

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI VILLAT

## **Sur la représentation conforme des aires doublement connexes**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 38 (1921), p. 183-227

<[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1921\\_3\\_38\\_\\_183\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1921_3_38__183_0)>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1921, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME  
DES  
AIRES DOUBLEMENT CONNEXES

PAR M. HENRI VILLAT

(Strasbourg).



On sait théoriquement qu'une aire doublement connexe dans le plan peut être représentée conformément sur une couronne circulaire d'un autre plan, à condition de choisir convenablement le rapport des rayons des deux circonférences comprenant l'anneau circulaire en question. Il existe, je crois, peu d'exemples *effectifs* d'une telle représentation ; et si je ne me trompe, ils sont tous relatifs à des cas de figures symétriques, tels qu'un simple dédoublement, ne prenant en considération que la moitié du domaine envisagé, ramène immédiatement au cas d'une aire simplement connexe, pour laquelle la difficulté n'est pas du même ordre.

En se plaçant dans le cas d'un domaine doublement connexe, en général non symétrique, situé dans un plan  $z$ , et dont les frontières soient formées de segments de droites, on peut obtenir la représentation sur une couronne dans un autre plan  $Z$ , en utilisant la méthode de Schwartz convenablement généralisée. C'est ce qu'a fait voir M. René Thiry dans une Note récente des *Comptes rendus* (juin 1920).

Mais (comme je l'ai indiqué dans le même numéro des *Comptes rendus*, juin 1920), en restant dans le cas le plus général, où les frontières du domaine sont absolument quelconques, on peut trouver la solution du problème de la représentation conforme, en employant un théorème que j'ai obtenu jadis (cf. *Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 680, et *Rendi-*

*conti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXIII, 1912, p. 142). C'est cette solution que je vais expliciter dans ce travail.

Je donnerai ensuite deux applications à l'Hydrodynamique, la première concernant le mouvement d'un fluide visqueux, la seconde ayant trait au mouvement d'un fluide limité par un mur, et contenant un solide à paroi circulaire.

Nous utiliserons l'interprétation mécanique suivante, qui facilite et rend naturelle la marche des calculs.

Imaginons que nous étendions sur le domaine considéré une couche de fluide homogène, non tourbillonnaire, de densité 1, animé d'un mouvement permanent de rotation générale entre les courbes limites; ces dernières courbes étant constamment suivies tangentiellement par le fluide. Bien entendu, nous ne nous préoccupons en aucune façon de la possibilité *physique* d'un tel mouvement, ni par conséquent du signe que la pression serait capable d'y acquérir; ce signe n'a ici aucun intérêt, le fluide n'étant là que pour servir d'élément de démonstration. Au contraire, la possibilité, *du point de vue du calcul*, du mouvement en question, résulte de ce qu'un tel mouvement est évidemment réalisable dans le cas d'une couronne circulaire (auquel cas il se réduit à une rotation d'ensemble autour du centre commun) et la représentation conforme, dont l'existence est assurée, fait correspondre à ce mouvement celui qui est actuellement considéré.

Quoi qu'il en soit, désignons par  $\varphi$  et  $\psi$  le potentiel et la fonction de courant, dans le plan  $z$  qui contient le domaine doublement connexe considéré. Soient  $u$  et  $v$  les composantes de la vitesse au point  $z$ . Posons

$$f = \varphi + i\psi,$$

on sait qu'on a

$$(1) \quad \frac{df}{dz} = u - iv = e^{-i\Omega},$$

en introduisant une nouvelle fonction complexe  $\Omega$ , dont l'utilité sera manifeste dans un instant.

Dans le plan auxiliaire de la variable  $f$ , le domaine envisagé du plan  $z$  est représenté une infinité de fois sur l'aire de la bande horizontale qui est comprise entre les droites  $\psi = \psi_0$  et  $\psi = \psi_1$ , qui cor-

respondent aux deux lignes de courant qui suivent les deux frontières extrêmes.  $\psi$  n'étant défini qu'à une constante près, on peut prendre  $\psi_0 = c$ , ce que nous ferons désormais. Si maintenant nous désignons par  $\varphi_0$  la constante cyclique du mouvement considéré, c'est-à-dire la quantité dont s'accroît le potentiel lorsque le point  $z$  fait un tour complet dans le domaine entre les deux frontières, le même domaine sera représenté *une fois* dans le rectangle situé dans la bande susdite, et dont la dimension horizontale est  $\varphi_0$ .

Ceci étant, posons

$$(2) \quad f = -\frac{i\varphi_0}{2\pi} \log Z;$$

le domaine du plan  $f$  sera alors représenté conformément sur une couronne circulaire du plan  $Z$ , les rayons extrêmes de cette couronne étant 1 et  $q = e^{-2\pi \frac{\psi_1}{\varphi_0}}$ . Le domaine donné du plan  $z$  sera donc lui-même représenté conformément sur la couronne, si l'on sait écrire la relation qui lie d'après ce qui précède les deux variables  $z$  et  $Z$ . Or on y parviendrait aisément si l'on connaissait la fonction  $\Omega$  introduite plus haut. Tout revient donc en somme à la détermination de cette fonction.

Or si l'on pose  $\Omega = \Theta + iT$ , on voit de suite la signification mécanique de  $\Theta$  et de  $T$  :  $\Theta$  est l'angle de la vitesse avec l'axe des  $x$ , et,  $V$  étant la vitesse au point  $z$ , on a  $V = e^T$ . Par suite, considérée comme fonction de  $Z$ ,  $\Omega(Z)$  ne sera pas uniforme dans l'anneau circulaire ci-dessus : sa partie imaginaire reprendra bien la même valeur lorsque le point  $Z$  fera un tour complet dans l'anneau, mais sa partie réelle augmentera de  $2\pi$  dans les mêmes conditions. Par conséquent, la fonction

$$(3) \quad \Omega_1(Z) = \Omega(Z) + i \log Z,$$

dans laquelle on aura pris pour  $\log Z$  une détermination quelconque de ce logarithme, que l'on s'astreindra ensuite à suivre par continuité, sera une fonction de  $Z$ , uniforme et régulière dans toute la couronne. En modifiant toutes les vitesses dans le même rapport on ne changera évidemment rien à la question, et l'on modifiera ainsi  $\Omega$  ou  $\Omega_1$  par

l'addition d'une constante *imaginaire pure*, qui restera sans importance par conséquent.

Désignons par  $s$  l'argument de  $Z$  qui correspond à la détermination choisie pour le logarithme; la partie réelle de  $\Omega_1(Z)$  prendra, le long des deux circonférences de rayons 1 et  $q$ , les successions de valeurs  $\Phi(s) - s$  et  $\Psi(s) - s$ , en appelant  $\Phi(s)$  et  $\Psi(s)$  les angles que font avec  $Ox$ , dans le plan  $z$ , aux points d'argument  $s$ , les tangentes aux courbes frontières du domaine primitif (dans le sens du courant supposé). Les expressions de ces deux fonctions  $\Phi(s)$  et  $\Psi(s)$  dépendent donc uniquement de l'allure des deux courbes frontières en question.

Cela étant, en appliquant une formule générale que j'ai démontrée dans le Mémoire cité plus haut, nous pourrons écrire explicitement la fonction  $\Omega_1(Z)$  sous la forme

$$(4) \quad \Omega_1(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} [\Phi(s) - s] \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds \\ - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} [\Psi(s) - s] \zeta_3 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds.$$

Les fonctions  $\zeta$  et  $\zeta_3$  qui interviennent ici sont celles qui sont bien connues dans la théorie des Fonctions Elliptiques, et les demi-périodes  $\omega_1$  et  $\omega_3$  desdites fonctions sont définies, à un facteur près, par la relation

$$q = e^{\frac{-\pi\omega_3}{i\omega_1}}.$$

Maintenant la condition de régularité (c/. mon Mémoire susdit) exige qu'on ait la relation

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} [\Phi(s) - \Psi(s)] ds = 0.$$

Quel que soit l'exemple que l'on aura à traiter, on voit qu'il sera nécessaire de calculer dans tous les cas l'intégrale suivante :

$$(6) \quad A = -\frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} s \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - \zeta_3 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right] ds.$$

Nous allons effectuer tout d'abord ce calcul.

A cet effet, nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{\omega_1}{\pi} s = u \quad \text{et} \quad \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = a,$$

et l'intégrale demandée sera la suivante :

$$(7) \quad A = \frac{i}{\omega_1} \int_0^{2\omega_1} u [\zeta(u-a) - \zeta_3(u-a)] du.$$

Or, intégrons la fonction  $u\zeta(u-a)$  le long du contour du parallélogramme construit sur les longueurs  $2\omega_1$ ,  $\omega_3$ , portées sur les axes. Dans l'intérieur de ce contour, il y a un pôle seulement, à savoir  $u=a$  (à une période près); il est, du reste, toujours possible de supposer que,  $\rho$  et  $s$  étant le module et l'argument de  $Z$ , on a choisi  $s$  entre 0 et  $2\pi$ . Le résidu correspondant étant égal à  $a$ , ainsi qu'on le voit immédiatement, il en résulte

$$\begin{aligned} \int_0^{2\omega_1} u\zeta(u-a) du + \int_{2\omega_1}^{2\omega_1+\omega_3} u\zeta(u-a) du \\ - \int_{\omega_3}^{2\omega_1+\omega_3} u\zeta(u-a) du - \int_0^{\omega_3} u\zeta(u-a) du = 2i\pi a. \end{aligned}$$

Mais on a, d'autre part,

$$\int_{2\omega_1}^{2\omega_1+\omega_3} u\zeta(u-a) du = \int_0^{\omega_3} (u+2\omega_1) [\zeta(u-a) + 2\eta_1] du$$

et

$$\int_{\omega_3}^{2\omega_1+\omega_3} u\zeta(u-a) du = \int_0^{2\omega_1} (u+\omega_3) [\zeta_3(u-a) + \eta_3] du.$$

Donc il reste, en remplaçant,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\omega_1} u [\zeta(u-a) - \zeta_3(u-a)] du \\ - \omega_3 \int_0^{2\omega_1} \zeta_3(u-a) du - 2\eta_3\omega_1^2 - 2\omega_1\eta_3\omega_3 \\ + 2\omega_1 \int_0^{\omega_3} \zeta(u-a) du + \eta_1\omega_3^2 + 4\eta_1\omega_1\omega_3 = 2i\pi a. \end{aligned}$$

Or, on a sans difficulté, en désignant par  $\lambda$  un certain entier conve-

nale,

$$\int_0^{2\omega_1} \zeta_3(u-a) du = \log \frac{\sigma_3(2\omega_1-a)}{\sigma_3(-a)} = 2\eta_1(\omega_1-a) + 2\lambda i\pi,$$

et, de même,

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_3} \zeta(u-a) du &= \log \frac{\sigma(\omega_3-a)}{\sigma(-a)} = \log \left[ \frac{e^{-\eta_3 a} \sigma \omega_3 \sigma_3(-a)}{\sigma(-a)} \right] \\ &= -\eta_3 a + \log \sigma \omega_3 + \log \zeta_{30}(a) + (2\mu+1)i\pi, \end{aligned}$$

où  $\mu$  désigne un autre entier à déterminer.

Transportons ces résultats dans A, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} (8) \quad A &= i \log Z - 2i \log \zeta_{30}(a) - 2i \log \sigma \omega_3 + \pi \\ &\quad + \frac{\pi \omega_3}{2\omega_1} + i\eta_3 \omega_3 - 2\lambda \pi \frac{\omega_3}{\omega_1} + 2(2\mu+1)\pi, \end{aligned}$$

expression dans laquelle il convient de préciser les nombres  $\lambda$  et  $\mu$ , ainsi que la détermination exacte des logarithmes qui y figurent.

