ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. W. CHITTENDEN

Sur les ensembles abstraits (extrait d'une lettre à M. Frechet avril 1922)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 41 (1924), p. 145-146
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1924_3_41__145_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES ENSEMBLES ABSTRAITS

PAR M. E.-W. CHITTENDEN

(Extrait d'une lettre à M. Fréchet, avril 1922)

« ..... A la page 342 du volume 38 des *Ann. Éc. Norm. Sup.*, vous vous demandez s'il existe des classes ($\mathfrak{D}$) non complètes. L'analyse suivante établit une propriété des classes ($\mathfrak{D}$) complètes qui permet de former facilement des exemples de classes ($\mathfrak{D}$) non complètes.

THÉORÈME. — *Soit* C *un ensemble dense en lui-même d'éléments d'une classe* ($\mathfrak{D}$) *complète. Tout voisinage d'éléments de* ($\mathfrak{D}$), *d'un élément* P *de* C *contient un ensemble ayant la puissance du continu.*

Soit P un élément quelconque de C; P n'étant pas isolé, il existe dans tout voisinage V de P_0 un élément P_1 de C intérieur à ce voisinage; soit $a_0 = (P_0, P_1)$ la « distance » de P_0 et P_1. Il existe des voisinages V_0 de P_0, V_1 de P_1 dont les rayons égaux à a_1 sont inférieurs à $\frac{1}{2}a_0$, voisinages qui sont contenus dans V et sans élément commun. Pour les mêmes raisons, le voisinage $V_i (i = 0 \text{ ou } 1)$ contient des éléments de C, distincts, $P_{i_0} \equiv P_i$ et P_{i_1} qui, à leur tour, définissent des voisinages V_{ij} de rayon $a_2 < \frac{1}{2}a_1 < \frac{1}{4}a_0$. En continuant ainsi, nous obtenons au $k^{\text{ième}}$ stade un ensemble de 2^k voisinages

$$V_{i_1 i_2 \ldots i_k} \qquad (i_k = 0 \text{ ou } 1)$$

des éléments $P_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, voisinages dont les rayons sont $a_k < \frac{1}{2^k}a_0$.

Par construction ces 2^k voisinages n'ont aucun élément commun.

De plus, si P est un élément

$$P_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \; i_{k+1}, \ldots, i_{k+p}},$$

alors P appartient à $V_{i_1, \ldots, i_k}$ et

$$(P, P_{i_1, \ldots, i_k}) < \frac{1}{2^k} a_0.$$

Soit maintenant $0, i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$ la représentation dans le système binaire d'un nombre x de l'intervalle $0, 1$; faisons correspondre à x la suite d'éléments de C

$$Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots, \quad Q_k \quad \ldots$$

où

$$Q_k \equiv P_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Cette suite satisfait à la condition de Cauchy, puisque

$$(Q_k, Q_{k+1}) < \frac{1}{2^k} a_0 ;$$

la classe $(\mathcal{D})$ étant complète cette suite est convergente vers un élément de $(\mathcal{D})$ qu'on pourra appeler P_x.

Si deux telles suites correspondent à deux nombres x différents, ces suites sont à partir d'un certain rang respectivement situées dans deux voisinages disjoints et par suite les éléments limites P_x correspondants sont distincts. Donc l'ensemble des P_x qui est contenu dans V a la puissance du continu.

Soit R la classe constituée par les nombres rationnels compris dans l'intervalle $(0, 1)$ et où les éléments d'accumulation d'un ensemble sont les éléments x de R dont la distance $|x - x'|$ au sens ordinaire à un élément x' de l'ensemble ~~et~~ a pour limite inférieure zéro. La classe (R) fournit un exemple d'une classe $(\mathcal{D})$ non complète. Autrement dit dans cette classe $(\mathcal{D})$, il est impossible en vertu du théorème précédent de choisir une définition de la distance ne changeant pas la définition des éléments d'accumulation dans cette classe et pour laquelle la condition bien connue de Cauchy ne suffirait pas à assurer la convergence. »