BERTRAND GAMBIER

Sur les courbes à torsion constante (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 37 (1920), p. 117-164
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__117_0>

SUR LES

COURBES A TORSION CONSTANTE

(SUITE);

PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

CHAPITRE V.

COURBES ALGÉBRIQUES DE GENRE NON NUL, IMAGINAIRES ET RÉELLES.

1. Je vais donner deux exemples précis de courbes algébriques de genre non nul. Le premier se compose de courbes toutes imaginaires; grâce au paraboloïde, nous savons l'intérêt de ces courbes imaginaires.

Quelques explications préliminaires éviteront de juger cet exemple comme artificiel.

Nous savons que toute courbe algébrique $(\mathcal{M})$ tracée sur la sphère de rayon 1 conduit à une courbe unique $(\mathcal{A})$ à torsion constante, en négligeant les translations. Les coordonnées d'un point xyz de cette courbe $(\mathcal{A})$ sont trois intégrales abéliennes attachées à une certaine courbe plane algébrique d'équation $F(\xi, \eta) = 0$; en général, $(\mathcal{A})$ est transcendante; chaque point à l'infini de $(\mathcal{M})$ donne sur $(\mathcal{A})$ une singularité logarithmique; pour éviter ces singularités, il faut étudier *isolément* chaque point à l'infini de $(\mathcal{M})$. L'ensemble de ces conditions est *nécessaire;* mais, sauf dans le cas des courbes unicursales, *non suffisant*. Supposons la courbe F de genre $g \geqq 1$, chacune des trois intégrales $\int R(\xi, \eta)\,d\xi$ a $2g$ périodes cycliques; cela fait un ensemble de conditions supplémentaires, en nombre $6g$ au plus, qui, cette fois, font intervenir *simultanément* tous les points à l'infini de $(\mathcal{M})$.

Il est naturel de se demander s'il est possible de trouver une courbe $(\mathcal{M})$ à laquelle s'associent un nombre fini ou infini de courbes $(\mathcal{M}_1)$ ayant les mêmes points à l'infini que $(\mathcal{M})$, chacun étant caractérisé sur $(\mathcal{M})$ et $(\mathcal{M}_1)$ par les mêmes entiers p, q, i, les courbes $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{A}_1)$ étant simultanément algébriques.

La réponse est affirmative; pour les courbes unicursales, nous en connaissons déjà de nombreux exemples : par exemple, les cônes unicursaux à deux génératrices isotropes conjuguées où chaque cycle a pour degré r, classe r et indice $2(h+r)$: nous avons trouvé une solution à $h-1$ paramètres. Mais, en réalité, le problème est posé à propos des courbes non unicursales. Je vais en donner un exemple très simple.

2. Je pose

$$\alpha = \frac{c+ic'}{1-c''}, \qquad \beta = -\frac{c+ic'}{1-c''}.$$

nous avons à étudier les trois intégrales

$$(1) \qquad \int \frac{d\alpha}{(\beta-\alpha)^2}, \qquad \int \frac{\beta\,d\alpha}{(\beta-\alpha)^2}, \qquad \int \frac{\beta^2\,d\alpha}{(\beta-\alpha)^2}.$$

Il est clair que l'équation

$$(2) \qquad \beta - \alpha = \frac{K}{\theta(\alpha)},$$

où θ est une fonction algébrique de α et K une constante, définit, si K varie, un ensemble de courbes $(\mathcal{M})$ ayant toutes les mêmes points à l'infini, correspondant aux pôles de θ et, éventuellement, à la valeur ∞ de α.

Pour que les trois intégrales (1) soient algébriques quelle que soit la constante K, il faut et il suffit que les intégrales

$$(3)\qquad \int \theta^2\,d\alpha,\quad \int \theta^2(\alpha\,d\alpha),\quad \int \theta^2(\alpha^2 d\alpha),\quad \int \theta\,d\alpha,\quad \int \theta(\alpha\,d\alpha)$$

soient algébriques. Si nous intégrons par parties, nous pourrons dire qu'il faut et suffit que l'on puisse trouver deux fonctions algébriques α et θ d'un paramètre p telles que les intégrales

$$(4)\qquad \int \alpha\,d(\theta^2),\quad \int \alpha^2\,d(\theta^2),\quad \int \alpha^3\,d(\theta^2),\quad \int \alpha\,d\theta,\quad \int \alpha^2\,d\theta$$

soient algébriques en p.

On aperçoit immédiatement une solution particulière

$$(5)\qquad \begin{cases} \theta^2 = 4\,p^{2n+1} + 2\,A_1\,p^{2n-1} + 2\,A_2\,p^{2n-2} + \ldots + 2\,A_{2n}, \\ \alpha = \lambda p^m + \lambda_1\,p^{m-1} + \ldots + \lambda_{m-1}\,p, \end{cases}$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ sont $2n$ constantes données et $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ m constantes inconnues.

Les trois premières intégrales sont manifestement des polynomes entiers en p. Si nous posons

$$(6)\qquad I_0 = \int \frac{dp}{\theta},\qquad I_1 = \int \frac{p\,dp}{\theta},\qquad \ldots,\qquad I_{2n-1} = \int \frac{p^{2n-1}\,dp}{\theta},$$

les I sont les intégrales de première et deuxième espèces attachées à la courbe (θ, p) et les intégrales $\int \alpha\,d\theta$, $\int \alpha^2\,d\theta$ se ramènent à une partie algébrique plus une somme linéaire par rapport aux I; si les coefficients des I sont nuls, ces deux intégrales sont algébriques; donc $\int \alpha\,d\theta$ fournit $2n$ conditions linéaires et homogènes par rapport aux λ, $\int \alpha^2\,d\theta$ $2n$ conditions quadratiques homogènes; si donc $m \geqq 4n+1$, on peut espérer obtenir des solutions dépendant des $2n$ arbitraires $A, A_1, \ldots, A_{2n}$ et de $m-4n-1$ coefficients λ qui restent arbitraires. Pour faire les calculs, désignons encore, si l'entier r surpasse $2n-1$, par I_r l'intégrale $\int \frac{p^r\,dp}{\theta}$; la dérivation de θ et $p^r\theta$ donne manifestement

$$(7)\quad \begin{cases} \theta = 2(2n+1)\mathrm{I}_{2n} +)(2n-1)\mathrm{A}_1\mathrm{I}_{2n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{I}_0, \\ p^r\theta = [4r+2(2n+1)]\mathrm{I}_{2n+r} + [2r+2n-1]\mathrm{A}_1\mathrm{I}_{2n+r-2} + \ldots + 2r\mathrm{A}_{2n}\mathrm{I}_{r-1}. \end{cases}$$

Comme il importe de donner un exemple précis, écrivons

$$(8)\quad \begin{cases} \theta^2 = 4p^{2n+1} - 4p, \\ \alpha = \mathrm{A}p^{4n+1} + \mathrm{B}p^{2n+1} + \mathrm{C}p. \end{cases}$$

Les formules de récurrence sont alors

$$(9)\quad \begin{cases} \theta = 2(2n+1)\mathrm{I}_{2n} - 2\mathrm{I}_0, \\ p^r\theta = [4r+2(2n+1)]\mathrm{I}_{2n+r} - (4r+2)\mathrm{I}_r; \end{cases}$$

de la sorte, $\int \alpha\, d\theta$ se ramène à une partie algébrique plus un terme en I_1 dont on annule le coefficient : ceci donne une relation homogène et linéaire en A, B, C; si je considère A, B, C comme les coordonnées d'un point dans un système d'axes rectangulaires, cette équation représente un plan passant par l'origine; de même $\int \alpha^2\, d\theta$ se ramène à une partie algébrique plus un terme en I_2 dont on annule le coefficient; l'équation obtenue représente alors un cône du second degré de sommet à l'origine; or il est clair que l'une des deux génératrices d'intersection du plan et du cône est la droite d'équations $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0$; car, dans ce cas, on a

$$\alpha = \frac{\mathrm{B}}{4}\theta^2 \quad \text{et} \quad \int \alpha\, d\theta = \frac{\mathrm{B}\theta^3}{12}, \quad \int \alpha^2\, d\theta = \frac{\mathrm{B}^2\theta^5}{80}.$$

On peut donc diriger les calculs de façon à éliminer cette génératrice, qui donne une solution illusoire à notre point de vue, à savoir la courbe unicursale $\alpha = \mathrm{K}_1\theta^2$, $\beta = \mathrm{K}_1\theta^2 + \frac{\mathrm{K}}{\theta}$ rentrant dans les types fournis par l'identité de Bezout; l'autre génératrice aura donc deux équations rationnelles par rapport à la lettre n; autrement dit, A, B, C seront égaux au produit par une constante K_1 de trois fractions rationnelles en n. Ces considérations prouvent qu'il est avantageux de modifier légèrement la forme de calcul de façon à avoir le résultat de l'intégration, facile à prévoir d'après les formules (9). J'aurai, si l'intégrale est algébrique,

$$\int (\mathrm{A}\,p^{4n+1} + \mathrm{B}\,p^{2n+1} + \mathrm{C}p)\,d\theta = \theta\,[\mathrm{D}\,p^{4n+1} + \mathrm{E}\,p^{2n+1} + \mathrm{F}p]. \tag{10}$$

Si l'on dérive, comme $\dfrac{d\theta}{dp} = \dfrac{2}{\theta}\,[(2n+1)p^{2n} - 1]$, en chassant le dénominateur θ, on trouve immédiatement que

$$(4n+1)\mathrm{D}\,p^{4n} + (2n+1)\mathrm{E}\,p^{2n} + \mathrm{F}$$

est divisible par $(2n+1)p^{2n} - 1$; $\mathrm{G}p^{2n} + \mathrm{H}$ représentant le quotient, la dérivation de (10) donne

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A} = \frac{10n+3}{4n+1}\mathrm{G}, \qquad \mathrm{B} = 3\mathrm{H} - \frac{4n+3}{2n+1}\mathrm{G}, \qquad \mathrm{C} = -3\mathrm{H};\\ &\alpha = \mathrm{G}\left[\frac{10n+3}{4n+1}\,p^{4n+1} - \frac{4n+3}{2n+1}\,p^{2n+1}\right] + 3\,\mathrm{H}\,(p^{2n+1} - p);\\ &\int \alpha\,d\theta = \theta\left[\mathrm{G}\left(\frac{2n+1}{4n+1}\,p^{4n+1} - \frac{p^{2n+1}}{2n+1}\right) + \mathrm{H}\,(p^{2n+1} - p)\right]. \end{aligned}\right.$$

Il faudra écarter le cas où G serait nul, qui donnerait $\alpha = \dfrac{3\mathrm{H}}{4}\theta^2$ conformément aux prévisions précédentes. Je vais écrire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{G}}\left[\alpha^2 - 9\frac{\mathrm{H}^2}{16}\theta^4\right] = \mathrm{G}&\left[\left(\frac{10n+3}{4n+1}\right)^2 p^{8n+2} - \frac{2(4n+3)(10n+3)}{(2n+1)(4n+1)}\,p^{6n+2} + \left(\frac{4n+3}{2n+1}\right)^2 p^{4n+2}\right]\\ &+ 6\mathrm{H}\left[\frac{10n+3}{4n+1}\,p^{6n+2} - \frac{36n^2+32n+6}{(2n+1)(4n+1)}\,p^{4n+2} + \frac{4n+3}{2n+1}\,p^{2n+2}\right],\\ \int \frac{1}{\mathrm{G}}\left[\alpha^2 - \frac{9\,\mathrm{H}^2}{16}\theta^4\right]d\theta &= \theta\,[\mu\,p^{8n+2} + \mu_1\,p^{6n+2} + \mu_2\,p^{4n+2} + \mu_3\,p^{2n+2} + \mu_4\,p^2]. \end{aligned}\right.$$

Comme plus haut, la dérivation de la seconde formule (12) entraîne

$$(13)\quad \begin{aligned} &(8n+2)\mu p^{8n+1} + (6n+2)\mu_1 p^{6n+1} + (4n+2)\mu_2 p^{4n+1}\\ &\quad + (2n+2)\mu_3\,p^{2n+1} + 2\mu_4\,p\\ &\quad \equiv [(2n+1)\,p^{2n} - 1]\,[ap^{6n+1} + bp^{4n+1} + cp^{2n+1} + dp], \end{aligned}$$

ce qui permet d'exprimer les μ au moyen de a, b, c, d; en dérivant donc la seconde formule (12), on divise les deux membres par $(2n+1)p^{2n} - 1$ et l'on arrive, par élimination de a, b, c, d, à la relation unique $\frac{G}{18n+5}+\frac{H}{4n+5}=0$; on a alors le droit d'écrire

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &G=-(18n+5)K_1, \qquad H=(4n+5)K_1,\\ &a=-\frac{2(10n+3)^2}{4n+1}K_1, \qquad b=-\frac{6(4n+3)(2n+2)}{2n+1}K_1,\\ &c=\frac{2(10n+3)(24n^2+34n+9)}{(2n+1)(4n+1)}K_1; \qquad d=0;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha=-(18n+5)K_1\left[\frac{10n+3}{4n+1}p^{4n+1}-\frac{4n+3}{2n+1}p^{2n+1}\right]+3(4n+5)K_1(p^{2n+1}-p),\\ &\int\alpha\,d\theta= K_1\theta\left[-(18n+5)\left(\frac{2n+1}{4n+1}p^{4n+1}-\frac{p^{2n+1}}{2n+1}\right)+(4n+5)(p^{2n+1}-p)\right],\\ &\int\alpha^2\,d\theta=-(18n+5)K_1^2\theta\left[\frac{-(10n+3)^2(2n+1)}{(4n+1)^2}p^{8n+2}+\frac{4(10n+3)(2n+3)}{4n+1}p^{6n+2}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{192n^4+720n^3+832n^2+342n+45}{(2n+1)^2(4n+1)}p^{4n+2}+\frac{6(4n+3)}{2n+1}p^{2n+2}\right]\\ &\qquad+\frac{9(4n+5)^2}{5}K_1^2(p^{2n+1}-p)^2\theta,\\ &\beta=\alpha+\frac{K}{\theta}, \qquad \theta^2=4(p^{2n+1}-p).\end{aligned}\right.$$

La courbe sphérique (α, β) ainsi obtenue dépend des deux arbitraires réelles ou complexes K et K_1; comme α et β s'expriment rationnellement en θ et p, il en est de même de c, c', c''. Inversement, θ et p s'expriment rationnellement en α, β et par suite en c, c', c''; en effet, on a d'abord $\theta=\frac{K}{\beta-\alpha}$; l'élimination de p entre les deux équations

