

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES RIQUIER

**Sur le prolongement analytique des intégrales de certains systèmes
d'équations aux dérivées partielles linéaires**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 38 (1921), p. 13-41

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1921_3_38__13_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1921, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>


SUR LE

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES INTÉGRALES

DE

CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES,

PAR M. CH. RIQUIER,
Professeur à l'Université de Caen.



Introduction.

I. Désignant par x, y, \dots des variables indépendantes en nombre quelconque, et les supposant, indifféremment, réelles ou imaginaires, nous formulerons tout d'abord, relativement à la nature des régions que l'on peut être conduit à considérer dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, les définitions suivantes :

Si l'on considère, d'une part, une région déterminée, d'autre part, un point déterminé étranger à la région, il arrive nécessairement de deux choses l'une : ou bien ce point est le centre de quelque domaine ⁽¹⁾ entièrement étranger à la région, ou bien il n'est le centre d'aucun domaine de cette espèce ; nous dirons, dans le second cas, qu'il est *semi-extérieur* à la région.

Cela posé, soit \mathfrak{R} une région jouissant de la propriété que nous allons énoncer :

« Il existe quelque suite indéfinie de régions

$$\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(m)}, \dots,$$

telle : 1^o que, pour toute valeur de m , la région $\mathfrak{R}^{(m)}$ soit *normale* ⁽²⁾,

⁽¹⁾ Voir n^o 1, *infra*.

⁽²⁾ Voir n^o 9, 1, *infra*.

limitée, et entièrement comprise dans \mathfrak{R} ; 2° que, pour toute valeur de m , la région obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{R}^{(m)}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{R}^{(m)}$ soit entièrement comprise dans $\mathfrak{R}^{(m+1)}$; 3° que tout point de \mathfrak{R} finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m , par être compris dans $\mathfrak{R}^{(m)}$. »

Nous exprimerons d'une façon abrégée cet ensemble de conditions en disant que la région \mathfrak{R} est une *limite de région normale et limitée*.

Les mêmes choses étant posées, si, de plus, la région variable $\mathfrak{R}^{(m)}$ est *monodromique* ⁽¹⁾ quel que soit m , nous dirons que la région \mathfrak{R} est une *limite de région normale, limitée, et monodromique*.

II. Considérons un système différentiel d'ordre quelconque où se trouvent engagées, avec un nombre quelconque de variables indépendantes, x, y, \dots , un nombre également quelconque de fonctions inconnues, u, v, \dots ; et à chacune des inconnues u, v, \dots , faisons correspondre un entier algébrique déterminé que nous nommerons la *cote* de cette inconnue. Considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des inconnues, nommons *cote* de la dérivée en question l'entier algébrique obtenu en ajoutant à la cote de l'inconnue l'ordre total de la dérivée. Cela étant, nous supposerons tout d'abord que, moyennant un choix convenable des cotes respectivement attribuées à u, v, \dots , le système différentiel dont il s'agit remplit à la fois les deux conditions suivantes : 1° il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres; 2° chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote tombe *au-dessous* de celle du premier membre correspondant ⁽²⁾.

Désignons actuellement par S un système différentiel possédant la triple propriété : 1° *d'appartenir à l'espèce ci-dessus définie*; 2° *d'être complètement intégrable*; 3° *d'être linéaire par rapport à l'ensemble des*

⁽¹⁾ Voir n° 3, *infra*.

⁽²⁾ De pareils systèmes constituent un cas très particulier de ceux que j'ai nommés *orthonomes*. Voir l'Ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. VII.

fonctions inconnues et de leurs dérivées. Dans ce système, fixons l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales ordinaires ⁽¹⁾, et construisons un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes, et les colonnes aux fonctions arbitraires qui figurent dans les conditions initiales; puis, dans l'une quelconque de ces colonnes, noircissons à l'aide de hachures les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction arbitraire correspondante. En répétant cette opération successivement dans toutes les colonnes, nous obtiendrons une sorte de damier où les cases blanches et noires pourront offrir des dispositions relatives variées. Finalement, partageons les variables indépendantes en groupes, suivant que, dans le Tableau ainsi construit, les lignes offrent ou n'offrent pas la même disposition de cases blanches et noires. En supposant, par exemple, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t , et sept fonctions arbitraires,

$$(1) \quad \begin{pmatrix} F_1(t), & F_2(x, t), & F_3(z, s, t), & F_4(x, z, s, t), \\ & F_5(y, t), & F_6(x, y, t), & F_7(y, z, s, t), \end{pmatrix}$$

la considération d'un pareil Tableau nous conduira à partager les variables indépendantes en quatre groupes comprenant, le premier la variable x , le deuxième la variable y , le troisième les variables z et s , le quatrième la variable t : ce dernier groupe correspond aux lignes du Tableau *entièrement dépourvues de cases noires*. Extrayons alors, des espaces

$$[[x]], \quad [[y]], \quad [[z, s]], \quad [[t]],$$

les régions respectives

$$u_x, \quad u_y, \quad u_{z,s}, \quad u_t,$$

chacune des trois premières, $u_x, u_y, u_{z,s}$, étant une *limite de région normale, limitée, et monodromique*, la dernière, u_t , une *limite de région normale et limitée*.

Cela posé, si, d'une part, les coefficients du système S sont des fonctions

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 169 et suiv.

analytiques et régulières dans la région

$$(2) \quad (\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_{z,s}, \mathfrak{U}_t);$$

si, d'autre part, on a choisi pour les arbitraires (1) des fonctions analytiques et régulières dans les régions respectives

$$\begin{aligned} & \mathfrak{U}_t, (\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_t), (\mathfrak{U}_{z,s}, \mathfrak{U}_t), (\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_{z,s}, \mathfrak{U}_t), \\ & (\mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_t), (\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_t), (\mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_{z,s}, \mathfrak{U}_t) : \end{aligned}$$

les intégrales correspondantes ne peuvent manquer d'être elles-mêmes analytiques et régulières dans la région (2).

Ce résultat a fait l'objet d'une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 20 janvier 1919.

Rappel de notions fondamentales relatives au calcul des fonctions par cheminement.

1. Nous plaçant, indifféremment, dans le monde des quantités *réelles* ou dans celui des quantités *imaginaires*, et désignant par x, y, \dots des variables indépendantes en nombre quelconque, nous nommerons *domaine* toute région de l'espace $[[x, y, \dots]]$ définie par un système de relations de la forme

$$\text{mod}(x - x_0) < R_x, \quad \text{mod}(y - y_0) < R_y, \quad \dots,$$

où (x_0, y_0, \dots) désigne un point fixe, et R_x, R_y, \dots des constantes positives (> 0); ces constantes seront elles-mêmes les *rayons* du domaine, le point (x_0, y_0, \dots) en sera le *centre*.

