ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON JULIA

**Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la
représentation conforme**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 39 (1922), p. 1-28

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1922_3_39__1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR
UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES
LIÉE A LA REPRÉSENTATION CONFORME

PAR M. GASTON JULIA.

1. Lorsqu'on se donne une aire simplement connexe du plan z , limitée par une courbe simple fermée C , et un point A intérieur à l'aire, il est possible, et d'une infinité de façons, de trouver une fonction $Z = f_A(z)$, nulle en A , holomorphe en z tant que z est intérieur à C , telle en outre qu'à tout point z intérieur à C corresponde un point $Z = f_A(z)$ et un seul intérieur au cercle $\Gamma[|Z| < 1]$ du plan Z et réciproquement de façon que l'intérieur de C et l'intérieur de Γ se correspondent point par point, analytiquement. Si l'on donne une direction At issue de A dans le plan z , et si l'on impose à $f_A(z)$ la condition que la direction correspondante du plan Z soit une direction OT donnée *a priori* $f_A(z)$ est parfaitement déterminée. Le changement de OT en OT' ne fait d'ailleurs que multiplier la fonction $f_A(z)$ par une exponentielle $e^{i\theta}$, θ étant l'angle $\widehat{TOT'}$. Ayant fixé At et OT , $f_A(B)$ est déterminé en tout point B intérieur à C : c'est une fonction du point B . Si l'on fixe B , la valeur $f_A(B)$ dépendra du contour C ; à ce titre c'est une fonction de la ligne C . Le problème qu'on se propose ici est d'étudier

cette fonction de la ligne C et notamment de calculer la *dérivée fonctionnelle* de $f_A(B)$ lorsque C varie, A, B restant fixes, ainsi que les directions correspondantes At et OT .

On reconnaîtra aisément que la direction OT correspondant à At ne joue ici qu'un rôle épisodique. L'équation aux dérivées fonctionnelles qu'on va obtenir est la même, quel que soit le choix fait pour OT ; l'essentiel est que, dans la variation de la ligne C , la direction OT qui correspond à At reste invariable. On détermine ainsi la part de la variation de $f_A(B)$ qui tient strictement à la déformation de la ligne C .

2. Il est assez naturel de se poser la question qui va être traitée ici lorsqu'on songe que la partie réelle de la fonction $[-\log f_A(B)]$ n'étant autre que la fonction de Green, $g(A, B)$ relative aux deux points A, B et au contour C :

$$[|f_A(B)| = e^{-g(A, B)}],$$

on connaît déjà, par les travaux de M. Hadamard, une équation aux dérivées fonctionnelles vérifiée par la fonction de Green : c'est

$$(1) \quad 2\pi \partial g(A, B) = - \int_C \frac{dg(A, M)}{dn_M} \frac{dg(B, M)}{dn_M} \partial n_M ds_M.$$

Cette équation donne, en somme, la variation du module $|f_A(B)|$ quand C varie; on va rechercher une équation qui donne à la fois la variation du module et de l'argument, sous la réserve indiquée plus haut que, au point A , il n'y ait aucune variation des arguments.

3. Il y a deux méthodes pour traiter la question. La première consiste à se servir de l'équation (1) déjà connue pour calculer la variation de la fonction $\gamma(A, B)$ conjuguée de $g(A, B)$. Combinant les deux variations obtenues, on aura la variation de $\log f_A(B)$. On peut conduire le calcul de façon à introduire de suite cette fonction $\log f_A(B)$ dont $-g(A, B)$ est la partie réelle, l'équation cherchée s'obtient alors directement sans passer par $\gamma(A, B)$.

La deuxième méthode, qui ne suppose pas connue l'équation (1), consiste à ramener par la représentation conforme $Z = f_A(z)$ le cas d'une courbe C arbitraire au cas d'un cercle Γ , du plan Z . A vient en O

et la fonction $F_0(Z)$ pour le plan Z est Z elle-même. On est ramené à chercher la fonction $F_1(Z)$ qui fait la représentation conforme sur l'extérieur de Γ , de l'intérieur d'une courbe Γ_1 *infinitement voisine du cercle* Γ , le point O étant conservé ainsi que toutes les *directions* issues de O .

Les deux méthodes se rejoignent d'ailleurs à un certain moment, ainsi qu'il est naturel.

4. Pour éviter toute difficulté sur l'existence de la dérivée $f'_A(z)$ aux points z du contour C , qui s'introduira ici au même titre que s'introduit $\frac{dg(A, M)}{dn_M}$ dans l'équation (1), on supposera que *la ligne C est analytique* ou formée d'un nombre fini d'arcs analytiques.

On donnera d'abord les deux méthodes, ci-dessus indiquées, pour obtenir l'équation aux dérivées fonctionnelles de $\partial f_A(B)$ (Chap. I, § 1 et 2).

On déduira de cette équation une équation nouvelle qui donne la variation $-\partial\gamma(A, B)$ *de l'argument* $-\gamma(A, B)$ de la fonction $f_A(B)$ dans les conditions du précédent problème (Chap. II, § 1).

Puis on déduira deux solutions remarquables de l'équation

$$\partial \Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M) \Phi(M, B) \partial n \, ds$$

signalée par M. Hadamard et l'on montrera que ces deux solutions coïncident avec celles que M. Hadamard a données récemment pour l'équation ci-dessus. La méthode qui sera suivie fera bien ressortir la *nature analytique* des deux solutions trouvées (Chap. II, § 2).

Enfin, l'équation aux dérivées fonctionnelles de $\partial f_A(B)$, convenablement traitée, nous fournira une équation nouvelle, très analogue à celle de M. Hadamard, et une solution très simple de cette équation :

$$\partial \Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M) \Phi(M, B) \partial z \, dz,$$

où Φ est *analytique* et *symétrique* en A et B , et ∂z , dz sont les déplacements normal et tangent à C (Chap. II, § 3).

De là se déduira une nouvelle solution de l'équation de M. Hadamard, d'ailleurs susceptible de la critique que M. Hadamard adressait à la

première solution.

$$\left[-\frac{1}{2\pi} \frac{d^2 g(A, B)}{dn_A dn_B} \right],$$

qu'il fut amené à former pour son équation.

CHAPITRE PREMIER.

RECHERCHE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES
QUE VÉRIFIE LA FONCTION $f_A(B)$.

I. — Première méthode.

5. On pose

$$\log f_A(B) = -[g(A, B) + i\gamma(A, B)].$$

Soient M un point variable du contour C, MN la normale dirigée

Fig. 1.

vers l'intérieur et $M\tau$ la demi-tangente telle que $\widehat{M\tau, MN} = +\frac{\pi}{2}$,

α désignera l'angle $\widehat{Ox, M\tau}$, $\alpha + \frac{\pi}{2}$ sera $\widehat{Ox, MN}$.