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &Ap^{4n+1}+Bp^{2n+1}+Cp-\alpha=0,\\ &4(p^{2n+1}-p)-\frac{K^2}{(\beta-\alpha)^2}=0\end{aligned}\right.$$

donnerait à la fois la relation algébrique entre β et α et l'expression de p rationnellement en β et α; donc le genre de la courbe $(\mathcal{M})$ est bien celui de la courbe (θ, p), c'est-à-dire n. Cherchons le degré de $(\mathcal{M})$: coupons par une génératrice $\alpha=\alpha_0$; l'équation

$$Ap^{4n+1}+Bp^{2n+1}+Cp-\alpha_0=0$$

donne $4n+1$ valeurs de p, $8n+2$ valeurs de (p, θ) ou de β. Donc chaque génératrice α de la sphère coupe $(\mathcal{B})$ en $8n+2$ points; coupons par une génératrice $\beta = \beta_0$, on a la relation

$$4(p^{2n+1}-p)[Ap^{4n+1}+Bp^{2n+1}+Cp-\beta_0]^2 - K^2 = 0,$$

qui donne $10n+3$ valeurs de p; on a ensuite

$$\theta = \frac{K}{\beta_0 - (Ap^{4n+1}+Bp^{2n+1}+Cp)} \qquad \text{et} \qquad \alpha = Ap^{4n+1}+Bp^{2n+1}+Cp,$$

donc chaque génératrice β_0 donne $10n+3$ points de rencontre avec $(\mathcal{B})$, donc la courbe $(\mathcal{B})$ est du degré $18n+5$ et n'admet pas l'origine pour centre; comme point à l'infini, la courbe $(\mathcal{B})$ ne possède que celui qui correspond à $p=\infty$, point de ramification de la courbe (θ, p); le cône C, de degré $18n+5$, n'admet qu'un cycle isotrope d'indice $2(18n+5)$, de degré et classe égaux à $8n+2$; la courbe $(\mathcal{A})$ est du degré $28n+8$, nombre égal, puisqu'il n'y a qu'un cycle, à l'excès de l'indice de ce cycle sur le degré de ce cycle. J'applique les formules (41) et (43) du Chapitre II (recopiées en tenant compte que les quantités u, v qui y figurent sont appelées ici α, β) et j'obtiens pour la courbe $(\mathcal{A})$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&c = (\alpha^2-1)\frac{\theta}{K}+\alpha, \qquad c' = -i(\alpha^2+1)\frac{\theta}{K} - i\alpha, \qquad c'' = -2\frac{\theta\alpha}{K} - 1,\\
&c+ic' = \frac{2\alpha^2\theta}{K} + 2\alpha, \qquad c - ic' = -\frac{2\theta}{K},\\
&\frac{x+iy}{4i\tau} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2\theta}{2K} + \frac{1}{K^2}\int\theta^2\alpha^2\,d\alpha - \frac{1}{K}\int\alpha^2\,d\theta,\\
&\frac{x-iy}{4i\tau} = \frac{\theta}{2K} - \frac{1}{K^2}\int\theta^2\,d\alpha,\\
&\frac{z}{4i\tau} = -\frac{1}{4} - \frac{\alpha\theta}{2K} - \frac{1}{K^2}\int\theta^2\alpha\,d\alpha + \frac{1}{K}\int\alpha\,d\theta,
\end{aligned}\right.$$

formules où $\int\theta^2\alpha^2\,d\alpha$, $\int\theta^2\,d\alpha$, $\int\theta^2\alpha\,d\alpha$ sont des polynomes entiers en p, tandis que $\int\alpha\,d\theta$ et $\int\alpha^2\,d\theta$ sont les deux intégrales dont le calcul détaillé a été fait. Le résultat remarquable est que du premier coup nous avons obtenu une courbe $(\mathcal{A})$ algébrique, de genre n arbitraire. Cette courbe est imaginaire, mais conduit à des surfaces réelles applicables sur le paraboloïde, algébriques, et de genre arbitrairement grand. Cherchons de combien de paramètres de *forme* dépend une telle surface, lorsque n est donné; adjoignons à la courbe α, β la courbe $\alpha_1 = \lambda\alpha + \mu$, $\beta_1 = \lambda\beta + \mu$ et effectuons ensuite sur la courbe α_1, β_1 le déplacement réel le plus général. La substitution $\alpha_1 = \lambda\alpha + \mu$, $\beta_1 = \lambda\beta + \mu$ est manifestement la résultante des substitutions $\alpha_1 = \alpha + \mu$, $\beta_1 = \beta + \mu$ et $\alpha_1 = \lambda\alpha$, $\beta_1 = \lambda\beta$. Je remarque que $\alpha_1 = \lambda\alpha$, $\beta_1 = \lambda\beta$ revient à remplacer K et K_1 par λK, λK_1; donc, en donnant à K et K_1 toutes les valeurs possibles, on peut négliger cette transformation (qui à défaut de nouvelle surface donne une transformation algébrique de la surface en elle-même); d'autre part, une rotation réelle autour de Oz permet toujours de supposer que la constante K est réelle; donc comme paramètres de forme, il reste la constante réelle K, la partie réelle et imaginaire de K_1 et μ : en tout cinq paramètres de forme. Notre exemple particulier donne pour chaque valeur de n deux surfaces réelles S et S′ algébriques applicables sur le paraboloïde dont la forme dépend de cinq paramètres arbitraires, abstraction faite d'une similitude.

J'indique les valeurs numériques pour $n = 1$ des divers coefficients; je suppose encore la constante μ nulle et j'ai, en posant $p'^2 u = 4p^3 - 4p$ suivant les notations de Weierstrass,

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{K_1}{15}[-13\times 69p^5 + 1210p^3 - 405p] \qquad \beta = \alpha + \frac{K}{p'u},\\ \int \alpha\, d\theta &= K_1 p'u\left[-\frac{69p^5}{5} + \frac{50p^3}{3} - 9p\right],\\ \int \alpha^2\, d\theta &= K_1^2 p'u\left[\frac{69\times 169}{25}p^{10} - 4\times 13\times 23p^8 \right.\\ &\qquad\left. + \frac{55\,574}{45}p^6 - \frac{3068}{5}p^4 + \frac{729}{5}p^2\right]. \end{aligned} \right.$$

Quelle que soit la valeur de n, si K, K_1 μ sont réelles, pour des valeurs réelles de p comprises entre -1 et 0 ou entre $+1$ et $+\infty$, α, θ, β sont réelles, de sorte que c et c'' sont réelles, c' imaginaire pure : on en déduit que les surfaces réelles S et S′ admettent alors zOx pour plan de symétrie; il reste trois paramètres de forme.

3. Je signale en passant un fait intéressant : dans l'exemple (5), au lieu de se donner à l'avance les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, on pourrait les considérer eux-mêmes comme inconnues; si l'on songe que la substitution $p = \rho p_1$, $\theta = \rho^{n+\frac{1}{2}}\theta_1$, où ρ est une constante quelconque, ne change rien à la courbe, on voit que l'indétermination des A donne $2n-1$ arbitraires supplémentaires; les inconnues sont ces $2n-1$ arbitraires et $\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda}$; il semblerait donc que l'exemple de plus faible degré s'obtiendrait en prenant $(m+1)+(2n-1)=4n$ ou $m=2n+2$. Mais alors il se trouve que le polynome

$$4p^{2n+1} + 2A_1 p^{2n-1} + \ldots + 2A_{2n}$$

n'a plus ses racines distinctes, le genre de la courbe $(\mathcal{A})$ n'est plus égal à n.

Par exemple, pour $n = 1$, on peut écrire

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} p'^2 u &= 4p^3 u - g_2 p u - g_3,\\ \alpha &= A p^4 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p,\\ \beta &= \alpha + \frac{K}{p' u},\end{aligned}\right.$$

les inconnues sont $\frac{A_1}{A}, \frac{A_2}{A}, \frac{A_3}{A}, \frac{g_2^3}{g_3^2}$; on a quatre équations. Le calcul se fait aisément et le résultat donne $g_3^2 - 27 g_2^3 = 0$, de sorte que l'on trouve une courbe unicursale.

Cet exemple prouve, encore une fois de plus, que les prévisions basées sur les nombres d'équations ou d'inconnues sont en général insuffisantes; il prouve encore qu'il existe certaines relations d'inégalité entre le genre de la courbe, le nombre des points à l'infini et les entiers caractérisant les cycles isotropes.

4. Il est bien clair que l'on peut trouver bien d'autres solutions α et θ de la question posée au paragraphe 2. Mais le fait remarquable est que toutes les solutions donnent des courbes imaginaires. Nous avons dit que l'indicatrice des torsions a pour équation $\beta - \alpha = \frac{K}{\theta(\alpha)}$ et $\int \theta\, d\alpha$, autrement dit $\int \frac{d\alpha}{\beta - \alpha}$ est une fonction algébrique; supposons

la courbe réelle, posons $\beta = \frac{-1}{\alpha_1}$, l'intégrale devient au signe près $\int \frac{\alpha_1\,d\alpha}{1+\alpha\alpha_1}$. Supposons que l'intégration se fasse le long d'un arc réel de $(\mathfrak{M})$; sur cet arc, en chaque point α et α_1 sont imaginaires conjuguées; l'intégrale $\int \frac{\alpha_1\,d\alpha}{1+\alpha\alpha_1}$ est une quantité imaginaire dont la conjuguée est l'intégrale $\int \frac{\alpha\,d\alpha_1}{1+\alpha\alpha_1}$ prise le long du même contour; il y a contradiction, puisque la somme de ces deux expressions est $L(1+\alpha\alpha_1)$.

Pour arriver à une courbe réelle, nous pourrions donc chercher d'autres exemples issus du même principe, mais correspondant à une relation $\beta - \alpha = F(\alpha, K)$ où F est une fonction algébrique de α dépendant d'un paramètre K, avec la condition que $\frac{F(\alpha, K)}{K}$ ne se réduise pas à une fonction de la seule variable α. On aurait alors à exprimer que les trois intégrales $\int \frac{d\alpha}{[F(\alpha,K)]^2}$, $\int \frac{\beta\,d\alpha}{[F(\alpha,K)]^2}$, $\int \frac{\beta^2\,d\alpha}{[F(\alpha,K)]^2}$ sont algébriques, quelle que soit la valeur de K. Si l'on choisit une valeur arbitraire K_0 pour K, et si l'on développe en série suivant les puissances de $K - K_0$ chacune des trois différentielles, les coefficients des diverses puissances de $K - K_0$ doivent être des différentielles algébriques. Or les exemples des courbes unicursales trouvées aux Chapitres précédents, chaque fois qu'il y entre au moins un paramètre arbitraire, donnent des solutions de la question ainsi posée, tout au moins en courbes unicursales. Si le genre de la fonction algébrique de α, $F(\alpha, K)$ s'abaisse pour certaines valeurs de K, on peut prendre l'une d'elles pour valeur initiale K_0. Mais il est bien clair qu'il n'y aurait pas, en général, grand'chose à tirer de ce procédé.

5. La principale difficulté à surmonter pour trouver un exemple précis de courbe à torsion constante algébrique est d'ordre matériel : le nombre d'inconnues à choisir et le nombre d'équations qui les relie sont en général trop élevés pour que nous puissions aborder la discussion. Nous savons qu'un dénombrement pur et simple est insuffisant. Mais j'ai expliqué, dans le Chapitre qui précède, comment l'étude attentive des exemples connus avant ce Mémoire, dus uniquement à

M. Fabry, conduit naturellement à un procédé régulier de réduction simultanée du nombre d'équations et d'inconnues. La théorie des vecteurs périodes polaires et cycliques montre d'une façon intuitive que les propriétés géométriques que possède éventuellement l'indicatrice $(\mathcal{B})$, telles que symétrie plane ou axiale, axe de rotation, réduisent considérablement le nombre des conditions distinctes obtenues en égalant à zéro chacun des vecteurs périodes. Un faible effort d'imagination va nous conduire à un type non unicursal et réel.

J'obtiens la courbe $(\mathcal{B})$ par l'intersection de la sphère et d'un cylindre unicursal; je choisis le plan xOy perpendiculaire aux génératrices de ce cylindre; $(\mathcal{B})$ sera donc du type elliptique ou hyperelliptique. Je puis encore supposer que zOx soit le plan de symétrie; j'ai à étudier trois intégrales $\int c\,dc'$, $\int c''d(c+ic'')$, $\int c''d(c-ic')$ dont la première porte sur une fonction rationnelle, tandis que les deux autres se ramènent l'une à l'autre. Je supposerai encore que le cône C n'a que deux génératrices isotropes et j'écris :

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
c+ic' &= \frac{Aq^{(2h-1)m}+A_1q^{(2h-2)m}+\ldots+A_{2h-1}}{q^r},\\
c-ic' &= \frac{A+A_1q^m+A_2q^{2m}+\ldots+A_{2h-1}q^{(2h-1)m}}{q^{(2h-1)m-r}},\\
c'' &= \frac{[q^{(2h-2)m}+a_1q^{(2h-3)m}+\ldots+a_1q^m+1]\sqrt{-AA_{2h-1}(q^{2m}+bq^m+1)}}{q^{(2h-1)\frac{m}{2}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

L'identité $c^2+c'^2+c''^2=1$ donne

$$
\begin{aligned}
(21)\quad &(Ax^{2h-1}+A_1x^{2h-2}+\ldots+A_{2h-1})(A+A_1x+\ldots+A_{2h-1}x^{2h-1})\\
&\equiv x^{2h-1}+AA_{2h-1}(x^2+bx+1)(x^{2h-2}+a_1x^{2h-3}+\ldots+1)^2.
\end{aligned}
$$

Dans ces formules, A, A_1, $\ldots$, A_{2h-1}, a_1, a_2, $\ldots$, a_{h-1}, b sont $3h$ quantités réelles; l'identité (30) fournit $2h-1$ relations entre elles. L'entier r est premier avec m; l'entier m sera ou égal à 1 ou supérieur à 1.

Nous allons écrire que le intégrales $\int c\,dc'$, $\int c''d(c+ic')$ et $\int c''d(c-ic')$ sont algébriques; il est bien clair que je peux remplacer la première par

$$\int (c - ic')\,d(c + ic') = \frac{c^2 + c'^2}{2} + i\int c\,dc' - c'\,dc.$$

Or cette forme $\int (c - ic')\,d(c + ic')$ est avantageuse et donne la condition

$$(22)\quad \begin{aligned}&[(2h-1)m - r]\mathrm{A}^2\\ &+ [(2h-2)m - r]\mathrm{A}_1^2 + \ldots + (m - r)\mathrm{A}_{2h-2}^2 - r\mathrm{A}_{2h-1}^2 = 0.\end{aligned}$$

De là résulte immédiatement que, pour la réalité (au sens vulgaire), r doit être compris entre zéro et $(2h - 1)m$.

Comme le changement de q en $\frac{1}{q}$ change $c + ic'$ en $c - ic'$, il suffit de considérer $\int c'' d(c + ic')$; or, si cette intégrale est algébrique, nous aurons

$$(23)\quad \begin{aligned}&\frac{(x^{2h-2} + a_1 x^{2h-3} + \ldots + a_1 x + 1)\sqrt{x^2 + bx + 1}}{q^{r+1} x^{h-\frac{1}{2}}}\\ &\quad\times \left\{[(2h-1)m - r]\mathrm{A}x^{2h-1} + [(2h-2)m - r]\mathrm{A}_1 x^{2h-2} + \ldots - r\mathrm{A}_{2h-1}\right\}\\ &\equiv \frac{d}{dq}\left\{\frac{(x^2 + bx + 1)^{\frac{3}{2}}}{x^{h-\frac{1}{2}} q^r}(\lambda_1 x^{4h-5} + \lambda_2 x^{4h-6} + \ldots + \lambda_{4h-4})\right\}\end{aligned}$$

en posant $q^m = x$ et désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{4h-4}$, $4h - 4$ indéterminées. L'identité (23) équivaut à

$$(24)\quad \begin{aligned}&(x^{2h-2} + a_1 x^{2h-3} + \ldots + a_1 x + 1)\\ &\quad\times\left\{[(2h-1)m - r]\mathrm{A}x^{2h-1} + [(2h-2)m - r]\mathrm{A}_1 x^{2h-2} + \ldots - r\mathrm{A}_{2h-1}\right\}\\ &\equiv 3m\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)[\lambda_1 x^{4h+5} + \ldots + \lambda_{4h-4}]\\ &\quad + (x^2 + bx + 1)\left\{\left[\left(3h - \frac{9}{2}\right)m - r\right]\lambda_1 x^{4h-5} + \ldots + \left[\left(\frac{1}{2} - h\right)m - r\right]\lambda_{4h-4}\right\}.\end{aligned}$$

L'identité (24) ne fait plus intervenir que des polynomes entiers; les $4h - 4$ coefficients λ doivent satisfaire à $4h - 2$ relations linéaires non homogènes, ils s'éliminent aisément et il reste deux relations entre les inconnues du problème $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_{2h-1}, b, a_1 \ldots a_{h-1}$. Au total, on a donc trouvé, sans faire d'hypothèses particulières sur m et r, $2h + 2$ relations entre $3h$ inconnues. Si donc $h \geqq 2$, on peut espérer trouver des solutions à $h-2$ paramètres. Nous pouvons remarquer que la valeur $m=1$ ne donne pas plus de conditions que les valeurs entières de m supérieures à 1. Sur les $2h+2$ équations de condition, les $2h$ premières qui ont été écrites ne renferment pas les entiers m et r et les deux dernières dépendent du rapport $\frac{r}{m}$. On peut considérer la quantité $\frac{r}{m}$ elle-même comme inconnue; dans le cas de $h=2$, par exemple, on aura donc, à cette condition, six équations pour sept inconnues; nous vérifierons que ces équations définissent une variété réelle à une dimension de l'espace à sept dimensions, et nous choisirons sur cette variété les points où $\frac{r}{m}$ a une valeur rationnelle. De même, pour $h=3$, nous aurons une variété à deux dimensions d'un espace à dix dimensions; nous verrons qu'il y a aussi dans ce cas des solutions réelles.