Une série entière en $x - x_0, y - y_0, \dots$, admettant, autour du centre (x_0, y_0, \dots) , quelque domaine de convergence, définit, comme on le sait, une fonction olotrope de x, y, \dots dans l'intérieur d'un pareil domaine. Donnons à ce développement la forme de Taylor; puis, désignant par (x_1, y_1, \dots) un point intérieur au domaine, introduisons dans ce développement et dans toutes ses dérivées l'hypothèse numérique

$$x, y, \dots = x_1, y_1, \dots$$

La connaissance des sommes de ces divers développements nous permettra évidemment de construire celui de notre fonction à partir des nouvelles valeurs initiales x_1, y_1, \dots : ce deuxième développement de Taylor, entier en $x - x_1, y - y_1, \dots$, admettra certainement quelque domaine de convergence, et nous dirons, pour abrégé, qu'il *se raccorde* avec le précédent.

Cela posé, considérons, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, un *chemin brisé* ayant pour sommets successifs

$$(3) \quad (x_0, y_0, \dots), (x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots, (x_g, y_g, \dots), (X, Y, \dots).$$

Si, à partir de ces sommets successifs, on peut construire autant de développements dont chacun se raccorde avec le précédent, et dont le premier ne soit autre que le développement donné, le chemin brisé (3) sera dit *praticable* relativement au développement donné. D'après cela, il faudra donc, pour que le chemin (3) soit praticable, que le développement donné admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $x_1 - x_0, y_1 - y_0, \dots$, ce qui permettra de construire, à partir des valeurs x_1, y_1, \dots , un deuxième développement se raccordant avec le premier; il faudra ensuite que ce nouveau développement admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $x_2 - x_1, y_2 - y_1, \dots$, ce qui permettra de construire, à partir de x_2, y_2, \dots , un troisième développement se raccordant avec le second; et ainsi de suite jusqu'au développement construit à partir de x_g, y_g, \dots , qui doit admettre des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_g, Y - y_g, \dots$, afin qu'un dernier développement puisse être finalement construit à partir de X, Y, \dots .

Le développement entier en $x - x_0, y - y_0, \dots$ pris comme base du calcul précédent a été qualifié par M éray de *fondamental*; de même les premières valeurs, x_0, y_0, \dots , des variables indépendantes [cette qualification s'étend d'elle-même au point (x_0, y_0, \dots) dont elles sont les coordonnées réelles ou imaginaires]. Un développement fondamental donné (admettant quelque domaine de convergence) est dit définir, non pas une fonction, mais une *pseudo-fonction* ⁽¹⁾ de x ,

(1) Si l'on considère en effet deux chemins brisés partant du point (x_0, y_0, \dots) et aboutissant au point (X, Y, \dots) , on voit que le développement fondamental donné admettra des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_0, Y - y_0, \dots$, ce qui permettra de construire, à partir des valeurs x_0, y_0, \dots , un développement se raccordant avec le premier; il faudra ensuite que ce nouveau développement admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $X - x_1, Y - y_1, \dots$, ce qui permettra de construire, à partir de x_1, y_1, \dots , un deuxième développement se raccordant avec le premier; et ainsi de suite jusqu'au développement construit à partir de x_g, y_g, \dots , qui doit admettre des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_g, Y - y_g, \dots$, afin qu'un dernier développement puisse être finalement construit à partir de X, Y, \dots .

y, \dots ⁽¹⁾ : pour plus de simplicité toutefois, Méray remplace souvent le mot *pseudo-fonction* par le mot *fonction*, auquel il attache le même sens ⁽²⁾.

Si à un développement fondamental quelconque on substitue sa dérivée d'ordres partiels p, q, \dots , tout chemin brisé praticable relativement aux anciennes données l'est encore relativement aux nouvelles, et les développements successifs obtenus dans le second cas sont les dérivées d'ordres partiels p, q, \dots de ceux qu'on obtient dans le premier. Cette deuxième pseudo-fonction se nomme la *dérivée d'ordres partiels* p, q, \dots de la proposée.

Enfin, si l'on considère simultanément diverses pseudo-fonctions de x, y, \dots définies par un même point fondamental et divers développements fondamentaux, une expression de forme entière par rapport aux sommes de ces développements et de leurs dérivées d'ordres quelconques définit évidemment une nouvelle pseudo-fonction ; et tout chemin praticable à la fois pour les diverses pseudo-fonctions données ne peut manquer de l'être aussi pour la nouvelle.

2. Étant donné, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, le chemin brisé (3), formons, avec les coordonnées de deux sommets consécutifs quelconques, le Tableau des différences

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 - x_0, & x_2 - x_1, & \dots, & X - x_g, \\ y_1 - y_0, & y_2 - y_1, & \dots, & Y - y_g, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

et évaluons, dans les lignes respectives de ce Tableau, les plus grands modules, μ_x, μ_y, \dots , que présentent les différences dont il s'agit : ces quantités μ_x, μ_y, \dots se nommeront les *écarts maxima du chemin brisé* (3).

Considérons maintenant, d'une part, une pseudo-fonction de x, y, \dots , définie, conformément aux explications qui précèdent, par un

tissant au même sommet final, ces deux chemins, à supposer qu'ils soient l'un et l'autre praticables par rapport au développement donné, peuvent conduire, suivant les cas, soit au même développement final, soit, au contraire, à deux développements distincts.

(1) Que Méray qualifie d'*oloïde*.

(2) En y adjoignant l'épithète *localement oloïde*.

point fondamental, (x_0, y_0, \dots) , et par un développement fondamental; d'autre part, une région *continue* ⁽¹⁾, \mathfrak{R} , extraite de l'espace $[[x, y, \dots]]$, et contenant le point (x_0, y_0, \dots) . Nous dirons que la pseudo-fonction dont il s'agit est *calculable par cheminement dans la région \mathfrak{R} avec les rayons de convergence R_x, R_y, \dots* , si tout chemin brisé ayant son premier sommet au point fondamental, ses divers sommets dans la région \mathfrak{R} , et des écarts maxima respectivement inférieurs à R_x, R_y, \dots , est praticable pour la pseudo-fonction et conduit à des développements successifs admettant tous comme rayons de convergence R_x, R_y, \dots .

Cette condition étant supposée satisfaite, si, de plus, le développement final auquel on est conduit à l'extrémité d'un pareil chemin dépend uniquement des coordonnées de cette extrémité, et non du chemin suivi pour y arriver, la pseudo-fonction sera dite *monodrome* dans la région \mathfrak{R} avec les rayons R_x, R_y, \dots .

3. Certaines régions, extraites de l'espace $[[x, y, \dots]]$, jouissent, par leur *forme* même, de cette propriété remarquable, que le seul fait, pour une pseudo-fonction, d'y être calculable par cheminement, entraîne comme conséquence nécessaire la *monodromie* (sous la seule condition que, dans les chemins brisés parcourus, les sommets successifs soient suffisamment rapprochés). L'examen de ce cas nécessite tout d'abord quelques définitions nouvelles.

Nous nommerons *lacet* tout chemin brisé dont le sommet final coïncide avec le sommet initial; le point où se trouvent réunis les deux sommets extrêmes sera l'*origine du lacet*.

Nous nommerons *réseau* une suite (limitée) de lacets,

$$L_0, L_1, L_2, \dots, L_p,$$

ayant tous la même origine et le même nombre de sommets, et dont le

(1) La *continuité* d'une région peut se définir à l'aide de considérations dont le lecteur trouvera l'exposé, soit dans l'Ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (n° 37), soit dans le Mémoire intitulé : *Sur les systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi et sur le prolongement analytique de leurs intégrales* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3^e série, t. VII, note des pages 78 et suiv.).

premier, L_0 , a tous ses sommets confondus avec l'origine commune; cette dernière sera l'*origine du réseau*.

