Annales scientifiques de l'É.N.S.

JEAN CLAIRIN

Sur les invariants des caractéristiques des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 37 (1920), p. 107-116
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__107_0>

SUR LES INVARIANTS DES CARACTÉRISTIQUES

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES (¹);

PAR M. JEAN CLAIRIN.

(**Rédigé par M. E. GAU.**)

Un invariant d'un système de caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du second ordre est une fonction $U(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n})$ qui garde une valeur constante, quand on se déplace sur une surface intégrale quelconque de l'équation donnée, le long d'une caractéristique de ce système.

La méthode de Darboux, pour l'intégration de l'équation, se ramène, au fond, à la recherche de ces invariants et, à ce point de vue, il est très important de connaître leur forme. M. Goursat, dans ses *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* et, après lui, M. Gau, dans son Mémoire : *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de M. Darboux* (*Journal de Math. pures et appl.*, 1911), se sont occupés de cette question; la présente Note a pour objet d'indiquer, dans le cas général, la forme du dénominateur de l'invariant d'ordre le plus

(¹) Les résultats contenus dans cet article ont été indiqués sans démonstration dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 156, p. 760-762), portant le même titre.

Les pages qui suivent ont été rédigées d'après des notes diverses trouvées dans les papiers de M. Clairin; ces papiers ont été laissés dans le plus grand désordre par les Allemands qui occupèrent Lille et beaucoup ont disparu.

C'est ainsi que la démonstration de quelques-unes des propositions, heureusement les moins importantes, énoncées dans la Note citée, n'a pu être retrouvée.

petit, en supposant toutefois que cet ordre est supérieur à 3 et que l'équation a ses caractéristiques distinctes. On a adopté les notations habituelles.

1. Soit une équation du second ordre

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0; \tag{1}$$

désignons par m et μ les racines supposées distinctes de l'équation qui détermine les caractéristiques

$$M^2 - \frac{\partial f}{\partial s} M + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Dans le Mémoire cité ci-dessus, M. Gau a démontré ([1]) que tout invariant d'ordre n, pour le système de caractéristiques μ par exemple, peut s'écrire sous la forme $\frac{V}{v}$, en posant

$$V = p_{1,n-1} + m p_{0,n} + u(x, y, z, \ldots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1}),$$
$$v = v(x, y, z, \ldots, p_{1,k-1}, p_{0,k}) \qquad (k < n).$$

Si l'on se déplace sur une caractéristique μ, on aura donc

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{V}{v}\right) = 0;$$

or, on sait que l'on a ([2])

$$\frac{dV}{dx} = (An + B)V,$$

où A et B sont des expressions développées plus loin et qui ne dépendent que des dérivées d'ordre inférieur ou au plus égal à 3; par suite, on aura

$$\frac{dv}{dx} = (An + B)v. \tag{2}$$

C'est de cette équation que nous allons déduire des conditions nécessaires pour la forme de v. Toutefois il sera plus commode, pour

---

([1]) Mémoire cité, p. 139.
([2]) *Ibid.*, p. 135.

la suite, d'étudier cette équation sous la forme à peine différente

$$\frac{dv}{dx} = (A\alpha + B\beta)v, \tag{3}$$

où nous considérerons α et β comme des constantes quelconques.

Remarquons tout d'abord que, si l'on fait dans cette relation $\alpha = \beta = 0$, celle-ci exprime alors que v est un invariant; d'après l'hypothèse faite, une pareille relation ne pourra être vérifiée par une fonction d'ordre inférieur à u que si celle-ci se réduit identiquement à une constante.

Développons l'équation (3), il vient

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + (p + \mu q)\frac{\partial v}{\partial z} + \ldots + (p_{2,k-2} + \mu p_{1,k-1})\frac{\partial v}{\partial p_{1,k-2}} \\ + (p_{1,k-1} + \mu p_{0,k})\frac{\partial v}{\partial p_{0,k-1}} + (p_{2,k-1} + \mu p_{1,k})\frac{\partial v}{\partial p_{1,k-1}} \\ + (p_{1,k} + \mu p_{0,k+1})\frac{\partial v}{\partial p_{0,k}} = (A\alpha + B\beta)v.\end{aligned}$$