Ces points importants seront élucidés avec tous les détails nécessaires; donnons auparavant l'indication du degré et du genre de $(\mathcal{M})$, C ou $(\mathcal{A})$, le nombre, le degré, la classe des cycles isotropes.

Je me borne au cas où $0<r<(2h-1)m$, puisque dans ce seul cas on peut obtenir des courbes réelles. Je peux remarquer que les échanges

$$\begin{array}{cccccc} q, & r, & A, & A_1, & \ldots, & A_{2h-1}, \\ \frac{1}{q}, & (2h-1)m-r, & A_{2h-1}, & A_{2h-2}, & \ldots, & A \end{array}$$

ne changent manifestement pas la courbe; on pourra donc même se borner aux valeurs de r telles que $0<r\leqq\left(h-\frac{1}{2}\right)m$.

On peut remarquer que la courbe $(\mathcal{M}')$ symétrique de $(\mathcal{M})$ par rapport à l'origine s'obtient évidemment en changeant de signe $A, A_1, \ldots, A_{2h-1}$ et que ce même changement donne aussi la courbe symétrique de $(\mathcal{M})$ par rapport à Oz; ce changement de signe ne change pas le cône C; ce cône admet xOy et xOz pour plans de symétrie comme $(\mathcal{M})$, donc les droites Oz et Oy pour axes de symétrie; la droite Ox intersection de deux plans de symétrie est donc aussi axe de symétrie de C [et de $(\mathcal{M})$] et le plan yOz est plan de symétrie de C.

Si m est pair, auquel cas r est impair, le changement de q en $-q$ fait correspondre à tout point (c, c', c'') de $(\mathcal{M})$ un autre point

$(-c, -c', -c'')$, dans ce cas $(\mathcal{M})$ et $(\mathcal{M}')$ coïncident. Le cône C, si m est pair, admet la rotation $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz; si m est impair, le cône C admet la rotation $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz et cette rotation remplace $(\mathcal{M})$ par $(\mathcal{M}')$.

Degré de $(\mathcal{M})$. — La courbe (c, c') du plan xOy est unicursale, et puisque $0 < r < \left(h - \frac{1}{2}\right)m$, elle est du degré $(4h-2)m - 2r$; la courbe $(\mathcal{M})$ est donc du degré $(8h-4)m - 4r$; C a ce même degré si m est impair; si m est pair, le degré de C est simplement $(4h-2)m - 2r$.

Genre de $(\mathcal{M})$. — Si m est impair, le genre de $(\mathcal{M})$ est m, c'est aussi celui de C et $(\mathcal{A})$: les courbes $(\mathcal{M})$ ou $(\mathcal{A})$ correspondent birationnellement à la courbe $y^2 = q(q^{2m} + bq^m + 1)$. Si m est pair, il n'en va plus ainsi; le genre de $(\mathcal{M})$ est alors $m - 1$, car $(\mathcal{M})$ correspond alors birationnellement à la courbe $y^2 = q^{2m} + bq^m + 1$; nous voyons qu'ici la courbe $(\mathcal{M})$ est toujours de genre impair. Supposant toujours m pair, pour avoir le genre commun de C et $(\mathcal{A})$ j'écris

$$\lambda = \frac{c + ic'}{c''} = \frac{q^{(2h-1)\frac{m}{2} - r}}{\sqrt{-AA_{2h-1}(q^{2m} + bq^m + 1)}} \times \frac{A q^{(2h-1)m} + A_1 q^{(2h-2)m} + \ldots + A_{2h-1}}{q^{(2h-2)m} + a_1 q^{(2h-3)m} + \ldots + a_1 q^m + 1}.$$

Si m n'est pas multiple de 4, $(2h-1)\frac{m}{2}$ est impair et $(2h-1)\frac{m}{2} - r$ est un nombre pair, de sorte qu'en posant $q^2 = Q$, λ et μ ne renferment plus que le radical $\sqrt{Q^m + bQ^{\frac{m}{2}} + 1}$; le genre de C et $(\mathcal{A})$ est donc alors $\frac{m}{2} - 1$, genre nul si $m = 2$. Si m est multiple de 4, en posant $q^2 = Q$, λ et μ ne renfermeront que le radical $\sqrt{Q\left(Q^m + bQ^{\frac{m}{2}} + 1\right)}$, donc le genre de C et $(\mathcal{A})$ est alors $\frac{m}{2}$.

Voyons maintenant les cycles isotropes : pour m impair, on a deux cycles isotropes seulement, un pour $q = 0$, un pour $q = \infty$; chacun d'eux est de degré et classe $(2h-1)m - 2r$, l'indice est $(8h-4)m - 4r$; le degré de $(\mathcal{A})$ est $(12h-6)m - 4r$.

Si m est pair, multiple de 4, on n'a toujours que deux cycles, un pour $Q=0$, l'autre pour $Q=\infty$; le degré et la classe de ces cycles sont égaux à $(2h-1)\frac{m}{2}-r$, l'indice à $(4h-2)m-2r$; le degré de $(\mathcal{A})$ est $(6h-3)m-2r$. J'ai montré au Chapitre II (§ 13) l'intérêt de ce cas; bien que les cycles isotropes du cône C soient tous d'indice pair, la directrice sphérique du cône C est indécomposable.

Si m est pair, non multiple de 4, exception faite pour $m=2$, $r=2h-1$, le cône C a toujours deux génératrices isotropes seulement $Q=0$, $Q=\infty$ $(x\pm iy=0,\ z=0)$, mais chacune porte deux cycles, car le radical qui intervient est $\sqrt{Q^m+bq^{\frac{m}{2}}+1}$, radical qui n'admet plus $Q=0$ et $Q=\infty$ pour point de ramification ; chacun des quatre cycles a pour indice à $(2h-1)m-r$ et a pour degré ou classe $\frac{1}{2}\left[\left(2h-1\right)\frac{m}{2}-r\right]$, le degré de $(\mathcal{A})$ est $(6h-3)m-2r$. La relation $(2h-1)\frac{m}{2}-r=0$ n'est vérifiée, la fraction $\frac{r}{m}$ étant irréductible, que pour $m=2$, $r=2h-1$; c'est le cas d'exception : dans ce cas, on a toujours quatre cycles isotropes, portés cette fois par quatre droites distinctes. L'indice commun des quatre cycles est $2h-1$, la courbe $(\mathcal{A})$ est unicursale. Nous savons qu'alors, si $h=2$, il n'y a pas de solutions, l'indice 3 ne pouvant être réalisé en courbes algébriques. Je donne un Tableau récapitulatif :

	m impair.	m multiple de 4.	m pair non multiple de 4.	$m=2$, $r=2h-1$.
Degré de $(\mathcal{M})$	$(8h-4)m-4r$	$(8h-4)m-4r$	$(8h-4)m-4r$	$8h-4$
Genre de $(\mathcal{M})$	m	$m-1$	$m-1$	1
Degré de C	$(8h-4)m-4r$	$(4h-2)m-2r$	$(4h-2)m-2r$	$4h-2$
Genre de C et $(\mathcal{A})$	m	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{2}-1$	1
Degré de $(\mathcal{A})$	$(12h-6)m-4r$	$(6h-3)m-2r$	$(6h-3)m-2r$	$8(h-1)$
Nombre de cycles isotropes	2	2	4	4
Degré et classe de chaque cycle	$(2h-1)m-2r$	$(2h-1)\frac{m}{2}-r$	$\frac{1}{2}\left[(2h-1)\frac{m}{2}-r\right]$	1
Indice	$(8h-4)m-4r$	$(4h-2)m-2r$	$(2h-1)m-r$	$2h-1$

Au point de vue de la réalité, on peut remarquer que si tous les coefficients $A, A_1, \ldots, A_{2h-1}, a_1, \ldots, a_{h-1}, b$ sont réels, la projection de la courbe $(\mathcal{M})$ sur le plan xOy est une courbe réelle (φ) ; pour les valeurs de q dont le module est égal à l'unité, c et c' sont réels ainsi que c''^2; il faut encore que c''^2 puisse devenir positif. Or on a, en posant $q = e^{i\varphi}$,

$$c''^2 = -\mathrm{AA}_{2h-1}(b + 2\cos m\varphi)\,[2\cos(h-1)m\varphi + 2a_1\cos(h-2)m\varphi + \ldots]^2.$$

Dans le cas où $b^2 > 4$ et $\mathrm{AA}_{2h-1}b > 0$, c''^2 est toujours négatif pour les valeurs de φ réelles, alors la courbe $(\mathcal{B})$ est imaginaire, mais réelle au sens de M. Goursat. Dans le cas où $b^2 > 4$ et $\mathrm{AA}_{2h-1}b < 0$, la courbe unicursale (c, c') du plan xOy est tout entière à l'intérieur du contour apparent de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sur le plan xOy, la courbe $(\mathcal{B})$ est réelle (au sens vulgaire). Dans le cas où $b^2 < 4$, la courbe (c, c') serpente autour du cercle $x^2 + y^2 = 1$, la courbe $(\mathcal{B})$ au point de vue réel se compose de m contours fermés se déduisant de l'un quelconque d'entre eux par une rotation de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz répétée 1, 2, ... fois. La courbe algébrique $(\mathcal{A})$ se compose également de m contours fermés.

Au point de vue des surfaces applicables sur le paraboloïde, nous obtenons toujours dans ces trois cas des surfaces réelles à centre, ayant les trois plans de coordonnées pour plans de symétrie.

6. Je dois maintenant justifier tout ce qui précède par un exemple précis.

Nous avons vu que pour $h = 2$ nous avons le cas le plus simple : six équations à six inconnues. Ces équations dépendent de la fraction $\frac{r}{m}$; il est pratiquement presque impossible d'en faire la discussion quand $\frac{r}{m}$ est quelconque. Mais pour $r = 1$, $m = 1$, la résolution se simplifie et l'on trouve explicitement une solution, malheureusement imaginaire. Cela m'a obligé à une discussion assez longue pour mettre en évidence des valeurs de $\frac{r}{m}$ pour lesquelles on peut affirmer l'existence d'une solution réelle. J'écris les équations de $(\mathcal{B})$

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} c + ic' &= \frac{\mathrm{A}q^{3m} + \mathrm{B}q^{2m} + \mathrm{C}q^m + \mathrm{D}}{q_2}, \\ c - ic' &= \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}q^m + \mathrm{C}q^{2m} + \mathrm{D}q^{3m}}{q^{3m-r}}, \\ c'' &= \frac{(q^{2m} + bq^m + 1)\sqrt{-\mathrm{AD}}\,(q^{2m} + dq^m + 1)}{q^{\frac{3m}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Les relations fournies par $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$ sont

$$(26)\qquad \begin{cases} AC + BD - AD(d + 2b) = 0, \\ AB + BC + CD - AD(b^2 + 2bd + 3) = 0, \\ A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 1 - AD(b^2 d + 2d + 4b) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, nous avons rappelé que (15) est inaltérée par les échanges

$$\begin{array}{cccccc} A, & B, & C, & D, & r, & q, \\ D, & C, & B, & A, & 3m - r, & \dfrac{1}{q}, \end{array}$$

et cela conduit à poser $r = \dfrac{3m - p}{2}$ ou $p = 3m - 2r$, de sorte que p et m seront des entiers de même parité, premiers entre eux s'ils sont impairs; s'ils sont pairs, $\dfrac{m}{2}$ et $\dfrac{p}{2}$ seront premiers entre eux et de parité différente. Je poserai ensuite $f = \dfrac{p}{m} = 3 - 2\dfrac{r}{m}$ et la relation fournie par $\int (c - ic')d(c + ic')$ est

$$(27)\qquad (3 + f)A^2 + (1 + f)B^2 + (f - 1)C^2 + (f - 3)D^2 = 0.$$

En écrivant ensuite

$$\int c'' d(c + ic') = \sqrt{-AD}\,(q^{2m} + dq^m + 1)^{\frac{3}{2}}\left(\lambda q^{\frac{p}{2}} + \mu q^{\frac{p}{2} - m} + \nu q^{\frac{p}{2} - 2m} + \rho q^{\frac{p}{2} - 3m}\right),$$

j'obtiens l'identité

$$(28)\qquad \begin{aligned} &(x + bx + 1)[(3m + p)Ax^3 + (m + p)Bx^2 + (p - m)Cx + (p - 3m)D] \\ &\equiv 3m(2x^2 + dx)(\lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \rho) + (x^2 + dx + 1) \\ &\quad \times [p\lambda x^3 + (p - 2m)\mu x^2 + (p - 4m)\nu x + (p - 6m)\rho]. \end{aligned}$$

Les inconnues λ, μ, ν, ρ qui ne jouent qu'un rôle épisodique s'éliminent aisément : dans (28) on égale les termes en x^5 et x^4, d'où λ, μ, puis le terme en x et le terme indépendant, d'où ρ et ν. En égalant ensuite les termes en x^3 et x^2 et remplaçant λ, μ, ν, ρ par les valeurs déjà calculées, on obtient les deux équations prévues qui se déduisent l'une de l'autre par le changement de A en D et inversement, de B en C et inversement, de f en $-f$:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &[bd(1+f)(6+f)-(1+f)(3+f)d^2-6(4+f)]\\ &\quad\times(3+f)(4-f)(6-f)\mathrm{A}\\ &\quad+[b(2+f)(6-f)-(2+f)(3-f)d]\\ &\quad\times(3-f)(4+f)(6+f)\mathrm{D}\\ &\quad+[(1+f)d-b(4+f)](1+f)(6+f)(4-f)(6-f)\mathrm{B}\\ &\qquad\qquad+6(1-f)(4+f)(6+f)(6-f)\mathrm{C}=0,\\ &[b(2-f)(6+f)-(2-f)(3+f)d](3+f)(4-f)(6-f)\mathrm{A}+\ldots=0.\end{aligned}\right.$$

7. J'indique en passant la résolution qui est très simple pour $m=1$, $r=1$, d'où $p=1$, $f=1$. Les deux équations (29) sont alors

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}&(7bd-4d^2-15)4\mathrm{A}+7(2d-5b)(\mathrm{B}-\mathrm{D})=0,\\ &(7b-4d)\mathrm{A}+21(\mathrm{B}-\mathrm{D})=0.\end{aligned}\right.$$

La première se simplifie aisément au moyen de la seconde et devient

$$(31)\quad 12\mathrm{A}=7(2d+b)(\mathrm{D}-\mathrm{B}),$$

et comme on suppose essentiellement $\mathrm{A}\neq 0$, l'élimination du rapport $\frac{\mathrm{B}-\mathrm{D}}{\mathrm{A}}$ donne

$$(32)\quad (b+2d)(7b-4d)=36.$$

L'équation (27) est devenue

$$(33)\quad 2\mathrm{A}^2=\mathrm{D}^2-\mathrm{B}^2.$$

Je remplace cette équation (33) par celle que l'on obtient en divisant membre à membre (33) par (31), d'où l'on déduit

$$(34)\quad \frac{\mathrm{A}}{6}=\frac{\mathrm{D}+\mathrm{B}}{7(b+2d)}=\frac{\mathrm{D}-\mathrm{B}}{\left[\frac{2(7b-4d)}{7}\right]},$$

le dernier rapport s'obtenant par la seconde équation (30).