On a

$$\log f_A(z) = -[g(A, z) + i\gamma(A, z)].$$

En dérivant suivant la normale MN

$$\frac{d\gamma(A, z)}{dn} = \frac{d\mathcal{G}(A, z)}{ds} = 0.$$

Donc

$$\frac{d}{dn} \log f_A(z) = - \frac{d\mathcal{G}(A, z)}{dn}.$$

Suivant la normale

$$dz = dn e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})},$$

$$\frac{f'_A(z)}{f_A(z)} = \frac{d}{dz} \log f_A(z) = - \frac{d\mathcal{G}(A, z)}{dn} e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}.$$

De même

$$\frac{f'_B(z)}{f_B(z)} = - \frac{d\mathcal{G}(B, z)}{dn} e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}.$$

Donc

$$2\pi \partial \mathcal{G}(A, B) = + \int_C \frac{f'_A(z)}{f_A(z)} \frac{f'_B(z)}{f_B(z)} e^{+2iz} \partial n \, ds.$$

Mais la fonction $f_B(z)$ donnant, comme $f_A(z)$, une représentation conforme de l'intérieur de C sur l'intérieur du cercle trigonométrique Γ , $Z_1 = f_B(z)$ est une fonction homographique de $Z = f_A(z)$ qui s'annule pour $z = B$:

$$f_B(z) = \frac{f_A(z) - f_A(B)}{f_A(z) - \overline{f_A(B)}} \frac{e^{i\theta}}{|f_A(B)|},$$

$$\overline{f_A(B)} = \frac{1}{\text{nombre complexe conjugué de } f_A(B)}.$$

Car la formule

$$Z_1 = \frac{Z - b}{Z - \bar{b}} \frac{e^{i\theta}}{|b|} \quad \left(\bar{b} = \frac{1}{b_0}, b_0 \text{ conjugué de } b \right)$$

transforme l'intérieur du cercle $|Z| = 1$ en l'intérieur du cercle $|Z_1| = 1$ et au point $Z = b$ (provenant de B) correspond le point $Z_1 = 0$. L'angle θ sert uniquement à fixer la direction OT_1 correspondant à la direction Bt du plan z .

En posant pour abréger $b = f_A(B)$, on aura

$$f_B(z) = \frac{f_A(z) - b}{f_A(z) - \frac{1}{b_0}} \frac{e^{i\theta}}{|b|},$$

d'où

$$\frac{f'_B(z)}{f_B(z)} = \frac{f'_A(z)}{f_A(z) - b} - \frac{f'_A(z)}{f_A(z) - \frac{1}{b_0}}.$$

D'autre part : 1° si ∂n est l'écart normal de la courbe C et de la courbe variée au point M, la variation *normale* de z en passant de M au point correspondant de la courbe variée sera

$$\partial z = \partial n e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)};$$

2° La variation de z tangente à C est

$$\begin{aligned} dz &= ds e^{i\alpha}, \\ \partial z dz &= i \partial n ds e^{2i\alpha}. \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$(2) \quad \partial g(A, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z)} \left[\frac{f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z) - b} - \frac{f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z) - \frac{1}{b_0}} \right] \partial z dz.$$

6. Lorsque z décrit C, $Z = f_\lambda(z)$ décrit le cercle Γ de rayon un . Les intégrales de la formule (2) peuvent se transformer en intégrales prises le long de Γ .

Tout d'abord, lorsque z décrit la courbe variée C_1 voisine de C, Z décrira une courbe variée Γ_1 voisine de Γ . L'écart normal ∂Z pour un point Z de Γ , dont le correspondant sur C est z , sera évidemment

$$\partial Z = f'_\lambda(z) \partial z$$

à cause des propriétés connues de la représentation conforme. La variation tangente dZ correspondant à dz sera

$$dZ = f'_\lambda(z) dz.$$

La formule (2) se transforme alors dans la formule très simple suivante :

$$(3) \quad \partial g(A, B) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_\Gamma \frac{\partial Z dZ}{Z(Z-b)} - \int_\Gamma \frac{\partial Z dZ}{Z\left(Z - \frac{1}{b_0}\right)} \right].$$

7. Le long du cercle Γ , ∂Z et Z ont même argument ou des arguments différant de π selon que $Z + \partial Z$ est extérieur ou intérieur au cercle Γ . Donc

$$\frac{\partial Z}{Z} = -\partial N,$$

∂N étant l'écart normal entre Γ et la courbe variée Γ_1 , compté posi-

vement vers l'intérieur de Γ :

$$(4) \quad \partial g(A, B) = \frac{i}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_+} \frac{\partial N dZ}{Z - b} - \int_{\Gamma_+} \frac{\partial N dZ}{Z - \frac{1}{b_0}} \right],$$

le signe Γ_+ indique que l'intégration doit être faite en décrivant Γ dans le sens positif qui est le sens trigonométrique.

Pour se débarrasser de $b_0 = [\text{imaginaire conjuguée de } f_\lambda(B)]$, une transformation est nécessaire.

8. Posons $Z = \frac{1}{Z_0}$ (Z_0 est alors le *conjugué de* Z) dans

$$I = \int_{\Gamma_+} \frac{\partial N dZ}{Z - \frac{1}{b_0}}.$$

On a

$$dZ = -\frac{dZ_0}{Z_0^2}$$

Fig. 3.

et Z_0 décrira Γ dans le sens *négalif*

$$I = - \int_{\Gamma} \frac{\partial_z N dZ_0}{Z_0^2 \left[\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{b_0} \right]},$$

$\partial_z N$ indiquant l'écart normal au point Z .

$$I = - \int_{\Gamma^+} \frac{\partial_z N b_0 dZ_0}{Z_0(Z_0 - b_0)},$$

en rétablissant l'intégration dans le sens positif. Or

$$\frac{b_0}{Z_0(Z_0 - b_0)} = \frac{1}{Z_0 - b_0} - \frac{1}{Z_0}.$$

Donc

$$I = + \int_{\Gamma^+} \partial_z N \frac{dZ_0}{Z_0} - \int_{\Gamma^+} \partial_z N \frac{dZ_0}{Z_0 - b_0}.$$

En définitive, on a

$$(5) \quad \partial g(A, B) = \frac{i}{2\pi} \left[\int_{\Gamma^+} \partial_z N \frac{dZ}{Z - b} + \int_{\Gamma^+} \partial_z N \frac{dZ_0}{Z_0 - b_0} - \int_{\Gamma^+} \partial_z N \frac{dZ_0}{Z_0} \right].$$

9. Il est visible, sur la figure 2, que si l'on désigne par φ l'argument de Z , on aura

$$\frac{dZ_0}{Z_0} = + i d\varphi,$$

étant entendu que Z_0 décrit Γ dans le sens positif. Il vient alors

$$(6) \quad \partial g(A, B) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\varphi N d\varphi + \frac{i}{2\pi} \left[\int_{\Gamma^+} \partial_z N \left(\frac{dZ}{Z - b} + \frac{dZ_0}{Z_0 - b_0} \right) \right].$$