Or on a ([1])

$$p_{2,n} = -(m+\mu)p_{1,n+1} - m\mu p_{0,n+2} - \left(\frac{d^n f}{dy^n}\right)$$

avec

$$\left(\frac{d^n f}{dy^n}\right) = M_n p_{1,n} + N_n p_{0,n+1} + J_n.$$

La condition (3) peut donc s'écrire, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \ldots + \left[-m(p_{1,k-1} + \mu p_{0,k}) - \left(\frac{d^{k-2}f}{dy^{k-2}}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial p_{1,k-2}} \\ + (p_{1,k-1} + \mu p_{0,k})\frac{\partial v}{\partial p_{0,k-1}} + \left[-m(p_{1,k} + \mu p_{0,k+1}) - \left(\frac{d^{k-1}f}{dy^{k-1}}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial p_{1,k-1}} \\ + (p_{1,k} + \mu p_{0,k+1})\frac{\partial v}{\partial p_{0,k}} = (A\alpha + B\beta)v.\end{aligned} \tag{4}$$

Dans les formules précédentes, on a

$$M_n = n\left[\frac{d(m+\mu)}{dy}\right] + \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad N_n = n\left[\frac{dm\mu}{dy}\right] + \frac{\partial f}{\partial q},$$

$$A = -\left[\frac{d\mu}{dy}\right], \qquad B = -A + \frac{1}{m-\mu}\left\{\left[\frac{dm}{dx}\right] + \mu\left[\frac{dm}{dy}\right] + \mu\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right\},$$

([1]) *Voir* GAU, Mémoire cité, p. 130.

J_n ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à n. On vérifie facilement l'identité

$$(5)\qquad \left[\frac{dm}{dx}\right]+\mu\left[\frac{dm}{dy}\right]+m\mathrm{M}_{k-1}-\mathrm{N}_{k-1}\equiv(m-\mu)[\mathrm{A}k+\mathrm{B}+\mathrm{M}_{k-1}]$$

qui sera utilisée plus loin.

2. Considérons donc la relation (4) et supposons tout d'abord $k>3$; le second membre ne contient pas alors de dérivées d'ordre supérieur à k et l'on doit avoir, par suite,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,k}}-m\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,k-1}}=0.$$

Si l'on pose $\eta=p_{1,k-1}+mp_{0,k}$, on aura donc

$$\varphi=\varphi(x,y,z,\ldots,p_{1,k-2},p_{0,k-1},\eta)$$

et la condition (4) devient, en tenant compte de l'identité (5),

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\ldots+\left[-m\eta-m(\mu-m)p_{0,k}-\left(\frac{d^{k-2}f}{dy^{k-2}}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,k-2}}&\\+[\eta+(\mu-m)p_{0,k}]\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,k-1}}&\\+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}[(m-\mu)(\mathrm{A}k+\mathrm{B}+\mathrm{M}_{k-1})p_{0,k}-\eta\mathrm{M}_{k-1}-\mathrm{J}_{k-1}]&=(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta)\varphi.\end{aligned}$$

En écrivant que cette relation a lieu identiquement par rapport à $p_{0,k}$, on obtient le système

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,k-1}}-m\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,k-2}}-(\mathrm{A}k+\mathrm{B}+\mathrm{M}_{k-1})\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0,\\&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\ldots-\left(\frac{d^{k-2}f}{dy^{k-2}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,k-2}}\\&\qquad-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}[\eta(\mathrm{A}k+\mathrm{B})-\mathrm{J}_{k-1}]=(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta)\varphi\end{aligned}\right.$$

et ce système est équivalent à la condition (3).

Cela posé, dérivons par rapport à η les identités (6) et posons $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\varphi'$ en réunissant au second membre tous les termes en φ; on obtient ainsi deux nouvelles relations, que nous désignerons par (7), et qui ont respectivement les mêmes premiers membres que (6), à cela près que v est remplacé par v'; quant aux seconds membres, ils sont : o, pour la première et

$$(7) \qquad (A\alpha + B\beta + Ak + B)v'$$

pour la deuxième.

Répétons l'opération en posant $\dfrac{\partial v'}{\partial \eta} = v''$; on obtient un système (8) de même forme, qui ne diffère du précédent que par le second membre de la deuxième équation

$$(8) \qquad (A\alpha + B\beta + 2Ak + 2B)v''.$$

Divisons maintenant les équations de ces systèmes par v, v', v'' respectivement, puis multiplions-les respectivement par $+1$, -2, $+1$, et ajoutons les équations qui se correspondent dans les trois systèmes; en posant $\theta = \log v - 2\log v' + \log v''$, il vient

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial\theta}{\partial p_{0,k-1}} - m\dfrac{\partial\theta}{\partial p_{1,k-2}} - (Ak + B + M_{k-1})\dfrac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) + \ldots - \left(\dfrac{d^{k-2}f}{dy^{k-2}}\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial p_{1,k-2}} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\eta}[\eta(Ak+B) - J_{k-1}] = 0. \end{array} \right.$$

Or, c'est là un système de la forme (6), et par conséquent équivalent à la relation (3), mais avec $\alpha = \beta = 0$. D'après la remarque faite, θ, et, par suite, $\dfrac{vv''}{v'^2}$, est donc une constante; désignons cette constante par $(1 - \delta)$, on a

$$\frac{v''}{v'} = (1-\delta)\frac{v'}{v},$$

d'où, en intégrant,

$$v' v^{\delta - 1} = K.$$

On en tire pour v les formes suivantes, suivant que δ est différent ou non de zéro :

$$(I) \qquad v = H(\eta + H_1)^{\gamma},$$

$$(II) \qquad v = e^{H\eta + H_1},$$

H et H_1 étant des fonctions de $x, y, z, \ldots, p_{1,k-2}, p_{0,k-1}$.