Entre les deux premières équations (26), j'élimine C, d'où

$$\mathrm{A}^2\mathrm{B}+(\mathrm{B}+\mathrm{D})[(2b+d)\mathrm{AD}-\mathrm{BD}]=\mathrm{A}^2\mathrm{D}(b^2+2bd+3);$$

dans cette équation je remplace A^2 par $\frac{\mathrm{D}^2-\mathrm{B}^2}{2}$, le facteur $\mathrm{B}+\mathrm{D}$ est alors en évidence, il n'est pas nul puisque A n'est pas nul, donc il reste

$$(35)\qquad B(D-B)+2D[(2b+d)A-B]=D(D-B)[b^2+2bd+3],$$

et dans cette équation (35) je peux remplacer A, B, D par les quantités proportionnelles $84, 35b+106d, 9(7b+10d)$ tirées des rapports (34), on a ainsi

$$(36)\qquad \begin{aligned}&(35b+106d)(14b-8d)+(63b+90d)[133b-22d]\\&\quad=(63b+90d)(14b-8d)[b^2+2bd+3].\end{aligned}$$

En vertu de (32), les termes du quatrième degré en b et d dans (36) se réduisent au second degré et l'on a l'équation homogène et du second degré en b, d:

$$(36')\qquad (35b+106d)(14b-8d)+(63b+90d)[19b+2d]=0.$$

La forme (36′) permet de voir aisément que $b+2d$ est en facteur; cette quantité ne peut être nulle, sinon en vertu de (31) A serait nul; donc, ce facteur ôté, il reste deux équations pour calculer b et d:

$$(37)\qquad \frac{d}{b}=\frac{7\times 241}{334},\qquad (b+2d)(7b-4d)=36;$$

d'où, en posant pour abréger $m=\frac{1687}{334}=\frac{7\times 241}{334}$:

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned}&b=\frac{6i}{\sqrt{(2m+1)(4m-7)}},\qquad d=\frac{6mi}{\sqrt{(2m+1)(4m-7)}},\\&B=\frac{(35+106m)i}{14\sqrt{(2m+1)(4m-7)}}A,\qquad C=\frac{9(22m-133)(10m+7)}{196(2m+1)(4m-7)}A,\\&D=\frac{9(7+10m)i}{14\sqrt{(2m+1)(4m-7)}}A.\end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs de B, C, D, b, d dans l'unique équation non encore employée $A^2+B^2+C^2+D^2-1-AD(b^2d+2d+4b)=0$, on a une équation qui donne A. D'ailleurs on peut déduire des trois équations (26) la combinaison évidente

$$(A-C)^2+(B-D)^2-1-ADb^2d=0,$$

qui est plus commode pour calculer A; en posant $\mu=\frac{241}{334}=\frac{m}{7}$, on a aisément

$$(39)\quad \left[\frac{(412\mu^2-1232\mu-143)^2}{16(8m^2-10m-7)^2}-\frac{4(4\mu-1)^2}{8m^2-10m-7}-\frac{36\times 27(1+10\mu)m}{(8m^2-10m-7)^2}\right]A^2=1.$$

On vérifie aisément que le multiplicateur de A^2 est négatif, car cela revient à

$$(40)\quad (-412\mu^2+1232\mu+143)^2-64(4\mu-1)^2(8m^2-10m-7) \\ -36\times 27\times 16\times(1+10\mu)m<0.$$

L'inégalité (40) se vérifie aisément; en tout cas nous avions besoin de vérifier que le premier membre de (40) n'est pas nul, afin d'être sûr que l'équation (39) détermine A au lieu d'être impossible; or ce point isolé est facile à établir sans calculs, car en remplaçant m par 7μ le premier membre de (40) est un polynome du quatrième degré en μ à coefficients entiers, n'admettant certainement pas $\frac{241}{334}$ pour racine, car le terme en μ^4 n'est pas divisible par 334 et le terme constant n'est pas divisible par 241.

Nous avons pour A une valeur imaginaire pure; B et D sont réels, A, C, b, d imaginaires pures. Posons $A=iA_1$, $C=iC_1$, $b=ib_1$, $d=id_1$ et donnons à q une valeur imaginaire pure $q=iq_1$, on aura

$$c+ic'=\frac{A_1q_1^3-Bq_1^2-C_1q_1+D}{iq_1},\qquad c-ic'=\frac{i(A_1+Bq_1-C_1q_1^2-Dq_1^3)}{-q_1^2},$$

de sorte que c sera imaginaire pure et c' réel; cela prouve que le cylindre Γ projetant $(\mathcal{B})$ horizontalement a pour conjugué un cylindre Γ' symétrique de Γ par rapport au plan yOz; or nous avons signalé que $(\mathcal{B})$, admettant xOy et xOz pour plans de symétrie, admet Ox pour axe de symétrie, ce qui entraîne que C admette yOz pour plan de symétrie : donc les deux courbes $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{B}')$ suivant lesquelles C coupe la sphère sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan yOz, et le cylindre projetant $(\mathcal{B}')$ sur le plan xOy n'est autre que Γ'; il résulte de là que $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{B}')$ sont conjuguées l'une de l'autre, donc le cône C est réel au sens de M. Goursat.

Les surfaces réelles applicables sur le paraboloïde déduites de $(\mathcal{B})$ sont donc à centre; elles admettent les trois plans de coordonnées pour plans de symétrie, les trois axes de coordonnées pour axes de symétrie.

La surface minima M_0 est imaginaire.

8. Nous venons de trouver une courbe algébrique de genre 1, malheureusement imaginaire. Elle nous donne néanmoins des résultats intéressants : elle est imaginaire, mais réelle $(\mathcal{G})$. Cela entraîne que pour $\frac{r}{m}$ suffisamment voisin de 1 le résultat subsiste, avec toutefois quelques modifications, si m reste impair, suivant que r est pair ou impair; il suffit dans les équations (26), (27), (29) de remplacer A, C, b, d par $i\mathrm{A}_1$, $i\mathrm{C}_1$, ib_1, id_1 pour avoir un nouveau système de six équations à six inconnues A_1, C_1, b_1, d_1, B, D à coefficients réels dépendant de la fraction $\frac{r}{m}$ et ayant une solution réelle d'ordre de multiplicité égal à l'unité pour $\frac{r}{m}=1$; donc, pour $\frac{r}{m}$ voisin de l'unité, on aura encore des solutions A_1, C_1, b_1, d_1, B, D réelles; remplaçons q par jq_1 où j est une racine de $j^m=i$, multiplions $c+ic'$ par j^r et $c-ic'$ par j^{-r}, ce qui revient à faire une rotation réelle autour de $\mathrm{O}z$ $\left(\text{rotation de l'angle } \frac{r\pi}{2m} \text{ si } j=\cos\frac{\pi}{2m}+i\sin\frac{\pi}{2m}\right)$ et l'on a alors :

$$c+ic'=\frac{\mathrm{A}_1 q_1^{3m}-\mathrm{B}q_1^{2m}-\mathrm{C}_1 q^m+\mathrm{D}}{q_1^r}, \quad c-ic'=\frac{\mathrm{A}_1+\mathrm{B}q_1^m-\mathrm{C}_1 q_1^{2m}-\mathrm{D}q_1^{3m}}{-q_1^{3m-r}}.$$

On voit alors que si q_1 a une valeur réelle, c est réel et c' imaginaire pure; il en résulte que dans sa nouvelle position la courbe $(\mathcal{M})$ a pour conjuguée la symétrique de $(\mathcal{M})$ par rapport au plan $x\mathrm{O}z$; en revenant à la position primitive, la courbe $(\mathcal{M})$ et sa symétrique $(\mathcal{M}_1)$ par rapport au plan $\frac{y}{x}=\operatorname{tang}\left(\frac{r\pi}{2m}\right)$ sont conjuguées; or comme $(\mathcal{M})$ est à elle-même sa symétrique par rapport au plan $x\mathrm{O}z$, on peut dire que $(\mathcal{M}_1)$ dérive de $(\mathcal{M})$ par une rotation de l'angle $\frac{r\pi}{m}$ autour de $\mathrm{O}z$. Or supposons m impair de sorte que $(\mathcal{M})$ et $(\mathcal{M}')$ soient distinctes : nous savons qu'une rotation de l'angle $\frac{\pi}{m}$ autour de $\mathrm{O}z$ applique C sur lui-même, mais $(\mathcal{M})$ sur $(\mathcal{M}')$: si r est impair, cette rotation de $\frac{\pi}{m}$ répétée r fois coup sur coup applique $(\mathcal{M})$ sur $(\mathcal{M}')$: $(\mathcal{M}')$ et $(\mathcal{M}_1)$ coïncident, le cône C est réel $(\mathcal{G})$, et la surface minima M_0 est imaginaire. Si m est impair et r pair, cette fois $(\mathcal{M}_1)$ coïncide avec $(\mathcal{M})$, le cône C est encore réel $(\mathcal{G})$, la surface minima M_0 est réelle au sens vulgaire. Les surfaces applicables sur le paraboloïde déduites ainsi de ces courbes $(\mathcal{M})$ particulières, pour m impair, sont à centre, quelle que soit la parité de r.

Pour m pair, les résultats changent : $(\mathcal{M})$ et $(\mathcal{M}')$ sont confondues, la rotation $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz est la plus petite que C admette ; cette fois le plan $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{2m}$ et tous ceux que l'on en déduit par une rotation de $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz sont m plans de symétrie pour chacune des deux surfaces applicables sur le paraboloïde déduites de $(\mathcal{M})$; ces deux surfaces n'ont plus de centre.

On verrait de même que si pour certaines valeurs de $\frac{r}{m}$ on a une solution où B, D, b, d sont imaginaires pures et A et C réelles, le cône C est réel $(\mathcal{G})$ si m est impair ; cette fois si r est pair, $(\mathcal{M})$ est imaginaire, mais a $(\mathcal{M}')$ pour conjuguée, et si r est impair, $(\mathcal{M})$ est à elle-même sa conjuguée. Si m est pair, C est imaginaire sans être réel $(\mathcal{G})$.

9. En dehors de ces résultats intéressants par leur application aux surfaces applicables sur le paraboloïde ou aux surfaces minima, la discussion faite pour $m = 1$, $r = 1$ nous prouve que les six équations en A, B, C, D, b, d sont compatibles, sauf pour des valeurs exceptionnelles de $\frac{r}{m}$; A, B, C, D, b, d sont des fonctions algébriques de $\frac{r}{m}$ ou de f ; ces fonctions ne peuvent avoir d'autre singularité que des pôles ou des points critiques algébriques. Or nous connaissons une valeur de f, à savoir $f = 0$ (d'où $m = 2$, $r = 3$) qui est sûrement un pôle (et peut-être en même temps un point critique) des quantités A, B, C, D, b, d, car pour ces valeurs de m et r on tombe sur le cas d'impossibilité, en courbes algébriques, de cycles isotropes d'indice 3. En regardant A, B, C, D, b, d, f comme les coordonnées d'un point d'un espace à sept dimensions, les six équations définissent une courbe

algébrique de cet espace; il est certain à l'avance que cette courbe a toutes ses branches réelles, s'il y en a, comprises entre les plans $f=3$ et $f=-3$, en raison de la forme de l'équation (27). Il s'agit maintenant de trouver par un moyen quelconque un arc réel de cette courbe, sur lequel nous nous bornerons aux valeurs commensurables de f. Il est naturel d'étudier les points correspondant à $f=0$; on aperçoit assez aisément que si l'on fait le changement de variables $d=2+d'$, $b=2+b'$, $\frac{B}{A}=3+B'$, $\frac{C}{A}=3+C'$, $\frac{D}{A}=1+D'$, $\frac{1}{A}=\alpha$, le système transformé aux inconnues α, B', C', D', b' et d' admet pour $f=0$ la solution $\alpha=B'=C'=D'=b'=d'=0$, mais en étudiant par les procédés réguliers le point ainsi obtenu, on reconnaît que c'est un point isolé d'ordre 12.

Si l'on essaie d'éliminer un certain nombre d'inconnues, on se heurte à des difficultés de calcul inextricables; le procédé le plus simple consisterait à résoudre en B et C par exemple les deux équations (29) de façon à avoir $B=\lambda A+\mu D$, $C=\mu_1 A+\lambda_1 D$, λ, μ, λ_1, μ_1 étant des fractions rationnelles en b, d, f; en portant ces valeurs de B et C dans les deux premières équations (26) et l'équation (27), on a trois équations linéaires et homogènes en A^2, AD, D^2 qui par élimination du rapport $\frac{D}{A}$ donnent deux équations simultanées $F(b,d,f)=0$, $\Phi(b,d,f)=0$ que l'on pourrait regarder comme résolvant la question ou peu s'en faut; ce calcul d'élimination de $\frac{D}{A}$ donne en même temps $\frac{D}{A}=G(b,d,f)$, G étant une fraction rationnelle en b, d, f; donc $\frac{B}{A}=\lambda+\mu G$, $\frac{C}{A}=\mu_1+\lambda_1 G$ et, en utilisant la dernière des trois équations (26), on aurait

$$A^2=\frac{1}{1+(\lambda+\mu G)^2+(\lambda_1 G+\mu_1)^2+G^2-G(b^2d+2d+4b)}.$$

De la sorte, les deux équations $F=0$, $\Phi=0$ représentent dans l'espace b, d, f une courbe et il ne faudrait garder de cette courbe que les arcs réels où A^2 est positif; on peut voir que les calculs indiqués sont praticables, mais que la discussion complète qui consiste à savoir si cette courbe (b, d, f) est réelle ou non est inabordable, et *a fortiori* inabordable de séparer sur cette courbe les arcs donnant des courbes ($\mathcal{A}$) réelles. Les arcs négligés correspondraient alors à des solutions où b, d sont réelles, A, B, C, D imaginaires pures pour certaines valeurs convenables de $\frac{r}{m}$, et cela donnerait lieu à une discussion analogue à celle déjà faite : cette fois ($\mathcal{M}$) et ($\mathcal{M}'$) seraient conjuguées, quelle que soit la parité de m ou de r, de sorte que le cône C serait imaginaire, mais réel ($\mathcal{G}$), et les surfaces applicables sur le paraboloïde seraient réelles, à centre. Mais si m est impair, ($\mathcal{M}$) et ($\mathcal{M}'$) se trouvent être distinctes et conjuguées, donc la surface minima M_0 se trouverait imaginaire; si m est pair, ($\mathcal{M}$) et ($\mathcal{M}'$) étant confondues et conjuguées, la surface minima M_0 se trouve être cette fois réelle et en même temps surface à centre.

Les explications qui précèdent sont nécessaires pour comprendre pourquoi j'ai adopté la marche qui suit, malgré la longueur apparente des calculs.

