances croissantes de ε sont des fonctions de la même quantité $u_1 \equiv au + bv + c$; par suite, pour le système (171), ..., (175), le déterminant $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ contiendra en facteur une certaine puissance de ε . Nous allons en calculer la partie principale.

Avant l'introduction de ε on a

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \xi \bar{\eta} - \eta \bar{\xi} = \xi \bar{\xi} \left(\frac{L}{M} - \frac{H}{K} \right);$$

et, d'après l'égalité (179)₁ et la suivante :

$$-\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} - \left(-\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \frac{H}{K} = \frac{\beta}{x} + \dots = \frac{\alpha}{x} + \dots,$$

on a

$$\left(-\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \left(\frac{L}{M} - \frac{H}{K} \right) = \gamma_0(y) + x \gamma_1(y) + \dots,$$

les γ étant rationnels en y et z . Après la transformation $x | \varepsilon x$, il viendra donc :

$$\begin{aligned} (185) \quad \frac{D(\varepsilon x, y)}{D(u, v)} &= \varepsilon^{m+2} x^m \xi \bar{\xi} \left[\frac{\gamma_0(y_0)}{-\alpha'_m(y_0)} + \varepsilon(\dots) \right] \\ &= \varepsilon^{m+2} u_1^{2\mu-2+m\mu} \{ \gamma_0[\gamma_0(u_1)] + \dots \}. \end{aligned}$$

Cela étant, on verra comme au n° 15 que les coefficients du développement suivant les puissances de ε de l'intégrale double

$$\varepsilon^{-m-2} \gamma = \iint \frac{Q(\varepsilon x, y, z)}{F'_z(\varepsilon x, y, z)} u_1^{2\mu-2+m\mu} \{ \gamma_0[\gamma_0(u_1)] + \dots \} du dv$$

ne doivent pas admettre d'autre ligne d'infini que $u_1 = \infty$ (pour $\mu > 0$) ou $u_1 = 0$ (en considérant l'ensemble de ces deux lignes si C est de genre 1). Or, si $\frac{Q(0, y, z)}{F'_z(0, y, z)}$ [où y et z sont calculés au moyen de (183)] n'est pas identiquement nul, ceci est impossible, car le premier terme du développement, γ_0 , possède la ligne d'infini $v = \infty$. La même remarque s'appliquant aux autres termes, la conclusion du n° 15 reste valable.

a_2 . Actuellement, on trouve directement pour les intégrales de (171), ..., (175) :

$$(186) \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{ab\mu u_1^b}{(bv + d)^2} + \varepsilon(\dots),$$

d'où (\mathfrak{z}_0 ayant la même signification que pour a_1) :

$$\mathfrak{z}_0 = \iint \frac{Q(0, y, 0)}{F'_z(0, y, 0)} \frac{ab\mu u_1^b}{(bv + d)^2} du dv,$$

y étant remplacée par $\frac{d-c-au}{bv+d}$; comme le facteur $u_1^b(bv+d)^{-2}$ ne peut faire disparaître aucune ligne polaire de $Q:F'_z$ on en conclut encore que $Q(0, y, 0)$ doit être identiquement nul, et, comme au n° 15, que $Q(x, y, z)$ doit être identiquement nul.

b. Ce cas se traite comme celui du n° 17, la constante a du n° 17 étant nulle.

Il résulte donc de l'analyse précédente et des considérations du n° 18 que *l'intégrale $j(x, y, z)$ du n° 15 est de première espèce, même dans le cas singulier*. La démonstration s'achève alors par la méthode de M. Émile Picard, et l'on peut affirmer que, *même dans le cas singulier, le genre géométrique de la surface F ne peut dépasser l'unité*.

72. *Extension du théorème V.* — On voit immédiatement que le théorème IV subsiste dans le cas actuel. Reste le théorème V. Supposons d'abord que l'on se trouve dans le cas a_1 du n° 70; d'après (181) et (185), l'expression $\iint \frac{D(u, v)}{D(x, y)} dx dy$, développée suivant les puissances de ε , commence par un terme qui admet $x=0$ comme ligne polaire; et, d'après (186), il en sera de même dans le cas a_2 . Si donc le théorème V cessait d'être vérifié pour les systèmes singuliers, on devrait se trouver dans le cas b ; mais alors, d'après la forme des systèmes réduits, les démonstrations de la première partie continueraient à rester valables.

En définitive, il est donc établi que *les cinq théorèmes généraux s'appliquent encore aux systèmes singuliers*. Or, actuellement, la première hypothèse et le troisième cas de la seconde hypothèse du théorème V

ne sauraient être réalisés; d'ailleurs, dans les deux premiers cas de cette seconde hypothèse, il résulte de la solution du problème (A₂) que la surface ne saurait être régulière; de plus, *la solution du problème (B₂) dans le cas particulier abordé aux n^{os} 22 et 23 n'exige aucunement que le système (s) soit normal.* Or on a vu dans la troisième Partie que la solution du problème (B₂), pour les surfaces irrégulières de genre géométrique un, repose uniquement sur les théorèmes généraux, sur la formation des expressions de première espèce et sur la solution du problème particulier des n^{os} 22 et 23. Nous aboutissons ainsi à la conclusion suivante :

Si l'on ne fait aucune restriction sur la nature des singularités des expressions u et v , et si l'on suppose que la surface F est de genre géométrique > 0 , le seul cas nouveau où le système (s) puisse avoir son intégrale générale uniforme est celui où F est une surface hyperelliptique de Picard du type elliptique. (s) est alors de la forme (s_2) , la fonction rationnelle $r(\lambda, \mu)$ pouvant présenter des lignes polaires d'ordres quelconques.