3. Étudions la forme (I) et portons pour cela cette expression de φ dans la relation (3); il vient

$$\text{(10)}\qquad \frac{d\mathrm{H}}{dx}(\eta+\mathrm{H}_1)^\gamma+\gamma\mathrm{H}(\eta+\mathrm{H}_1)^{\gamma-1}\frac{d(\eta+\mathrm{H}_1)}{dx}=(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta)\mathrm{H}(\eta+\mathrm{H}_1)^\gamma;$$

on sait d'ailleurs que l'équation $\varphi = 0$ et, par suite,

$$p_{1,k-1}+mp_{0,k}+\mathrm{H}_1=0,$$

forme un système en involution avec l'équation proposée (1). On a donc [1]

$$\frac{d(\eta+\mathrm{H}_1)}{dx}=(\mathrm{A}k+\mathrm{B})(\eta+\mathrm{H}_1),$$

et l'équation (10) peut s'écrire

$$\text{(11)}\qquad \frac{d\mathrm{H}}{dx}=[\mathrm{A}(\alpha-k\gamma)+\mathrm{B}(\beta-\gamma)]\mathrm{H},$$

qui est de la forme (3) et à laquelle on peut appliquer les mêmes conclusions. Il faut remarquer que cette équation peut être vérifiée pour

$$\beta=\gamma=\frac{\alpha}{k}\qquad\text{et}\qquad \mathrm{H}=\text{const.}$$

4. Étudions maintenant la forme (II); si l'on porte cette expression dans les équations (6), on obtient, en annulant les coefficients de η dans les deux équations,

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial p_{0,k-1}}-m\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial p_{1,k-2}}=0,$$
$$\left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}+\mu\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}\right)+\ldots-\left(\frac{d^{k-2}f}{dy^{k-2}}\right)\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial p_{1,k-2}}=(\mathrm{A}k+\mathrm{B})\mathrm{H},$$

et il est facile de voir que ces deux relations entraînent l'identité

$$\text{(12)}\qquad \frac{d\mathrm{H}}{dx}=(\mathrm{A}k+\mathrm{B})\mathrm{H}$$

qui est encore de la forme (3); mais ici cette condition ne peut être

---

(1) *Voir* GAU, Mémoire cité, p. 135.

vérifiée en général pour $H = \text{const.}$; il faudrait pour cela que $(Ak + B)$ fût nul : on verra plus loin que ceci n'est possible que pour certaines équations (1) spéciales, linéaires en r, s, t, les caractéristiques μ étant alors de premier ordre.

5. On voit que la fonction H, qui figure dans les deux expressions trouvées pour v, satisfait elle-même à une équation de la forme (3). On peut donc l'étudier à son tour comme la fonction v et lui appliquer les résultats précédents.

Or on sait [1] qu'il ne peut exister, en raison des hypothèses faites, trois fonctions d'ordre inférieur à n, ne se réduisant pas à une constante, et satisfaisant à une relation de la forme (3), sans quoi l'on pourrait former facilement un invariant d'ordre inférieur à n.

Soit donc h l'ordre le plus élevé des dérivées qui figurent dans H, et posons $p_{1,h-1} + mp_{0,h} = \xi$; si $h > 3$, H aura l'une des formes

$$H = L(\xi + L_1)^{\omega} \quad \text{ou} \quad H = e^{L\xi + L_1},$$

L se réduisant alors à une constante; la seconde forme n'est, par conséquent, possible que par les équations particulières dont il a été question au paragraphe précédent; en général, la première forme est seule possible pour H, et il est évident qu'on peut y prendre la constante L égale à l'unité.