Pour ce qui concerne  $\lambda$ , il s'agit d'une détermination facile, et du reste classique : d'ailleurs on a

$$\int_0^{2\omega_1} \zeta_3(u-a) du = 2\eta_1(\omega_1-a) + 2\lambda i\pi;$$

la valeur de  $\lambda$  est évidemment indépendante de  $a$ ; elle est donc nulle, puisque dans le cas particulier où  $a=0$  l'intégrale et l'expression  $2\eta_1 \omega_1$  sont toutes les deux réelles. On a donc

$$\lambda = 0.$$

La détermination de  $\mu$  est un peu plus délicate. Ce nombre, évidemment encore indépendant de  $a$ , est défini, en somme, par l'égalité

$$\int_0^{\omega_3} \zeta(u-a) du = -\eta_3 a + \log \sigma \omega_3 + \log \zeta_{30}(a) + (2\mu+1)i\pi,$$

où nous préciserons tout à l'heure les déterminations des deux logarithmes. Effectuons l'intégration d'une autre manière, en passant aux

fonctions  $\mathfrak{Z}$ . On sait qu'on a

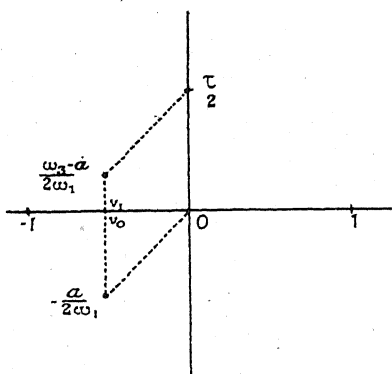
$$\zeta(u-a) = \frac{\eta_1}{\omega_1}(u-a) + \frac{1}{2\omega_1} \frac{\mathfrak{Z}'_1\left(\frac{u-a}{2\omega_1}\right)}{\mathfrak{Z}_1\left(\frac{u-a}{2\omega_1}\right)}.$$

Donc

$$\int_0^{\omega_3} \zeta(u-a) du = \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} \left(\frac{\omega_3}{2} - a\right) + \left[ \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{u-a}{2\omega_1}\right) \right]_0^{\omega_3}.$$

Le chemin d'intégration pour le point  $v = \frac{u-a}{2\omega_1}$  est le chemin rectiligne qu'indique le dessin ci-dessous (fig. 1). Adoptons maintenant

Fig. 1.



pour  $\log \mathfrak{Z}_1(v)$  la détermination principale, qui possède une partie imaginaire comprise entre  $-\pi$  et  $+\pi$ ; alors, en tenant compte de ce que, aux deux points infiniment voisins  $v_0$  et  $v_1$ , on a

$$\log \mathfrak{Z}_1(v_1) = \log |\mathfrak{Z}_1(v_1)| + i\pi,$$

$$\log \mathfrak{Z}_1(v_0) = \log |\mathfrak{Z}_1(v_0)| - i\pi,$$

on en conclut

$$\left[ \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{u-a}{2\omega_1}\right) \right]_0^{\omega_3} = \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{\omega_3-a}{2\omega_1}\right) - \log \mathfrak{Z}_1\left(-\frac{a}{2\omega_1}\right) - 2i\pi$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_3} \zeta(u-a) du &= \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} \left(\frac{\omega_3}{2} - a\right) - 2i\pi + \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{\omega_3-a}{2\omega_1}\right) - \log \mathfrak{Z}_1\left(-\frac{a}{2\omega_1}\right). \end{aligned}$$



L'argument de  $\log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{\omega_3 - a}{2\omega_1}\right)$  est compris entre 0 et  $\pi$ , celui de  $\log \mathfrak{Z}_1\left(-\frac{a}{2\omega_1}\right)$  entre  $-\pi$  et 0.

Nous allons faire apparaître dans cette expression les nombres  $\log \sigma \omega_3$  et  $\log \xi_{30} a$ . Les formules (XXXIII) de l'Ouvrage de Tannery et Molk permettent d'écrire, en prenant pour les logarithmes aux seconds membres les déterminations principales (ce qui définit sans ambiguïté les premiers membres),

$$\log \sigma \omega_3 = \log 2\omega_1 + \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{\omega_3}{2\omega_1}\right) - \log \mathfrak{Z}'_1(0) + \frac{\eta_1 \omega_3^2}{2\omega_1}$$

et

$$\begin{aligned} \log \xi_{30}(a) &= \log \sigma_3 a - \log \sigma a \\ &= \log \mathfrak{Z}_4\left(\frac{a}{2\omega_1}\right) - \log \mathfrak{Z}_4(0) - \log 2\omega_1 - \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{a}{2\omega_1}\right) + \log \mathfrak{Z}'_1(0). \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \log \sigma \omega_3 + \log \xi_{30} a &= \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) + \frac{\eta_1 \omega_3^2}{2\omega_1} - \log \mathfrak{Z}_4(0) + \log \mathfrak{Z}_4\left(\frac{a}{2\omega_1}\right) - \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{a}{2\omega_1}\right). \end{aligned}$$

Maintenant il résulte d'une formule connue :

$$\mathfrak{Z}_1\left(\frac{\tau}{2} - \frac{a}{2\omega_1}\right) = iq^{-\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{a}{2\omega_1}} \mathfrak{Z}_4\left(-\frac{a}{2\omega_1}\right);$$

donc

$$\log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{\tau}{2} - \frac{a}{2\omega_1}\right) = \frac{i\pi}{2} + \frac{\pi \omega_3}{4i\omega_1} + \frac{i\pi a}{2\omega_1} + \log \mathfrak{Z}_4\left(\frac{a}{2\omega_1}\right) + 2N i\pi,$$

l'entier  $N$  étant indépendant de  $a$ . Du reste,  $N$  est nul, puisque, pour  $a$  voisin de zéro, la partie imaginaire du second membre est voisine de  $\frac{i\pi}{2} + 2N i\pi$ , alors que celle du premier membre doit être comprise entre 0 et  $i\pi$ .

On a, d'autre part, à cause de la définition du  $\log \mathfrak{Z}_1(v)$ ,

$$\log \mathfrak{Z}_1\left(-\frac{a}{2\omega_1}\right) = \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{a}{2\omega_1}\right) - i\pi.$$

Donc la valeur primitive de  $\int_a^{\omega_3} \zeta(u - a) du$  peut finalement s'écrire,

après réduction provenant de la formule

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2},$$

sous la forme

$$\int_0^{\omega_3} \zeta(u-a) du = -\eta_3 a + \log \sigma \omega_3 + \log \zeta_{30}(a) + \left[ \frac{\pi\tau}{4i} - \frac{i\pi}{2} - \log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) + \log \mathfrak{Z}_4(0) \right].$$

Donc la quantité  $(2\mu + 1)i\pi$  est égale à l'expression entre crochets, laquelle est bien effectivement indépendante de  $a$ . On a d'ailleurs, par une formule connue,

$$\mathfrak{Z}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}} \mathfrak{Z}_4(0),$$

et, par suite,

$$\log \mathfrak{Z}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{i\pi}{2} + \frac{\pi\omega_3}{4i\omega_1} + \log \mathfrak{Z}_4(0)$$

sans ajouter de multiple de  $2i\pi$ , car les deux membres ont la même partie imaginaire égale à  $\frac{i\pi}{2}$ .

Réduisant, on trouve finalement

$$\mu = -1;$$

d'où enfin pour A l'expression suivante :

$$(9) \quad A = i \log Z - 2i \log \zeta_{30} \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - \pi + \frac{\pi\tau}{2} + i\eta_3 \omega_3 - 2i \log \sigma \omega_3.$$

On peut retrouver ce même résultat, peut-être plus rapidement, par le procédé suivant : Intégrons d'abord par parties l'intégrale qui sert de définition à A. Nous avons de suite

$$A = \frac{i}{\omega_1} \left[ u \log \frac{\sigma(u-a)}{\sigma_3(u-a)} \right]_0^{2\omega_1} - \frac{i}{\omega_1} \int_0^{2\omega_1} [\log \sigma(u-a) - \log \sigma_3(u-a)] du.$$

La partie tout intégrée, par une transformation facile, devient

$$2i \log \frac{\sigma(2\omega_1-a)}{\sigma_3(2\omega_1-a)} = 2i \log \left( \frac{\sigma a}{\sigma_3 a} \right).$$

Ensuite les formules (CVI) de l'Ouvrage de Tannery et Molk nous donnent

$$\log \sigma u = \log \frac{2\omega_1}{\pi} + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} - \log \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} + \sum_1^{\infty} \frac{2q^{2p} \left(1 - \cos \frac{p\pi u}{\omega_1}\right)}{p(1 - q^{2p})}$$

et

$$\log \sigma_3 u = \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \sum_1^{\infty} \frac{2q^p \left(1 - \cos \frac{p\pi u}{\omega_1}\right)}{p(1 - q^{2p})}.$$

De là nous tirons, pour A,

$$\begin{aligned} A = 2i \log \left( \frac{\sigma a}{\sigma_3 a} \right) - 2i \log \frac{2\omega_1}{\pi} - \frac{i}{\omega_1} \int_0^{2\omega_1} \log \sin \frac{\pi(u-a)}{2\omega_1} du \\ + \frac{2i}{\omega_1} \sum_1^{\infty} \frac{q^p}{p(1+q^p)} \int_0^{2\omega_1} \left[ 1 - \cos \frac{p\pi(u-a)}{2\omega_1} \right] du, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (10) \quad A = 2i \log \left( \frac{\sigma a}{\sigma_3 a} \right) - 2i \log \frac{2\omega_1}{\pi} + 4i \sum_1^{\infty} \frac{q^p}{p(1+q^p)} \\ - \frac{i}{\omega_1} \int_0^{2\omega_1} \log \sin \frac{\pi(u-a)}{2\omega_1} du. \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à l'intégrale

$$(11) \quad I = \frac{i}{\omega_1} \int_0^{2\omega_1} \log \sin \frac{\pi(u-a)}{2\omega_1} du = \frac{2i}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} \log \sin t dt,$$

en posant

$$t_0 = -\frac{\pi a}{2\omega_1} = -\frac{\log Z}{2i} = \alpha + i\beta,$$

on voit de suite que l'on a

$$\begin{aligned} -\pi < \alpha < 0, \\ -\frac{\pi\tau}{2i} < \beta < 0. \end{aligned}$$

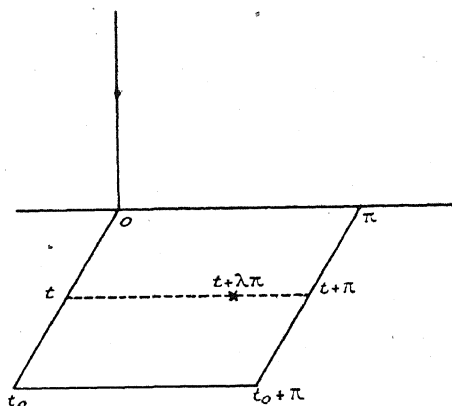
Considérons maintenant le parallélogramme de la figure 2, d'abord supposé écorné aux deux sommets 0 et  $\pi$ .

Sur les petits arcs ainsi tracés, l'intégrale de  $\log \sin t$  est infiniment petite, et, comme cette fonction est holomorphe dans le parallélo-

gramme, on a

$$\int_{t_0}^{t_0+\pi} \log \sin t \, dt - \int_0^\pi \log \sin t \, dt + \int_{t_0+\pi}^\pi \log \sin t \, dt + \int_0^{t_0} \log \sin t \, dt = 0.$$

Fig. 2.



L'intégrale  $\int_0^\pi \log \sin t \, dt$  est classique, et sa valeur bien connue est  $-\pi \log 2$ . D'autre part, on a immédiatement

$$\int_{t_0+\pi}^\pi \log \sin t \, dt = \int_{t_0}^0 \log \sin(\pi + w) \, dw = - \int_0^{t_0} \log(-\sin t) \, dt,$$

de sorte que la différence

$$\int_{t_0+\pi}^\pi \log \sin t \, dt - \int_0^{t_0} \log \sin t \, dt = D$$

se réduit nécessairement à  $\pm i\pi t_0$ . Il faut préciser le signe; à cet effet, écrivons la différence sous la forme

$$D = \int_{t_0}^0 [\log \sin(\pi + t) - \log \sin t] \, dt$$

et voyons comment varie  $\log \sin(t + \lambda\pi)$  lorsque  $t$  est un point du segment  $0, t_0$ , et que  $\lambda$  varie de 0 à 1. On peut poser dans ces conditions

$$t = -\alpha' - i\beta'$$

et l'on a

$$0 < \alpha' < \pi, \quad \beta' > 0.$$

Alors

$$\sin(t + \lambda\pi) = X + iY$$

avec

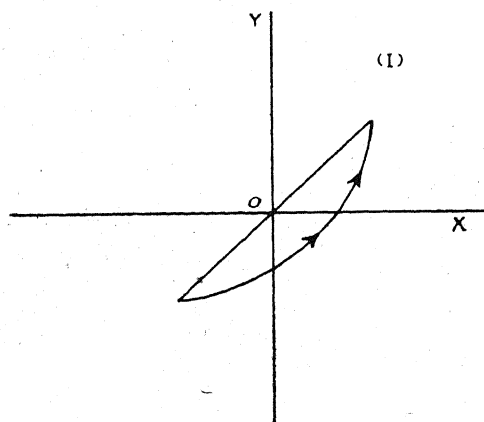
$$X = \operatorname{ch} \beta' \sin(\lambda\pi - \alpha'),$$

$$Y = -\operatorname{sh} \beta' \cos(\alpha' - \lambda\pi).$$

Supposons d'abord  $\alpha' < \frac{\pi}{2}$ ; une discussion facile montre que si  $\lambda$  varie de 0 à 1,  $X$  s'annule avant  $Y$ , et que le point  $(X, Y)$  décrit une courbe telle que (1) (fig. 3), alors

$$\log \sin(t + \pi) - \log \sin t = i\pi,$$

Fig. 3.



et il en résulte

$$D = -i\pi t_0.$$

Si au contraire  $\alpha' > \frac{\pi}{2}$ , on trouve aussi facilement pour le point  $(X, Y)$  une courbe telle que celle de la figure 4, et la conclusion reste la même. Donc finalement nous avons

$$\int_{t_0}^{t_0 + \pi} \log \sin t \, dt = i\pi t_0 - \pi \log 2$$

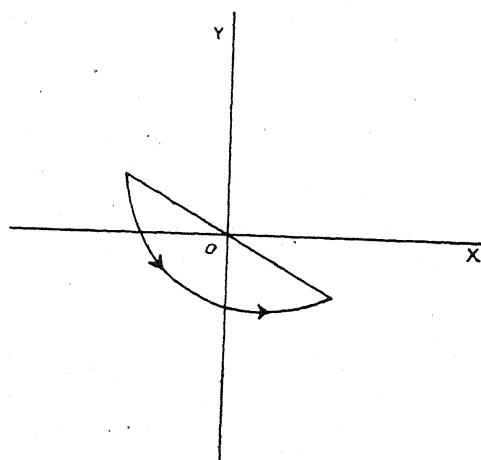
et par suite, pour A,

$$A = 2i \log \left[ \frac{\sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)}{\sigma_3 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)} \right] - 2i \log \frac{\omega_1}{\pi} + i \log Z + 4i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q^p}{p(1+q^p)}.$$

On peut transformer d'une façon commode la série qui intervient au second membre,

$$S = \sum_1^{\infty} \frac{q^p}{p(1+q^p)}.$$

Fig. 4.