Étant donné, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, un réseau, prenons-y à volonté, soit deux sommets consécutifs appartenant à un même lacet, soit deux sommets de même rang appartenant à deux lacets consécutifs, et formons les différences entre les coordonnées semblables de ces deux points; en répétant l'opération de toutes les manières possibles, nous obtiendrons le Tableau

$$\begin{array}{rcl} x' - x'', & \dots, \\ y' - y'', & \dots, \\ \dots\dots, & \dots \end{array}$$

Cela étant, si, dans les lignes respectives du Tableau, on évalue les plus grands modules, ρ_x, ρ_y, \dots , que présentent les différences dont il s'agit, ces différences ρ_x, ρ_y, \dots se nommeront les *écarts maxima du réseau*.

Ces diverses définitions étant posées, les régions auxquelles nous avons fait allusion plus haut sont celles qui, étant *continues*, satisfont en outre à la condition suivante :

« Une constante positive α étant donnée, on peut assigner une constante positive β , non supérieure à α , et telle, que tout lacet ayant ses divers sommets dans la région avec des écarts maxima moindres que β puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau ayant ses divers sommets dans la région avec des écarts maxima moindres que α . »

En raison de la propriété dont elles jouissent, et que nous formulerons dans un instant d'une manière plus précise (n° 5, *infra*), de pareilles régions seront qualifiées de *monodromiques*.

Le cas d'une région *convexe* est l'un des plus simples que l'on puisse citer comme exemple de région monodromique ⁽¹⁾.

4. La remarque suivante est maintes fois utilisée :

Supposons que les variables indépendantes aient été partagées en

(1) Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, n° 73.

un nombre quelconque de groupes, trois, par exemple,

$$x, \dots, y, \dots, z, \dots,$$

et soient

$$(4) \quad \mathfrak{R}_{x,\dots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\dots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\dots}$$

trois régions respectivement extraites des espaces correspondants

$$(5) \quad [[x, \dots]], \quad [[y, \dots]], \quad [[z, \dots]]; \\ ,$$

l'association de ces trois régions en fournit une,

$$(6) \quad (\mathfrak{R}_{x,\dots}, \mathfrak{R}_{y,\dots}, \mathfrak{R}_{z,\dots}),$$

extraite de l'espace

$$(7) \quad [[x, \dots, y, \dots, z, \dots]].$$

Cela étant, il est extrêmement facile d'apercevoir que *si les régions* (4) [considérées chacune dans celui des espaces (5) qui lui convient] *sont supposées monodromiques, la région* (6) [considérée dans l'espace (7)] *ne peut manquer de l'être aussi.*

5. Voici maintenant la propriété capitale, annoncée plus haut, des régions monodromiques.

Les variables indépendantes x, y, \dots étant en nombre n , considérons, d'une part, une région monodromique donnée, \mathfrak{R} , extraite de l'espace $[[x, y, \dots]]$, d'autre part, n constantes positives (> 0) données, R_x, R_y, \dots : si l'on désigne par r une quantité positive au plus égale à la plus petite de ces dernières, on peut, en vertu de la définition des régions monodromiques, assigner au-dessous de $\frac{r}{2}$ une constante positive, ρ , telle que tout lacet construit dans \mathfrak{R} avec des écarts maxima moindres que ρ puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans \mathfrak{R} avec des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$.

Cela posé, toute *pseudo-fonction calculable par cheminement dans la région monodromique* \mathfrak{R} *avec les rayons* R_x, R_y, \dots *est certainement monodrome avec des rayons tous égaux à* ρ .

En d'autres termes, si, parmi les chemins brisés (tous praticables pour la pseudo-fonction) qui partent du point fondamental, et qui, avec des écarts maxima moindres que R_x, R_y, \dots , ont tous leurs sommets dans la région \mathfrak{A} , on s'astreint à ne considérer que ceux dont les n écarts maxima sont moindres que φ , le développement auquel on est conduit à l'extrémité d'un pareil chemin dépend uniquement de cette extrémité, et non du chemin suivi pour y arriver.

La démonstration de cette propriété se trouve exposée en détail dans l'Ouvrage déjà cité (').

Conditions suffisantes pour la possibilité du calcul par cheminement dans certaines régions.

6. Certaines régions jouissent, comme nous allons le voir, de cette autre propriété, que la possibilité, pour une pseudo-fonction, d'y être calculée, avec les rayons R_x, R_y, \dots , sur quelques-uns seulement des chemins brisés visés par la définition du n° 2, entraîne cette même possibilité sur les chemins restants.

Considérons des variables indépendantes partagées en groupes,

$$(8) \quad x, \dots, y, \dots, z, \dots, s, \dots,$$

dont nous désignerons le nombre par h (nous avons supposé ici, pour fixer les idées, $h = 4$), et, dans les espaces respectifs

$$[[x, \dots]], [[y, \dots]], [[z, \dots]], [[s, \dots]],$$

les régions continues

$$\mathfrak{A}_{x,\dots}, \mathfrak{A}_{y,\dots}, \mathfrak{A}_{z,\dots}, \mathfrak{A}_{s,\dots} :$$

l'association de ces dernières fournit, dans l'espace

$$[[x, \dots, y, \dots, z, \dots, s, \dots]],$$

une région,

$$(9) \quad (\mathfrak{A}_{x,\dots}, \mathfrak{A}_{y,\dots}, \mathfrak{A}_{z,\dots}, \mathfrak{A}_{s,\dots}),$$

qui est elle-même continue.

(¹) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 72.

Désignant ensuite par

$$(10) \quad (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots)$$

un point déterminé de la région (9), considérons spécialement, parmi les chemins brisés ayant leur origine en ce point et leurs divers sommets dans la région (9), ceux où l'on fait varier les h groupes de variables *séparément et successivement dans un ordre assigné d'avance*, par exemple dans l'ordre inverse de (8). Un pareil chemin, dont nous désignerons le sommet final par

$$(X, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots),$$

se compose évidemment de $h (= 4)$ tronçons successifs : sur le premier tronçon, les points

$$(x, \dots), (y, \dots), (z, \dots)$$

conservent, dans les régions respectives

$$\mathfrak{R}_{x, \dots}, \mathfrak{R}_{y, \dots}, \mathfrak{R}_{z, \dots},$$

les positions fixes

$$(x_0, \dots), (y_0, \dots), (z_0, \dots),$$

tandis que le point (s, \dots) prend, dans la région $\mathfrak{R}_{s, \dots}$, une suite de positions commençant à (s_0, \dots) et finissant à (S, \dots) ; sur le deuxième tronçon, les points

$$(x, \dots), (y, \dots), (s, \dots)$$

conservent, dans les régions respectives

$$\mathfrak{R}_{x, \dots}, \mathfrak{R}_{y, \dots}, \mathfrak{R}_{s, \dots},$$

les positions fixes

$$(x_0, \dots), (y_0, \dots), (S, \dots),$$

tandis que le point (z, \dots) prend, dans la région $\mathfrak{R}_{z, \dots}$, une suite de positions commençant à (z_0, \dots) et finissant à (Z, \dots) ; sur le tronçon suivant, les points