10. Il y a une valeur remarquable de d, c'est la valeur $d = 2$. Si, en effet, je me borne aux équations (25) définissant une courbe sphérique, moyennant les trois équations de condition (26), pour $d = 2$, cette courbe sphérique se décompose en deux courbes sphériques unicursales et par suite nous savons que les coefficients A, B, C, D, b restants doivent s'exprimer rationnellement au moyen de deux arbitraires. Pour trouver ces expressions de A, B, C, D, b, qui sont indépendantes de m et r, supposons par exemple $m = 2$, $r = 1$, auquel cas nous avons une courbe sphérique

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &c + ic' = \frac{Aq^6 + Bq^4 + Cq^2 + D}{q}, \qquad c - ic' = \frac{A + Bq^2 + Cq^4 + Dq^6}{q^5},\\ &\qquad\qquad c'' = \frac{\sqrt{-AD}\,(q^2+1)(q^4 + bq^2 + 1)}{q^3}\end{aligned}\right.$$

admettant l'origine pour centre, les points symétriques s'obtenant pour les valeurs q et $-q$, et le plan xOz comme plan de symétrie q en $\frac{1}{q}$, et ne possédant que deux points à l'infini dans le plan horizontal. Nous savons qu'alors, si l'on pose $\alpha = \frac{c + ic'}{1 - c''}$ et $\beta = \frac{c - ic'}{1 - c''}$, on pourra écrire

$$(42) \qquad \alpha = q^2 \frac{q^3 + A_1 q^2 + B_1 q + C_1}{1 - A_1 q + B_1 q^2 - C_1 q^3}, \qquad \beta = \frac{1}{q^2} \frac{1 + A_1 q + B_1 q^2 + C_1 q^3}{q^3 - A_1 q^2 + B_1 q - C_1},$$

avec la seule relation $B_1 + A_1 C_1 = 0$. En calculant $c + ic'$, $c - ic'$, c'' et comparant avec (41), on a

$$(42) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} A = \dfrac{1}{(1 + A_1^2)(1 + C_1^2)}, & B = \dfrac{-A_1(2C_1 + A_1)}{(1 + A_1^2)(1 + C_1^2)}, \\ C = \dfrac{A_1 C_1 (A_1 C_1 - 2)}{(1 + A_1^2)(1 + C_1^2)}, & D = \dfrac{-C_1^2}{(1 + A_1^2)(1 + C_1^2)} \\ \multicolumn{2}{c}{\left(b = -A_1 C_1 + \dfrac{A_1}{C_1} - A_1^2 - 1\right).} \end{array} \right.$$

Je dois rappeler que j'avais six équations, à sept inconnues, à résoudre; ce sont les équations (26), (27) et (29); les inconnues sont A, B, C, D, b, d, f. Les trois équations (26), quand on y fait $d = 2$, admettent la combinaison $(A - B + C - D)^2 - 1 = 0$ qui peut remplacer l'une de ces trois équations, la dernière par exemple. Suivant que l'on prend $A - B + C - D = 1$ ou $A - B + C - D = -1$, le système des six équations, où l'on a fait $d = 2$, se décompose en deux systèmes de six équations à six inconnues; si une solution A, B, C, D, b, f de l'un de ces deux systèmes correspond à des valeurs finies de A, B, C, D, cette solution n'appartient pas à l'autre système; donc, pour avoir l'ordre de multiplicité de la solution trouvée, il est bien légitime de garder les deux premières équations (26), de prendre l'équation $A - B + C - D = 1$, et d'y ajouter les trois équations (27) et (29), puis d'apprécier l'ordre de multiplicité sur ce nouveau système de six équations. Les formules (42) permettent alors de ne conserver que les équations (27) et (29) en remplaçant A, C, B, D, b par leurs valeurs en A_1 et C_1; à un système de A_1, C_1 correspond un seul système pour A, B, C, D, b; mais à un système A, B, C, D, b donné correspondent deux systèmes (A_1, C_1) et $(-A_1, -C_1)$: en effet, on a $C_1^2 = -\frac{D}{A}$, $1 + A_1^2 = \frac{1}{A - D}$ équations qui donnent A_1^2 et C_1^2, la formule qui donne B par exemple montre ensuite comment associer les valeurs de C_1 à celles de A_1. Donc les deux systèmes (A_1, C_1, f) et $(-A_1, -C_1, f)$ sont équivalents : j'ai dit que je ne gardais que trois équations, à savoir (27) et (29) en A_1, C_1, f; l'ordre de multiplicité d'une solution (A_1, C_1, f) sera, d'après ce qui précède, celui que nous devons conserver si A_1 et C_1 ne sont pas nulles toutes deux et si A, B, C, D sont finies. Quant à la réalité de A, B, C, D, b, f, il sera nécessaire et suffisant que f soit réel et que A_1 et C_1 soient ou réelles ou imaginaires pures toutes deux. D'autre part, nous devons encore nous rappeler que le changement de f en $-f$, de A en D et de B en C laisse la courbe ($\mathcal{B}$) inaltérée et que le changement simultané de signe pour A, B, C, D remplace ($\mathcal{B}$) par ($\mathcal{B}'$); donc le changement de C_1 en $\frac{-1}{C_1}$, qui remplace A par $-$ D, D par $-$ A, B par $-$ C et C par $-$ B et laisse b inaltéré, ne donne pas de courbe nouvelle. Cela conduit à poser $C_1 - \frac{1}{C_1} = u$, $C_1 + \frac{1}{C_1} = v$, de sorte que $b = -A_1 u - A_1^2 - 1$ et l'équation (27) devient

$$f = v \frac{3u - 4A_1^3 + A_1^4 u}{(u^2+2)(1+A_1^4) + 8A_1^2 - 4A^3 u}. \tag{43}$$

La première équation (29), où je remplace d par 2 et A, B, C, D, b par les valeurs (42), donne

$$\begin{aligned}(44)\quad & (3+f)(4-f)(6-f) \\ & \times[-2b(1+f)(6+f)+4(1+f)(3+f)+6(4+f)]\frac{1}{C_1} \\ & +[b(2+f)(6-f)-2(2+f)(3-f)] \\ & \times(3-f)(4+f)(6+f)C_1+[2(1+f)-b(4+f)] \\ & \times(1+f)(6+f)(4-f)(6-f)A_1\left(2+\frac{A_1}{C_1}\right) \\ & \qquad -6(1-f)(4+f)(6+f)(6-f)A_1(A_1C_1-2)=0,\end{aligned}$$

équation que j'écrirai en abrégé

$$\begin{aligned}(45)\quad & \frac{1}{C_1}[\alpha f^5+\beta f^4+\gamma f^3+\delta f^2+\varepsilon f+\zeta] \\ & +\alpha' f^5+\beta' f^4+\gamma' f^3+\delta' f^2+\varepsilon' f+\zeta' \\ & +C_1[\alpha'' f^5+\beta'' f^4+\gamma'' f^3+\delta'' f^2+\varepsilon'' f+\zeta'']=0,\end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \ldots, \alpha'', \ldots, \xi''$ ne renfermant que A_1 et b, c'est-à-dire finalement que A_1 et u. La seconde équation (29) se déduit de celle que nous venons d'écrire en remplaçant C_1 par $\frac{-1}{C_1}$ et f par $-f$, c'est donc :

$$(46)\qquad \begin{aligned} &C_1[\alpha f^5 - \beta f^4 + \gamma f^3 + \delta f^2 + \varepsilon f - \zeta] \\ &+ \alpha' f^5 - \beta' f^4 + \gamma' f^3 - \delta' f^2 + \varepsilon' f + \zeta' \\ &+ \frac{1}{C_1}[\alpha'' f^5 - \beta'' f^4 + \gamma'' f^3 - \delta'' f^2 + \varepsilon'' f - \zeta''] = 0. \end{aligned}$$

En ajoutant et retranchant membre à membre, on forme deux combinaisons plus avantageuses :

$$(47)\qquad \left\{ \begin{aligned} &v[(\alpha + \alpha'')f^5 + (\gamma + \gamma'')f^3 + (\varepsilon + \varepsilon'')f] \\ &- u[(\beta - \beta'')f^4 + (\delta - \delta'')f^2 + \zeta - \zeta''] + 2(\beta' f^4 + \delta' f^2 + \zeta') = 0, \\ &- u[(\alpha - \alpha'')f^5 + (\gamma - \gamma'')f^3 + (\varepsilon - \varepsilon'')f] \\ &+ v[(\beta + \beta'')f^4 + (\delta + \delta'')f^2 + \zeta + \zeta''] + 2(\alpha' f^5 + \gamma' f^3 + \varepsilon' f] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si je remplace $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \ldots, \alpha''$ par leurs expressions développées j'ai aisément :

$$(48)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha + \alpha'' = (1 + A_1^2)(3 + A_1^2 + A_1 u), \\ &\beta - \beta'' = (3 + A_1^2)(3 + A_1^2 + A_1 u), \\ &\gamma + \gamma'' = -52(\alpha + \alpha''), \\ &\delta - \delta'' = -52(\beta - \beta''), \\ &\varepsilon + \varepsilon'' = 576(\alpha + \alpha''), \\ &\zeta - \zeta'' = 576(\beta - \beta''), \\ &\beta' = 2A_1(3 + A_1^2 + A_1 u), \qquad \delta' = -52\beta', \qquad \zeta' = 576\beta'. \end{aligned} \right.$$

La première équation (47) prend une forme très simple, en remarquant que $f^4 - 52f^2 + 576 \equiv (f^2 - 16)(f^2 - 36)$, à savoir

$$(49)\qquad [(A_1^2 + 1)fv - u(A_1^2 + 3) + 4A_1][3 + A_1^2 + A_1 u][f^2 - 36][f^2 - 16] = 0.$$

La seconde équation (47) prend une forme moins simple, on a

$$(50)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha - \alpha'' = (A_1^2 + 3)(3 + A_1^2 + A_1 u), \\ &\beta + \beta'' = (1 + A_1^2)(3 + A_1^2 + A_1 u) - (24 + 16A_1^2 + 4A_1 u), \\ &\gamma - \gamma'' = -52(\alpha - \alpha'') + 12[12 + 4A_1^2 + A_1 u], \\ &\delta + \delta' = -52(1 + A_1^2)(3 + A_1^2 + A_1 u) - (16 + 40A_1^2 + 10A_1 u), \\ &\varepsilon - \varepsilon'' = 576(\alpha - \alpha'') - 144[16 + 12A_1^2 + 3A_1 u], \\ &\zeta + \zeta'' = 576(1 + A_1^2)(3 + A_1^2 + A_1 u) - 576(4A_1^2 + A_1 u), \\ &\qquad \alpha' = 2A_1(3 + A_1 u + A_1^2), \qquad \gamma' = -52\alpha' + 72A_1, \\ &\qquad\qquad \varepsilon' = 576\alpha' - 72 \times 36A_1; \end{aligned} \right.$$

donc cette équation prend la forme

$$(51)\quad \begin{aligned}&[-(A_1^2+3)uf+v(1+A_1^2)+4A_1 f]\\ &\quad\times[3+A_1^2+A_1 u][f^2-36][f^2-16]\\ &\quad-4(A_1 u+4A_1^2)v(f^2-4)(f^2-36)\\ &\quad+12[12A_1-u(4A_1^2+A_1 u)](f^2-36)-24(vf+6u)(f^2-16)=0.\end{aligned}$$

Nous devons donc prendre les trois équations (43), (49), (51) en f, A_1, C_1 et tâcher d'en avoir une solution numérique, dont on doit aussi évaluer l'ordre. Comme l'équation (49) se décompose en quatre facteurs, il suffira de prendre l'un de ces facteurs $3+A_1^2+A_1 u=0$; pourvu que la solution des équations (43), (51) et $3+A_1^2+A_1 u=0$ n'annule aucun des trois autres facteurs de (49), l'ordre de multiplicité pourra être évalué sur ce système simplifié (43), (51) et $3+A_1^2+A_1 u=0$. Remarquons que $3+A_1^2+A_1 u=0$ donne $b=2$; en tenant compte de cette équation, je remplace u par $-\dfrac{3+A_1^2}{A_1}$; l'équation (43) devient

$$(52)\qquad f=-vA_1\frac{9+3A_1^2+7A_1^4+A_1^6}{9+8A_1^2+30A_1^4+12A_1^6+A_1^8}.$$

Comme $v^2=u^2+4=\dfrac{(A_1^2+9)(A_1^2+1)}{A_1^2}$, si je pose $A_1^2=x$, j'aurai

$$(53)\qquad f^2=\frac{(1+x)(9+x)(9+3x+7x^2+x^3)^2}{(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)^2}.$$

En tenant compte de $u=-\dfrac{3+A_1^2}{A_1}$, l'équation (51) se simplifie beaucoup; en remplaçant f et f^2 par les valeurs (52), (53), v se met en facteur; je remarque que $v=0$ entraîne $C=\varepsilon i$, $u=2\varepsilon i$, où $\varepsilon=\pm 1$, puis $A_1=-3\varepsilon i$ ou $A_1=\varepsilon i$, $f=0$; c'est le cas où $f=0$, $b=d=2$ et où A, B, C, D deviennent infinis; $\dfrac{B}{A}$ tendant vers 3, $\dfrac{C}{A}$ vers 3 et $\dfrac{D}{A}$ vers 1; pour un tel système, A, B, C, D étant infinis, une remarque antérieure prouve que l'ordre de multiplicité de cette solution pour les six équations primitives est nécessairement pair; j'ai d'ailleurs signalé sans démonstration que le point à l'infini correspondant sur la courbe (A, B, C, D, b, d, f) est d'ordre 12 et isolé. Si donc je supprime le facteur v, l'équation (51) devient une équation en x :

$$(54)\quad \begin{aligned}&(3x^2+18x-9)(9+3x+7x^2+x^3)(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)\\
&\quad\times[(x+1)(x+9)(9+3x+7x^2+x^3)^2\\
&\qquad -36(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)^2]\\
&\quad +2(9+3x+7x^2+x^3)[6(3+x)(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)\\
&\qquad\qquad +(x+1)(x+9)(9+3x+7x^2+x^3)]\\
&\quad\times[(x+1)(x+9)(9+3x+7x^2+x^3)^2\\
&\qquad -16(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)^2]\\
&\quad +(x-1)[(x+1)(x+9)(9+3x+7x^2+x^3)^2\\
&\qquad\qquad -4(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)^2]\\
&\quad\times[(x+1)(x+9)(9+3x+7x^2+x^3)^2\\
&\qquad\qquad -36(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)^2]=0.\end{aligned}$$

L'équation (54) admet encore le facteur $(x+1)(x+9)$, comme on le voit, en groupant les termes qui ne contiennent pas explicitement $(x+1)(x+9)$ en facteur, à savoir

$$\begin{aligned}12(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)^3[&12(x-1)(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)\\
&-16(3+x)(9+3x+7x^2+x^3)\\
&-3(3x^2+18x-9)(9+3x+7x^2+x^3)],\end{aligned}$$

la quantité entre crochets étant égale à

$$x+1)(x+9)[-33-39x-31x^2+3x^3];$$

et après quelques réductions simples telles que

$$3x^2+18x-9+12(3+x)\equiv 3(x+1)(x+9)$$

ou

$$\begin{aligned}&3(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)+(9+3x+7x^2+x^3)(x+1)\\
&\quad\equiv 4(9+9x+25x^2+11x^3+x^4),\end{aligned}$$

on arrive enfin à la forme

$$(55)\quad \begin{aligned}&(9+3x+7x^2+x^3)^3(x+1)(x+9)[9+9x+25x^2+11x^3+x^4]\\
&\quad+[(2-10x)(9+3x+7x^2+x^3)^2\\
&\qquad+3(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)(-33-39x-31x^2+3x^3)]\\
&\qquad\qquad\times[9+8x+30x^2+12x^3+x^4]^2=0.\end{aligned}$$

L'équation (55) est le résultat de l'élimination de A_1 et C_1 ; l'équation (55) ne contient plus $(x+1)$ $(x+9)$ en facteur; le terme constant s'annule, cela donne $A_1^2=0$, nous écartons cette solution d'ordre pair; le premier membre de (55) est en apparence de degré 15, mais le terme de degré 15 disparaît; désignons donc ce premier membre par $-xX(x)$, où X est un polynome de degré 13, qui, nous le verrons, a tous ses coefficients positifs. La forme (55) est très avantageuse pour le calcul des valeurs numériques de X; on trouve aisément $X(-1)=20^2\times 48$ et $9X(-9)=180^4\times 19$; $10X(-10)<0$; donc entre -9 et -10 il existe pour $X(x)$ une racine de X d'ordre de multiplicité égal à l'unité ou tout au moins à un nombre impair, soit x_0. La quantité $A_1=\sqrt{x_0}$ est imaginaire pure, non nulle; $u=-\frac{3+x_0}{A_1}$ est imaginaire pure, $v=\frac{\sqrt{(x+1)(x+9)}}{A_1}$ est imaginaire pure. Or $C_1=\frac{u+v}{2}$, donc C_1 est imaginaire pure; A, B, C, D, b sont réelles avec la condition $AD>0$. J'ai montré plus haut que l'ordre de multiplicité de x_0 sera l'ordre de multiplicité de la solution A_0, B_0, C_0, D_0, b_0, f_0 pourvu que les trois facteurs de (49) autres que $3+A_1^2+A_1u$ soient différents de zéro; or nous avons vu que tous les points réels de la courbe $(ABCDbdf)$ sont compris entre les plans $f=3$ et $f=-3$, donc le point réel que nous venons de trouver n'annule sûrement pas les facteurs f^2-36 ou f^2-16; voyons si

$$(A_1^2+1)fv-u(A_1^2+3)+4A_1$$

est nul ou non; désignons par F la fraction $\frac{9+3x+7x^2+x^3}{9+8x+30x^2+12x^3+x^4}$, nous savons que pour la solution étudiée $f=-A_1vF$, donc

$$(A_1^2+1)fv-u(A_1^2+3)+4A_1$$

prend la valeur

$$[-x(x+1)Fv^2+(3+x)^2+4x]\frac{1}{A_1}$$

ou

$$\frac{(x+1)(x+9)}{A_1}[1-(x+1)F].$$

Or l'égalité $1-(x+1)F=0$ se réduirait à $x(x^2+5x-1)=0$; la racine x_0 qui nous occupe pour x n'est pas nulle; d'autre part, -9 est plus petit que les deux racines de x^2+5x-1; donc $x_0^2+5x_0-1>0$ et le facteur en question n'est donc pas nul pour $x=x_0$.