Pour cela, rappelons d'abord la formule suivante (CV, 1 de l'Ouvrage de Tannery et Molk) :

$$\log \operatorname{sn}(2K\varphi) = 2 \log \mathfrak{S}_3(0) + \operatorname{ls}(\varphi) - \sum_1^{\infty} \frac{q^r}{r(1+q^r)} (2 \sin r\pi\varphi)^2;$$

le symbole  $\operatorname{ls}(\varphi)$  désigne la fonction  $\log \sin(\varphi)$  précisée comme l'indique Tannery. Dans cette formule, faisons  $\varphi = \frac{1}{2}$ ; il en résulte

$\operatorname{ls}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  (cf. TANNERY, t. IV, p. 99); par ailleurs, on sait que  $\operatorname{sn} K = 1$ .

Par suite, il vient

$$\sum_0^{\infty} \frac{q^{2r+1}}{(2r+1)(1+q^{2r+1})} = \frac{1}{2} \log \mathfrak{S}_3(0);$$

ceci nous donne donc une partie de la somme  $S$ . Il resterait à évaluer la portion

$$S' = \sum_1^{\infty} \frac{q^{2r}}{2r(1+q^{2r})}.$$

Or, celle-ci peut s'écrire

$$2S' = \sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{q^{2(p+1)r}}{r}.$$

Sommons par rapport à l'indice  $r$ , en utilisant la formule

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = -\log(1-x),$$

où il n'y a pas d'ambiguïté pour le logarithme, tout étant réel; il vient

$$2S' = -\log(1-q^2) + \log(1-q^4) - \log(1-q^6) + \log(1-q^8) \dots$$

Or, les produits infinis  $q_0$  et  $q_3$  de la théorie des fonctions elliptiques sont définis par les formules

$$\begin{aligned} q_0 &= (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6) \dots, \\ q_3 &= (1-q)(1-q^3)(1-q^5) \dots \end{aligned}$$

Passant du module  $q$  au module  $q^2$ , nous aurons donc

$$\begin{aligned} Q_0 &= (1-q^4)(1-q^8) \dots, \\ Q_3 &= (1-q^2)(1-q^6) \dots \end{aligned}$$

Mais on sait qu'on a

$$\begin{aligned} Q_0 &= q_0 q_1, \\ Q_3 &= q_2 q_3 = \frac{1}{q_1}, \end{aligned}$$

et, d'autre part (formule XXXVI, 2),

$$\mathfrak{S}_3(0) = q_0 q_3^2.$$

Finalement on en conclut pour  $S$  la valeur suivante :

$$S = \frac{1}{2} \log(q_0 q_2^2) + \frac{1}{2} \log(q_0 q_1^2) = \log(q_0 q_1 q_2) = \log \frac{q_0}{q_3},$$

ce qui permet de mettre enfin  $A$  sous la forme

$$(12) \quad A = -2i \log \xi_{30} \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) + i \log Z - 2i \log \frac{\omega_1}{\pi} + 4i \log \frac{q_0}{q_3}.$$

Cette expression ne diffère de celle précédemment obtenue par un autre procédé que par la partie indépendante de  $Z$ . Il est facile de cons-

tater que les expressions en question sont exactement équivalentes. Cela revient à démontrer la formule

$$(13) \quad -2i \log \frac{\omega_1}{\pi} + 4i \log \frac{q_0}{q_3} = -\pi + \frac{\pi\tau}{2} + i\eta_3\omega_3 - 2i \log \sigma\omega_3 = P.$$

Or, tout d'abord, la relation

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}$$

permet d'écrire la seconde expression de P sous la forme

$$P = -\pi + \pi\tau + i\omega_3\eta_1\tau - 2i \log \sigma\omega_3.$$

Puis, exprimant  $\sigma\omega_3$  en fonction de  $\mathfrak{S}_1\left(\frac{\tau}{2}\right)$ , on a

$$\log \sigma\omega_3 = \log 2\omega_1 + \log \mathfrak{S}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) - \log \mathfrak{S}'_1(0) + \frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}.$$

La formule (TANNERY, XXXVI, 2) donne par ailleurs

$$\begin{aligned} \log \mathfrak{S}'_1(0) &= \log 2\pi + 3 \log q_0 + \frac{1}{4} \log q, \\ \mathfrak{S}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) &= iq^{-\frac{1}{4}} \mathfrak{S}_4(0) = iq^{-\frac{1}{4}} q_0 q_3^2. \end{aligned}$$

Transportant dans P, il vient après réduction

$$P = 2i \log \frac{\pi}{\omega_1} + 4i \log \frac{q_0}{q_3},$$

ce qui est la formule à démontrer.

Nous avons un peu insisté sur la détermination précise à adopter pour l'intégrale A, parce que cette précision est indispensable pour une autre recherche. Dans la recherche actuelle, nous serons amenés à constater que la modification de  $\Omega_1(Z)$  par une certaine constante n'entraîne pas de modification essentielle dans la théorie qui nous occupe actuellement.

Une fois calculée l'intégrale qui donne la fonction  $\Omega_1(Z)$ , et repassant ensuite à  $\Omega(Z)$  par la formule (3), on devra revenir du plan Z au plan  $z$  au moyen de la formule

$$dz = e^{i\Omega} df,$$

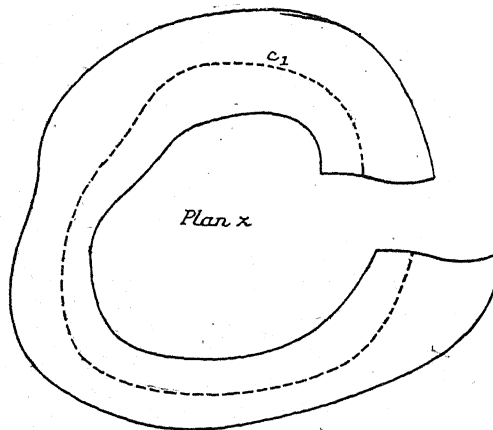


qui s'écrira sans difficulté

$$(14) \quad dz = \frac{-i\varphi_0}{2\pi} e^{i\Omega(z)} \frac{dZ}{Z} = -\frac{i\varphi_0}{2\pi} e^{i\Omega_1(Z)} dZ,$$

La correspondance entre deux points particuliers (des contours, par exemple) suffira pour préciser la constante d'intégration, laquelle ne joue aucun rôle important. Seulement, à l'anneau circulaire, supposé par exemple coupé le long d'un rayon (qui serait supposé avoir deux côtés), il correspondra par cette formule une aire du plan  $z$ , qui sera en général conforme au dessin de la figure ci-dessous (*fig. 5*) : les deux

Fig. 5.



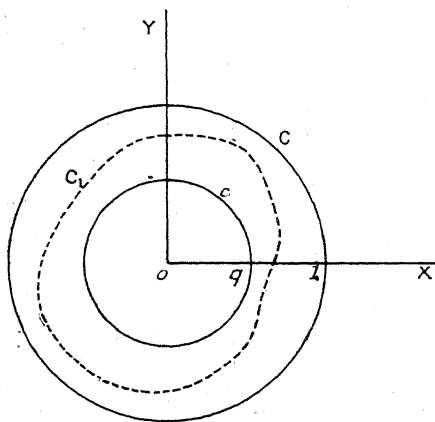
lignes correspondant aux deux bords du rayon susindiqué ne seront pas en coïncidence et l'anneau du plan  $z$  ne se fermera pas, du moins de lui-même. Il faudra, pour que cette condition soit remplie, imposer aux arbitraires du problème une « condition de fermeture », qui s'obtiendra immédiatement comme il suit :

Envisageons dans l'anneau du plan  $Z$  un contour fermé quelconque  $C_1$  (*fig. 6*) intermédiaire entre les deux circonférences limites et entourant une fois la circonférence intérieure;  $C_1$  pourra être, par exemple, une des deux circonférences extrêmes. A cette courbe  $C_1$  correspondra dans le plan  $z$  une courbe  $c_1$  qui devra être une courbe fermée; cela exige la condition

$$(15) \quad \int_{C_1} e^{i\Omega_1(Z)} dZ = 0.$$

Cette condition, nécessaire, sera aussi suffisante pour assurer la représentation dans les formes voulues. En effet, si, partant d'un des points  $M_0$  ou  $M'_0$ , en coïncidence sur les deux bords du rayon ci-dessus

Fig. 6.



choisi, on décrit dans le plan  $Z$  les deux bords de ce rayon, les deux portions de courbe que l'on obtiendra dans le plan  $z$  viendront également en coïncidence; le point de départ sera en effet le même, et en chaque point des lignes décrites l'élément d'arc sera le même en grandeur et en direction, puisque le  $dz$  sera le même. Il suffira donc d'explicitier la condition (15), qui équivaudra du reste à deux équations, concernant la partie réelle et la partie imaginaire. Ces deux équations serviront à déterminer les arbitraires qui pourront rester dans la formation des fonctions  $\Phi(s)$  et  $\Psi(s)$  intervenant dans la fonction  $\Omega_1(Z)$ . Bien entendu, les susdites conditions ne seront généralement pas vérifiées d'elles-mêmes; un exemple concret suffira plus loin à mettre ce point en évidence.

Il est cependant un cas où la fermeture s'opère d'elle-même sans que l'on soit obligé d'utiliser ces relations. C'est celui où la figure dans le plan  $z$  possède deux axes de symétrie rectangulaires. Dans la correspondance entre les contours, on peut alors évidemment s'arranger pour que quatre points situés aux sommets d'un rectangle de centre  $O$  et de côtés parallèles aux axes répondent dans le plan  $Z$  aux quatre sommets d'un rectangle analogue. Prenons alors pour courbe  $C$ , le

cercle  $|Z| = 1$  ( $Z = e^{is}$ ); en posant

$$\begin{aligned}\Omega(Z) &= \Theta + iT, \\ \Omega_1(Z) &= \Theta_1 + iT,\end{aligned}$$

la symétrie par rapport au premier axe,  $Ox$  par exemple, entraîne visiblement

$$\begin{aligned}\Theta(2\pi - s) &= -\Theta(s) + \pi, \\ T(2\pi - s) &= T(s).\end{aligned}$$

D'autre part, on a sur  $C_1$  :

$$\begin{aligned}\Theta_1(s) &= \Theta(s) - s, \\ T_1(s) &= T(s).\end{aligned}$$

On en conclut donc immédiatement pour la condition de fermeture

$$\int_0^{2\pi} e^{i[\Theta_1(s) + iT_1(s)]} e^{is} i ds = 0 = \int_0^{2\pi} e^{-T(s) + i\Theta(s)} ds,$$

et on la met sous la forme

$$\int_0^\pi e^{-T(s) + i\Theta(s)} ds - \int_0^\pi e^{-T(s) + i\Theta(s)} ds = 0 = \int_0^\pi e^{-T(s)} \sin \Theta(s) ds.$$

Maintenant, la seconde symétrie entraîne

$$\begin{aligned}\Theta(\pi - s) &= -\Theta(s), \\ T(\pi - s) &= T(s).\end{aligned}$$

On en conclut aisément

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-T(s)} \sin \Theta(s) ds = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-T(s)} \sin \Theta(s) ds,$$

et par suite la condition demandée est vérifiée d'elle-même.

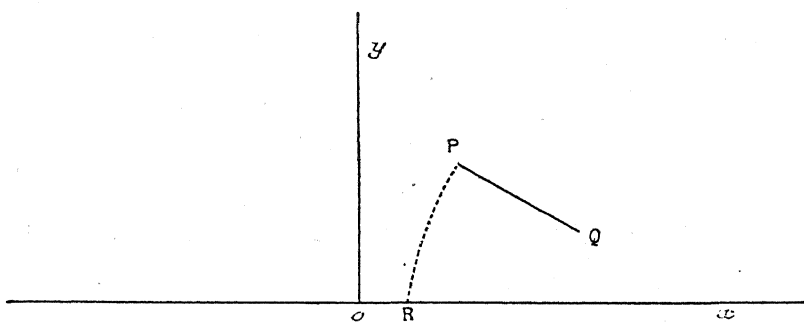
Le même calcul prouve que, dans le cas d'une seule symétrie, la condition générale de fermeture ne fournit entre les données qu'une seule relation.

Nous allons donner de ce qui précède une application concrète, dans un cas correspondant à un problème de viscosité dont nous par-

lerons ensuite, cas où le domaine du plan  $z$ , qu'il s'agit d'étudier, ne possède aucune symétrie.