Il faut prendre garde qu'avec la convention adoptée, dZ_0 n'est plus l'imaginaire conjuguée de dZ , bien que Z_0 soit l'imaginaire conjuguée de Z . On a

$$dZ_0 = - [\text{imaginaire conjuguée de } dZ].$$

Par conséquent,

$$\frac{dZ_0}{Z_0 - b_0} = - \left[\text{imaginaire conjuguée de } \frac{dZ}{Z - b} \right]$$

et, dans la formule (6),

$$\frac{dZ}{Z - b} + \frac{dZ_0}{Z_0 - b_0} = 2i \Re \left(\frac{dZ}{Z - b} \right),$$

où $\Re \left(\frac{dZ}{Z - b} \right)$ désigne, selon la coutume, le coefficient de i dans $\frac{dZ}{Z - b}$.

Ceci donne

$$(7) \quad \partial g(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\varphi} N d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial N dZ}{Z-b}.$$

Or, Q étant une quantité complexe quelconque, on a

$$\Re(iQ) = -\Im(Q).$$

Donc

$$(8) \quad \partial g(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\varphi} N d\varphi + \Re \left[\frac{i}{\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial N dZ}{Z-b} \right].$$

10. Si l'on considère maintenant la fonction

$$-\partial \log f_A(B) = \partial g(A, B) + i\partial \gamma(A, B);$$

c'est une fonction analytique de B dont la partie réelle est donnée par (8) ou bien par

$$(9) \quad \Re[-\partial \log f_A(B)] = \Re \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\varphi} N d\varphi + \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial N dZ}{Z-b} \right].$$

Aux deux membres on a, sous le signe $\Re$, des fonctions analytiques de B , puisque $b = f_A(B)$ est analytique en B . On conclut alors immédiatement

$$-\partial \log f_A(B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\varphi} N d\varphi + \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial N dZ}{Z-b} + iC,$$

C étant une constante réelle à déterminer.

11. Or, les deux fonctions $f_A(z)$ et $f_A(z) + \delta f_A(z)$ faisant correspondre à A la même direction OT , on aura, autour de $z = A$,

$$\begin{aligned} f_A(z) &= \lambda_1(z-A) + \dots, \\ f_A + \delta f_A(z) &= \mu \lambda_1(z-A) + \dots \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial f_A(z)}{f_A(z)}$ tend vers une limite *réelle* $\mu - 1$, si z tend vers A . Mais

$$(10) \quad -\frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\varphi} N d\varphi + \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial N dZ}{Z-b} + iC.$$

Lorsque B tend vers A , $b = f_A(B)$ tend vers zéro et la deuxième

intégrale tend vers

$$\frac{i}{\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial N dZ}{Z} = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\varphi} N d\varphi.$$

Le second membre de (10) a donc pour limite, lorsque B tend vers A, la quantité

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\varphi} N d\varphi + iC.$$

Cette limite devant être réelle, on a

$$C = 0.$$

En définitive,

$$(11) \quad \frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\varphi} N d\varphi - \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial N dZ}{Z-b}.$$

En rétablissant le déplacement tangent à Γ , $dZ = iZ d\varphi$, et le déplacement normal

$$\delta Z = -Z \partial_{\varphi} N,$$

on a

$$(12) \quad \frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial Z dZ}{Z^2} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\delta Z dZ}{Z(Z-b)}.$$

12. On peut réunir les deux intégrales précédentes en une seule par la formule

$$\frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{b+Z}{Z^2(b-Z)} \partial Z dZ.$$

Et ensuite revenir au plan de la variable z , grâce aux formules

$$Z = f_A(z),$$

$$b = f_A(B),$$

$$dZ = f'_A(z) \delta z, \quad \delta z \text{ déplacement normal à } C,$$

$$dz = f'_A(z) dz, \quad dz \text{ déplacement tangent à } C;$$

d'où

$$(13) \quad \boxed{\frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_A(B) + f_A(z)}{f_A(B) - f_A(z)} \frac{f_A'^2(z)}{f_A^2(z)} \delta z dz}$$

formule définitive qui permet de calculer $\partial f_A(B)$ connaissant la fonction $f_A(z)$ correspondant à C et, en chaque point de C, le déplacement normal δz qui transforme C dans la courbe variée C_1 .

13. On peut transformer la formule (13) de façon à leur donner la forme classique d'une variation adoptée depuis M. Volterra. Il suffit pour cela d'observer que la quantité

$$\frac{\partial Z dZ}{Z^2} = \frac{f'_A(z)}{f_A(z)} \partial z dz$$

n'est autre que

$$-i \partial N dS,$$

car

$$\frac{\partial Z}{Z} = -\partial N \quad \text{et} \quad \frac{dZ}{Z} = i dS,$$

∂N désignant le déplacement normal au cercle Γ et dS le déplacement tangent à ce cercle. Or

$$\partial N = |f'_A(z)| \partial n,$$

$$dS = |f'_A(z)| ds,$$

∂n étant le déplacement normal à C et ds l'arc élémentaire de C . Donc on a

$$(14) \quad \frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f_A(B) + f_A(z)}{f_A(B) - f_A(z)} |f'_A(z)|^2 \partial n ds.$$

Il est loisible d'ailleurs de remarquer que, le module $|f_A(z)|$ étant égal à l'unité sur C , on a, sur C ,

$$|f'_A(z)| = \frac{dg(A, M)}{dn}.$$

14. Reprenant la formule (12)

$$\frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial Z dZ}{Z^2} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial Z dZ}{Z(Z-b)},$$

on remarque que la première intégrale est une constante indépendante de b . Elle doit donc avoir un sens géométrique, d'autant plus que cette première intégrale se réduit à

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\varphi N d\varphi.$$

Or, si l'on fait tendre B vers A , b tend vers zéro et le deuxième membre se réduit à

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial Z dZ}{Z^2}.$$

Quant au premier, si l'on se reporte au développement de Taylor,

$$\begin{aligned} f_A(z) &= (z-A)f'_A(A) + \dots, \\ f_A(z) + \partial f_A(z) &= (z-A)[f'_A(A) + \partial f'_A(A)] + \dots, \end{aligned}$$

on voit que $\frac{\partial f_A(z)}{f'_A(z)}$ tend vers $\frac{\partial f'_A(A)}{f'_A(A)}$ quand z tend vers A . On a donc

$$(15) \quad \boxed{\frac{\partial f'_A(A)}{f'_A(A)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial Z dZ}{Z^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_A'^2(z)}{f_A^2(z)} \partial z dz}$$

formule qui donne la *variation de la dérivée de la fonction $f_A(z)$ au point A* , lorsque le contour C varie.