La racine x_0 considérée est vraisemblablement simple; en tous les cas, elle est d'ordre impair : donc A, B, C, D, b, f pourront être de toutes façons développées en séries à coefficients réels ordonnées suivant les puissances croissantes de $d-2$ $\left[\text{ou } (d-2)^{\frac{1}{2n+1}}, \text{ où } n\right.$ est un certain entier$\left.\right]$; pour d suffisamment voisin de 2, les fonctions algébriques A, B, C, D, b, f de d restent réelles; pour $d=2$, on a $A_0D_0>0$; donc si d reste suffisamment voisin de 2, AD reste positif. Or nous savons que si $d<2$ (*voir* § 5), la courbe (c, c') du plan xOy serpente autour du cercle $x^2+y^2=1$ et la courbe $(\mathcal{B})$ est réelle $(\mathcal{R})$, composée de m arcs séparés; il en est de même de la courbe $(\mathcal{A})$. Mais si $d>2$, comme $AD>0$, la courbe $(\mathcal{B})$ est imaginaire, mais réelle $(\mathcal{G})$, la courbe (c, c') étant tout entière à l'extérieur du cercle $x^2+y^2=1$; dans ce cas, la courbe $(\mathcal{A})$ est imaginaire aussi, mais réelle $(\mathcal{G})$ avec un choix convenable des constantes d'intégration; les surfaces applicables sur le paraboloïde déduites de $(\mathcal{B})$ sont réelles à centre, la surface minima M_0 est elle aussi réelle (au sens vulgaire).

A titre d'indication, je donne les calculs nécessaires pour développer X :

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned}
&(9+3x+7x^2+x^3)^2 = 81+54x+135x^2+60x^3+55x^4+14x^5+x^6,\\
&(9+3x+7x^2+x^3)^2(x+1)(x+9)\\
&\quad = 729+1296x+1836x^2+1944x^3+1230x^4\\
&\qquad +(736x^5+204x^6+24x^7+x^8),\\
&(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)^2\\
&\quad = 81+144x+604x^2+696x^3+1110x^4\\
&\qquad +(736x^5+204x^6+24x^7+x^8),
\end{aligned}\right.$$

de sorte que l'on peut écrire

$$(57)\qquad \frac{f^2-1}{8} = \frac{81+144x+154x^2+156x^3+15x^4}{(9+8x+30x^2+12x^3+x^4)^2}.$$

L'équation (55) s'écrit, en profitant des calculs (56) :

$$\begin{aligned}
xX \equiv\; &(729+2547x+5013x^2+6591x^3+4711x^4+1485x^5+123x^6+x^7)\\
&\times(81+144x+604x^2+696x^3+1110x^4+736x^5+204x^6+24x^7+x^8)\\
&-(729+1296x+1836x^2+1944x^3+1230x^4+736x^5+204x^6+24x^7+x^8)\\
&\times(81+108x+315x^2+246x^3+226x^4+105x^5+10x^6+x^7).
\end{aligned}$$

L'équation $X = 0$ peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{729 + 2547x + \ldots + x^7}{81 + 108x + \ldots + x^7} = \frac{729 + 1296x + \ldots + 736x^5 + 204x^6 + 24x^7 + x^8}{81 + 144x + \ldots + 736x^5 + 204x^6 + 24x^7 + x^8};$$

d'une égalité $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\lambda'}{\mu'}$ on déduit $\dfrac{\lambda - \mu}{\mu} = \dfrac{\lambda' - \mu'}{\mu'}$; donc on écrira

$$\begin{aligned} &\frac{648 + 2439x + 4698x^2 + 6345x^3 + 4485x^4 + 1380x^5 + 105x^6}{81 + 108x + 315x^2 + 246x^3 + 226x^4 + 105x^5 + 18x^6 + x^7} \\ &\quad = \frac{648 + 1152x + 1232x^2 + 1248x^3 + 120x^4}{81 + 144x + 604x^2 + 696x^3 + 1110x^4 + 736x^5 + 204x^6 + 24x^7 + x^8} \end{aligned}$$

et l'on forme un rapport égal au précédent en retranchant terme à terme les deux rapports : on écrit donc finalement

$$\begin{aligned} &\frac{648 + 1152x + 1232x^2 + 1248x^3 + 120x^4}{81 + 144x + 604x^2 + 696x^3 + 1110x^4 + 736x^5 + 204x^6 + 24x^7 + x^8} \\ &\quad = \frac{1287 + 3466x + 5097x^2 + 4365x^3 + 1380x^4 + 105x^5}{-36 - 289x - 450x^2 - 884x^3 - 631x^4 - 186x^5 - 23x^6 - x^7}; \end{aligned}$$

on pourra donc écrire, comme le prouve la comparaison des termes en x^{13} :

$$\begin{aligned} (58) \quad X \equiv\ & (81 + 144x + 604x^2 + 696x^3 + 1110x^4 + 736x^5 + 204x^6 + 24x^7 + x^8 \\ & \times (1287 + 3466x + 5097x^2 + 4365x^3 + 1380x^4 + 105x^5 \\ & + (648 + 1152x + 1232x^2 + 1248x^3 + 120x^3) \\ & \times (36 + 289x + 450x^2 + 884x^3 + 631x^4 + 186x^5 + 23x^6 + x^7 \end{aligned}$$

et ceci prouve que X a tous ses coefficients positifs.

Les méthodes classiques permettent de calculer x_0, surtout en utilisant la forme (55); on trouve aisément que x_0 est compris entre $-9,18$ et $-9,17$, d'où résulte pour f, en utilisant la forme (57), $0,86996 > f_0 > 0,8564$. Il y aurait intérêt à se rendre compte exactement de l'intervalle où peut varier f sans que la solution réelle mise en évidence cesse d'exister, soit parce que les inconnues deviennent imaginaires, soit parce qu'elles deviennent infinies; comme pour $f = 0$, toute solution est nécessairement infinie et comme pour $f = 1$, le calcul fait précédemment montre qu'il n'y a que des solutions imaginaires ou rejetées à l'infini, l'arc de courbe réel (A, B, C, D, b, d, f) dont nous avons prouvé l'existence est certainement compris entre les plans $f=0$ et $f=1$; nous n'avons ni reconnu les limites exactes de cet arc, ni indiqué s'il y a ou non d'autres arcs réels. Les considérations du paragraphe 9 conduisaient à étudier une courbe (b, d, f) représentée par des équations $F(b, d, f)=0$, $\Phi(b, d, f)=0$: en éliminant f on aurait une courbe $\psi(b, d)=0$, admettant le point $b=2$, $d=2$ pour point multiple d'ordre 25 au moins, car le point $b=2$, $d=2$, $f=0$ est isolé d'ordre 12 et le calcul précédent a montré que, pour $b=2$, $d=2$, nous avons treize valeurs finies non nulles de f, au moins. La courbe ψ admet l'origine pour centre, elle est donc au moins d'ordre 50 et cela prouve bien que nous ne pouvions surmonter la difficulté que par une voie détournée.

Nous avons, en tout cas, démontré rigoureusement l'existence de courbes $(\mathcal{A})$ algébriques réelles à torsion constante de degré et genre arbitrairement grands; nous avons prouvé l'existence de surfaces non unicursales applicables sur le paraboloïde, ou de surfaces minima circonscrites à la sphère dont certaines présentent des propriétés intéressantes de symétrie ou de rotation.

11. L'exemple qui précède a été obtenu en prenant la courbe $(\mathcal{B})$ du paragraphe 5, formules (20), et y faisant $h=2$. Pour $h=3$, il est donc à peu près hors de doute qu'on doit trouver des solutions à un paramètre. Nous allons le vérifier et, cette fois, bien que les équations et les inconnues soient en nombre plus grand que dans l'exemple qui précède, la vérification se fera aisément, sans aucun calcul.

Nous écrivons donc pour la courbe $(\mathcal{B})$

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} c+ic' &= \frac{\mathrm{A}q^{5m}+\mathrm{B}q^{4m}+\mathrm{C}q^{3m}+\mathrm{D}q^{2m}+\mathrm{E}q^{m}+\mathrm{F}}{q^{r}},\\ c-ic' &= \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}q^{m}+\mathrm{C}q^{2m}+\mathrm{D}q^{3m}+\mathrm{E}q^{4m}+\mathrm{F}q^{5m}}{q^{5m-r}},\\ c'' &= \frac{(9^{4m}+aq^{3m}+bq^{2m}+aq^{m}+1)\sqrt{-\mathrm{AF}(q^{2m}+\mu q^{m}+1)}}{q^{\frac{5m}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Suivant la marche du paragraphe 5, nous avons neuf inconnues, A, B, C, D, E, F, a, b, μ entre lesquelles l'identité $c^2+c'^2+c''^2=1$

établit cinq relations; l'intégrale $\int (c+ic')d(c-ic')$ donne une relation qui, pour la réalité de la courbe $(\mathcal{A})$, exige que r reste compris dans l'intervalle $0, 5m$. Enfin l'intégrale $\int c'' d(c+ic')$ donne deux relations, que l'on peut former en écrivant

$$(60) \qquad \int c''\, d(c+ic') = \frac{\sqrt{-\mathrm{AF}}\,(q^{2m}+\mu q^m+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{P}_7(q^m)}{q^{\frac{5m}{2}+r}},$$

où P_7 représente un polynome entier de degré 7.

Les neuf inconnues sont, une fois $\frac{r}{m}$ donné, liées par huit relations. Je considère $\frac{r}{m}$ aussi comme inconnue, de façon à avoir dix variables liées par huit équations algébriques; je vais prouver qu'en particularisant deux de ces variables, à savoir $\frac{r}{m}$ que j'égalerai à $\frac{5}{2}$, et μ que j'égalerai à 2, les huit équations ont, par rapport aux huit variables restantes une solution réelle d'ordre de multiplicité égal à l'unité et cela suffit pour affirmer l'existence d'une infinité de courbes $(\mathcal{A})$ réelles algébriques pourvu que $\frac{r}{m}$ reste dans un certain champ réel admettant $\frac{5}{2}$ pour milieu, et que μ varie par valeurs réelles dans un certain intervalle au voisinage de 2. Pour $\frac{r}{m}$ fixé dans ce champ, μ jouera le rôle d'un paramètre arbitraire.

Je rappelle que, pour $\frac{r}{m}$ égal à $\frac{5}{2}$, c'est-à-dire $r=5$ et $m=2$, et quelconque, la courbe (59) sera de genre 1 et servira d'indicatrice des torsions à une courbe $(\mathcal{A})$ unicursale de degré 16; au Chapitre IV, j'ai prévenu que cette courbe est l'exemple le plus simple pour lequel le cône directeur des binormales a une directrice sphérique non unicursale; ce cône a quatre génératrices isotropes d'indice 5.

D'autre part, pour $\mu=2$, quel que soit $\frac{r}{m}$, la courbe (59) dégénère en courbe unicursale.

Ceci explique pourquoi il est avantageux de considérer la réunion de ces deux circonstances : $\frac{r}{m}=\frac{5}{2}$ et $\mu=2$. Si alors les huit équations aux huit inconnues A, B, C, D, E, F, a, b les déterminent, nous aurons une courbe sphérique

$$
(61)\qquad \left\{
\begin{aligned}
c + ic' &= \frac{Aq^{10} + Bq^8 + Cq^6 + Dq^4 + Eq^2 + F}{q^5},\\
c - ic' &= \frac{A + Bq^2 + Cq^4 + Dq^6 + Eq^8 + Fq^{10}}{q^5},\\
c'' &= \frac{(q^8 + aq^6 + bq^4 + aq^2 + 1)(q^2+1)\sqrt{-AF}}{q^5},
\end{aligned}
\right.
$$

jouissant des propriétés suivantes : elle est du dixième degré, admet le centre de la sphère pour centre (changement de q en $-q$), admet le plan zOx pour plan de symétrie $\left(q \text{ en } \frac{1}{q}\right)$; le cône C qui s'appuie sur elle est du cinquième degré et n'a que deux génératrices isotropes obtenues pour $q = 0$ et $q = \infty$; celle qui correspond à $q = 0$ a pour équations $\frac{x+iy}{F} = \frac{x-iy}{A} = \frac{z}{\sqrt{-AF}}$; enfin (61) est unicursale.

Or nous connaissons, d'après les paragraphes 7 et 10 du Chapitre III, toutes les courbes réelles qui satisfont à ces propriétés; elles dérivent par une rotation autour de Oy de celle qui a pour équation

$$
(62)\qquad \alpha = \frac{q^5 + \sqrt[4]{5}\,q^2}{\sqrt[4]{5}\,q^3 - 1}, \qquad \beta = \frac{1 + \sqrt[4]{5}\,q^3}{\sqrt[4]{5}\,q^2 - q^5}.
$$

Elles sont donc comprises dans le type à un paramètre

$$
(63)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\cos\omega(q^5 + \sqrt[4]{5}\,q^2) + \sin\omega(\sqrt[4]{5}\,q^3 - 1)}{-\sin\omega(q^5 + \sqrt[4]{5}\,q^2) + \cos\omega(\sqrt[4]{5}\,q^3 - 1)},\\
\beta &= \frac{\cos\omega(1 + \sqrt[4]{5}\,q^3) + \sin\omega(\sqrt[4]{5}\,q^2 - q^5)}{-\sin\omega(1 + \sqrt[4]{5}\,q^3) + \cos\omega(\sqrt[4]{5}\,q^2 - q^5)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $q = i$,

$$
\alpha = -i, \qquad \beta = i, \qquad c = 0, \qquad c' = -1, \qquad c'' = 0;
$$

Pour $q = -i$,

$$
\alpha = i, \qquad \beta = -i, \qquad c = 0, \qquad c' = +1, \qquad c'' = 0.
$$

Toutes ces courbes (63) passent par les extrémités du diamètre Oy, ce qui était facile à prévoir, car i et $-i$ étant égales et de signe contraire d'une part, et d'autre part ayant 1 pour produit, les deux points correspondants sont à la fois symétriques par rapport à l'origine et par rapport au plan xOz.