La forme (I) de v ne donnera donc, en général, naissance qu'à

$$(\mathrm{I}') \qquad v = (\xi + L_1)^{\omega}(\eta + H_1)^{\gamma},$$

si $h > 3$; dans les mêmes conditions, nous allons voir que la forme (II) conduit à une impossibilité. En effet, si l'on a

$$v = e^{H\eta + H_1},$$

H satisfait à l'équation (12), qui est de la forme (3) en faisant $\alpha = k$, $\beta = 1$. Si l'on avait $h > 3$, on serait conduit à

$$H = L(\varepsilon + L_1)^{\omega},$$

L vérifiant l'équation (11), où l'on a remplacé α, β, k, γ par k, 1, h, ω,

---

(1) *Voir* Gau, Mémoire cité, p. 136.

respectivement; L étant constant, on devrait donc avoir

$$1 = \omega = \frac{k}{h},$$

ce qui est impossible, h étant au plus égal à $(k-1)$.

6. En résumé, nous arrivons aux conclusions suivantes : si l'équation (1) n'est pas une des équations particulières étudiées au paragraphe suivant, le dénominateur φ de l'invariant d'ordre le plus petit, quand celui-ci est supérieur à 3, a nécessairement l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned}
&\varphi = \varphi(x, y, z, p, q, s, t, p_{1,2}, q_{0,3}),\\
&\varphi = \mathrm{H}(\eta + \mathrm{H}_1)^{\gamma} \qquad (h \leqq 3),\\
&\varphi = e^{\mathrm{H}\eta+\mathrm{H}_1} \qquad (h \leqq 3),\\
&\varphi = (\xi + \mathrm{L}_1)^{\omega}(\eta + \mathrm{H}_1)^{\gamma}.
\end{aligned}$$

7. Les résultats précédents ne s'appliquent pas entièrement, comme on l'a vu, aux équations telles que l'on puisse avoir, pour une certaine valeur de k,

$$\mathrm{A}k + \mathrm{B} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{dm}{dx}\right] + \mu\left[\frac{dm}{dy}\right] + \mu\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q} = (k-1)(\mu - m)\left[\frac{d\mu}{dy}\right]. \tag{13}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\left[\frac{dm}{dx}\right] = {}& \frac{\partial m}{\partial x} + p\frac{\partial m}{\partial z} - f\frac{\partial m}{\partial p} + s\frac{\partial m}{\partial q}\\
&- \frac{\partial m}{\partial s}\left[(m+\mu)p_{1,2} + m\mu p_{0,3} + \left(\frac{df}{dy}\right)\right] + \frac{\partial m}{\partial t}p_{1,2},\\
\left[\frac{dm}{dy}\right] = {}& \frac{\partial m}{\partial y} + q\frac{\partial m}{\partial z} + s\frac{\partial m}{\partial p} + t\frac{\partial m}{\partial q} + p_{1,2}\frac{\partial m}{\partial s} + p_{0,3}\frac{\partial m}{\partial t}
\end{aligned}$$

et un développement analogue pour $\left[\frac{d\mu}{dy}\right]$.

En annulant les coefficients de $p_{1,2}$ et $p_{0,3}$, on a

$$\left\{\begin{aligned}
&(k-1)(\mu - m)\frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{\partial m}{\partial t} - m\frac{\partial m}{\partial s},\\
&(k-1)(\mu - m)\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial m}{\partial t} - m\frac{\partial m}{\partial s}\right),
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

d'où l'on tire, puisqu'on a supposé $\mu \neq m$ et $k > 3$,

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mu}{\partial s}.$$

Les caractéristiques μ sont alors du premier ordre (¹) et, si $\frac{d\mu}{ds}$ n'est pas nul, l'équation (1) résulte de l'élimination de μ entre

$$r + \mu s + \varphi(x, y, z, p, q, \mu) = 0,$$
$$s + \mu t + \psi(x, y, z, p, q, \mu) = 0;$$

d'où l'on tire

$$m = -\frac{s + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{t + \frac{\partial \psi}{\partial \mu}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial m}{\partial s} = \frac{-1}{t + \frac{\partial \psi}{\partial \mu}} + \frac{\partial m}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial s}, \qquad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{s + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{\left(t + \frac{\partial \psi}{\partial \mu}\right)^2} + \frac{\partial m}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial t};$$

en portant ces valeurs dans l'une des équations (14), on obtient

$$\frac{\partial m}{\partial \mu} = k - 1;$$

mais $\frac{\partial m}{\partial \mu}$ se tire directement de la valeur de m, et l'on arrive ainsi à l'égalité suivante, qui doit avoir lieu identiquement :

$$(k-1)\left(t + \frac{\partial \psi}{\partial \mu}\right)^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2}\left(-\mu t - \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}\left(t + \frac{\partial \psi}{\partial \mu}\right);$$

cette identité est impossible, le seul terme en t^2 ayant un coefficient déjà supposé différent de 0.

Donc on aura

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

(¹) GAU, *Sur la détermination des caractéristiques*, etc. (*Annales de l'Université de Grenoble*, t. XXX, 1918, p. 302).