Ce cas est celui où le domaine est constitué par le demi-plan supérieur du plan  $z$ , avec une coupure rectiligne PQ. Imaginons notre fluide auxiliaire en mouvement autour de PQ, et traçons la ligne équipotentielle qui aboutit à P (fig. 7). Cette ligne se termine d'autre part

Fig. 7.



en un certain point R de l'axe réel; nous conviendrons de compter les valeurs de l'angle  $\Theta$  par continuité, en prenant à partir du point R, *du côté droit*, la valeur zéro; de sorte qu'en imaginant que le mouvement général du fluide se fasse dans le sens positif trigonométrique, l'angle  $\Theta$  sera nul sur toute la portion de l'axe réel qui est à droite du point R, et égale à  $2\pi$  sur toute la portion à gauche. Nous appellerons de plus  $-\delta$  l'angle (entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ ) que fait PQ avec  $Ox$ ; en sorte que l'angle  $\Theta$  sera égal à  $-\delta$  sur le côté inférieur de la coupure, et à  $\pi - \delta$  sur le côté supérieur.

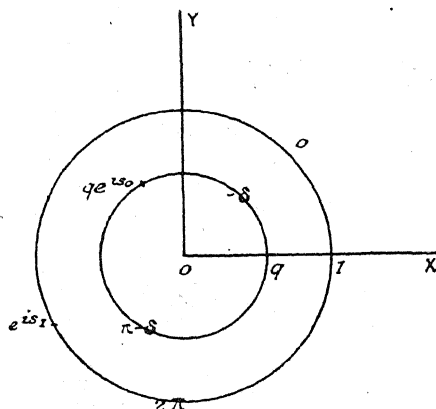
Ceci posé, faisons correspondre le point R au point  $Z=1$ ; nous aurons alors la correspondance générale qu'indique la figure ci-après (fig. 8). La ligne équipotentielle PR correspond à la portion du demi-axe OX situé dans la couronne; au point à l'infini sur  $Ox$  correspond le point  $Z = e^{is_1}$ , au point Q correspond le point  $Z = q e^{is_0}$ .

Entre les constantes ainsi introduites, la condition générale de régularité impose la relation

$$(16) \quad 2s_1 - s_0 = 2\pi + 2\delta.$$

Puis en appliquant la formule générale de calcul de la fonction  $\Omega_1(Z)$ , on voit immédiatement que l'on obtient cette dernière fonction en

Fig. 8.



ajoutant à l'expression A déjà calculée la quantité suivante :

$$(17) \quad B = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \zeta_3\left(a - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) ds - \frac{i\omega_1}{\pi} \int_{s_0}^{2\pi} \zeta_3\left(a - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) ds \\ + \frac{2i\omega_1}{\pi} \int_{s_1}^{2\pi} \zeta\left(a - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) ds.$$

Un calcul fort simple met cette expression sous la forme

$$B = i \log \frac{\sigma_3(a)}{\sigma_3\left(a - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} \\ + 2i\eta_1\left(1 - \frac{\partial}{\pi}\right) \left(\omega_1 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - 2i \log \left[ - \frac{\sigma a}{\sigma\left(a - \frac{\omega_1}{\pi} s_1\right)} e^{-2\eta_1(a-\omega_1)} \right],$$

d'où encore, après transformations faciles,

$$(18) \quad \Omega_1(Z) = A + B = i \log \frac{\sigma^2\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} \\ + \left[ i + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} \left(1 + \frac{\partial}{\pi}\right) \right] \log Z + \text{const.}$$

Nous déterminerons la constante de façon que pour  $Z = e^{is}$ , avec  $s$  positif et très petit,  $\Omega_1(Z)$  soit égal à une imaginaire pure (dont la connaissance revient à celle de la vitesse au point R). Choisissons pour les logarithmes les déterminations principales; on voit tout de suite que l'on peut prendre nulle la constante en question; en effet, dans les circonstances que l'on vient de dire,  $\Omega_1(Z)$  se réduit à cette constante, qui doit être imaginaire pure; or nous avons déjà vu que l'on pouvait, sans rien changer d'essentiel, ajouter ou retrancher à  $\Omega_1(Z)$  une constante imaginaire pure. Dans ces conditions, nous prendrons donc

$$(19) \quad \Omega_1(Z) = i \log \frac{\sigma^2 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_1 \right)}{\sigma_3 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \sigma_3 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)} + \left[ i + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi} \left( 1 + \frac{\partial}{\pi} \right) \right] \log Z.$$

Pour plus de commodité dans la suite, nous passerons des fonctions  $\sigma$  aux fonctions  $\mathfrak{S}$ ; par des formules bien connues, on écrira

$$\begin{aligned} \sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_1 \right) &= \frac{2\omega_1}{\mathfrak{S}_1(0)} \mathfrak{S}_1 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_1}{2\pi} \right) e^{2\eta_1 \omega_1 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_1}{2\pi} \right)^2}, \\ \sigma_3 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) &= \frac{1}{\mathfrak{S}_4(0)} \mathfrak{S}_4 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} \right) e^{2\eta_1 \omega_1 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} \right)^2}, \\ \sigma_3 \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) &= \frac{1}{\mathfrak{S}_4(0)} \mathfrak{S}_4 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi} \right) e^{2\eta_1 \omega_1 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi} \right)^2}; \end{aligned}$$

d'où, par substitution,

$$\begin{aligned} \Omega_1(Z) &= i \log \frac{\mathfrak{S}_1^2 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_1}{2\pi} \right)}{\mathfrak{S}_4 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} \right) \mathfrak{S}_4 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi} \right)} + \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi^2} (s_0 - 2s_1) \log Z + i \log Z \\ &\quad + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi} \left( 1 + \frac{\partial}{\pi} \right) \log Z + i \left[ \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi^2} \left( s_1^2 - \frac{s_0^2}{2} \right) + 2 \log \frac{2\omega_1 \mathfrak{S}_4(0)}{\mathfrak{S}_1(0)} \right]. \end{aligned}$$

Le coefficient de  $\left( \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi} \log Z \right)$  sera nul en vertu de la condition (16), et

l'on en conclura

$$(20) \quad e^{i\Omega(z)} dZ = \alpha \frac{\mathfrak{S}_4\left(\frac{\log Z}{2i\pi}\right) \mathfrak{S}_4\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi}\right)}{\mathfrak{S}_1^2\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_1}{2\pi}\right)},$$

$\alpha$  étant une constante réelle.

Formons alors la condition de fermeture, en intégrant sur le chemin  $C$ , formé par la frontière intérieure  $|Z| = q$ . Le point  $t = \frac{\log Z}{2i\pi}$  décrit dans ces conditions le segment rectiligne qui va du point  $\frac{1}{2}\tau$  au point  $\frac{1}{2}\tau + 1$ , et il vient la relation nécessaire

$$(21) \quad \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+1} \frac{\mathfrak{S}_4(t) \mathfrak{S}_4\left(t - \frac{s_0}{2\pi}\right)}{\mathfrak{S}_1^2\left(t - \frac{s_1}{2\pi}\right)} dt = 0.$$

Nous simplifierons cette équation en faisant le changement de variable

$$t = \frac{\tau}{2} + v.$$

On aura

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_4\left(\frac{\tau}{2} + v\right) &= iq^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \mathfrak{S}_1(v), \\ \mathfrak{S}_4\left(\frac{\tau}{2} + v - \frac{s_0}{2\pi}\right) &= iq^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v + \frac{is_0}{2}} \mathfrak{S}_1\left(v - \frac{s_0}{2\pi}\right), \\ \mathfrak{S}_1\left(\frac{\tau}{2} + v - \frac{s_1}{2\pi}\right) &= iq^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v + \frac{is_1}{2}} \mathfrak{S}_4\left(v - \frac{s_1}{2\pi}\right), \end{aligned}$$

de sorte que la relation précédente reviendra à

$$(22) \quad \int_0^1 \frac{\mathfrak{S}_1(v) \mathfrak{S}_1\left(v - \frac{s_0}{2\pi}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(v - \frac{s_1}{2\pi}\right)} dv = 0.$$

Considérons maintenant la fonction

$$\varphi(v) = \frac{\mathfrak{S}_1(v) \mathfrak{S}_1\left(v - \frac{s_0}{2\pi}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(v - \frac{s_1}{2\pi}\right)}.$$

Les formules classiques de la théorie des fonctions  $\mathfrak{Z}$  donnent de suite les relations

$$\begin{aligned}\varphi(v+1) &= \varphi(v), \\ \varphi(v+\tau) &= \frac{q^{-2} e^{-2i\pi v - 2i\pi\left(v - \frac{s_0}{2\pi}\right)} \mathfrak{Z}_1(v) \mathfrak{Z}_1\left(v - \frac{s_0}{2\pi}\right)}{q^{-2} e^{-2i\pi\left(v - \frac{s_1}{2\pi}\right)} \mathfrak{Z}_1^2\left(v - \frac{s_1}{2\pi}\right)} = e^{i(s_0 - 2s_1)} \varphi(v);\end{aligned}$$

$\varphi(v)$  est donc une fonction à multiplicateurs constants. Prenons le cas général, où le second multiplicateur ne se réduit pas à l'unité; nous envisagerons le cas particulier ici négligé, à propos d'un problème que nous étudierons ensuite. Dans ces conditions, nous choisirons un élément simple de la forme

$$g(v) = \alpha \frac{\mathfrak{Z}_1\left(v - \frac{s_0 - 2s_1}{2\pi}\right)}{\mathfrak{Z}_1(v)}$$

( $\alpha = \text{const.}$ ) avec les mêmes multiplicateurs; le résidu de  $g(v)$  pour  $v = 0$  sera égal à 1 en prenant

$$\alpha = - \frac{\mathfrak{Z}_1'(0)}{\mathfrak{Z}_1\left(\frac{s_0 - 2s_1}{2\pi}\right)};$$

choisissons donc précisément

$$(23) \quad g(v) = - \frac{\mathfrak{Z}_1'(0)}{\mathfrak{Z}_1\left(\frac{s_0 - 2s_1}{2\pi}\right)} \frac{\mathfrak{Z}_1\left(v - \frac{s_0 - 2s_1}{2\pi}\right)}{\mathfrak{Z}_1(v)}.$$

Si maintenant nous remarquons que dans le voisinage de

$$v = \frac{s_1}{2\pi} + \frac{\tau}{2},$$

en posant

$$v = \frac{s_1}{2\pi} + \frac{\tau}{2} + h,$$

on a un développement de la forme

$$\varphi(v) = \frac{P_1}{h} + \frac{P_2}{h^2} + \text{série entière en } h;$$



on en conclura que la différence

$$\varphi(v) - P_1 g\left(v - \frac{s_1}{2\pi} - \frac{\tau}{2}\right) + P_2 g'\left(v - \frac{s_1}{2\pi} - \frac{\tau}{2}\right)$$

est une fonction doublement périodique aux multiplicateurs 1 et  $e^{i(s_0 - 2s_1)}$ , et de plus ne possédant pas de pôles, donc identiquement nulle. On a donc

$$(24) \quad \varphi(v) = P_1 g\left(v - \frac{s_1}{2\pi} - \frac{\tau}{2}\right) - P_2 g'\left(v - \frac{s_1}{2\pi} - \frac{\tau}{2}\right).$$

Dans l'intégration que nous devons faire entre les limites 0 et 1, le terme en  $g'$  donnera zéro, puisque la fonction  $g$  admet la période 1. D'autre part, l'intégrale

$$\int_0^1 g\left(v - \frac{s_1}{2\pi} - \frac{\tau}{2}\right) dv$$

est essentiellement différente de zéro; en effet, si l'on revient aux fonctions  $\mathfrak{S}_4$  en utilisant les formules relatives à l'addition de  $\frac{\tau}{2}$  à l'argument, la quantité sous le signe somme devient l'expression essentiellement positive

$$\frac{\mathfrak{S}_4\left(v + \frac{s_1 - s_0}{2\pi}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(v - \frac{s_1}{2\pi}\right)},$$

au facteur constant près

$$\frac{-\mathfrak{S}_4'(0)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{s_0 - 2s_1}{2\pi}\right)} e^{\frac{i(2s_1 - s_0)}{2}}.$$

Si donc nous voulons satisfaire à la condition (22), il est nécessaire (et suffisant) que le coefficient  $P_1$  soit nul.