$$(x, \dots), (z, \dots), (s, \dots)$$

conservent, dans les régions respectives

$$\mathfrak{R}_{x, \dots}, \mathfrak{R}_{z, \dots}, \mathfrak{R}_{s, \dots},$$

les positions fixes

$$(x_0, \dots), (Z, \dots), (S, \dots),$$

tandis que le point (y, \dots) prend, dans la région $\mathfrak{R}_{y, \dots}$, une suite de positions commençant à (y_0, \dots) et finissant à (Y, \dots) ; enfin, sur le dernier tronçon, les points

$$(y, \dots), (z, \dots), (s, \dots)$$

conservent, dans les régions respectives

$$\mathfrak{R}_{y, \dots}, \mathfrak{R}_{z, \dots}, \mathfrak{R}_{s, \dots},$$

les positions fixes

$$(Y, \dots), (Z, \dots), (S, \dots),$$

tandis que le point (x, \dots) prend, dans la région $\mathfrak{R}_{x, \dots}$, une suite de positions commençant à (x_0, \dots) et finissant à (X, \dots) .

Considérons maintenant une pseudo-fonction des variables (8) définie par le point fondamental (10) et par un développement fondamental, et *supposons que*, en désignant par

$$(11) \quad R_x, \dots, R_y, \dots, R_z, \dots, R_s, \dots$$

des constantes positives convenablement choisies, *tous les chemins brisés de la région (9) ayant leur premier sommet au point (10) et présentant, avec des écarts maxima respectivement moindres que (11), la structure spéciale ci-dessus décrite, soient praticables pour la pseudo-fonction et conduisent à des développements successifs admettant les rayons de convergence (11).*

Cela étant, notre pseudo-fonction est calculable par cheminement dans la région (9) avec les rayons (11); si, de plus, les divers chemins spécifiés dans cette région par l'hypothèse précédente conduisent, pour une même extrémité finale, au même développement final, notre pseudo-fonction y est monodrome avec ces mêmes rayons (11).

La démonstration de cette propriété, qui nous sera d'un grand secours dans la dernière partie du présent Mémoire (n° 10, *infra*), se trouve exposée en détail dans un Mémoire antérieur ⁽¹⁾.

(1) *Sur quelques principes généraux relatifs à la théorie des fonctions d'un nombre quelconque de variables (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2^e série, t. IX; voir le n° 43 du Mémoire, p. 138 et suiv.).*

Spécification des systèmes qui font l'objet du présent Mémoire;
calcul par cheminement de leurs intégrales.

7. Considérons un système différentiel d'ordre quelconque, où se trouvent engagées, avec un nombre quelconque de variables indépendantes, x, y, \dots , un nombre également quelconque de fonctions inconnues, u, v, \dots ; et à chacune des inconnues u, v, \dots faisons correspondre un entier algébrique déterminé que nous nommerons la *cote* de cette inconnue. Considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des inconnues, nommons *cote* de la dérivée en question l'entier algébrique obtenu en ajoutant à la cote de l'inconnue l'ordre total de la dérivée.

Cela étant, nous dirons que le système est *phanéronome*, s'il remplit à la fois les deux conditions suivantes :

1° Il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres.

2° Une cote convenablement choisie étant attribuée, comme il vient d'être dit, à chacune des fonctions inconnues u, v, \dots , chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote tombe *au-dessous* de celle du premier membre correspondant.

Par exemple, l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = f(x, u)$$

constitue un système phanéronome. Il en est de même de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

comme aussi de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Il en est encore de même des équations simultanées

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \mathbf{H} \left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^3 v}{\partial y^2} = \mathbf{K} \left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{cases}$$

qui, moyennant l'attribution à u et v des cotes respectives 0 et 1, remplissent les conditions formulées ci-dessus.

Ainsi que nous l'avons fait observer dans l'Introduction, les systèmes phanéronomes constituent, d'après leur définition même, un cas très particulier de ceux que nous avons nommés *orthonomes*; en conséquence, *tout système phanéronome passif est complètement intégrable*.

8. Considérons actuellement un système différentiel, S, possédant la triple propriété d'être :

- 1° *Phanéronome*;
- 2° *Passif*;
- 3° *Linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées*;

et nommons, comme d'habitude, *coefficients* du système les fonctions des seules variables indépendantes qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des inconnues ou de leurs dérivées, soit comme termes indépendants de ces quantités.

Dans ce système, fixons l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales ordinaires ⁽¹⁾, et construisons un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes du système S, et les colonnes aux fonctions arbitraires qui figurent dans les conditions initiales; puis, dans l'une quelconque de ces colonnes, noircissons à l'aide de hachures les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction arbitraire correspondante. En répétant cette opération successivement dans toutes les colonnes, nous obtiendrons une sorte de

⁽¹⁾ Voir l'Ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, p. 169 et suiv.

damier où les cases blanches et noires pourront offrir des dispositions relatives variées. Finalement, partageons les variables indépendantes en groupes, suivant que, dans le Tableau ainsi construit, leurs lignes offrent ou n'offrent pas la même disposition de cases blanches et noires; c'est-à-dire mettons dans un même groupe les variables dont les lignes offrent la même disposition, dans des groupes différents les variables dont les lignes offrent des dispositions différentes. En supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t , et sept fonctions arbitraires dépendant respectivement des variables

$$t; \quad x, t; \quad z, s, t; \quad x, z, s, t; \quad y, t; \quad x, y, t; \quad y, z, s, t,$$

la considération d'un pareil Tableau

(11 bis)

x							
y							
z							
s							
t							

nous conduira à partager les variables en quatre groupes comprenant, le premier la variable x , le deuxième la variable y , le troisième les variables z et s , le quatrième la variable t . (En vue de notre énoncé du n° 10, *infra*, il convient d'observer dès maintenant que ce dernier groupe, t , correspond aux lignes du Tableau *entièrement dépourvues de cases noires*.)

Considérons maintenant, dans le système S, un groupe d'intégrales répondant à des conditions initiales déterminées, et regardons désormais comme fondamentales les valeurs initiales, x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 , choisies pour les variables indépendantes; considérons ensuite, dans

les espaces

$$[[x]], [[y]], [[z, s]], [[t]],$$

des régions continues,

$$u_x, u_y, u_{z,s}, u_t,$$

comprenant respectivement les points

$$x_0, y_0, (z, s_0), t_0.$$

Cela posé, *si, d'une part, les coefficients du système S sont tous calculables par cheminement dans la région*

$$(12) \quad (u_x, u_y, u_{z,s}, u_t)$$

avec les rayons

$$(13) \quad R_x, R_y, R_z, R_s, R_t;$$

si, d'autre part, on a choisi, pour les sept arbitraires qui figurent dans les conditions initiales, des fonctions respectivement calculables, avec ces mêmes rayons, dans les régions

$$\begin{aligned} u_t, (u_x, u_t), (u_{z,s}, u_t), (u_x, u_{z,s}, u_t), \\ (u_y, u_t), (u_x, u_y, u_t), (u_y, u_{z,s}, u_t), \end{aligned}$$

les intégrales correspondantes ne peuvent manquer d'être calculables, avec les rayons dont il s'agit, dans la région (12).