Rappelons encore que

$$\frac{\partial f'_A(A)}{f'_A(A)} = \frac{1}{2\pi} \int_C |f'_A(z)|^2 \partial n ds = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\frac{d g(A, M)}{dn} \right]^2 \partial n ds.$$

15. Mais, en outre, dans la formule (12), la deuxième intégrale

$$-\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\partial Z dZ}{Z(Z-b)}$$

représente une fonction analytique de b , holomorphe dans le cercle $|b| < 1$. On peut donc *développer très simplement $\partial f_A(B)$ en une série de Taylor procédant suivant les puissances de $b = f_A(B)$* absolument convergente lorsque B est intérieur à C , et par conséquent $|f_A(B)| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{b} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial Z dZ}{Z^2} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial Z dZ}{Z^2 \left(1 - \frac{b}{Z}\right)} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial Z dZ}{Z^2} - \frac{b}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial Z dZ}{Z^3} - \dots - \frac{b^n}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial Z dZ}{Z^{n+2}} - \dots \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \partial f_A(B) &= -\frac{f_A(B)}{2\pi i} \int_C \frac{f_A'^2(z)}{f_A^2(z)} \partial z dz \\ &\quad - \frac{[f_A(B)]^2}{\pi i} \int_C \frac{f_A'^2(z)}{f_A^3(z)} \partial z dz - \dots - \frac{[f_A(B)]^n}{\pi i} \int_C \frac{f_A'^2(z)}{[f_A(z)]^{n+1}} \partial z dz - \dots \end{aligned}$$

II. — Deuxième méthode.

Soit $f_A(z)$ la fonction qui fournit la représentation de l'intérieur de C sur l'intérieur de Γ . En supposant C analytique, $f_A(z)$ est prolongeable au delà de C et transforme C_1 , contour varié de C , en Γ_1 , contour infiniment voisin du cercle trigonométrique Γ (voir *fig. 1*). Posons toujours $Z = f_A(z)$. La fonction $Z_1 = f_A(z) + \partial f_A(z)$ qui fournit la représentation conforme de C_1 sur Γ pourra s'obtenir : 1° en faisant la représentation de C_1 sur Γ_1 , ce qui fait passer de z à Z ; 2° en faisant la représentation de Γ_1 sur Γ , ce qui fait passer de Z à Z_1 . Évidemment Z_1 est une fonction holomorphe de Z , nulle pour $Z = 0$, dont la dérivée est réelle en 0 puisque évidemment $\frac{dZ_1}{dZ}$ et $\frac{dZ}{dz}$ ont même argument en A . Z_1 est une fonction de Z , holomorphe dans Γ_1 , et dont le module est sur Γ_1 égal à l'unité.

16. Je pose $Z_1 = F_1(Z)$. Puisque Γ_1 est infiniment voisin de Γ , j'aurai

$$Z_1 = Z + \varepsilon[Z + a_2 Z^2 + \dots],$$

ε étant une quantité réelle infiniment petite constante (de l'ordre de ∂N) et la parenthèse une fonction analytique dans Γ_1

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z} &= \frac{F_1(Z)}{Z} = 1 + \varepsilon[1 + a_2 Z + \dots], \\ \varphi(Z) &= \log \frac{F_1(Z)}{Z} = \varepsilon F_2(Z), \end{aligned}$$

$F_2(Z)$ étant encore une fonction holomorphe de Z dans Γ_1 .

Envisageons un point quelconque Z de Γ et le point ζ de Γ_1 situé sur la normale au cercle Γ menée par Z . On sait que $|F_1(\zeta)| = 1$. On va calculer $F_1(Z)$ et $\varphi(Z)$.

Évidemment, ∂Z désignant le déplacement normal $Z\zeta$, dont la valeur absolue est comptée positivement vers l'intérieur de Γ , on a

$$\varphi(\zeta) = \varphi(Z) + \partial Z \varphi'(Z) + \dots$$

Or : 1° $\varphi'(Z) = \varepsilon F_2'(Z)$ renferme l'infiniment petit ε en facteur; 2° ∂Z dont le module est $|\partial N|$ est aussi infiniment petit de l'ordre de ε .

Donc $\partial Z \varphi'(Z)$ étant du deuxième ordre au moins en ε , on a, en ne gardant que les quantités du premier ordre en ε ,

$$\varphi(\zeta) = \varphi(Z).$$

Or

$$\varphi(\zeta) = \log \frac{F_1(\zeta)}{\zeta}$$

et

$$\Re[\varphi(\zeta)] = \log |F_1(\zeta)| - \log |\zeta| = -\log |\zeta|,$$

puisque

$$|F_1(\zeta)| = 1,$$

et comme

$$|\zeta| = 1 - \partial N,$$

puisque ∂N est positif vers l'extérieur de Γ , on a

$$\log |\zeta| = -\partial N.$$

Donc

$$\Re[\varphi(Z)] = +\partial N$$

en tout point Z de Γ .

Remarquons que si $b = f_\lambda(B)$, on aura

$$b + \partial b = F_1(b),$$

$$1 + \frac{\partial b}{b} = \frac{F_1(b)}{b}$$

et

$$\log \frac{F_1(b)}{b} = \frac{\partial b}{b},$$

en se bornant aux infiniment petits de l'ordre de ε ,

$$\varphi(b) = \frac{\partial b}{b} = \frac{\partial f_\lambda(B)}{f_\lambda(B)},$$

qui est la fonction à déterminer.

Le problème revient donc au suivant :

On connaît *sur le cercle Γ la valeur de la partie réelle de la fonction $\varphi(Z)$, déterminer, en tout point b dans Γ , la valeur de cette fonction $\varphi(b)$.*

17. Ce problème se résout aisément :

$$\Re[\varphi(b)] = \Re\left(\frac{\partial b}{b}\right)$$

est une fonction harmonique dans Γ , dont la valeur en tout point de Γ est δN .