Or on a

$$\varphi\left(\frac{s_1}{2\pi} + \frac{\tau}{2} + h\right) = e^{\frac{i(s_0 - 2s_1)}{2}} \frac{\mathfrak{S}_4\left(\frac{s_1}{2\pi} + h\right) \mathfrak{S}_4\left(\frac{s_1 - s_0}{2\pi} + h\right)}{\mathfrak{S}_1^2(h)}.$$

Il suffit donc que le résidu de la fonction

$$\frac{\mathfrak{S}_4\left(\frac{s_1}{2\pi} + h\right) \mathfrak{S}_4\left(\frac{s_1 - s_0}{2\pi} + h\right)}{\mathfrak{S}_1^2(h)}$$

soit nul. Mais il vient

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_* \left( \frac{s_1}{2\pi} + h \right) &= \mathfrak{S}_* \left( \frac{s_1}{2\pi} \right) + h \mathfrak{S}'_* \left( \frac{s_1}{2\pi} \right) + \dots, \\ \mathfrak{S}_* \left( \frac{s_1 - s_0}{2\pi} + h \right) &= \mathfrak{S}_* \left( \frac{s_1 - s_0}{2\pi} \right) + h \mathfrak{S}'_* \left( \frac{s_1 - s_0}{2\pi} \right) + \dots, \\ \mathfrak{S}_1^2(h) &= h^2 \mathfrak{S}_1^2(0) [1 + \lambda h^2].\end{aligned}$$

De sorte que le résidu est

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_1^2(0)} \left[ \mathfrak{S}_* \left( \frac{s_1}{2\pi} \right) \mathfrak{S}'_* \left( \frac{s_1 - s_0}{2\pi} \right) + \mathfrak{S}_* \left( \frac{s_1 - s_0}{2\pi} \right) \mathfrak{S}'_* \left( \frac{s_1}{2\pi} \right) \right].$$

La condition de fermeture peut donc s'écrire sous la forme

$$(25) \quad \frac{\mathfrak{S}'_* \left( \frac{s_1 - s_0}{2\pi} \right)}{\mathfrak{S}_* \left( \frac{s_1 - s_0}{2\pi} \right)} + \frac{\mathfrak{S}'_* \left( \frac{s_1}{2\pi} \right)}{\mathfrak{S}_* \left( \frac{s_1}{2\pi} \right)} = 0.$$

Or le quotient  $\frac{\mathfrak{S}'_*(v)}{\mathfrak{S}_*(v)}$  est une fonction impaire, et l'on a

$$\frac{\mathfrak{S}'_*(v)}{\mathfrak{S}_*(v)} = - \frac{\mathfrak{S}'_*(-v)}{\mathfrak{S}_*(-v)} = - \frac{\mathfrak{S}'_*(1-v)}{\mathfrak{S}_*(1-v)}.$$

Nous en concluons, puisque  $\frac{s_1}{2\pi}$  est par définition entre 0 et 1, et que  $\frac{s_1 - s_0}{2\pi}$  est entre -1 et +1, que l'équation précédente possède les deux solutions évidentes

$$\frac{s_1 - s_0}{2\pi} = - \frac{s_1}{2\pi}$$

et

$$\frac{s_1 - s_0}{2\pi} = 1 - \frac{s_1}{2\pi},$$

c'est-à-dire

$$2s_1 - s_0 = 0 \quad \text{ou} \quad 2s_1 - s_0 = 2\pi.$$

Or, on a déjà

$$2s_1 - s_0 = 2\pi + 2\delta.$$

Ces solutions évidentes sont donc à rejeter, en général.

Si l'on se plaçait dans le cas particulier où  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , la solution serait

est tout à fait évidente par raison de symétrie; on devrait avoir

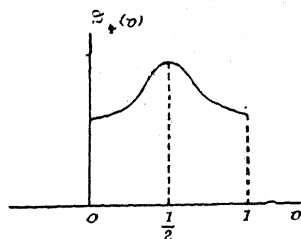
$$s_1 = 2\pi \quad \text{et} \quad s_0 = \pi.$$

La relation ci-dessus serait bien vérifiée, car on sait que l'on a

$$\mathfrak{S}'_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \mathfrak{S}'_4(1) = 0.$$

Pour le cas général, observons que la variation de la fonction  $\mathfrak{S}_4(v)$  dans l'intervalle 0, 1 est bien facile, et qu'elle correspond au tracé ci-joint (*fig. 9*): la variation de  $\log \mathfrak{S}_4(v)$  est donc de même nature et

Fig. 9.

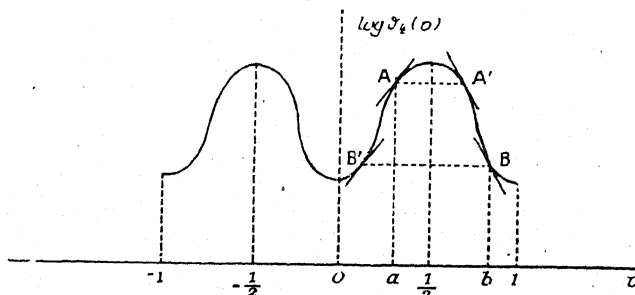


dans l'intervalle  $-1, +1$ , elle correspond au dessin ci-joint (*fig. 10*).

Ceci posé, l'équation à résoudre peut s'écrire, avec de nouvelles notations évidentes,

$$\frac{\mathfrak{S}'_4(a)}{\mathfrak{S}_4(a)} = -\frac{\mathfrak{S}'_4(b)}{\mathfrak{S}_4(b)}, \quad \text{avec} \quad a + b = 1 \frac{\partial}{\pi};$$

Fig. 10.



les points d'abscisses  $a = \frac{s_1 - s_0}{2\pi}$  et  $b = \frac{s_1}{2\pi}$  sont donc des points de la figure 10 où les tangentes sont également inclinées sur l'horizontale,

en sens contraires. Au voisinage de la valeur  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , il résulte immédiatement de ce que l'on a constaté il y a un instant que ce sont les points A et B qui conviennent. Au voisinage de  $\delta = 0$ , pour lequel on a

$$\frac{s_1 - s_0}{2\pi} = 1 - \frac{s_1}{2\pi},$$

les points correspondants se placent sur une même horizontale, puis, si  $\delta$  change de signe, ce sont visiblement les points A' et B' qui conviennent. Dans tous les cas, on voit sans peine la façon dont varient les points à choisir sur la courbe. Ceci permet, étant pris par exemple  $s_0$ , de calculer  $s_1$  ou inversement.

Il est d'ailleurs évidemment inutile de considérer à part le cas où  $\delta$  serait négatif, ce cas ne différant du premier que par une symétrie par rapport à un axe vertical.

Donnons ici une application de ce qui précède. Supposons que PQ soit la section par le plan  $xOy$  d'une lame de très grande longueur dans le sens normal à ce plan, et que l'axe  $Ox$  soit la trace sur le même plan, d'une paroi plane indéfinie également normale à  $xOy$ . Supposons la plaque mobile avec une vitesse constante  $U$  normalement à  $xOy$ , au sein d'un fluide visqueux remplissant tout l'espace du côté de la paroi qui contient la lame, ce fluide étant initialement supposé au repos. Imaginons le régime établi, et soit  $\mu$  le coefficient de viscosité.

On sait que la vitesse du fluide en chaque point  $z$  (ou  $x, y$ ) est fournie par la valeur de la fonction harmonique  $u(x, y)$  qui prend sur  $Ox$  la valeur zéro, et sur la lame PQ la valeur  $U$ . Passant du plan  $z$  au plan  $Z$  par les transformations détaillées ci-dessus, cette vitesse  $u$  devient une fonction  $u(X, Y)$ , qui est évidemment fournie par une équation de la forme

$$(26) \quad u(X, Y) + iv(X, Y) = A \log Z,$$

où  $A$  est une constante convenable, que l'on constate immédiatement être égale à

$$A = -\frac{i\omega_1}{\pi\omega_3} U.$$

La théorie des fluides visqueux nous apprend ensuite que la force de frottement le long de la lame est une force tangentielle  $\mu \frac{\partial u}{\partial n} ds$  le long de l'élément  $ds$ ; or, les propriétés les plus simples des fonctions harmoniques associées nous donnent

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\mu dv,$$

et comme  $v = -\frac{i\omega_1}{\pi\omega_3} \arg Z$ , la résistance due à la viscosité dans le mouvement de la lame est, dans le sens normal à  $xOy$ , et pour l'unité de longueur de la lame dans le même sens,

$$(27) \quad R = \frac{2i\omega_1}{\omega_3} \mu U.$$

Il convient de rapporter cette force à l'unité de longueur dans le sens transversal PQ. Pour cela, il faut connaître la valeur de PQ. Ce résultat va se déduire sans peine des considérations antérieures.

L'emploi des formules générales établies plus haut donne, pour la longueur  $l$  de PQ,

$$l = \int_{\gamma}^{\gamma e^{is_0}} |dz|,$$

l'intégration devant se faire le long de la circonférence de rayon  $q$ ; en y posant  $Z = q e^{is}$ , et par suite  $\log Z = -\frac{\pi\tau}{i} + is$ , il vient pour  $dz$

$$dz = e^{i\Omega} df = -\frac{i\varphi_0}{2\pi} e^{i\Omega} dZ = -\frac{i\varphi_0\alpha}{2\pi} \frac{dZ}{Z} \frac{\mathfrak{S}_4\left(\frac{\log Z}{2i\pi}\right) \mathfrak{S}_4\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \nu_0\right)}{\mathfrak{S}_1^2\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \nu_1\right)},$$

ou encore

$$dz = \varphi_0 \alpha d\nu \frac{\mathfrak{S}_4\left(\frac{\tau}{2} + \nu\right) \mathfrak{S}_4\left(\frac{\tau}{2} + \nu - \nu_0\right)}{\mathfrak{S}_1^2\left(\frac{\tau}{2} + \nu - \nu_1\right)} = \varphi_0 \alpha e^{i\pi(\nu_0 - 2\nu_1)} \frac{\mathfrak{S}_1(\nu) \mathfrak{S}_1(\nu - \nu_0)}{\mathfrak{S}_4^2(\nu - \nu_1)} d\nu,$$

en posant

$$\nu = \frac{s}{2\pi}, \quad \nu_0 = \frac{s_0}{2\pi}, \quad \nu_1 = \frac{s_1}{2\pi};$$

et, par suite,

$$(28) \quad l = \alpha \varphi_0 \int_0^{\nu_0} \frac{\mathfrak{S}_1(\nu) \mathfrak{S}_1(\nu - \nu_0)}{\mathfrak{S}_4^2(\nu - \nu_1)} d\nu \\ = \alpha \varphi_0 \left\{ P_1 \int_0^{\nu_0} g\left(\nu - \nu_1 - \frac{\tau}{2}\right) d\nu - P_2 \left[ g\left(\nu_0 - \nu_1 - \frac{\tau}{2}\right) - g\left(-\nu_1 - \frac{\tau}{2}\right) \right] \right\}.$$

On a posé

$$(29) \quad g(\nu) = - \frac{\mathfrak{S}'_1(0)}{\mathfrak{S}_1(\nu_0 - 2\nu_1)} \frac{\mathfrak{S}_1(\nu - \nu_0 + 2\nu_1)}{\mathfrak{S}_1(\nu)},$$

et les nombres  $P_1$  et  $P_2$  ont le même sens que plus haut.

Nous sommes donc amenés à effectuer le calcul de l'intégrale suivante :

$$(30) \quad J = \int_0^{\nu_0} g\left(\nu - \nu_1 - \frac{\tau}{2}\right) d\nu = \frac{\mathfrak{S}'_1(0)}{\mathfrak{S}_1(2\nu_1 - \nu_0)} \int_0^{\nu_0} \frac{\mathfrak{S}_1\left(\nu_0 - \nu_1 - \nu + \frac{\tau}{2}\right)}{\mathfrak{S}_1\left(\nu_1 - \nu + \frac{\tau}{2}\right)} d\nu \\ = \frac{\mathfrak{S}'_1(0)}{\mathfrak{S}_1(2\nu_1 - \nu_0)} e^{i\pi(2\nu_1 - \nu_0)} \int_0^{\nu_0} \frac{\mathfrak{S}_4(\nu + \nu_1 - \nu_0)}{\mathfrak{S}_4(\nu - \nu_1)} d\nu.$$

Nous y parviendrons en employant un procédé assez analogue à celui que j'ai utilisé dans un Mémoire récent [*Sur un calcul de résistance... (Annales de l'École Normale Supérieure, t. XXXV, 1918)*].