D'après ce que nous savons d'une manière générale sur l'économie des conditions initiales dans un système complètement intégrable, celles que nous venons d'imposer aux intégrales de S ont la structure suivante : dans leurs premiers membres figurent les diverses inconnues du système S et quelques-unes de leurs dérivées ; dans leurs seconds membres figurent les sept fonctions dont on a fait choix pour les arbitraires ; et chaque premier membre est assujéti à se réduire identiquement au second membre correspondant, lorsqu'on y remplace par les valeurs initiales choisies celles d'entre les variables indépendantes dont ne dépend pas l'arbitraire du second membre. Nos conditions

initiales sont donc de la forme

$$(14) \quad \begin{cases} \Gamma = \gamma_0(t) & \text{pour } x, y, z, s = x_0, y_0, z_0, s_0; \\ \Delta = \delta_0(x, t) & \text{» } y, z, s = y_0, z_0, s_0; \\ \Theta = \theta_0(z, s, t) & \text{» } x, y = x_0, y_0; \\ \Lambda = \lambda_0(x, z, s, t) & \text{» } y = y_0; \\ \Phi = \varphi_0(y, t) & \text{» } x, z, s = x_0, z_0, s_0; \\ \Psi = \psi_0(x, y, t) & \text{» } z, s = z_0, s_0; \\ \Omega = \omega_0(y, z, s, t) & \text{» } x = x_0, \end{cases}$$

où l'ensemble des sept quantités

$$(15) \quad \Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Phi, \Psi, \Omega$$

comprend toutes les inconnues du système proposé S avec quelques-unes de leurs dérivées.

Cela étant, on peut établir que les fonctions (15) sont calculables par cheminement dans la région (12) avec les rayons (13); cette démonstration se trouve exposée en détail dans un Mémoire antérieur ⁽¹⁾.

Examen du cas spécifié dans l'Introduction.

9. L'examen du cas que nous avons maintenant à étudier nécessite, en vue d'un exposé rigoureux, des notions qu'il est tout d'abord indispensable de rappeler ou de poser.

I. Nous dirons qu'une région, \mathfrak{R} , de l'espace $[[x, y, \dots]]$ est *normale*, si elle satisfait à la double condition suivante : 1° la région \mathfrak{R} est continue; 2° tout point de la région \mathfrak{R} est le centre de quelque domaine (n° 1) entièrement situé dans \mathfrak{R} .

II. Étant donnés, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, une région, \mathfrak{R} , et, dans cette région, un point, (x_0, y_0, \dots) , supposons qu'il existe quelque suite illimitée de régions *normales*,

$$\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(m)}, \dots,$$

⁽¹⁾ Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels (*Annales de l'École Normale*, janvier et février 1903).

toutes extraites de la région \mathfrak{R} , comprenant toutes le point (x_0, y_0, \dots) , et telles : 1° que tout point de la région \mathfrak{R} finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m , par être situé dans $\mathfrak{R}^{(m)}$; 2° que, pour toute valeur de m , $\mathfrak{R}^{(m)}$ soit entièrement compris dans $\mathfrak{R}^{(m+1)}$.

On verra sans peine qu'une région jouissant de cette propriété est nécessairement normale ⁽¹⁾.

Considérons maintenant une fonction de x, y, \dots définie, dans le voisinage du point (x_0, y_0, \dots) , par la somme d'un certain développement fondamental, entier en $x - x_0, y - y_0, \dots$, et admettant quelque domaine de convergence. Cela étant, *si la fonction dont il s'agit peut, quel que soit m , être prolongée analytiquement dans $\mathfrak{R}^{(m)}$ (en restant bien définie dans toute l'étendue de $\mathfrak{R}^{(m)}$), elle est assimilable à une fonction olotrope dans toute l'étendue de la région \mathfrak{R}* ⁽²⁾.

III. Les variables x, y, \dots étant, comme dans tout ce qui précède, indifféremment *réelles* ou *imaginaires*, nous nommerons *distance* des deux points $(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots)$ la racine carrée arithmétique (c'est-à-dire non négative) de la quantité

$$\text{mod } (x_1 - x_2)^2 + \text{mod } (y_1 - y_2)^2 + \dots \quad (3).$$

Cela posé, *si la distance de quelque point fixe de l'espace $[[x, y, \dots]]$ à un point variable d'une région donnée, \mathfrak{R} , de cet espace reste toujours inférieure à quelque constante positive, tout point fixe de $[[x, y, \dots]]$ jouit, par rapport à \mathfrak{R} , de la même propriété* : la région \mathfrak{R} , en pareil cas, est dite *limitée* ⁽⁴⁾.

IV. Si l'on considère, d'une part, une région déterminée, d'autre part, un point déterminé étranger à la région, il arrive nécessairement de deux choses l'une : ou bien ce point est le centre de quelque

⁽¹⁾ Sur les systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi, et sur le prolongement analytique de leurs intégrales (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3^e série, t. VII; voir le n° 6 du Mémoire, p. 87 et 88).

⁽²⁾ *Ibid.*, n° 6.

⁽³⁾ Pour que deux points soient identiques, c'est-à-dire pour que leurs coordonnées semblables soient respectivement égales, il est évidemment nécessaire et suffisant que leur distance ainsi définie soit nulle.

⁽⁴⁾ Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (n° 2 et 15).

domaine entièrement étranger à la région, ou bien il n'est le centre d'aucun domaine de cette espèce; nous dirons, dans le premier cas, qu'il est *complètement extérieur* à la région, et, dans le second, qu'il lui est *semi-extérieur*.

Une région sera dite *complète*, si tout point étranger à cette région lui est complètement extérieur.

Cela posé :

A. Si à une région quelconque, \mathfrak{U} , de l'espace $[[x, y, \dots]]$ on adjoint celle que forment les points semi-extérieurs à \mathfrak{U} , la région ainsi obtenue est nécessairement *complète* ⁽¹⁾.

B. Si à une région limitée, \mathfrak{U} , de l'espace $[[x, y, \dots]]$ on adjoint celle que forment les points semi-extérieurs à \mathfrak{U} , la région ainsi obtenue est elle-même *limitée* ⁽²⁾.

V. Considérons, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, une région, \mathfrak{U} , jouissant de la propriété suivante :

« Il existe quelque suite indéfinie de régions,

$$\mathfrak{U}', \mathfrak{U}'', \dots, \mathfrak{U}^{(m)}, \dots,$$

telle : 1° que, pour toute valeur de m , la région $\mathfrak{U}^{(m)}$ soit normale, limitée, et entièrement comprise dans \mathfrak{U} ; 2° que, pour toute valeur de m , la région (nécessairement limitée et complète) obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{U}^{(m)}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{U}^{(m)}$ soit entièrement comprise dans $\mathfrak{U}^{(m+1)}$; 3° que tout point de \mathfrak{U} finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m , par être compris dans $\mathfrak{U}^{(m)}$. »

Nous exprimerons d'une façon abrégée cet ensemble de conditions en disant que la région \mathfrak{U} est une *limite de région normale et limitée*.

(1) Sur les systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi, et sur le prolongement analytique de leurs intégrales, n° 10, I (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3^e série, t. VII).