Or, la fonction de Green pour un point b intérieur à Γ est, en appelant b_1 son inverse $\left[b_1 = \frac{1}{b_0}\right]$ par rapport à Γ ,

$$\log \left| \frac{Z - b_1}{Z - b} \right| = \Re \log b \frac{Z - b_1}{Z - b}.$$

On a donc

$$\Re [\varphi(b)] = + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \delta N \frac{d}{dN} \log \left| \frac{Z - b_1}{Z - b} \right| dS,$$

en vertu de la formule classique

$$u(b) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(M) \frac{d}{dN} g(b, M) dS_M.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dN} \Re \left[\log b \frac{Z - b_1}{Z - b} \right] &= - \frac{d}{dS} \Im \left[\log b \frac{Z - b_1}{Z - b} \right] = - \frac{d}{dS} \arg \frac{Z - b_1}{Z - b}, \\ \Re \left(\frac{\partial b}{b} \right) &= - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \delta N \frac{d}{dS} \left(\arg \frac{Z - b_1}{Z - b} \right) dS. \end{aligned}$$

A cause de

$$\log \frac{Z - b_1}{Z - b} = \log \left| \frac{Z - b_1}{Z - b} \right| + i \arg \frac{Z - b_1}{Z - b},$$

et puisque $\left| \frac{Z - b_1}{Z - b} \right|$ est constant sur Γ , on a

$$\frac{d}{dS} \arg \frac{Z - b_1}{Z - b} = \frac{1}{i} \frac{d}{dS} \log \frac{Z - b_1}{Z - b}.$$

Donc

$$\Re \left(\frac{\partial b}{b} \right) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \delta N d \log \frac{Z - b_1}{Z - b} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \delta N \left[\frac{dZ}{Z - b_1} - \frac{dZ}{Z - b} \right].$$

A partir d'ici, la deuxième méthode rejoint la première.

Nous avons en effet donné la formule (4)

$$(4) \quad \delta g(A, B) = \frac{i}{2\pi} \left[\int_{\Gamma} \delta N \left(\frac{dZ}{Z - b} - \frac{dZ}{Z - b_1} \right) \right].$$

Or $b = f_A(B)$ montre que

$$\frac{\partial b}{\partial} = \partial \log f_A(B) = -\partial g(A, B) - i\partial \gamma(A, B),$$

$$\Re \frac{\partial b}{\partial} = -\partial g(A, B),$$

et ceci remarqué, la formule

$$\Re \left(\frac{\partial b}{\partial} \right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \partial N \left(\frac{dZ}{Z - b_1} - \frac{dZ}{Z - b} \right)$$

devient

$$\partial g(A, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \partial N \left(\frac{dZ}{Z - b_1} - \frac{dZ}{Z - b} \right) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial N \left(\frac{dZ}{Z - b} - \frac{dZ}{Z - b_1} \right)$$

qui n'est autre que (4).

Il n'y a donc, pour obtenir $\frac{\partial b}{\partial}$ à partir de $\Re \left(\frac{\partial b}{\partial} \right)$, qu'à continuer exactement comme dans la première méthode à partir du n° 7 pour obtenir les formules (10), (11), (12) et finalement la formule (13) qui donne le résultat.

CHAPITRE II.

QUELQUES CONSÉQUENCES DE L'ÉQUATION (13).

I. — Équation qui donne la variation de $\arg f_A(B)$ en fonction de la variation du contour.

18. En posant

$$\log f_A(B) = -[g(A, B) + i\gamma(A, B)],$$

γ étant la fonction conjuguée de g par rapport à la variable complexe B , l'argument de $f_A(B)$ sera $-\gamma(A, B)$, on se propose ici de former une équation simple à laquelle satisfait sa variation. ds étant le déplacement

tangent à C, il est connu que

$$\frac{d g(A, M)}{d n} = - \frac{d \gamma(A, M)}{d s} = |f'_A(z)|,$$

et comme

$$\partial \log f_A(B) = - \partial g(A, B) - i \partial \gamma(A, B),$$

on aura évidemment

$$- \partial \gamma(A, B) = - \frac{1}{2\pi} \int_C |f'_A(z)|^2 \Im \left[\frac{f_A(B) + f_A(z)}{f_A(B) - f_A(z)} \right] \partial n \, ds,$$

en se servant de l'équation (14) qui équivaut à (13).

Donc

$$\partial \gamma(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\frac{d \gamma(A, M)}{d s} \right]^2 \Im \left[\frac{b + Z}{b - Z} \right] \partial n \, ds,$$

en posant, pour abréger $Z = f_A(z)$, $b = f_A(B)$.

Or

$$\frac{b + Z}{b - Z} = \frac{b - Z + 2Z}{b - Z} = 1 + 2 \frac{Z}{b - Z} = 1 - \frac{2Z}{Z - b}.$$

Donc

$$\partial \gamma(A, B) = - \frac{1}{\pi} \int_C \left[\frac{d \gamma(A, M)}{d s} \right]^2 \Im \left(\frac{Z}{Z - b} \right) \partial n \, ds.$$

Si l'on se reporte à la figure 2, en désignant par W l'angle dirigé $\widehat{OZb}$ et par α l'angle $\widehat{bZb_1}$ (b_1 inverse de b par rapport au cercle unité $b_1 = \frac{1}{b}$), il est visible que

$$\Im \left(\frac{Z}{Z - b} \right) = - \frac{1}{|Z - b|} \sin W.$$

Il est d'ailleurs visible, dans le triangle bZb_1 où l'angle dirigé $\widehat{Zb_1b}$ est égal à W, que l'on a, en grandeur et signe,

$$\frac{\sin W}{|Z - b|} = \frac{\sin \alpha}{bb_1} = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{|b|} - |b|}.$$

On se rappelle en outre que

$$|b| = e^{-g(A, B)}, \quad \frac{1}{|b|} = e^{g(A, B)}.$$

Donc

$$\frac{\sin W}{|Z - b|} = \frac{\sin \alpha}{2 \operatorname{sh} g(A, B)}.$$

Mais il est clair que

$$\hat{\alpha} = b \hat{Z} b_1 = \arg \frac{Z - b_1}{Z - b}.$$

Or, l'expression $\frac{Z - b_1}{Z - b}$ s'introduit naturellement lorsqu'on cherche la fonction $Z_1 = f_B(z)$ qui fournit la représentation conforme de C sur Γ de façon que B devienne le centre de Γ .

On a, en effet,

$$f_B(z) = Z_1 = \frac{Z - b}{Z - b_1} \frac{e^{i\omega}}{|b|},$$

et si l'on choisit spécialement Z_1 de façon que $f_B(A)$ soit réel et positif on a $\omega = 0$.

Avec cette convention que, quel que soit B , $f_B(A)$ soit réel positif, la fonction $f_B(z)$ sera définie sans ambiguïté quel que soit B intérieur à C , dès que la fonction $f_B(z)$ est connue, et nous savons que $f_A(z)$ est déterminé par la connaissance des directions correspondantes At et OT .