La théorie des fonctions elliptiques nous fournit la formule suivante (TANNERY et MOLK, formule CVII, 6):

$$\frac{\mathfrak{S}'_1(0) \mathfrak{S}_3(a+b)}{4\pi \mathfrak{S}_1(a) \mathfrak{S}_3(b)} = \frac{1}{4 \sin \pi a} + \sum_1^\infty \sum_1^\infty (-1)^m q^{m(2n-1)} \sin \pi [2mb + (2n-1)a].$$

En y changeant  $b$  en  $\left(b + \frac{1}{2}\right)$ , il vient

$$\frac{\mathfrak{S}'_1(0) \mathfrak{S}_4(a+b)}{4\pi \mathfrak{S}_1(a) \mathfrak{S}_4(b)} = \frac{1}{4 \sin \pi a} + \sum_1^\infty \sum_1^\infty q^{m(2n-1)} \sin \pi [2mb + (2n-1)a].$$

$a$  et  $b$  sont deux arguments quelconques, assujettis seulement à cette condition, que la partie réelle de  $\frac{a}{i}$  et de  $\frac{b}{i}$  soit comprise entre la partie réelle de  $\frac{\tau}{i}$  et cette même quantité changée de signe. Cette for-

mule est donc ici applicable en remplaçant  $a$  et  $b$  respectivement par les nombres  $2\nu_1 - \nu_0$  et  $\nu - \nu_1$ ; il vient ainsi

$$\frac{\mathfrak{Z}'_1(0) \mathfrak{Z}_4(\nu + \nu_1 - \nu_0)}{4\pi \mathfrak{Z}_1(2\nu_1 - \nu_0) \mathfrak{Z}_4(\nu - \nu_1)} \\ = \frac{1}{4 \sin \pi(2\nu_1 - \nu_0)} + \sum_1^\infty \sum_1^\infty q^{m(2n-1)} \sin \pi[2m\nu + (2n-1)\nu_0 + 2(2n-m-1)\nu_1].$$

Par suite, en intégrant terme à terme, ce qui est manifestement licite, on obtiendra

$$J = 4\pi e^{i\pi(2\nu_1 - \nu_0)} \left\{ \frac{\nu_0}{4 \sin \pi(2\nu_1 - \nu_0)} + \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{q^{m(2n-1)}}{2\pi m} \right. \\ \left. \times \left\{ \cos \pi[(2n-1)\nu_0 + 2(2n-m-1)\nu_1] \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \pi[(2m+2n-1)\nu_0 + 2(2n-m-1)\nu_1] \right\} \right\},$$

ou encore

$$(31) \quad J = 2\pi e^{i\pi(2\nu_1 - \nu_0)} \left\{ \frac{\nu_0}{2 \sin \pi(2\nu_1 - \nu_0)} + \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{q^{m(2n-1)}}{m} \right. \\ \left. \times \sin \pi m \nu_0 \sin \pi \left[ \left( m + n - \frac{1}{2} \right) \nu_0 + (2n-m-1)\nu_1 \right] \right\}.$$

A son tour, le coefficient de  $P_2$  peut se simplifier; on a

$$L = g\left(\nu_0 - \nu_1 - \frac{\tau}{2}\right) - g\left(-\nu_1 - \frac{\tau}{2}\right) \\ = \frac{\mathfrak{Z}'_1(0)}{\mathfrak{Z}_1(2\nu_1 - \nu_0)} \left[ \frac{\mathfrak{Z}_1\left(\nu_1 - \frac{\tau}{2}\right)}{\mathfrak{Z}_1\left(\nu_0 - \nu_1 - \frac{\tau}{2}\right)} - \frac{\mathfrak{Z}_1\left(-\nu_0 + \nu_1 - \frac{\tau}{2}\right)}{\mathfrak{Z}_1\left(-\nu_1 - \frac{\tau}{2}\right)} \right],$$

ce que l'on transforme sans peine en

$$(32) \quad L = \frac{\mathfrak{Z}'_1(0)}{\mathfrak{Z}_1(2\nu_1 - \nu_0)} \left[ \frac{\mathfrak{Z}_4(\nu_1)}{\mathfrak{Z}_4(\nu_1 - \nu_0)} - \frac{\mathfrak{Z}_4(\nu_1 - \nu_0)}{\mathfrak{Z}_4(\nu_1)} \right] e^{i\pi(2\nu_1 - \nu_0)}.$$

Explicitons enfin  $P_1$  et  $P_2$ ; à cet effet, on trouve au voisinage du pôle de  $\varphi(\nu)$ , en posant  $\nu = \nu_1 + \frac{\tau}{2} + h$ ,

$$\varphi(\nu) = e^{i\pi(\nu_0 - 2\nu_1)} \frac{\mathfrak{Z}_4(\nu_1 + h) \mathfrak{Z}_4(\nu_1 - \nu_0 + h)}{\mathfrak{Z}_1^2(h)};$$

d'où

$$(34) \quad P_1 = e^{i\pi(\nu_0 - 2\nu_1)} \frac{[\mathfrak{S}_4(\nu_1) \mathfrak{S}'_4(\nu_1 - \nu_0) + \mathfrak{S}'_4(\nu_1) \mathfrak{S}_4(\nu_1 - \nu_0)]}{\mathfrak{S}_1'^2(0)},$$

$$(35) \quad P_2 = e^{i\pi(\nu_0 - 2\nu_1)} \frac{\mathfrak{S}_4(\nu_1) \mathfrak{S}_4(\nu_1 - \nu_0)}{\mathfrak{S}_1'^2(0)};$$

d'où enfin, en transportant dans  $l$ , l'expression suivante :

$$(36) \quad l = 4\pi\alpha\varphi_0 \frac{\mathfrak{S}_4(\nu_1) \mathfrak{S}'_4(\nu_1 - \nu_0) + \mathfrak{S}'_4(\nu_1) \mathfrak{S}_4(\nu_1 - \nu_0)}{\mathfrak{S}_1'^2(0)} \\ \times \left\{ \frac{\nu_0}{4 \sin \pi(2\nu_1 - \nu_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m(2n-1)}}{m\pi} \right. \\ \left. \times \sin \pi m \nu_0 \sin \pi \left[ \left( m + n - \frac{1}{2} \right) \nu_0 + (2n - m - 1) \nu_1 \right] \right\} \\ - \frac{\alpha\varphi_0}{\mathfrak{S}_1(0) \mathfrak{S}_1(2\nu_1 - \nu_0)} [\mathfrak{S}_4^2(\nu_1) - \mathfrak{S}_4^2(\nu_1 - \nu_0)].$$

En conséquence, la force résistante  $R$  qui s'oppose au mouvement de la lame, par unité de longueur, celle-ci comptée, dans le sens  $PQ$ , sera donnée par la formule

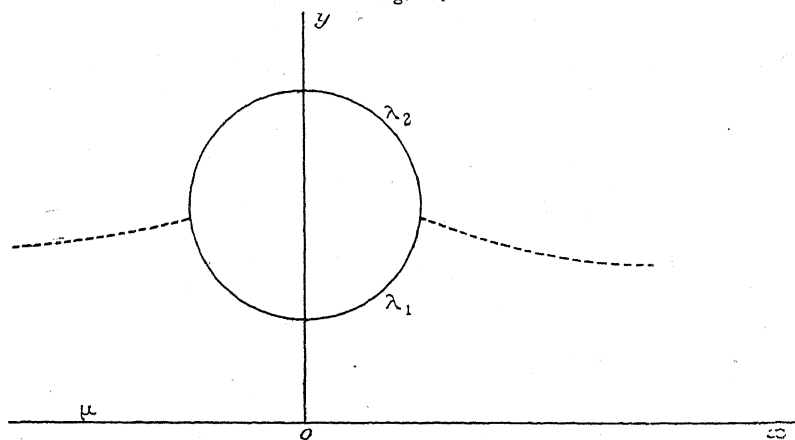
$$(37) \quad R = \frac{i\omega_1 \mu U}{\omega_3 l}.$$

Dans le présent paragraphe, nous étudierons un autre problème concernant les fluides; mais il s'agira cette fois d'un fluide parfait dénué de viscosité, dont on envisagera le mouvement lent, parallèle (aux grandes distances) à l'axe  $Ox$ , lorsque d'une part ce fluide est supposé limité par un mur constitué par  $Ox$ , et d'autre part rencontre un obstacle circulaire qu'il baigne entièrement, le mouvement restant continu, sans qu'il se forme de nappe de discontinuité à l'arrière. Nous supposerons en outre, pour l'instant, que le mouvement soit acyclique, c'est-à-dire que le potentiel reste uniforme; en admettant que, par exemple, le potentiel soit nul au point de bifurcation du courant à l'avant du solide, la valeur  $\varphi_1$  atteint par ce potentiel  $\varphi$  au point de raccord à l'arrière, sera la même, que l'on ait suivi un bord ou l'autre du profil. Nous ferons par exemple  $\psi = 0$  le long de  $Ox$ , en appelant  $\psi$  la fonction de courant, et nous appellerons  $\psi_1$  la valeur de  $\psi$  sur l'obstacle. Les domaines des plans  $z$  et  $f(= \varphi + i\psi)$  se correspondront selon les dessins ci-après (*fig. 11 et 12*).



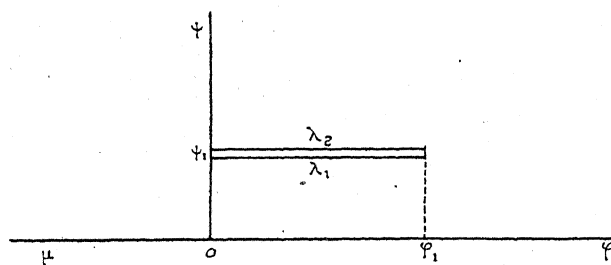
Observons, avant d'aller plus loin, que la configuration que nous étudions n'est pas la seule possible parmi celles qui correspondent au

Fig. 11.



même obstacle; on verra un peu plus loin comment on peut obtenir le cas du mouvement cyclique.

Fig. 12.



$u, v$  représentant la vitesse en un point du plan  $z$ , on sait que l'on aura

$$\frac{df}{dz} = u - iv.$$

Le procédé que nous suivrons consistera, puisque  $f$  est une fonction uniforme de  $z$ , à effectuer la représentation conforme du plan  $f$  sur le plan  $z$ , par l'intermédiaire d'un troisième plan  $Z$  que l'on va définir, et qui servira à faire la représentation des deux plans  $f$  et  $z$  sur une même couronne circulaire.

Écrivons l'équation du cercle donné du plan  $z$  sous la forme

$$x^2 + y^2 - 2ay + b^2 = 0$$

et faisons la transformation représentée par la relation

$$(z + ib)(Z' + ib) = -b^2.$$

Un calcul élémentaire montre que le cercle se transforme en le nouveau cercle

$$X'^2 + Y'^2 + bY' + \frac{b^3}{2(a+b)} = 0.$$

A l'axe  $Ox$  correspond le cercle concentrique

$$X'^2 + Y'^2 + bY' = 0.$$

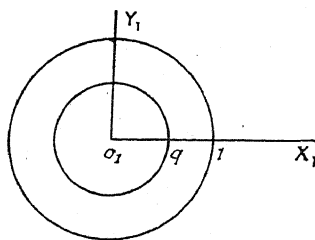
Au domaine considéré dans le plan  $z$  correspond une couronne circulaire comprise entre les deux courbes ci-dessus.

Par une homothétie préalable faite dans le plan  $z$ , rien ne nous empêche de prendre pour valeurs des rayons de ces deux circonférences les valeurs 1 et  $q$  ( $q < 1$ ); il suffit pour cela de supposer  $b = 2$ , et l'on a ensuite

$$q^2 = \frac{a-2}{a+2} \quad (a > 2).$$

Posant ensuite  $Z' + i = Z_1$ , on transformera le domaine annulaire

Fig. 13.

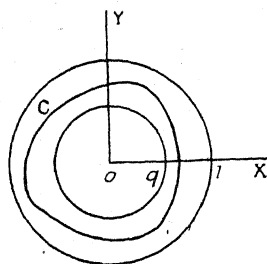


ci-dessus en un nouveau dont le centre sera placé à l'origine (*fig. 13*); on passera alors de  $z$  à  $Z_1$  par la relation

$$(38) \quad z = -2i - \frac{4}{Z_1 + i}.$$

Il faudra maintenant passer du plan  $Z$ , au plan  $f$ ; or, les paragraphes précédents vont nous permettre d'y parvenir. Plaçons dans un

Fig. 14.



nouveau plan  $Z$  une couronne dont les circonférences limites soient séparées exactement comme cela avait lieu pour le problème du paragraphe antérieur (cf. *fig.* 8).

Nous sommes en effet dans un cas particulier du cas étudié ci-dessus, où le segment  $PQ$  est horizontal. La liaison cherchée entre les deux plans est donc exprimée par une relation de la forme

$$(39) \quad df = -\frac{i\varphi_0 \alpha}{2\pi} \frac{dZ}{Z} \frac{\Im_3\left(\frac{\log Z}{2i\pi}\right) \Im_4\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - v_0\right)}{\Im_1^2\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - v_1\right)}$$

en posant

$$v_0 = \frac{s_0}{2\pi}, \quad v_1 = \frac{s_1}{2\pi}.$$

Entre ces constantes on aura la relation (16), précédemment reconnue nécessaire; cette condition se réduira ici à

$$(40) \quad 2v_1 - v_0 = 1.$$

Nous sommes alors dans le cas spécial écarté de l'analyse ci-dessus, cas pour lequel la fonction  $\varphi(v)$  admet les deux périodes 1 et  $\tau$ . Les calculs relatifs à la condition de fermeture ne sont plus ici applicables et nous n'avons pas le droit de prendre l'équation de fermeture sous la forme (25), qui serait du reste inexacte, et qui doit être remplacée par une autre que nous écrirons un peu plus loin.