(2) Ibid., n° 10, II.

On voit sans peine qu'une pareille région est nécessairement normale.

VI. Les mêmes choses étant posées qu'à l'alinéa précédent V, si, de plus, la région variable $\mathfrak{R}^{(m)}$ est monodromique quel que soit m , nous dirons que la région \mathfrak{R} est une *limite de région normale, limitée, et monodromique*.

10. Nous pouvons maintenant formuler l'énoncé du cas intéressant auquel fait allusion le titre du présent paragraphe.

Désignons par S un système différentiel possédant la triple propriété d'être :

- 1° *Phanéronome*;
- 2° *Passif*;
- 3° *Linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées*;

supposons, par exemple, comme au n° 8, que les fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées dépendent des cinq variables x, y, z, s, t , et qu'en fixant dans ce système l'économie des conditions initiales, on soit conduit, comme nous l'avons expliqué, au Tableau (11 bis), et, par suite, au partage des variables indépendantes en quatre groupes,

$$x; \quad y; \quad z, s; \quad t,$$

dont le dernier, t , correspond aux lignes du Tableau *entièrement dépourvues de cases noires*. Extrayons alors des espaces

$$[[x]], \quad [[y]], \quad [[z, s]], \quad [[t]]$$

les régions respectives

$$(16) \quad \mathfrak{R}_x, \quad \mathfrak{R}_y, \quad \mathfrak{R}_{z,s}, \quad \mathfrak{R}_t,$$

et supposons que chacune des trois premières, $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{z,s}$, soit une « *limite de région normale, limitée et monodromique* », la dernière, \mathfrak{R}_t , une « *limite de région normale et limitée* » (n° 9, V et VI); choisissons

enfin, pour les variables indépendantes, des valeurs initiales,

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad s_0, \quad t_0,$$

n'excédant pas les régions (16), et considérons un groupe d'intégrales particulières du système S répondant à des conditions initiales données.

Cela posé, si, d'une part, les coefficients du système S sont isotropes dans la région

$$(17) \quad (u_x, u_y, u_{x,y}, u_t).$$

si, d'autre part, on a choisi, pour les sept arbitraires qui figurent dans les conditions initiales, des fonctions respectivement olotropes dans les régions

$$u_t, (u_x, u_t), (u_{z,s}, u_t), (u_x, u_{z,s}, u_t),$$

$$(u_y, u_t), (u_x, u_y, u_t), (u_y, u_{z,s}, u_t),$$

les intégrales correspondantes ne peuvent manquer d'être isotropes dans la région (17).

I. Désignant par

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & \dots, & \\ z, & s, & \dots, & \end{array}$$

des variables indépendantes partagées en deux groupes qui en contiennent chacun un nombre quelconque, *considérons une pseudo-fonction calculable suivant le chemin brisé* :

$$\begin{aligned} & (x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots), \\ & (x_0, y_0, \dots, z_1, s_1, \dots), \\ & (x_0, y_0, \dots, z_2, s_2, \dots), \\ & \dots\dots\dots \\ & (x_0, y_0, \dots, z_g, s_g, \dots), \\ & (x_0, y_0, \dots, Z, S, \dots), \end{aligned}$$

où les variables x, γ, \dots du premier groupe conservent, pour tous les sommets successifs, les valeurs fixes x_0, γ_0, \dots , et supposons qu'après avoir calculé cette pseudo-fonction par cheminement du sommet initial au sommet final en ordonnant ses développements successifs par rapport

aux différences $x - x_0, y - y_0, \dots$, on introduise dans le développement final l'hypothèse numérique

$$(18) \quad x, y, \dots = x_0, y_0, \dots$$

Cela étant, on peut, sans changer le résultat, procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire introduire dans le développement initial l'hypothèse numérique (18), et calculer ensuite la pseudo-fonction ainsi obtenue suivant le chemin

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_0, s_0, \dots), \\ (z_1, s_1, \dots), \\ (z_2, s_2, \dots), \\ \dots\dots\dots, \\ (z_g, s_g, \dots), \\ (Z, S, \dots). \end{array} \right.$$

II. La région \mathfrak{R}_x étant, par hypothèse, une *limite de région normale, limitée et monodromique* (n° 9, VI), il existe, dans l'espace $[[x]]$, quelque suite indéfinie de régions,

$$\mathfrak{R}'_x, \mathfrak{R}''_x, \dots, \mathfrak{R}^{(m)}_x, \dots,$$

telle : 1° que, pour toute valeur de m , la région $\mathfrak{R}_x^{(m)}$ soit normale, limitée, monodromique, et entièrement comprise dans \mathfrak{R}_x ; 2° que, pour toute valeur de m , la région (limitée et complète), $\mathfrak{F}_x^{(m)}$, obtenue par l'adjonction à $\mathfrak{R}_x^{(m)}$ des divers points semi-extérieurs à $\mathfrak{R}_x^{(m)}$ (n° 9, IV) soit entièrement comprise dans $\mathfrak{R}_x^{(m+1)}$; 3° que tout point de \mathfrak{R}_x finisse, à partir d'une valeur suffisamment grande de m , par être compris dans $\mathfrak{R}_x^{(m)}$.

Les régions \mathfrak{R}_y et $\mathfrak{R}_{x,s}$, dont chacune est, comme \mathfrak{R}_x , une *limite de région normale, limitée et monodromique*, jouissent, pour cette raison, de propriétés toutes semblables.

Et il en sera de même de la région \mathfrak{R}_t , qui, par hypothèse, est une *limite de région normale et limitée* (n° 9, V), à cela près que la région variable, $\mathfrak{R}_t^{(m)}$, que l'on est conduit à envisager en appliquant la définition, peut, indifféremment, être ou non monodromique.

Cela posé, je dis que si l'on attribue à l'entier m une valeur particulière déterminée (quelconque), les intégrales considérées du système S

sont monodromes, avec des rayons convenablement choisis (n° 2), dans la région

$$(19) \quad (\mathfrak{u}_x^{(m)}, \mathfrak{u}_y^{(m)}, \mathfrak{u}_{z,s}^{(m)}, \mathfrak{u}_t^{(m)}).$$

[On ne considère, naturellement, l'entier m qu'à partir d'une valeur suffisamment grande pour que le point fondamental

$$(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$$

reste constamment compris dans la région (19), quel que soit m .]

La région limitée et complète

$$(20) \quad (\mathfrak{f}_x^{(m)}, \mathfrak{f}_y^{(m)}, \mathfrak{f}_{z,s}^{(m)}, \mathfrak{f}_t^{(m)})$$

se trouvant entièrement comprise dans la région normale

$$(\mathfrak{u}_x^{(m+1)}, \mathfrak{u}_y^{(m+1)}, \mathfrak{u}_{z,s}^{(m+1)}, \mathfrak{u}_t^{(m+1)}),$$

où les divers coefficients du système S sont olotropes, il résulte d'une propriété connue ⁽¹⁾ que ces coefficients admettent, en un point variable de (20), un système d'olomètres (au moins) égaux à des quantités positives fixes convenablement choisies; à plus forte raison en est-il de même en un point variable de la région (19), entièrement comprise dans (20).

