Annales scientifiques de l'É.N.S.

Émile Borel

# À propos de la définition de l'intégrale définie (lettre à M. le Directeur des Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure)

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 37 (1920), p. 461-462

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__461_0>

A PROPOS

DE

# LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

(Lettre à M. le Directeur des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*)

PAR M. ÉMILE BOREL.

M. Lebesgue revient sur la discussion qu'il a soulevée à propos des définitions de l'intégrale définie, et insiste en particulier sur la définition que j'ai donnée pour l'intégration des fonctions non bornées ([1]). Il me paraît superflu de répéter mes arguments; les lecteurs de ce Journal ne sont pas de ceux pour lesquels celui qui parle le dernier a nécessairement raison; ceux que cette polémique intéresse ne manqueront pas de relire ma Note ([2]) après avoir lu celle de M. Lebesgue. Je voudrais seulement, par une citation d'une phrase que j'ai écrite il y a 20 ans, préciser le point de vue auquel je me suis toujours placé pour apprécier les faits mathématiques; je sais que ce point de vue ne peut pas être logiquement imposé à l'adhésion de tous; mais, comme je le crois juste, je tiens d'autant plus à le signaler quand l'occasion s'en présente.

Il s'agissait de l'affirmation d'Euler, d'après laquelle les géomètres ne se tromperaient pas en attribuant la valeur $\frac{1}{2}$ à la série divergente :

$$1-1+1-1+1-\ldots.$$

M. Pringsheim avait formé un exemple dans lequel l'affirmation d'Euler était en défaut; il va de soi que tout analyste moderne forme-

([1]) Voir les *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXXV et XXXVII.
([2]) *Annales de l'École Normale*, t. XXXVI.

rait aisément de nombreux exemples de ce genre et que je ne l'ignorais pas lorsque j'avais repris pour mon compte l'affirmation d'Euler. Voici maintenant la conclusion à laquelle j'arrivais, après une discussion inutile à reproduire ici (¹):

« Pour prouver donc que l'affirmation d'Euler est fausse, en se plaçant au point de vue d'Euler, il faudrait fournir l'exemple d'un géomètre qui, *n'ayant aucune préoccupation relative aux séries divergentes et à la légitimité de leur emploi*, a trouvé, dans des calculs ayant pour objet des recherches d'un ordre tout différent, une série pour laquelle la règle d'Euler est en défaut.

» Tant qu'on n'aura pas fourni un tel exemple, on pourra dire que cette règle est exacte, *au point de vue pratique et expérimental*, puisque, depuis un siècle, elle n'aurait trompé aucun des géomètres qui l'auraient appliquée, sauf ceux qui se seraient précisément proposé comme but de la mettre en défaut; ceux-là, non plus, n'auraient d'ailleurs pas été trompés, puisqu'ils savaient à l'avance le but vers lequel ils tendaient. »

J'ajouterai que ceux-là même qui ne seraient pas entièrement d'accord avec moi sur ce point de vue initial ne peuvent contester la rigueur et l'importance de la théorie des séries divergentes à laquelle il m'a conduit et que de nombreux géomètres ont développée depuis mes premiers travaux. D'une manière analogue, ceux-là même qui considéreraient que l'interprétation littérale des textes (²) justifie les objections élevées contre ce que je persiste à regarder, pour ma part, comme une déformation, je dirais presque une caricature de ma définition de l'intégrale des fonctions non bornées, ceux-là même ne pourront, je pense, contester la rigueur et l'utilité mathématique des déductions qui ont été ou qui seront tirées de cette définition par ceux qui se seront placés à mon point de vue.

---

(¹) *Leçons sur les séries divergentes*, p. 8 (Gauthier-Villars, 1901).

(²) Ou plus exactement du texte seul de mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* 1912), sans tenir compte de ma Note antérieure des *Comptes rendus* ni de ma Note des *Annales de l'École Normale* (1919).