Comme on va le voir, l'intégration qui permet de passer de  $f$  à  $Z$  peut se faire exactement. Commençons par placer la coupure dans le

plan  $f$ . On a d'abord,  $\mathfrak{S}_4$  admettant la période 1,

$$(41) \quad df = -\frac{i\varphi_0\alpha}{2\pi} \frac{dZ}{Z} \frac{\mathfrak{S}_4\left(\frac{\log Z}{2i\pi}\right) \mathfrak{S}_4\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - 2v_1\right)}{\mathfrak{S}_1^2\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - v_1\right)};$$

puis, par un calcul facile, on verra que la longueur  $\varphi_1$  de la coupure est

$$\varphi_1 = \alpha\varphi_0 \int_0^{\varphi_0} \frac{\mathfrak{S}_1(v) \mathfrak{S}_1(v - 2v_1)}{\mathfrak{S}_1^2(v - v_1)} dv.$$

La fonction

$$(42) \quad \Phi(v) = \frac{\mathfrak{S}_1(v) \mathfrak{S}_1(v - 2v_1)}{\mathfrak{S}_1^2(v - v_1)}$$

est ici elliptique, avec les deux périodes 1 et  $\tau$ . Comme elle a un pôle double  $v = v_1 + \frac{\tau}{2}$ , nous poserons  $v = v_1 + \frac{\tau}{2} + h$ , et il viendra par transformations élémentaires

$$(43) \quad \Phi(v) = \frac{\mathfrak{S}_1(v_1 + h) \mathfrak{S}_1(v_1 - h)}{\mathfrak{S}_1^2(h)} = \Phi_1(h).$$

Passons des fonctions  $\mathfrak{S}$  aux fonctions  $\sigma$ ; en utilisant les formules classiques, on trouvera

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \frac{4\omega_1^2 \mathfrak{S}_1^2(0) e^{-4\eta_1\omega_1 v_1^2 - 4\eta_3\omega_1 v_1}}{\mathfrak{S}_1^2(0) \sigma^2 \omega_3} \\ &\times \frac{\sigma(2\omega_1 v_1 + \omega_3 + 2\omega_1 h) \sigma(2\omega_1 v_1 + \omega_3 - 2\omega_1 h)}{\sigma^2(2\omega_1 h)}. \end{aligned}$$

Or on sait que l'on a, quels que soient les arguments  $u$  et  $a$ ,

$$\frac{\sigma(u+a) \sigma(u-a)}{\sigma^2 u \sigma^2 a} = pa - pu;$$

par conséquent, par un changement de notations,

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma(2\omega_1 v_1 + \omega_3 + 2\omega_1 h) \sigma(2\omega_1 v_1 + \omega_3 - 2\omega_1 h)}{\sigma^2(2\omega_1 h)} \\ &= \sigma^2(2\omega_1 v_1 + \omega_3) [p(2\omega_1 h) - p(2\omega_1 v_1 + \omega_3)], \end{aligned}$$

et comme on a

$$\sigma(2\omega_1 v_1 + \omega_3) = e^{2\eta_3\omega_1 v_1} \sigma\omega_3 \sigma_3(2\omega_1 v_1),$$

il vient, après quelques réductions,

$$(44) \quad \Phi(v) = \frac{4\omega_1^2}{\mathfrak{F}_1^2(0)} \mathfrak{F}_4^2(v_1) [p(2\omega_1 h) - p(2\omega_1 v_1 + \omega_3)].$$

L'intégration est alors immédiate, et l'on a

$$\begin{aligned} \int_0^v \Phi(v) dv &= \frac{4\omega_1^2 \mathfrak{F}_4^2(v_1)}{\mathfrak{F}_1^2(0)} \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2\omega_1} \zeta \left[ 2\omega_1 \left( v - v_1 - \frac{\tau}{2} \right) \right] - \left( v - v_1 - \frac{\tau}{2} \right) p(2\omega_1 v_1 + \omega_3) \right\}_0^v. \end{aligned}$$

On en conclut, pour  $\varphi_1$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{v_0} \Phi(v) dv &= -\frac{2\omega_1 \mathfrak{F}_4^2(v_1)}{\mathfrak{F}_1^2(0)} \left\{ \zeta \left[ 2\omega_1 \left( v_0 - v_1 - \frac{\tau}{2} \right) \right] + \zeta \left[ 2\omega_1 \left( v_1 + \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{4\omega_1^2 v_0 \mathfrak{F}_4^2(0)}{\mathfrak{F}_1^2(0)} p(2\omega_1 v_1 + \omega_3). \end{aligned}$$

Or, on a successivement

$$\begin{aligned} &\zeta \left[ 2\omega_1 \left( v_0 - v_1 - \frac{\tau}{2} \right) \right] + \zeta \left[ 2\omega_1 \left( v_1 + \frac{\tau}{2} \right) \right] \\ &= \zeta(2\omega_1 v_1 - \omega_3) - 2\eta_1 + \zeta(2\omega_1 v_1 + \omega_3) = 2[\zeta_3(2\omega_1 v_1) - \eta_1], \end{aligned}$$

et par suite nous pouvons finalement écrire

$$(45) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= -\alpha \varphi_0 \left\{ \frac{4\omega_1 \mathfrak{F}_4^2(v_1)}{\mathfrak{F}_1^2(0)} [\zeta_3(2\omega_1 v_1) - \eta_1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\omega_1^2(2v_1 - 1)}{\mathfrak{F}_1^2(0)} \mathfrak{F}_4^2(v_1) p(2\omega_1 v_1 + \omega_3) \right\}. \end{aligned}$$

Quant à la condition de fermeture, elle se déduit du calcul précédent, car elle s'obtient en exprimant, par exemple, que le parcours total de la circonférence intérieure du plan  $Z$  correspond à un circuit fermé dans le plan  $f$ , c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(46) \quad \int_0^1 \Phi(v) dv = 0.$$

Ceci donne de suite, à cause de ce qui précède,

$$(47) \quad p(2\omega_1 v_1 + \omega_3) + \frac{\eta_1}{\omega_1} = 0.$$

Cette condition déterminera  $v_1$ ; comme on sait bien que les inégalités

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} + e_2 > 0, \quad \frac{\eta_1}{\omega_1} + e_3 < 0,$$

ont toujours lieu dans le cas normal, on voit que  $p(2\omega_1 v_1 + \omega_3)$  sera compris entre  $e_2$  et  $e_3$ , et par suite il y aura pour  $v_1$  une solution entre 0 et  $\frac{1}{2}$ , et une autre symétrique de celle-là par rapport à  $\frac{1}{2}$ , dans l'intervalle  $\frac{1}{2}, 1$ .

Observons maintenant que si, dans l'équation (41), on pose en général

$$\frac{\log Z}{2i\pi} = t,$$

cette équation prend immédiatement la forme

$$(48) \quad df = \varphi_0 \alpha \Phi_1(t - v_1) dt.$$

c'est-à-dire

$$df = \frac{4\omega_1^2 \varphi_0 \alpha \Im_4^2(v_1)}{\Im_1^2(0)} \{ p[2\omega_1(t - v_1)] - p(2\omega_1 v_1 + \omega_3) \},$$

et que, par conséquent, on aura entre  $f$  et  $Z$  la relation finie

$$(49) \quad f = \frac{4\omega_1^2 \varphi_0 \alpha \Im_4^2(v_1)}{\Im_1^2(0)} \left\{ -\frac{1}{2\omega_1} \zeta[2\omega_1(t - v_1)] - t p(2\omega_1 v_1 + \omega_3) \right\} + \text{const.}$$

Ceci posé, pour avoir la position exacte de la coupure, il nous faut connaître sa cote  $\psi_1$ , ou bien la quantité  $i\psi_1$ ; celle-ci sera égale à la partie imaginaire de l'intégrale  $\int dz$  prise pour  $Z$  entre les limites 1 et  $q$ . On a donc

$$i\psi_1 = \text{partie imaginaire de } J$$

avec

$$J = \frac{4\omega_1^2 \varphi_0 \alpha \Im_4^2(v_1)}{\Im_1^2(0)} \left\{ -\frac{1}{2\omega_1} \left( \zeta \left[ 2\omega_1 \left( \frac{\tau}{2} - v_1 \right) \right] + \zeta(2\omega_1 v_1) \right) - \frac{\tau}{2} p(2\omega_1 v_1 + \omega_3) \right\},$$

c'est-à-dire, par un calcul facile,

$$J = \frac{2\alpha \varphi_0 \omega_1 \Im_4^2(v_1)}{\Im_1^2(0)} [\zeta_3(2\omega_1 v_1) - \zeta(2\omega_1 v_1) - \eta_3 - \omega_3 p(2\omega_1 v_1 + \omega_3)].$$

Or, les nombres

$$\mathfrak{S}_4(\nu_1), \quad \zeta(2\omega_1\nu_1), \quad \zeta_3(2\omega_1\nu_1), \quad p(2\omega_1\nu_1 + \omega_3)$$

sont réels; donc on en conclut immédiatement

$$(50) \quad \psi_1 = 2i\alpha\varphi_0\omega_1 \frac{\mathfrak{S}_4^2(\nu_1)}{\mathfrak{S}_1'^2(0)} [\zeta_3 + \omega_3 p(2\omega_1\nu_1 + \omega_3)].$$

Dans l'hypothèse  $p(2\omega_1\nu_1 + \omega_3) = -\frac{\eta_1}{\omega_1}$ , où la condition de fermeture est réalisée, les formules qui donnent  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  se réduisent à

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{4\omega_1\alpha\varphi_0\mathfrak{S}_4^2(\nu_1)}{\mathfrak{S}_1'^2(0)} [\zeta_3(2\omega_1\nu_1) - 2\eta_1\nu_1], \\ \psi_1 &= +2i\alpha\varphi_0 \frac{\mathfrak{S}_4^2(\nu_1)}{\mathfrak{S}_1'^2(0)} (\eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3). \end{aligned}$$

Or, on a les deux formules classiques

$$\begin{aligned} \zeta_3(2\omega_1\nu_1) - 2\eta_1\nu_1 &= \frac{1}{2\omega_1} \frac{\mathfrak{S}_4'(\nu_1)}{\mathfrak{S}_4(\nu_1)}, \\ \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 &= \frac{i\pi}{2}. \end{aligned}$$

On en conclut

$$(51) \quad \varphi_1 = -2\alpha\varphi_0 \frac{\mathfrak{S}_4(\nu_1)\mathfrak{S}_4'(\nu_1)}{\mathfrak{S}_1'^2(0)},$$

$$(52) \quad \psi_1 = +\pi\alpha\varphi_0 \frac{\mathfrak{S}_4^2(\nu_1)}{\mathfrak{S}_1'^2(0)}.$$

Comme  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  doivent être par convention positifs, et que  $\psi_1$  l'est évidemment de lui-même en prenant positive la constante de proportionnalité ( $\alpha\varphi_0$ ), on voit que le rapport

$$\pi \frac{\varphi_1}{2\psi_1} = \frac{\mathfrak{S}_4'(\nu_1)}{\mathfrak{S}_4(\nu_1)}$$

doit être négatif; or, si l'on se reporte à la figure 10, on voit immédiatement qu'il en résulte que  $\nu_1$  devra être pris entre 1 et  $\frac{1}{2}$ . Ceci précise, par conséquent, celle des deux solutions qu'il convient de

prendre pour  $\varphi_1$  à partir de la formule (47). Au reste, la relation

$$2\varphi_1 - \varphi_0 = \pi$$

entraînait que  $\varphi_1$  fût supérieur à  $\frac{\pi}{2}$ , puisque  $\varphi_0$  devait être positif.

Il faudra enfin revenir au plan  $z$ , dans lequel se fait le mouvement; pour cela, il nous faudra passer du plan  $Z$  au plan  $Z_1$ : ces deux derniers peuvent ne coïncider qu'à une rotation près autour du centre commun aux deux couronnes, puisque l'on peut toujours s'arranger pour faire correspondre deux points au hasard sur les contours. Nous aurons donc, en désignant par  $s_2$  une constante convenable, les deux relations suivantes :

$$(53) \quad Z_1 = e^{is_2} Z,$$

$$(54) \quad z = -2i - \frac{4}{Z_1 + i},$$

à laquelle il faut rattacher la relation (39) ou (49) entre  $f$  et  $Z$ . On en déduit la distribution des éléments mécaniques dans le plan  $z$ . Notamment, on aura pour la vitesse  $(u, v)$  en un point

$$(55) \quad u - iv = \frac{df}{dz} = - \frac{i\varphi_0 \alpha (i + e^{is_2} Z)^2}{8\pi Z e^{is_2}} \frac{\Im_4 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} \right) \Im_4 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \varphi_0 \right)}{\Im_1^2 \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \varphi_1 \right)}.$$

Cherchons le point de bifurcation à l'avant, et le point mort à l'arrière du solide. Ces deux points sont ceux qui correspondent à des points de la circonférence  $|Z| = q$ , pour lesquels la vitesse est nulle; ils correspondent donc à

$$\frac{\log Z}{2i\pi} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\log Z}{2i\pi} = \varphi_0 + \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire à

$$Z = q, \quad Z = q e^{is_0}.$$

Les points  $z$  correspondants sont donc

$$z_1 = -2i - \frac{4}{i + q e^{is_2}}, \quad z_2 = -2i - \frac{4}{i + q e^{i(s_2 + s_0)}}$$



Les ordonnées de ces points sont, par suite,

$$y_1 = \frac{2(1-q^2)}{1+q^2+2q\sin s_2}, \quad y_2 = \frac{2(1-q^2)}{1+q^2+2q\sin(s_2+s_0)}.$$

On voit que ces ordonnées seront les mêmes si l'on a

$$(56) \quad s_2 = \frac{\pi - s_0}{2}.$$

C'est, comme on va le vérifier, et comme il était à prévoir par symétrie, ce qui se passe effectivement dans les cas normaux.

Observons en effet que, d'après la formule (55), la vitesse semble pouvoir devenir infinie lorsque la fonction  $\mathfrak{S}_1$  s'annule : cela est en désaccord avec le sens physique de la question ; pour éviter cette circonstance, il est nécessaire que le facteur  $(i + e^{is_2}Z)$  du numérateur s'annule en même temps ; or les racines du facteur  $\mathfrak{S}_1$  sont

$$Z = e^{2i\pi(\nu_1+m+n\tau)} \quad (m \text{ et } n \text{ entiers}).$$

On voit tout de suite que  $n$  est nécessairement nul, et l'on doit avoir

$$i + e^{is_2} e^{2i\pi(\nu_1+m)} = 0,$$

d'où immédiatement

$$s_2 + 2\pi(\nu_1 + m) = \frac{\pi}{2} + \pi;$$

or

$$2\nu_1 = \nu_0 + 1 = \frac{s_0}{2\pi} + 1;$$

donc en faisant abstraction d'un multiple de  $2\pi$ , qui disparaît de lui-même dans toutes les formules, on trouve

$$s_2 = -\frac{s_0}{2} + \frac{\pi}{2};$$

c'est justement la même condition qui exprime que les deux points d'arrêt ont la même ordonnée.