Semblablement, la région limitée et complète $\mathfrak{f}_t^{(m)}$ se trouvant entièrement comprise dans la région normale $\mathfrak{u}_t^{(m+1)}$, où la première des sept arbitraires figurant dans les conditions initiales est olotrope, cette arbitraire admet, en un point variable de $\mathfrak{f}_t^{(m)}$, un olomètre (au moins) égal à une quantité positive fixe convenablement choisie; à plus forte raison en est-il de même en un point variable de $\mathfrak{u}_t^{(m)}$.

Semblablement encore, la région limitée et complète $(\mathfrak{f}_x^{(m)}, \mathfrak{f}_t^{(m)})$ se trouvant entièrement comprise dans la région normale $(\mathfrak{u}_x^{(m+1)}, \mathfrak{u}_t^{(m+1)})$, où la deuxième des sept arbitraires figurant dans les conditions initiales est olotrope, cette arbitraire admet, en un point variable de $(\mathfrak{f}_x^{(m)}, \mathfrak{f}_t^{(m)})$, un système d'olomètres (au moins) égaux à des

(1) Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, n° 57, I.

quantités positives fixes convenablement choisies; à plus forte raison en est-il de même en un point variable de $(\mathfrak{u}_x^{(m)}, \mathfrak{u}_t^{(m)})$.

Et ainsi jusqu'à la septième et dernière arbitraire.

En conséquence, on peut assigner des constantes positives, R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , telles : 1° que les divers coefficients du système S soient calculables par cheminement dans la région (19) avec les rayons R_x, R_y, R_z, R_s, R_t ; 2° que les sept arbitraires figurant dans les conditions initiales soient calculables, avec ces mêmes rayons, dans les régions respectives

$$(20 \text{ bis}) \quad \begin{cases} (\mathfrak{u}_t^{(m)}, (\mathfrak{u}_x^{(m)}, \mathfrak{u}_t^{(m)}), (\mathfrak{u}_{z,s}^{(m)}, \mathfrak{u}_t^{(m)}), (\mathfrak{u}_x^{(m)}, \mathfrak{u}_{z,s}^{(m)}, \mathfrak{u}_t^{(m)}), \\ (\mathfrak{u}_y^{(m)}, \mathfrak{u}_t^{(m)}), (\mathfrak{u}_x^{(m)}, \mathfrak{u}_y^{(m)}, \mathfrak{u}_t^{(m)}), (\mathfrak{u}_y^{(m)}, \mathfrak{u}_{z,s}^{(m)}, \mathfrak{u}_t^{(m)}). \end{cases}$$

Cela étant, si l'on désigne par r une quantité positive au plus égale à la plus petite des cinq quantités R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , on peut, en vertu de la définition des régions monodromiques (n° 3), assigner, au-dessous de $\frac{r}{2}$, une quantité positive, ρ , telle que tout lacet construit dans la région

$$(21) \quad (\mathfrak{u}_x^{(m)}, \mathfrak{u}_y^{(m)}, \mathfrak{u}_{z,s}^{(m)})$$

de l'espace $[[x, y, z, s]]$ avec des écarts maxima moindres que ρ puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans cette même région (21) avec des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$. Il en résulte manifestement qu'en désignant par t' un point particulier choisi à volonté dans l'espace $[[t]]$, tout lacet construit dans la région

$$(22) \quad (\mathfrak{u}_x^{(m)}, \mathfrak{u}_y^{(m)}, \mathfrak{u}_{z,s}^{(m)}, t')$$

de l'espace $[[x, y, z, s, t]]$ avec des écarts maxima moindres que ρ pourra être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans cette même région (22) avec des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$. Sous le bénéfice de cette observation, nous allons établir que les intégrales spécifiées par notre énoncé sont monodromes dans la

région (19) avec des rayons tous égaux à ρ ; ces intégrales se trouvant d'ailleurs comprises, comme nous l'avons remarqué plus haut (n° 8), au nombre des sept fonctions

$$(23) \quad \Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Phi, \Psi, \Omega.$$

qui constituent les premiers membres des conditions initiales (14), nous sommes ramené à prouver que les fonctions (23), calculables par cheminement dans la région (19) avec les rayons R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , ainsi qu'il résulte déjà de notre proposition du n° 8, y sont, en outre, monodromes avec des rayons tous égaux à ρ . En d'autres termes, si, parmi les chemins brisés [tous praticables pour les fonctions (23)] qui partent du point fondamental, et qui, avec des écarts maxima moindres que R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , ont tous leurs sommets dans la région (19), on s'astreint à ne considérer que ceux dont les écarts maxima sont moindres que ρ , il s'agit d'établir que le développement auquel on est conduit, pour chacune des fonctions (23), à l'extrémité d'un pareil chemin, dépend uniquement des coordonnées de cette extrémité, et non du chemin suivi pour y arriver. Finalement, si l'on se reporte à notre proposition générale du n° 6, il suffira, pour effectuer cette démonstration, de se borner au cas où l'on fait varier les deux groupes de variables

$$(x, y, z, s) \quad \text{et} \quad t$$

séparément et successivement dans l'ordre

$$t; \quad (x, y, z, s).$$

Considérons donc un chemin présentant la structure qui vient d'être indiquée, et désignons-en le sommet final par (X, Y, Z, S, T) ; ce chemin se compose de deux tronçons successifs. Sur le premier tronçon, le point (x, y, z, s) conserve, dans la région

$$(24) \quad (\mathfrak{H}_x^{(m)}, \mathfrak{H}_y^{(m)}, \mathfrak{H}_{z,s}^{(m)}),$$

la position fixe (x_0, y_0, z_0, s_0) , tandis que le point t prend, dans la région $\mathfrak{H}_t^{(m)}$, une suite de positions commençant à t_0 et finissant à T ,

ce qui donne

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0, z_0, s_0, t_0), \\ (x_0, y_0, z_0, s_0, t_1), \\ (x_0, y_0, z_0, s_0, t_2), \\ \dots\dots\dots, \\ (x_0, y_0, z_0, s_0, t_g), \\ (x_0, y_0, z_0, s_0, T). \end{array} \right.$$

Sur le deuxième tronçon, le point t conserve, dans la région $\mathfrak{R}_t^{(m)}$, la position fixe T , tandis que le point (x, y, z, s) prend, dans la région (24), une suite de positions commençant à (x_0, y_0, z_0, s_0) et finissant à (X, Y, Z, S) , ce qui donne

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0, z_0, s_0, T), \\ (x_1, y_1, z_1, s_1, T), \\ (x_2, y_2, z_2, s_2, T), \\ \dots\dots\dots, \\ (x_k, y_k, z_k, s_k, T), \\ (X, Y, Z, S, T). \end{array} \right.$$

Le chemin considéré se compose ainsi des deux tronçons successifs (25), (26).