En définitive,

$$f_B(z) = \frac{Z - b}{Z - b_1} \frac{1}{|b|}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \log f_B(z) &= \log \left(\frac{Z - b}{Z - b_1} \right) - \log |b|, \\ -g(B, M) - i\gamma(B, M) &= \log \frac{Z - b}{Z - b_1} - \log |b|. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\gamma(B, M) = \arg \frac{Z - b_1}{Z - b} = \alpha,$$

avec la convention que

$$\boxed{\gamma(B, A) = 0}$$

$$\frac{\sin \varpi}{|Z - b|} = \frac{\sin[\gamma(B, M)]}{2 \operatorname{sh}[g(A, B)]}.$$

On obtient finalement l'équation curieuse que voici :

$$\partial \gamma(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\frac{d\gamma(A, M)}{ds} \right]^2 \frac{\sin[\gamma(B, M)]}{\text{sh}[g(A, B)]} \partial n \, ds$$

ou enfin

$$(16) \quad \partial \gamma(A, B) = \frac{1}{2\pi \text{sh}[g(A, B)]} \int_C \left[\frac{d\gamma(A, M)}{ds} \right]^2 \sin[\gamma(B, M)] \partial n \, ds$$

vérifiée par l'argument — $\gamma(A, B)$ de la fonction $f_A(B)$ lorsque A et B restant fixe, C varie d'une manière quelconque. Rappelons que $\gamma(A, B)$ est parfaitement définie par les données initiales $A t$, $o T$ et $\gamma(B, M)$ par la condition

$$\gamma(B, A) = 0.$$

II. — Conséquences relatives à l'équation de M. Hadamard :

$$(17) \quad \partial \Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M) \Phi(M, B) \partial n \, ds.$$

19. A partir de l'équation aux dérivées fonctionnelles que vérifie la fonction de Green

$$(1) \quad \partial g(A, B) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dg(A, M)}{dn_M} \frac{dg(B, M)}{dn_M} \partial n_M \, ds_M,$$

M. Hadamard a formé une solution de l'équation (17) par différentiation de (1) relativement à A et B . On va ici fournir une solution complexe de (17) à partir de l'équation (13) que vérifie $f_A(z)$. On partira pour la commodité du calcul de l'équation

$$(12) \quad \frac{\partial f_A(B)}{f_A(B)} = \partial \log f_A(B) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial Z \, dZ}{Z^2} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\partial Z \, dZ}{Z(Z-b)},$$

où, l'on s'en souvient, $Z = f_A(z)$.

Une première différentiation, par rapport à la variable complexe B , dont $f_A(B)$ est fonction analytique, donne aussitôt

$$(18) \quad \partial \frac{d}{dB} \log f_A(B) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dB} \left[\frac{\partial Z \, dZ}{Z(Z-b)} \right],$$

puisque, évidemment, seule la deuxième intégrale de (12) dépend de B, par l'intermédiaire de

$$b = f_A(B).$$

Relativement à A, il faut remarquer que $f_A(B)$, qui dépend de A, n'est pas fonction analytique de la variable complexe A. On s'en rend compte de la façon la plus aisée en choisissant un point Ω arbitraire, dans le contour C, distinct de A et B, et en exprimant $f_A(B)$ en fonction de $f_\Omega(B)$, $f_\Omega(A)$, etc. Cela est possible de la façon suivante.

Posons

$$\zeta(z) = f_\Omega(z),$$

$$\alpha = f_\Omega(A).$$

$$\beta = f_\Omega(B).$$

On aura évidemment

$$f_A(z) = Z = \frac{\zeta - \alpha}{\alpha_0 \zeta - 1} e^{i\theta},$$

θ étant une constante réelle convenable; α_0 désigne le nombre complexe conjugué de α :

$$\alpha_0 = f_\Omega^0(A_0),$$

c'est une fonction analytique de A_0 , nombre conjugué de A. On voit ainsi que $f_A(z)$, pour une valeur fixe de z , dépend analytiquement de A, mais aussi de A_0 , A et A_0 étant les coordonnées isotropes du point A. $f_A(z)$ n'est donc pas une fonction analytique de A seul, alors qu'elle est une fonction analytique de z seul.

20. Pour obtenir une solution satisfaisante de l'équation (17) on va différentier (18), non par rapport à A, mais *par rapport* à A_0 . Pour cela, il est commode de transformer (12) en faisant apparaître la fonction ζ au lieu de Z. Eu égard à ce fait que $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\partial Z dZ}{Z^2}$ ne dépend pas de B, on écrira

$$\begin{aligned} \partial \log f_A(B) &= -\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\partial Z dZ}{Z(Z-b)} + \text{fonction indépendante de B} \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \partial \log Z d \log(Z-b) + \text{fonct. ind. de B} \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma [\partial \log(\zeta - \alpha) - \partial \log(\alpha_0 \zeta - 1)] [d \log(\zeta - \beta) - d \log(\alpha_0 \zeta - 1)] \\ &\quad + \text{fonct. ind. de B.} \end{aligned}$$

En effet,

$$Z - b = \frac{(\alpha\alpha_0 - 1)(\zeta - \beta)}{(\alpha_0\beta - 1)(\alpha_0\zeta - 1)} e^{i\theta}.$$

Donc

$$\partial \frac{d}{dB} \log f_A(B) = - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [\partial \log(\zeta - \alpha) - \partial \log(\alpha_0\zeta - 1)] d \left[\frac{d}{dB} \log(\zeta - \beta) \right].$$

En différenciant *par rapport à* A_0 qui figure au deuxième membre par $\alpha_0 = f_{\Omega}^0(A_0)$, on aura

$$\begin{aligned} \partial \frac{d^2}{dA_0 dB} \log f_A(B) &= + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \partial \left[\frac{d}{dA_0} \log(\alpha_0\zeta - 1) \right] d \left[\frac{d}{dB} \log(\zeta - \beta) \right], \\ \partial \frac{d^2}{dA_0 dB} \log f_A(B) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d^2}{dA_0 d\zeta} \log(\alpha_0\zeta - 1) \frac{d^2}{dB d\zeta} \log(\zeta - \beta) \partial\zeta d\zeta. \end{aligned}$$

(On verra plus loin ce que donne la *différentiation par rapport à* A .)
Eu égard à ce que

$$f_A(B) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha_0\beta - 1} e^{i\theta},$$

on a, en revenant à C ,

$$\begin{aligned} (19) \quad & - \partial \frac{d^2}{dA_0 dB} \log(\alpha_0\beta - 1) \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{d^2}{dA_0 dz} \log(\alpha_0\zeta - 1) \frac{d^2}{dB dz} \log(\zeta - \beta) \partial z dz. \end{aligned}$$

Si l'on effectuait le calcul de double différentiation, il viendrait

$$(19') \quad \partial \frac{\frac{d\alpha_0}{dA_0} \frac{d\beta}{dB}}{(\alpha_0\beta - 1)^2} = - \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{\frac{d\alpha_0}{dA_0} \frac{d\zeta}{dz}}{(\alpha_0\zeta - 1)^2} \frac{\frac{d\zeta}{dz} \frac{d\beta}{dB}}{(\zeta - \beta)^2} \partial z dz.$$

La formule (19) ne présente pas le caractère de symétrie de l'équation (17). On peut la transformer pour *la rendre symétrique*.