Cette condition étant réalisée, on voit que la vitesse  $u_0$ ,  $v_0$ , à l'infini le long du mur qui limite le fluide, sera donnée par

$$u_0 - iv_0 = \lim_{Z \rightarrow -ie^{-is_2}} \frac{-i\varphi_0\alpha}{8\pi e^{is_2}Z} \frac{\mathfrak{S}_4(\nu_1)\mathfrak{S}_4(\nu_1-\nu_0)}{\left[\frac{\mathfrak{S}_1\left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \nu_1\right)}{Ze^{is_2}+i}\right]^2} = \frac{\pi\varphi_0\alpha}{2} \frac{\mathfrak{S}_4(\nu_1)\mathfrak{S}_4(\nu_1-\nu_0)}{\mathfrak{S}_1^2(0)},$$

c'est-à-dire, après transformations faciles,

$$(57) \quad u_0 = \frac{\pi \varphi_0 \alpha}{2} \frac{\Im_1^2(v_1)}{\Im_1^2(0)} \quad (v_0 = 0).$$

On pourra toujours s'arranger, par un choix convenable d'unités, ou par un choix de la constante  $\alpha \varphi_0$ , pour que cette vitesse soit égale à 1.

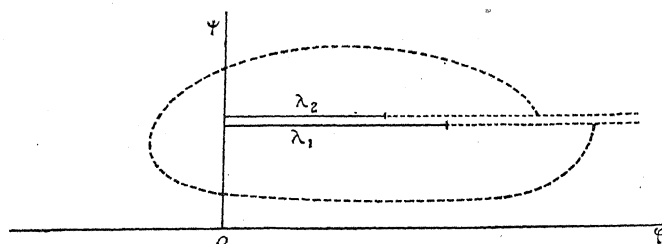
Jusqu'ici, dans toute cette question, nous avons supposé qu'il s'agit seulement d'un mouvement acyclique autour de notre obstacle circulaire. Or il se trouve que, sans modifications essentielles, presque tout ce qui précède pourra s'appliquer aussi à des mouvements cycliques. Gardons en effet toutes les mêmes équations que ci-dessus, jusqu'à l'équation (50), mais l'équation (47) étant exclue; cette dernière était la condition de fermeture dans le plan  $f$ . Si nous ne supposons plus cette condition vérifiée, et que, partant par exemple d'un point du demi-axe réel positif, nous fassions décrire au point  $Z$  un circuit fermé dans la couronne, autour de la frontière intérieure, le point  $f$  ne décrira plus un circuit fermé, mais une courbe telle que celle qu'indique le dessin ci-après (*fig. 15*); mais de plus, comme l'intégrale

$$\frac{-i\varphi_0}{2\pi} \int_C e^{i\Omega_1(Z)} dZ$$

prise le long d'une courbe fermée  $C$  de l'espèce indiquée plus haut, est indépendante de cette courbe, le point d'arrivée de la courbe  $\Gamma$  se déduira du point de départ par une translation toujours la même; la valeur de la constante que représente l'intégrale est au reste réelle, car si on la prend le long de la circonférence  $|Z| = q$ , elle représente l'intégrale  $\int df$  prise le long de deux segments horizontaux du plan  $f$  (*fig. 15*). Soit  $\gamma$  cette constante réelle. Cela posé, imaginons un mouvement cyclique dans le domaine considéré ci-dessus, la constante cyclique étant égale à  $\gamma$ . Le potentiel, ni la fonction  $f$ , ne seront uniformes dans le domaine du plan  $z$ , mais ils le deviendront si l'on introduit une coupure artificielle à l'arrière du solide, le long de la ligne de courant qui part du point mort arrière. A cette coupure correspondra une ligne horizontale double tracée en pointillé sur la figure 15 qui représente le plan  $f$ ; et deux points du plan  $z$  situés de part et d'autre de la coupure, au même point géométrique, correspondront à

deux points différents du plan  $f$ , ces deux points étant décalés, l'un par rapport à l'autre, de la longueur  $\gamma$  dans le sens de l'axe réel.

Fig. 15.



Or ces conditions sont justement toutes satisfaites si l'on fait correspondre les deux plans  $z$  et  $f$  par les équations écrites dans les paragraphes antérieurs, dès que l'on y supprime la condition de fermeture (laquelle exprime simplement le fait que  $\gamma$  est nul). Le mouvement cyclique le plus général correspondant à cet obstacle est donc fourni par ce qui précède, en négligeant la condition en question <sup>(1)</sup>. Cela modifie naturellement quelques-uns des résultats. Tout d'abord, nous devons, pour les constantes  $\varphi_1$  et  $\psi_1$ , garder les expressions, non simplifiées, suivantes :

$$(58) \quad \varphi_1 = - \frac{4\alpha\varphi_0\omega_1\mathfrak{Z}_1^2(v_1)}{\mathfrak{Z}_1'^2(0)} [\zeta_3(2\omega_1 v_1) - \eta_1 + \omega_1(2v_1 - 1)p(2\omega_1 v_1 + \omega_3)],$$

$$(59) \quad \psi_1 = - \frac{2i\alpha\varphi_0\omega_1\mathfrak{Z}_4^2(v_1)}{\mathfrak{Z}_1'^2(0)} [\eta_3 + \omega_3 p(2\omega_1 v_1 + \omega_3)].$$

Puis, les deux bords extrêmes de la coupure du plan  $f$  ne coïncidant plus, il faut connaître l'abscisse  $\varphi_2$  du bord supérieur, ( $\varphi_1$  correspondant au bord inférieur). Par les mêmes procédés que plus haut, on trouve

$$(60) \quad \varphi_2 = - \alpha\varphi_0 \int_{v_0}^1 \Phi(v) dv,$$

c'est-à-dire

$$(61) \quad \varphi_2 = - \frac{4\alpha\varphi_0\omega_1\mathfrak{Z}_4^2(v_1)}{\mathfrak{Z}_1'^2(0)} [\zeta_3(2\omega_1 v_1) - 2\eta_1 - 2\omega_1(1 - v_1)p(2\omega_1 v_1 + \omega_3)].$$

<sup>(1)</sup> Dans son intéressante Thèse *Sur les solutions multiples des Problèmes d'Hydrodynamiques* (cf. le présent volume des *Annales de l'École normale*), M. René Thiry a été induit, pour un cas analogue, à utiliser une conclusion toute pareille (p. 108 de la thèse).

Une fois placés ainsi les éléments de la figure dans le plan  $f$ , on passera de là au plan  $Z$  exactement par les mêmes formules que plus haut; notamment, on trouvera les deux points morts par les mêmes équations.

Il est intéressant, et important, de noter que les éléments de la figure du plan  $f$  ne sont pas quelconques les uns par rapport aux autres; les données dans le plan  $z$ , c'est-à-dire la grandeur et la position du cercle du plan  $z$ , entraînent, pour les constantes  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ , diverses limitations. Observons que, dans le problème actuel, la constante  $\varphi_1$  n'est plus déterminée et reste une arbitraire dont dépend la question (on pourra disposer de cette arbitraire pour donner à la constante cyclique la valeur que l'on voudra). Ceci posé, envisageons le rapport des deux constantes  $\frac{\varphi_1}{2\psi_1} = S(\varphi_1)$ ; étudions la variation de ce rapport; la relation (40), toujours vérifiée, nous limite pour  $\varphi_1$  à l'intervalle  $\frac{1}{2}, 1$ .

Nous voyons tout de suite que

$$S(\varphi_1) = \frac{\zeta_3(2\omega_1\varphi_1) - \eta_1 + \omega_1(2\varphi_1 - 1, p(2\omega_1\varphi_1 + \omega_3))}{-i[\eta_3 + \omega_3 p(2\omega_1\varphi_1 + \omega_3)]}.$$

Puis on a

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 0;$$

d'autre part,

$$S(1) = \frac{\eta_1 + \omega_1 e_3}{-i(\eta_3 + \omega_3 e_3)}.$$

Or nous savons (TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, formules XXX) que l'on a

$$2\omega_1(\eta_1 + \omega_1 e_3) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q^{2n-1}}{(1 - q^{2n-1})^2}.$$

D'autre part, passant du module  $q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}$  au module  $q' = e^{-\frac{i\pi\omega_1}{\omega_3}}$  par les formules

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= i\omega_1, \\ \omega'_2 &= -i\omega_3, & \eta'_1 &= i\eta_3, \dots, \\ e_3 &= -e'_1, \dots, \end{aligned}$$

on pourra écrire (*Ibid.*, XXX)

$$2\omega_1'(\eta_1' + \omega_1' e_1') = \pi^2 \left[ \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{4q'^{2n}}{(1+q'^{2n})^2} \right] = 2\omega_3(\eta_3 + \omega_3 e_3),$$

et par conséquent

$$S(1) = \frac{\omega_3}{i\omega_1} \frac{\sum_1^\infty \frac{4q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}}{\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{4q'^{2n}}{(1+q'^{2n})^2}} > 0.$$

Calculons maintenant la dérivée de  $S(\varphi_1)$ . Un calcul simple montre que l'on a

$$\frac{dS}{d\varphi_1} = \operatorname{sgn} - 2i\omega_1 p'(2\omega_1 \varphi_1 + \omega_3) H$$

en posant

$$H = \frac{i\pi}{2} - \omega_3 \left[ \zeta_3(2\omega_1 \varphi_1) - 2\omega_1 \varphi_1 \frac{\eta_3}{\omega_3} \right].$$

Le facteur  $p'(2\omega_1 \varphi_1 + \omega_3)$  est négatif dans l'intervalle considéré; le signe de  $H$  n'est pas évident; mais on a

$$\frac{d(iH)}{d\varphi_1} = -\frac{2\omega_1 \omega_3}{i} \left[ p(2\omega_1 \varphi_1 + \omega_3) + \frac{\eta_3}{\omega_3} \right];$$

le crochet varie toujours dans le même sens, entre les limites  $e_2 + \frac{\eta_3}{\omega_3}$  et  $e_3 + \frac{\eta_3}{\omega_3}$ . Nous venons de remarquer que  $e_3 + \frac{\eta_3}{\omega_3}$  était négatif; d'autre part, un calcul du même genre que plus haut conduit à la formule

$$e_2 + \frac{\eta_3}{\omega_3} = \frac{\pi^2}{2\omega_3^2} \sum_1^\infty \frac{4q'^{2n-1}}{(1+q'^{2n-1})^2},$$

qui montre que cette dernière quantité est également négative. Donc il en résulte que la fonction  $iH$  va en croissant; or pour  $\varphi_1 = \frac{1}{2}$ , elle a pour valeur

$$-\frac{\pi}{2} - i\omega_3 \left( \eta_1 - \frac{\omega_1 \eta_3}{\omega_3} \right) = 0;$$

donc elle est toujours positive. Donc enfin  $S(\varphi_1)$  est toujours croissante, et elle croît de 0 à  $S(1)$ . On aura donc toujours l'inégalité

$$(63) \quad \frac{\varphi_1}{2\psi_1} < \frac{\eta_1 + \omega_1 e_3}{-i(\eta_3 + \omega_3 e_3)} = -\pi \log q \frac{\sum_1^{\infty} \frac{4q^{2n-1}}{(1 - q^{2n-1})^2}}{\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{4q'^{2n}}{(1 + q'^{2n})^2}}.$$

On étudierait de même le rapport  $\frac{\varphi_2}{2\psi_1}$ .

Au contraire, le rapport des deux quantités (positives)  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  n'est pas limité. On a en effet

$$(64) \quad U(\varphi_1) = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\zeta_3(2\omega_1 \varphi_1) - 2\eta_1 - 2\omega_1(1 - \varphi_1)p(2\omega_1 \varphi_1 + \omega_3)}{\zeta_3(2\omega_1 \varphi_1) - \eta_1 + \omega_1(2\varphi_1 - 1)p(2\omega_1 \varphi_1 + \omega_3)}.$$

Les valeurs extrêmes de ce rapport sont

$$U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-(\eta_1 + e_2 \omega_1)}{-0} = +\infty$$

et

$$U(1) = 0.$$

La continuité montre donc que toutes les valeurs positives sont acquises par le rapport  $U(\varphi_1)$ ; d'ailleurs elles le sont toutes une seule fois, car on a

$$\frac{dU(\varphi_1)}{d\varphi_1} = \operatorname{sgn} - 2\omega_1^2 p'(2\omega_1 \varphi_1 + \omega_3) [\zeta_3(2\omega_1 \varphi_1) - 2\eta_1 \varphi_1].$$

Or le crochet est égal (TANNERY, formule XXXIII, 8) à  $\frac{1}{2\omega_1} \frac{\mathfrak{S}'_4(\varphi_1)}{\mathfrak{S}_4(\varphi_1)}$ , quantité négative; donc l'expression ci-dessus est négative et  $U$  décroît constamment, ce qui légitime l'assertion précédente.