Un deuxième chemin de même extrémité finale et de même structure se composera, semblablement, des deux tronçons successifs

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0, z_0, s_0, t_0), \\ (x_0, y_0, z_0, s_0, t'_1), \\ (x_0, y_0, z_0, s_0, t'_2), \\ \dots\dots\dots, \\ (x_0, y_0, z_0, s_0, t'_g), \\ (x_0, y_0, z_0, s_0, T) \end{array} \right.$$

et

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0, z_0, s_0, T), \\ (x'_1, y'_1, z'_1, s'_1, T), \\ (x'_2, y'_2, z'_2, s'_2, T), \\ \dots\dots\dots, \\ (x'_k, y'_k, z'_k, s'_k, T), \\ (X, Y, Z, S, T). \end{array} \right.$$

On ne perdra pas de vue que, sur les deux chemins

$$[(25), (26)] \quad \text{et} \quad [(27), (28)],$$

les écarts maxima sont moindres que φ , à plus forte raison moindres que R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , et que, dès lors, en vertu du n° 8, ils sont praticables pour les fonctions (23). Tout revient à prouver que, à leur extrémité commune, ils donnent, pour chacune de ces fonctions, un même développement final.

A. Tout d'abord, cette propriété ne peut manquer d'avoir lieu à l'extrémité commune des tronçons (25) et (27). En effet, les développements obtenus pour les fonctions (23) au bout de l'un et de l'autre tronçon se trouvent entièrement déterminés par la connaissance des développements respectivement fournis, au bout des tronçons dont il s'agit, tant pour les coefficients du système S que pour les fonctions qui jouent, par rapport à l'extrémité commune,

$$(x_0, y_0, z_0, s_0, T),$$

considérée à son tour comme point initial, le rôle de déterminations initiales des fonctions (23).

Or, les coefficients du système S étant olotropes, avec les olomètres R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , dans la région (19), laquelle contient la région

$$(x_0, y_0, z_0, s_0, \mathfrak{R}_t^{(m)}),$$

leur calcul, effectué tour à tour suivant les tronçons (25) et (27), conduira, pour chacun de ces coefficients, à un même développement final.

Pour avoir maintenant les seconds membres des conditions initiales relatives au sommet final, (x_0, y_0, z_0, s_0, T) , soit du chemin (25), soit du chemin (27), il faut, après avoir calculé par cheminement les sept fonctions (23) du sommet initial au sommet final du chemin dont on s'occupe, introduire dans les développements obtenus certaines hypothèses numériques, savoir :

dans le premier,	$x, y, z, s = x_0, y_0, z_0, s_0;$
dans le deuxième,	$y, z, s = y_0, z_0, s_0;$
dans le troisième,	$x, y = x_0, y_0;$
dans le quatrième,	$y = y_0;$
dans le cinquième,	$x, z, s = x_0, z_0, s_0;$
dans le sixième,	$z, s = z_0, s_0;$
dans le septième,	$x = x_0.$

Mais, au lieu d'opérer comme il vient d'être dit, c'est-à-dire de calculer *d'abord* les fonctions (23) du premier au dernier sommet de (25) [ou de (27)], et de faire *ensuite* les hypothèses numériques ci-dessus indiquées, on peut (I) procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire considérer les sept fonctions données qui figurent dans les seconds membres des conditions initiales (14), et les calculer suivant le chemin déduit de (25) [ou de (27)] :

- la première, de t_0 en T;
- la deuxième, de (x_0, t_0) en (x_0, T) ;
- la troisième, de (z_0, s_0, t_0) en (z_0, s_0, T) ;
- la quatrième, de (x_0, z_0, s_0, t_0) en (x_0, z_0, s_0, T) ;
- la cinquième, de (y_0, t_0) en (y_0, T) ;
- la sixième, de (x_0, y_0, t_0) en (x_0, y_0, T) ;
- la septième, de (y_0, z_0, s_0, t_0) en (y_0, z_0, s_0, T) .

Cela étant, puisque les seconds membres des conditions initiales (14), relatives au sommet $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, sont olotropes, avec les olomètres R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , dans les régions respectives (20 *bis*), lesquelles comprennent respectivement les régions

$$\begin{aligned} & \mathfrak{H}_t^{(m)}, \quad (x_0, \mathfrak{H}_t^{(m)}), \quad (z_0, s_0, \mathfrak{H}_t^{(m)}), \quad (x_0, z_0, s_0, \mathfrak{H}_t^{(m)}), \\ & (y_0, \mathfrak{H}_t^{(m)}), \quad (x_0, y_0, \mathfrak{H}_t^{(m)}), \quad (y_0, z_0, s_0, \mathfrak{H}_t^{(m)}), \end{aligned}$$

leur calcul, effectué tour à tour suivant les deux chemins respectivement déduits de (25) et de (27), conduira, pour chacun de ces seconds membres, à un même développement final.

Ainsi se trouve établi, pour les tronçons (25) et (27), le point que nous avons en vue. Reste à établir la propriété analogue pour les tronçons (26) et (28).

B. Du raisonnement fait ci-dessus (A), il résulte que les seconds membres des conditions initiales relatives au sommet initial commun, (x_0, y_0, z_0, s_0, T) , des tronçons (26) et (28) sont identiques aux seconds membres correspondants des conditions initiales (14), relatives au sommet initial commun, $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, des tronçons (25) et (27), à cela près que leurs développements sont supposés construits à partir des valeurs initiales x_0, y_0, z_0, s_0, T , au lieu d'être construits à partir des valeurs initiales x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 . Quant aux coefficients du système S, il est manifeste que, sauf le changement

des valeurs initiales à partir desquelles on les suppose développés, ils sont restés, eux aussi, identiques à eux-mêmes. Ces diverses fonctions sont donc calculables, avec les rayons R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , les uns (coefficients du système S) dans la région

$$(29) \quad (u_x^{(m)}, u_y^{(m)}, u_{z,s}^{(m)}, T),$$

les autres (seconds membres des conditions initiales) dans les régions respectives

$$\begin{aligned} &T, (u_x^{(m)}, T), (u_{z,s}^{(m)}, T), (u_x^{(m)}, u_{z,s}^{(m)}, T), \\ &(u_y^{(m)}, T), (u_x^{(m)}, u_y^{(m)}, T), (u_y^{(m)}, u_{z,s}^{(m)}, T). \end{aligned}$$

Cela posé, il résulte d'abord du n° 8 que les fonctions considérées (23) sont calculables, avec ces mêmes rayons, dans la région (29), puis, de l'observation faite sur la région (22), et de la proposition formulée au n° 5, qu'elles y sont monodromes avec des rayons tous égaux à φ ; les deux tronçons (26) et (28) conduiront donc, pour chacune d'elles, à un même développement final.

C'est ce qui restait à établir pour l'objet du présent alinéa II.

III. L'entier m ayant une valeur particulière déterminée (quelconque), et les mêmes choses étant posées qu'au début de l'alinéa précédent II, *les intégrales considérées du système S sont olotropes dans la région (19).*

On sait en effet que toute pseudo-fonction monodrome dans une région normale y peut être assimilée à une véritable fonction olotrope ⁽¹⁾. Cela étant, il suffit de se reporter aux conclusions de l'alinéa II.

IV. Revenons à notre énoncé général : il s'agit d'établir que, sous le bénéfice des hypothèses qui s'y trouvent formulées, les intégrales du système S répondant aux conditions initiales (14) du n° 8 sont olotropes dans la région (17).

Or, ces intégrales étant, en vertu de l'alinéa III, olotropes, quel que soit m , dans la région (19), il résulte immédiatement d'une remarque antérieure (n° 9, II) qu'elles le sont dans la région (17).

(1) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 70.