21. *Sur la courbe* C $|\zeta(z)| = 1$. — Désignant par ζ_0 le nombre conjugué de ζ (ζ_0 est fonction analytique de z_0), on aura, sur C ,

$$\zeta_0 = \frac{1}{\bar{\zeta}} \quad \text{et} \quad d\zeta_0 = - \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2}.$$

Donc

$$\frac{\frac{d\zeta}{dz}}{(\zeta - \beta)^2} = \frac{-\zeta^2 \frac{d\zeta_0}{dz_0} \frac{dz_0}{dz}}{(\zeta - \beta)^2} = -\frac{\frac{d\zeta_0}{dz_0} \frac{dz_0}{dz}}{(\beta\zeta_0 - 1)^2}.$$

Par conséquent, (19') devient

$$\partial \frac{\frac{d\alpha_0}{dA_0} \frac{d\beta}{dB}}{(\alpha_0\beta - 1)^2} = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{-\frac{d\alpha_0}{dA_0} \frac{d\zeta}{dz}}{(\alpha_0\zeta - 1)^2} - \frac{\frac{d\zeta_0}{dz_0} \frac{d\beta}{dB}}{(\zeta_0\beta - 1)^2} \frac{dz}{dz_0} \partial z \, dz.$$

Or α désignant l'angle de la demi-tangente positive à $\tilde{C}$ au point z , on a

$$dz = ds e^{i\alpha}, \quad dz_0 = ds e^{-i\alpha}, \quad \partial z = \gamma \partial n e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$$

et

$$\frac{dz_0}{dz} \partial z \, dz = i \partial n \, ds;$$

d'où la relation

$$\begin{aligned} & -\partial \frac{d^2}{dA_0 dB} [\log(\alpha_0\beta - 1)] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d^2}{dA_0 dz} [\log(\alpha_0\zeta - 1)] \frac{d^2}{dz_0 dB} [\log(\zeta_0\beta - 1)] \partial n \, ds. \end{aligned}$$

Et si l'on pose finalement

$$\begin{aligned} \Phi(A_0, B) &= -\frac{i}{\pi} \frac{d^2 \log(\alpha_0\beta - 1)}{dA_0 dB} \\ &= +\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dA_0 dB} \log f_A(B), \end{aligned}$$

on a

(20)

$$\partial \Phi(A_0, B) = \int_C \Phi(A_0, M) \Phi(M_0, B) \partial n \, ds$$

Par conséquent, la fonction $\Phi(A_0, B)$, qui dépend analytiquement de l'afixe B du point B , et du conjugué A_0 de l'afixe du point A , constitue une solution de l'équation (17) de M. Hadamard. Relativement à la fonction $Z, = f_\Omega(z)$, Ω étant distinct de A et B , A et B jouent

des rôles symétriques. Par conséquent, la fonction

$$\boxed{\Phi(B_0, A) = -\frac{1}{\pi} \frac{d^2 \log(\alpha\beta_0 - 1)}{dB_0 dA}} \\ \alpha = f_\Omega(A), \quad \beta_0 = f_\Omega^0(B_0)$$

est aussi solution de l'équation (17).

22. Le calcul de $\frac{d^2}{dA_0 dB} \log(\alpha_0\beta - 1)$ est indépendant de toute direction fixée pour A_0 et B , et, comme tel, échappe à la critique faite par M. Hadamard lui-même à la solution $-\frac{1}{2\pi} \frac{d^2 g(A, B)}{dn_A dn_B}$ de (17) pour laquelle il faut choisir une suite *déterminée* de contours C passant au cours de leur variation successivement en A et B . M. Hadamard a donné récemment, dans une Note (1), les deux solutions

$$\Phi(A, B) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} \mp i \frac{\partial}{\partial y'} \right) g(A, B),$$

où x, y sont les coordonnées de A , x', y' celles de B . Ces deux solutions, qui échappent à la critique précédente, sont identiques aux deux solutions du n° 21. Par exemple, on a

$$-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} \right) g(A, B) = -\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dA_0 dB} \log(\alpha_0\beta - 1).$$

En effet, à cause de

$$g(A, B) = -\log|f_A(B)| = -\Re[\log f_A(B)],$$

et puisque

$$a = f_A(B) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha_0\beta - 1} e^{i\theta},$$

on aura

$$g(A, B) = \frac{-1}{2} \left[\log \frac{\beta - \alpha}{\alpha_0\beta - 1} + \log \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha\beta_0 - 1} \right];$$

(1) Voir *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 359.

$g(A, B)$ se présente comme la somme de quatre fonctions :

$$\begin{array}{lll} \log(\beta - \alpha) & \text{analytique en } A \text{ et } B, \\ \log(\alpha_0 \beta - 1) & \text{»} & A_0 \text{ et } B, \\ \log(\alpha \beta_0 - 1) & \text{»} & A \text{ et } B_0, \\ \log(\beta_0 - \alpha_0) & \text{»} & A_0 \text{ et } B_0. \end{array}$$

Or, x' et y' étant les coordonnées de B , on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} \right) f(x' + iy') = 0$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} \right) f(x' + iy') = 2f'(x' + iy'),$$

lorsque f est analytique en $B = x' + iy'$.

C'est l'inverse, si f est analytique en $B_0 = x' - iy'$, on aura

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} \right) f(x' - iy') = 2f'(x' - iy'),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} \right) f(x' - iy') = 0.$$

Par conséquent, l'expression

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} \right) g(A, B)$$

sera égale à

$$2 \frac{d^2}{dA_0 dB} \log(\alpha_0 \beta - 1),$$

car dans la double différentiation précédente les termes

$$\log(\beta - \alpha), \quad \log(\beta_0 - \alpha_0), \quad \log(\alpha \beta_0 - 1)$$

donneront zéro.

De même

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} \right) g(A, B) = 2 \frac{d^2}{dA dB_0} \log(\alpha \beta_0 - 1).$$

Les deux solutions

$$-\frac{1}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dA_0 dB} \log(\alpha_0 \beta - 1), \\ \frac{d^2}{dA dB_0} \log(\alpha \beta_0 - 1) \end{array} \right.$$

sont donc identiques aux deux solutions

$$-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} \mp i \frac{\partial}{\partial y'} \right) g(A, B)$$

fournies par M. Hadamard. Il ressort de la forme $\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dA_0 dB} \log(\alpha_0 \beta - 1)$ et de la forme analogue pour la seconde que ces deux solutions sont des *fonctions analytiques* respectivement des arguments $(A_0 \text{ et } B)$, $(A \text{ et } B_0)$.