Il faut maintenant expliquer pourquoi le cône du cinquième degré dégénérescence du type (59) ne contient pas de paramètre, tandis que celui que l'on déterminerait directement en partant de (61) contient le paramètre ω, paramètre de déplacement et non de forme. Pour déterminer un tel cône, il est théoriquement indifférent d'adopter soit la marche du Chapitre III, soit une marche analogue à celle qui a servi dans ce Chapitre. Partons donc des équations (61); nous avons les huit inconnues A, B, C, D, E, F, a, b déjà employées pour (59); l'identité $c^2+c'^2+c''^2=1$ nous donne les cinq équations déjà écrites, sauf qu'on y remplace m par 2, r par 5, μ par 2. L'intégrale $\int (c+ic')d(c-ic')$ donne la même équation que précédemment. Mais l'intégrale $\int c''\,d(c+ic')$ ne donne qu'une équation, obtenue en écrivant que le produit $\frac{c''\,d(c+ic')}{dq}$ ne contient pas de terme en $\frac{1}{q}$. Le résultat de l'intégration sera alors, pour (61),

$$(64)\quad \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{AF}}}\int c''\,d(c+ic') = \frac{\mu q^{20}+\mu_1 q^{18}+\mu_2 q^{16}+\mu_3 q^{14}+\mu_4 q^{12}+\mu_5 q^{10}+\mu_6 q^8+\mu_7 q^6+\mu_8 q^4+\mu_9 q^2+\mu_{10}}{q^{10}},$$

le coefficient μ_5 restant arbitraire; on peut profiter de l'indétermination de μ_5 pour rendre le polynome $\mu q^{20}+\ldots+\mu_{10}$ divisible par q^2+1, et alors puisque $\frac{d}{dq}\left(\frac{\mu q^{20}+\ldots+\mu_{10}}{q^{10}}\right)=\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{AF}}}(q^2+1)(\ldots)$, le polynome $\mu q^{20}+\ldots+\mu_{10}$ est divisible par $(q^2+1)^2$. On pourrait donc, toujours théoriquement, obtenir la relation provenant de $\int c''\,d(c+ic')$ en écrivant

$$\int c''\,d(c+ic') = \frac{\sqrt{-\mathrm{AF}}\,(q^2+1)^2\,\mathrm{P}_8(q^2)}{q^{10}},$$

où P_8 est un polynome du huitième degré.

Au contraire, pour le cône dégénéré de (59), on doit écrire

$$\int c''\,d(c+ic') = \frac{\sqrt{-\mathrm{AF}}(q^2+1)^3\mathrm{P}_7(q^2)}{q^{10}},$$

où P_7 est un polynome du huitième degré.

C'est de là que provient la différence; en se bornant à la forme d'intégrale $\frac{-\sqrt{\mathrm{AF}}(q^2+1)^2\mathrm{P}_8(q^2)}{q^{10}}$, il reste un paramètre ω, que l'on peut déterminer en écrivant que $\mathrm{P}_8(q^2) = (q^2+1)\mathrm{P}_7(q^2)$. Il suffit de donner l'interprétation géométrique : quand μ_5 est déterminé de façon à ce que $\mu q^{20} + \ldots + \mu_{10}$ soit divisible par q^2+1, on trouve l'exposant de q^2+1 en forçant d'une unité l'exposant de q^2+1 dans le produit $c''\frac{d(c+ic')}{qd}$; nous devons donc nous arranger pour que $c''\frac{d(c+ic')}{dq}$ soit divisible par $(q^2+1)^2$; comme c'' contient déjà le facteur q^2+1 en évidence, il y aura deux moyens différents : $q^8+aq^6+bq^2+aq^2+1$ sera divisible par q^2+1 ou bien $\frac{d(c+ic')}{dq}$ sera divisible par q^2+1. Pour réaliser le premier cas, il suffit de faire tourner la courbe (62) de façon que la tangente à l'extrémité de Oy devienne parallèle à Ox; pour le second cas, cette tangente deviendra parallèle à Oz. On a ainsi l'interprétation géométrique très simple des deux conditions fournies par l'intégrale $\int c''\,d(c+ic')$ pour le cône dégénéré de (59) : elle exprime non pas seulement que la courbe ($\mathcal{A}$) est unicursale, mais encore que l'orientation de la courbe dégénérée (61) est celle que nous avons dite.

Dans ces conditions, quand on nous donne les huit équations du début, où μ a été remplacé par 2 et $\frac{r}{m}$ par $\frac{5}{2}$, puisque nous avons l'interprétation géométrique exacte, il est indifférent de garder ces inconnues A, B, C, D, E, F, a, b ou de prendre une autre méthode : on peut faire intervenir le trièdre OXyZ obtenu en prenant pour plan OXy le plan du couple isotrope du cône dégénéré et appeler 2ω l'angle de ce plan avec Oxy; alors les équations se partagent en deux groupes dont l'un donne toutes les inconnues autres que ω et dont l'autre donne tangω. Dans le système OXyZ, en reprenant les notations du Chapitre III, que le lecteur ne confondra pas avec celles de ce paragraphe, j'écrirai

$$(65)\quad \alpha = \frac{q^5 + Aq^4 + Bq^3 + Cq^2 + Dq}{-Dq^4 + Cq^3 - Bq^2 + Aq - 1}, \qquad \beta = \frac{1 + Aq + Bq^2 + Cq^2 + Dq^4}{-Dq + Cq^2 - Bq^3 + Aq^4 - q^5},$$

et j'obtiens le système de quatre équations à quatre inconnues

$$(66)\quad \begin{cases} D = 0, \\ B + AC = 0, \\ (2 - B)AC^2 - BC(3A^2 - B^2 - C^2 - 5) + A(B - 2)(B^2 + 2AC) \\ \qquad - (AB + C)(AC - 3B) - C(A^2 + 2B) = 0, \\ C^4 - 5 - (B^2 - 2AC)^2 \quad 3(A^2 - 2B)^2 = 0. \end{cases}$$

Ce système a diverses solutions : nous l'avons discuté et reconnu qu'il admet une seule solution réelle à savoir $A = 0$, $B = 0$, $C = \sqrt[4]{5}$, $D = 0$. L'ordre de cette solution est l'unité, comme on le voit aisément; cet ordre est bien celui de la solution numérique mise ainsi en évidence pour les huit équations primitives, que nous n'avons pas même écrites : cela tient, somme toute, à ce que l'on a fait un changement de variables; les variables du premier système s'obtiennent rationnellement au moyen de celles du second, puisque c, c', c'' s'expriment rationnellement en α, β; inversement, celles du second s'expriment rationnellement au moyen de celles du premier, puisque α, β s'expriment rationnellement en c, c', c''. Dans un tel changement de variables, l'ordre d'une solution numérique reste ce qu'il est. La vérification annoncée a donc complètement réussi.

Dans cette solution particulière, la courbe (61) étant réelle, AF est nécessairement négatif; donc si μ et $\frac{r}{m}$ restent voisins de 2 et $\frac{5}{2}$, AF sera encore négatif et alors, si μ est supérieur à 2, la courbe $(\mathcal{B})$ définie par (59) sera réelle et se projettera sur le plan xOy suivant une courbe (c, c') tout entière intérieure au cercle $x^2 + y^2 = 1$. Si μ, au contraire, est inférieur à 2, la courbe $(\mathcal{B})$ sera toujours réelle, mais la courbe (c, c') serpentera autour du cercle $x^2 + y^2 = 1$.

12. Ce qui précède suffit à convaincre que, pour toute valeur de h, on aura des courbes algébriques à torsion constante du type (20) à $h-2$ arbitraires, puisque pour $h=2$ et pour $h=3$ la proposition est vérifiée. Il est vraisemblable aussi que pour toutes les valeurs de h, il y en aura qui seront réelles.

On pourrait multiplier les exemples de cette nature; on pourrait conserver les deux premières équations (20) donnant c et c' et supposer que le radical carré entrant dans c'' porte par rapport à q^m non plus sur un polynome du second degré, mais sur un polynome de degré 4, 6, 8, ... Mais tout cela conduit à des calculs inextricables; le résultat essentiel consistait à prouver l'existence de courbes algébriques à torsion constante de genre ou de degré arbitrairement grand et nous l'avons atteint, en spécifiant même la réalité de certains types.

Les exemples donnés sont du type hyperelliptique; on pourrait se proposer de trouver d'autres exemples qui ne soient pas du type hyperelliptique. La recherche est sans doute assez pénible et devrait être guidée par les mêmes considérations que dans ce Chapitre; on se bornerait aux cônes admettant certaines symétries et un axe de rotation.

Les exemples de ce Chapitre nous ont donné des types curieux de surfaces applicables sur le paraboloïde ou de surfaces minima circonscrites à la sphère.

NOTE.

RECHERCHE DIRECTE DES COURBES UNICURSALES A TORSION CONSTANTE.

1. Soit une courbe unicursale de degré m représentée par les équations

$$x=\frac{f(t)}{\chi(t)},\qquad y=\frac{\varphi(t)}{\chi(t)},\qquad z=\frac{\psi(t)}{\chi(t)}, \tag{1}$$

f, φ, t, χ étant polynomes entiers en t de degré m; cela fait un total de $4(m+1)$ coefficients homogènes; en déduisant les six paramètres du déplacement le plus général, les trois paramètres de la substitution homographique la plus générale sur t, j'ai $4(m+1)-1-6-3$ ou $4m-6$ paramètres de *grandeur;* en tenant compte de l'homothétie la plus générale, il ne reste que $4m-7$ paramètres de *forme* pour la courbe la plus générale unicursale et de degré m. Ce résultat est bien connu pour $m=2$, le paramètre unique de forme est l'excentricité de la conique.

Supposons m au moins égal à 3, et écartons le cas des courbes planes. Cherchons le nombre des conditions à écrire pour exprimer que le rayon de torsion est constant. Appelons T ce rayon; x', x'', x''', y', ... les dérivées des trois premiers ordres de x, y, z par rapport à t; je poserai

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & a = y'z'' - z'y'', \qquad b = z'x'' - x'z'', \qquad c = x'y'' - y'x'', \\ & \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} f & \varphi & \psi & \chi \\ f' & \varphi' & \psi' & \chi' \\ f'' & \varphi'' & \psi'' & \chi'' \\ f''' & \varphi''' & \psi''' & \chi''' \end{vmatrix}, \\ & a_1 = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \end{vmatrix}, \qquad b_1 = \begin{vmatrix} \psi & f & \chi \\ \psi' & f' & \chi' \\ \psi'' & f'' & \chi'' \end{vmatrix}, \qquad c_1 = \begin{vmatrix} f & \varphi & \chi \\ f' & \varphi' & \chi' \\ f'' & \varphi'' & \chi'' \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

J'applique la formule classique

$$(3)\qquad \mathrm{T} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta}.$$

On trouvera aisément les relations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1 = \chi^3 a, \qquad b_1 = \chi^3 b, \qquad c_1 = \chi^3 c, \qquad \Delta_1 = -\chi^4 \Delta, \\ & \mathrm{T} = \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{\chi^2 \Delta_1}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend les dérivées d'homogénéité de f, φ, ψ, χ par rapport à la variable d'homogénéité que j'appelle θ, on trouve aisément

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & \Delta_1 \equiv \frac{1}{m(m-1)^2(m-2)^3} \left| f'''_{\theta^3} \quad f'''_{t\theta^2} \quad f'''_{t^2\theta} \quad f'''_{\theta^3} \right|, \\ & a_1 \equiv \frac{1}{m(m-1)^2} \begin{vmatrix} \varphi''_{\theta^2} & \varphi''_{\theta t} & \varphi''_{t^2} \\ \psi''_{\theta^2} & \psi''_{\theta t} & \psi''_{t^2} \\ \chi''_{\theta^2} & \chi''_{\theta t} & \chi''_{t^2} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Le numérateur de T dans la formule (4) est donc de degré $6(6m-2)$; au dénominateur le degré est $2m+4(m-3)=6(m-2)$. Nous pouvons donc déterminer toutes les courbes de degré m, unicursales et à rayon de torsion constant, s'il en existe, en laissant indéterminés les coefficients des polynomes f, φ, ψ, χ et écrivant que les deux termes de la fraction T ont leurs coefficients proportionnels. Cela fait $6(m-2)$ relations entre $4m-7$ paramètres de forme. Or la différence $6(m-2)-(4m-7)$ est égale à $2(m-3)+1$; comme l'entier m est au moins égal à 3, le nombre des équations surpasse toujours celui des inconnues.

Si donc on se bornait à cette énumération simultanée d'équations et d'inconnues, on pourrait être tenté de croire qu'il n'existe aucune courbe unicursale à torsion constante. Or j'ai, dans tout le cours de mon travail, bien insisté sur l'insuffisance d'un tel procédé : il faut s'assurer si les équations obtenues sont ou non distinctes.

Le fait qu'il existe des courbes à torsion constante unicursales entraîne cette conséquence que les équations obtenues ne sont pas distinctes. D'ailleurs, il suffit d'étudier de plus près la contexture des deux termes de T pour s'apercevoir que l'on doit réduire de beaucoup le nombre des équations trouvées. On doit faire intervenir l'ordre de multiplicité des racines du numérateur et du dénominateur.

2. Nous obtiendrons d'ailleurs par cette méthode, appuyée sur les résultats obtenus d'autre part, divers résultats géométriques intéressants. D'ailleurs je signale, sans développer ce point, que cette méthode directe pourrait servir à établir directement la presque totalité des résultats obtenus par la considération du cône directeur des binormales.

Les polynomes a_1, b_1, c_1 ne sont pas nécessairement premiers entre eux dans leur ensemble; soit d leur plus grand commun diviseur. J'écrirai donc $a_1=da_2$, $b_1=db_2$, $c_1=dc_2$, et

$$\text{(6)} \qquad T=\frac{d^2(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}{\chi^2\Delta_1};$$

a_2, b_2, c_2 sont les paramètres directeurs réduits de la binormale au point t; l'équation $a_2^2+b_2^2+c_2^2=0$ donne les génératrices isotropes du cône C des binormales. Nous avons vu que si la courbe $(\mathcal{A})$ est à torsion constante, toute racine de $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0$ est racine de χ et, réciproquement, toute racine de χ est racine de $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$, mais les ordres de multiplicité ne sont pas nécessairement les mêmes. Nous verrons d'ailleurs que toute racine de $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ est nécessairement racine de d sans exception et racine de Δ_1, sauf un seul cas exceptionnel (indice égal à 4, degré et classe du cycle isotrope égaux à 1).

Soit une racine de $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ d'ordre i : cet entier i est celui que nous avons appelé *indice;* nous avons vu que χ admet cette racine avec un ordre égal à $i - p$.

Portons maintenant notre attention sur un point à distance finie de $(\mathcal{A})$; au voisinage d'un tel point, si l'on prend ce point pour origine, la tangente pour axe des x et le plan xOy pour plan osculateur, on pourra développer en série les coordonnées du point x, y, z en fonction d'un paramètre t, nul pour ce point. On a alors

$$(7) \qquad x = \alpha t^p + \ldots, \qquad y = \beta t^{p+1} + \ldots, \qquad z = \gamma t^{p+q+s} + \ldots;$$

p est l'ordre de multiplicité du point, les plans pivotant autour de la tangente ont $p + q$ points communs avec la courbe, le plan osculateur a $p + q + s$ points communs avec la courbe.

On calcule aisément

$$(8) \quad \begin{cases} a = (p+q)(p+q+s)s\beta\gamma t^{2p+2q+s-3} + \ldots, \\ b = -p(p+q+s)(q+s)\gamma\alpha t^{2p+q+s-3} + \ldots, \\ c = p(p+q)q\alpha\beta t^{2p+q-3} + \ldots, \\ \Delta = p(p+q)(p+q+s)qs(q+s)\alpha\beta\gamma t^{3p+2q+s-6} + \ldots, \\ x''' = p(p-1)(p-2)\alpha t^{p-3} + \ldots, \\ y''' = (p+q)(p+q-1)(p+q-2)\beta t^{p+q-3} + \ldots, \\ z''' = (p+q+s)(p+q+s-1)(p+q+s-2)\gamma t^{p+q+s-3} + \ldots. \end{cases}$$

On voit que a, b, c contiennent tous les trois le facteur commun t à la puissance $2p + q - 3$ positive ou nulle; de même Δ contient t à la puissance $3p + 2q + s - 6$ positive ou nulle; comme le quotient de $a^2 + b^2 + c^2$ par Δ est une constante, il est nécessaire que

$$4p + 2q - 6 = 3p + 2q + s - 6$$

ou simplement $p = s$. La démonstration suppose simplement que la courbe ($\mathcal{A}$) est algébrique, ne spécifie pas que le genre soit nul. Nous avons un résultat géométrique intéressant : les entiers p, q, s ont des significations géométriques très simples; pour toute courbe algébrique à torsion constante, en tout point à distance finie de la courbe, nous portons notre attention sur le cycle porté par ce point ou sur un cycle, au cas où il y en aurait plusieurs; ce cycle est caractérisé par les trois nombres p, q, s, on a $p = s$. D'autre part, $2p + q - 3$ n'est nul que si $p = q = 1$; pour un tel point, on a aussi $s = 1$ et $3p + 2q + s - 6$ est nul aussi; cela prouve qu'il n'y a, sur une courbe algébrique à torsion constante, aucun plan osculateur stationnaire proprement dit, car pour un tel plan, sur les courbes qui en possèdent, on a $p = q = 1$, $s \geqq 2$. Si nous revenons aux courbes unicursales, toute racine de l'un des polynomes d^2 ou Δ_1, qui n'est pas racine de χ, est racine de l'autre polynome avec le même degré de multiplicité.