III. — Sur une équation aux dérivées fonctionnelles analogue à l'équation (17) de M. Hadamard,

23. Reprenant la formule

$$\partial \frac{d}{dB} \log f_A(B) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [\partial \log(\zeta - \alpha) - \partial \log(\alpha_0 \zeta - 1)] d \left[\frac{d}{dB} \log(\zeta - \beta) \right]$$

dont on s'est servi au n° 20, si l'on différentie par rapport à A et non plus par rapport à A_0 on aura

$$\partial \frac{d^2}{dA dB} [\log f_A(B)] = -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \partial \frac{d}{dA} \log(\zeta - \alpha) d \frac{d}{dB} \log(\zeta - \beta),$$

et, à cause de

$$f_A(B) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha_0 \beta - 1} e^{i\theta},$$

$$\partial \frac{d^2}{dA dB} \log(\beta - \alpha) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d^2}{dA dz} \log(\zeta - \alpha) \frac{d^2}{dz dB} \log(\zeta - \beta) \partial z dz,$$

et, si l'on pose

$$(21) \quad -\frac{1}{\pi i} \frac{d^2}{dA dB} \log(\beta - \alpha) = \Phi(A, B) = -\frac{1}{\pi i} \frac{\frac{d\alpha}{dA} \frac{d\beta}{dB}}{(\alpha - \beta)^2} \quad (1),$$

(1) La singularité de $\Phi(A, B)$, lorsque A et B tendent l'un vers l'autre, est évidente.

ce qui donne pour $\Phi(A, B)$ une fonction symétrique et analytique des deux arguments A et B . On obtient la relation

$$(22) \quad \boxed{\delta \Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M) \Phi(M, B) \delta z dz}$$

Cette relation (22) ne diffère de la relation (17) de M. Hadamard que par la substitution de $\delta z dz$ à $\delta n ds$:

$$\delta z dz = i e^{2i\alpha_M} \delta n ds,$$

α_M étant toujours l'angle avec l'axe réel x de la demi-tangente positive en M au contour C .

Il serait facile d'obtenir une solution, conjuguée de (21), pour une équation conjuguée de (22).

24. Mais on va montrer maintenant comment, à partir de (21), on peut trouver une nouvelle solution de l'équation (17) de M. Hadamard.

Il suffit d'observer que la relation

$$\delta \frac{d^2}{dA dB} \log(\beta - \alpha) = -\frac{1}{\pi i} \int_C \frac{d^2}{dA dz} \log(\zeta - \alpha) \frac{d^2}{dB dz} \log(\zeta - \beta) \delta z dz$$

devient en remplaçant $\delta z dz$ par $i e^{2i\alpha_M} \delta n ds$

$$\begin{aligned} & \delta \frac{d^2}{dA dB} \log(\beta - \alpha) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_C \left[e^{i\alpha_M} \frac{d^2}{dA dz} \log(\zeta - \alpha) \right] \left[e^{i\alpha_M} \frac{d^2}{dB dz} \log(\zeta - \beta) \right] \delta n ds. \end{aligned}$$

Or, si ds_M est le déplacement tangent à C en M d'affixe z ,

$$dz = ds_M e^{i\alpha_M},$$

en sorte que

$$\frac{d}{ds_M} = e^{i\alpha_M} \frac{d}{dz},$$

et l'équation précédente devient

$$\delta \frac{d^2}{dA dB} \log(\beta - \alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_C \frac{d^2}{dA ds_M} \log(\zeta - \alpha) \frac{d^2}{dB ds_M} \log(\zeta - \beta) \delta n ds.$$

Imaginons qu'un contour se déforme à partir de C, vers l'intérieur, de façon à passer au cours de la déformation par les points A et B respectivement. Soit α_A l'angle avec Ox de la demi-tangente positive en A au contour qui passe en A. Soit α_B le même angle pour le contour qui passe en B.

On aura toujours

$$\frac{d}{ds_A} = e^{i\alpha_A} \frac{d}{dA}$$

et une relation analogue pour B, en sorte que la relation précédente devient

$$\partial \frac{d^2}{ds_A ds_B} \log(\beta - \alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_C \frac{d^2}{ds_A ds_M} \log(\zeta - \alpha) \frac{d^2}{ds_B ds_M} \log(\zeta - \beta) \partial n ds,$$

et, par conséquent,

$$(23) \quad \Phi(A, B) = -\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{ds_A ds_B} \log(\beta - \alpha)$$

sera une nouvelle solution de l'équation (17).

25. Les considérations du n° 22 prouvent aisément que la solution (21) de l'équation (22) peut s'écrire

$$\Phi(A, B) = -\frac{1}{\pi i} \frac{d^2}{dA dB} \log(\beta - \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} \right) g(A, B),$$

A coordonnées (x, y) , B coordonnées (x', y') .

Par conséquent, la nouvelle solution (23) de l'équation de M. Hadamard sera

$$(24) \quad \Phi(A, B) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} \right) g(A, B) \right] e^{i(\alpha_A + \alpha_B)}.$$

Elle n'échappe pas à la critique, adressée à la solution

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{d^2 g(A, B)}{dn_A dn_B},$$

de l'équation (17), d'exiger la connaissance, *a priori*, d'une loi de déformation pour le contour C.

Signalons aussi la solution [conjuguée de (23)]

$$\Phi_0(A, B) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} \right) g(A, B) \right] e^{-i(\alpha_A + \alpha_B)}$$

pour la même équation (17).

26. Le fait qu'on vient de signaler est d'ailleurs général.

L'équation (22) se ramène à l'équation (17) de M. Hadamard par un changement de la fonction $\Phi(A, B)$, c'est-à-dire que, à toute solution de (22), on peut associer une solution de (17) [susceptible d'ailleurs des mêmes critiques que $\frac{d^2 g(A, B)}{dn_A dn_B}$] et réciproquement. En effet, si

$$\delta \Phi(A, B) = \int_C \Phi(A, M) \Phi(M, B) \delta z \, dz$$

à cause de

$$\partial z \, dz = i e^{2i\alpha_M} \partial n \, ds,$$

on aura

$$\partial \Phi(A, B) = i \int_C \Phi(A, M) \Phi(M, B) e^{2i\alpha_M} \partial n \, ds.$$

Ceci étant, si α_A désigne l'angle avec Ox de la demi-tangente positive en A au contour de la famille C qui passe en B, et α_B l'angle analogue en B, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\partial [i \Phi(A, B) e^{i\alpha_A} e^{i\alpha_B}] = \int_C [i \Phi(A, M) e^{i\alpha_A} e^{i\alpha_M}] [i \Phi(M, B) e^{i\alpha_M} e^{i\alpha_B}] \partial n \, ds$$

et, sous cette forme, on voit que

$$(25) \quad \Psi(A, B) = i \Phi(A, B) e^{i\alpha_A} e^{i\alpha_B}$$

est une solution de l'équation (17).

La forme (22) n'est cependant pas sans intérêt, surtout lorsqu'on considère des fonctions $\Phi(A, B)$ *analytiques par rapport aux deux variables complexes A et B*.