On peut se demander si la propriété $p = s$ subsiste ou non pour les points à l'infini; elle subsiste pour les points correspondant à un cycle isotrope du cône C du type : degré inférieur à la classe. Elle ne subsiste pas pour les cycles isotropes C du type : degré égal à la classe. Il suffit de se reporter au Chapitre II, où, cette fois, j'ai appelé p le degré du cycle isotrope de C et q la classe; le résultat est encore ici indépendant du genre de ($\mathcal{A}$). Les entiers représentant le nombre de points confondus avec le point considéré commun à la courbe $\mathcal{A}$ et à un plan passant par le point, ou pivotant autour de la tangente, ou confondu avec le plan osculateur, sont :

Si $q > p$,

$$p, \quad q, \quad p + q;$$

Si $q = p$,

$$p, \quad p + r, \quad 2p, \qquad \text{si} \quad r < p;$$

$$p, \quad 2p, \quad p + r, \qquad \text{si} \quad r > p.$$

L'excès du nombre de la troisième colonne sur celui de la seconde est égal au nombre de la première colonne pour $q > p$; pour $q = p$ et $r < p$, cet excès est $p - r$ inférieur à p; pour $q = p$ et $r > p$, l'excès est $r - p$, qui n'est égal à p que si $r = 2p$.

3. Étudions maintenant les points à l'infini de ($\mathcal{A}$); on trouve aisé-

ment

$$(9)\qquad \begin{cases} b+ia=\begin{vmatrix} z' & x'-iy' \\ z'' & x''-iy'' \end{vmatrix}, \quad b-ia=\begin{vmatrix} z' & x'+iy' \\ z'' & x''+iy'' \end{vmatrix}, \\ c=\dfrac{i}{2}\begin{vmatrix} x'+iy' & x'-iy' \\ x''+iy'' & x''-iy'' \end{vmatrix}, \end{cases}$$

et je reprends les notations adoptées au Chapitre II (§ 4 et suivants).

Si le point à l'infini est du type $i=2p$, $q=p+s$,

$$(10)\qquad \begin{cases} b+ia=-\dfrac{\tau^2 A^2 B^2}{2} p(p+s)\, t^{s-p-3}+\ldots, \\ b-ia=\dfrac{\tau^2 AB^2}{2} q(q-s)\, t^{s+q-3}+\ldots, \\ c=\dfrac{i\tau^2}{2} AB pq(p+q)\, t^{q-p-3}+\ldots. \end{cases}$$

Si nous multiplions par χ^3, comme χ contient t^p en facteur, on voit que b_1+ia_1, b_1-ia_1, c_1 contiennent respectivement en facteur t^{s+2p-3}, $t^{s+3p+q-3}$, t^{s+3p-3}, donc dans d j'aurai le facteur t^{s+2p-3}, qui a un exposant non nul, car $p=s$ est impossible en courbes algébriques et, d'autre part, $s+2p-3=0$ exigerait $p=s=1$. Nous savons que $a_2^2+b_2^2+c_2^2$ contient t^{2p} exactement en facteur, χ^2 aussi; donc Δ_1 doit contenir en facteur $t^{2(s+2p-3)}$: tous ces résultats se vérifient aisément. Nous avons ainsi vérifié que dans ce cas toute racine de $a_2^2+b_2^2+c_2^2$ est racine de d et Δ_1.

Soit maintenant le cas où le point à l'infini est du type $i=2p+r$, $q=p$. On a cette fois

$$(11)\qquad \begin{cases} b+ia=\dfrac{\tau^2 A p^3}{k^2} t^{-p-2r-3}+\ldots, \qquad b-ia=-\dfrac{\tau^2 B p^3}{k^2} t^{p-2r-3}+\ldots, \\ c=\dfrac{\tau^2 p^3 AB i}{k^2} t^{-2r-3}+\ldots. \end{cases}$$

En multipliant par χ^3, comme χ contient t^{p+r} en facteur, on voit que b_1+ia_1, b_1-ia_1, c_1 contiennent respectivement en facteur t^{2p+r-3}, t^{4p+r-3}, t^{3p+r-3}, donc d admet le facteur t^{2p+r-3}, d'exposant non nul, puisque $p=r$ est impossible en courbes algébriques et que $2p+r-3=0$ exige $p=r=1$. L'expression $a_2^2+b_2^2+c_2^2$ contient le facteur t^{2p+r}, de sorte que le numérateur de la formule (6) contient le facteur $t^{3(2p+r-2)}$; le dénominateur devant admettre ce même facteur, comme χ^2 admet le facteur t^{2p+2r}, on en conclut que Δ_1 admet le facteur t^{4p+r-6}, ce qui est facile à vérifier directement; l'exposant $4p+r-6$ est toujours positif ou nul : en effet, si $p=1$, r ne pouvant égaler p, on a nécessairement $r \geqq 2$ et $4p+r-6=r-2 \geqq 0$; si $p>1$, $4p-6$ est au moins égal à 2; donc $4p+r-6$ ne s'annule que si $p=1$, $r=2$ et dans tous les autres cas il est positif. On a bien vérifié encore que toute racine de $a_2^2+b_2^2+c_2^2$ est racine de d dans tous les cas; elle est racine de Δ_1, sauf la seule exception $p=q=1$, $i=4$.

4. Le polynome d s'annule pour tous les points à l'infini de $(\mathcal{A})$; je considère le polynome formé par les facteurs primaires de d autres que ceux fournis par les points à l'infini; soit δ le degré de ce polynome; δ est positif ou nul.

Je démontre en passant une propriété simple s'appliquant, même si le genre n'est pas nul, aux courbes $(\mathcal{A})$ réelles algébriques n'ayant que deux points à l'infini. J'appelle μ le degré du cône C, je conserve les notations du Chapitre II; chacun des deux cycles isotropes de C a pour indice μ, je veux prouver que ces cycles sont du type, degré et classe égaux. J'ai expliqué que l'on peut écrire $q=p+s$, $i=2p+r$, s et r étant deux entiers dont l'un est nul, l'autre positif non nul. On a donc ici $\mu=2p+r$; d'autre part, comme le plan tangent au cône C suivant chaque génératrice isotrope donne $p+q$ ou $2p+s$ génératrices confondues avec la génératrice de contact, on a $2p+s \leqq \mu$; en comparant avec $2p+r=\mu$ et songeant que r et s ne sont pas nuls tous deux, il faut nécessairement que s soit nul; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous supposons, de plus, $(\mathcal{A})$ et C unicursaux : alors t_0 et t'_0 étant les valeurs du paramètre donnant les deux cycles isotropes, d contient les facteurs $(t-t_0)^{2p+r-3}$ et $(t-t'_0)^{2p+r-3}$, ou $(t-t_0)^{\mu-3}$ et $(t-t'_0)^{\mu-3}$. Les égalités $a_1=a_2 d$, $b_1=b_2 d$, $c_1=c_2 d$, où a_1, b_1, c_1 sont de degré $3(m-2)$ et a_2, b_2, c_2 de degré μ donneront donc, puisque $m=\Sigma(p+r)=\mu+r$, $3(m-2)=\mu+2\mu-6+\delta$ ou $3r=\delta$. Dans ce cas, δ n'est pas nul.

Voyons ce qui se passe pour le cône C unicursal réel le plus général;

je comprends tous les cas en écrivant que t_0 étant le paramètre d'un cycle isotrope de C, d contient le facteur $(t-t_0)^{2p+s+r-3}$, je rappelle les résultats $i=2p+r$, $\Sigma i=2\mu$, $m=\Sigma(p+r)=\sum\left(p+\frac{r}{2}\right)+\sum\frac{r}{2}$ ou $m=\mu+\sum\frac{r}{2}$. Je pourrai donc écrire, comme précédemment, $3(m-2)=\mu+\Sigma(i+s-3)+\delta$; soit h le nombre des couples de cycles isotropes conjugués; cette équation devient, en remplaçant $\Sigma(i+s-3)$ par $\Sigma i+\Sigma s-\Sigma 3$ ou $2\mu+\Sigma s-6h$,

$$2\delta=3\Sigma r-2\Sigma s+12(h-1). \tag{12}$$

Donc dans le cas où il n'y a aucun cycle du type, classe supérieure au degré, Σs est nul et le nombre δ est différent de zéro; on voit même que, dans ce cas, il est multiple de 3.

5. Il n'y a plus alors de difficulté à donner un exemple de courbe à torsion constante unicursale, obtenue directement en écrivant que le rayon de torsion est constant. Je considère la courbe

$$\left\{\begin{aligned} x &= \quad \mathrm{A}\sin(2m+p)\varphi+\mathrm{B}\sin p\varphi+\mathrm{C}\sin(p-2m)\varphi,\\ y &= -\mathrm{A}\cos(2m+p)\varphi-\mathrm{B}\cos p\varphi-\mathrm{C}\cos(p-2m)\varphi,\\ z &= \quad \sin 2m\varphi,\end{aligned}\right. \tag{13}$$

où m et p sont deux entiers positifs (si p est pair, il semble y avoir intérêt à prendre 2φ pour paramètre, mais la suite légitime cette façon d'écrire).

Ici, il n'y a que deux points à l'infini; donc les trois expressions $y'z''-z'y''$, $z'x''-x'z''$, $x'y''-y'x''$ doivent avoir un facteur commun, quel que soit d'ailleurs le paramètre employé; ici, φ est particulièrement avantageux; on sait même que le facteur doit être d'un degré multiple de 3, si l'on revient à un paramètre algébrique. On vérifie aisément que la courbe (13) admet Oz pour axe de rotation, Oy pour axe de symétrie. On vérifie aussi que

$$\left\{\begin{aligned} y'z''-z'y'' &= \mathrm{L}\cos(p+4m)\varphi+\mathrm{L}_1\cos(p+2m)\varphi+\mathrm{L}_2\cos p\varphi\\ &\quad+\mathrm{L}_3\cos(p-2m)\varphi+\mathrm{L}_4\cos(p-4m)\varphi,\\ z'x''-x'z'' &= \mathrm{L}\sin(p+4m)\varphi+\mathrm{L}_1\sin(p+2m)\varphi+\mathrm{L}_2\sin p\varphi\\ &\quad+\mathrm{L}_3\sin(p-2m)\varphi+\mathrm{L}_4\sin(p-4m)\varphi,\\ x'y''-y'x'' &= \mathrm{M}\cos 4m\varphi+\mathrm{M}_1\cos 2m\varphi+\mathrm{M}_2,\end{aligned}\right. \tag{14}$$

puis, que

$$(15)\quad \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \mathrm{N}\cos 6m\varphi + \mathrm{N}_1\cos 4m\varphi + \mathrm{N}_2\cos 3m\varphi + \mathrm{N}_3.$$

L'avantage ici est que, pour les quantités appelées précédemment a_1, b_1, c_1 ou Δ_1, les facteurs relatifs aux points à l'infini se trouvent automatiquement éliminés avec le paramètre φ; Δ devra être le carré du facteur commun à a_1, b_1, c_1; il en résulte que ce facteur est nécessairement de la forme $\alpha\cos 3m\varphi + \beta\cos m\varphi$, et l'on doit pouvoir écrire

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} y'z'' - z'y'' &= [\lambda\cos(p+m)\varphi + \mu\cos(p-m)\varphi] \\ &\quad\times [2\alpha\cos 3m\varphi + 2\beta\cos m\varphi], \\ z'x'' - x'z'' &= [\lambda\sin(p+m)\varphi + \mu\sin(p-m)\varphi] \\ &\quad\times [2\alpha\cos 3m\varphi + 2\beta\cos m\varphi], \\ x'y'' - y'x'' &= [\cos m\varphi][2\alpha\cos 3m\varphi + 2\beta\cos m\varphi], \\ \Delta &= (2\alpha\cos 3m\varphi + 2\beta\cos m\varphi)^2. \end{aligned}\right.$$

Ici il sera même inutile d'écrire la dernière égalité (16), car d'après la formation même de Δ, tout facteur simple commun aux trois mineurs de la dernière ligne du déterminant Δ est nécessairement racine double de Δ. Alors, puisque $\mathrm{T} = -\dfrac{\Sigma(y'z''-z'y'')^2}{\Delta}$, il suffira d'adjoindre aux équations précédentes la condition que

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos 2m\varphi + \cos^2 m\varphi$$

soit une constante, c'est-à-dire $4\lambda\mu + 1 = 0$, en remplaçant $\cos^2 m\varphi$ par $\dfrac{1+\cos 2m\varphi}{2}$. D'autre part, pour écrire que les trois premières équations (16) sont vérifiées, il suffit manifestement d'écrire

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &[\lambda\cos(p+m)\varphi + \mu\cos(p-m)\varphi]x' \\ &\quad + [\lambda\sin(p+m)\varphi + \mu\sin(p-m)\varphi]y' + \cos m\varphi\, z' = 0, \\ &[\lambda\cos(p+m)\varphi + \mu\cos(p-m)\varphi]x'' \\ &\quad + [\lambda\sin(p+m)\varphi + \mu\sin(p-m)\varphi]y'' + \cos m\varphi\, z'' = 0, \end{aligned}\right.$$

car cela revient, au fond, à la proposition suivante : si les trois polynomes A, B, C entiers en x sont proportionnels à trois polynomes A_1, B_1, C_1 premiers entre eux dans leur ensemble, A, B et C sont des équimultiples de A_1, B_1, C_1. Or on trouve immédiatement que le premier membre de chacune des expressions (17) est de la forme $h\cos 3m\varphi + k\cos m\varphi$ pour la première, $h'\sin 3m\varphi + k'\cos m\varphi$ pour la seconde. On a donc finalement le système de cinq équations à cinq inconnues A, B, C, λ, μ :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} (2m+p)A\lambda + pB\lambda + pB\mu + (p-2m)C\mu + m = 0, \\ (2m+p)A\mu + (p-2m)C\lambda + m = 0, \\ -(2m+p)^2A\lambda + p^2B\lambda - p^2B\mu + (p-2m)^2C\mu - 2m^2 = 0, \\ -(2m+p))^2A\mu + (p-2m)^2C\lambda - 2m^2 = 0, \\ 4\lambda\mu + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Les deuxième et quatrième équations (18) donnent

$$A = \frac{-m}{2(2m+p)\mu}, \qquad C = \frac{-m}{2(p-2m)\lambda}.$$

Comme les troisième et quatrième équations donnent par soustraction

$$[(2m+p)^2A - p^2B + (p-2m)^2C](\lambda - \mu) = 0,$$

j'aurai, en éliminant $\lambda - \mu = 0$, qui ne pourrait donner que des solutions imaginaires,

$$B = -\frac{m}{2p^2}\left[\frac{2m+p}{\mu} + \frac{p-2m}{\lambda}\right],$$

et alors, portant dans la première équation, j'obtiens après réductions simples $(m+p)\lambda^2 = (m-p)\mu^2$.

Je déduis de là

$$\lambda = \frac{\sqrt{m-p}}{2\sqrt[4]{m^2-p^2}}, \qquad \mu = \frac{-\sqrt{m-p}}{2\sqrt[4]{m^2-p^2}},$$

d'où A, B, C sans effort. Les valeurs de λ et μ trouvées montrent que nous avons retrouvé l'exemple de M. Fabry, déjà signalé, au Chapitre III [§ 7, formules (24)]. Ici, nous avons d'un seul coup et l'indicatrice des torsions et la courbe ($\perp$) elle-même.