

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Sur les courbes à torsion constante

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 36 (1919), p. 263-409

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__263_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

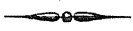
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

COURBES A TORSION CONSTANTE

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.



INTRODUCTION.

1. L'Académie avait proposé pour janvier 1915 de perfectionner la théorie des courbes gauches à torsion constante ; elle demandait de déterminer, si possible, celles qui sont algébriques ou tout au moins unicursales.

Les travaux publiés avant la mise au concours de ce sujet sont les suivants :

M. Koenigs, dans une Note aussi courte qu'élégante, parue aux *Annales de Toulouse* (t. I, année 1887), indique quelques résultats relatifs à la forme des courbes algébriques réelles à torsion constante, sans envisager s'il existe ou non de telles courbes ; à l'époque où cette Note paraissait, on ne connaissait aucun exemple de telles courbes.

M. Lyon, aux *Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble* (t. II, année 1890), s'est efforcé de trouver par le calcul des courbes unicursales à torsion constante. La méthode suivie conduit à des calculs inextricables. L'auteur a eu le mérite de découvrir cette cubique gauche imaginaire dont les deux courbures sont constantes ; en dehors des paramètres relatifs au déplacement le plus général et du paramètre correspondant à une homothétie, la cubique ne renferme qu'un unique paramètre de *forme*, le seul qui soit vraiment intéressant.

M. Fouché, aux *Annales de l'École Normale supérieure* (année 1890), arrive à cette conclusion qu'il suffit, pour avoir toutes les courbes

algébriques, de déterminer une fonction algébrique β de la variable complexe α telle que les intégrales abéliennes $\int \frac{d\alpha}{(\beta - \alpha)^2}$, $\int \frac{\beta d\alpha}{(\beta - \alpha)^2}$, $\int \frac{\beta^2 d\alpha}{(\beta - \alpha)^2}$ soient elles-mêmes des fonctions algébriques de α . Par ce procédé on trouve assez aisément des courbes unicursales imaginaires.

M. Fabry (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1892) donna enfin quatre types explicites de courbes à torsion constante unicursales réelles ; l'un d'eux possède, au point de vue de la symétrie et des rotations, des propriétés pleines de conséquences fructueuses que je développerai dans ce Mémoire.

M. Cosserat, dans une Note concise des *Comptes rendus* (année 1895, t. 120), indique quelques propriétés géométriques élégantes, donnant sans effort toutes les conclusions de M. Fouché, montrant par surcroît que la détermination des surfaces minima circonscrites à une sphère est un problème identique à la recherche des courbes à torsion constante ; les surfaces minima et les courbes à torsion constante correspondantes sont simultanément transcendantes ou algébriques.

L'essentiel de ces travaux est condensé dans la Note 4 de la *Théorie des surfaces* de M. Darboux ; cet auteur montre, de plus, que la détermination des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution constitue lui aussi un problème identique à la recherche des courbes à torsion constante. Une courbe à torsion constante, *réelle ou imaginaire*, fournit un couple, et un seul, de deux surfaces *réelles* applicables sur le paraboloïde. La courbe et le couple sont simultanément algébriques ou transcendants.

2. Le travail que je présente ici ne diffère que par quelques remaniements et additions de celui que j'ai présenté à l'Académie et qui a été récompensé parallèlement à celui de mon camarade M. Darmois (voir *Comptes rendus*, décembre 1916).

J'ai retrouvé sans peine, par une étude plus approfondie de l'indicatrice sphérique des binormales, tous les exemples réels ou imaginaires déjà connus. J'ai donné une grande variété de types nouveaux, *unicursaux* ou de *genre non nul*, imaginaires et réels.

Ce travail est complété par un Mémoire que je publie au *Bulletin de la Société mathématique* sur les surfaces applicables sur le parabolôide.

Les éléments imaginaires, en géométrie, n'ont souvent qu'un intérêt de curiosité, à moins de servir d'intermédiaire dans la recherche d'êtres géométriques réels. Ici, en raison de l'obtention de surfaces réelles applicables sur le parabolôide, il y aurait grave inconvénient à laisser systématiquement de côté les courbes imaginaires à torsion constante. J'ai évité de le faire, mais j'ai réservé la majeure partie de mes efforts aux courbes réelles; leur détermination est plus difficile que celle des courbes imaginaires; elles donnent d'ailleurs parmi les surfaces applicables sur le parabolôide celles qui ont un centre de symétrie.

Les courbes réelles donnent les surfaces minima réelles circonscrites à une sphère le long d'une courbe réelle; celles qui sont imaginaires, mais coïncident avec leur conjuguée, donnent les surfaces minima réelles circonscrites à une sphère le long d'une courbe imaginaire.

CHAPITRE PREMIER.

RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS ANTÉRIEURS.

1. J'indique trois manières de rattacher les courbes à torsion constante aux surfaces minima :

a. Au Tome I de la *Théorie des surfaces*, deuxième édition, page 485, M. Darboux établit cette proposition :

Toute courbe à torsion constante (\mathcal{A}) peut être prise pour ligne asymptotique d'une surface minima (M) qui se détermine sans aucune intégration si la courbe (\mathcal{A}) est connue et qui est algébrique si la courbe (\mathcal{A}) est algébrique.

La surface minima adjointe (M_0) est inscrite à la sphère de rayon τ [τ rayon de torsion de la courbe (\mathcal{A})] suivant une courbe qui peut servir d'indicatrice sphérique aux binormales de (\mathcal{A}).

x, y, z étant les coordonnées d'un point de (\mathcal{A}); c, c', c'' les cosinus

directeurs de la binormale en ce point ; τ le rayon de torsion, la surface (M) est le lieu du point

$$(1) \quad x = R(x - c i \tau), \quad y = R(y - c' i \tau), \quad z = R(z - c'' i \tau);$$

la surface (M₀) le lieu du point

$$(2) \quad x_0 = R(c \tau + i x), \quad y_0 = R(c' \tau + i y), \quad z_0 = R(c'' \tau + i z).$$

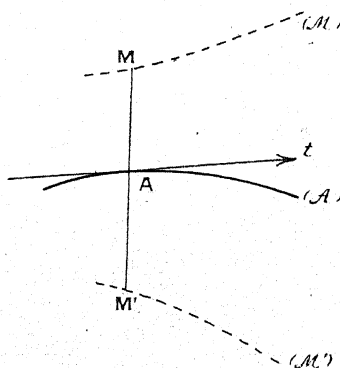
b. Cherchons quelle longueur il faut porter sur la binormale d'une courbe à partir du pied de cette binormale pour que le point M obtenu décrive une ligne minima ; M a pour coordonnées $x + lc$, $y + lc'$, $z + lc''$ et l'on trouve immédiatement

$$(3) \quad 1 + \frac{l^2}{\tau^2} + \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = 0.$$

Si τ est constant, on a la solution indiquée précédemment par la surface minima (M) à savoir $l = \pm i \tau$. Réciproquement, si l'équation (3) est satisfaite pour une valeur constante de l , elle donne immédiatement $\tau = \pm i l$, donc la courbe (A) est à torsion constante ; nous appliquerons cette remarque plus loin.

c. Toute courbe à torsion constante (A) peut être considérée comme ligne asymptotique d'une infinité de surfaces à courbure totale con-

Fig. 1.



stante ; en nous bornant aux surfaces réelles, la courbure est positive si la courbe (A) est imaginaire, avec un rayon de torsion imaginaire

pure ; la courbure est négative si la courbe (A) est réelle. Soit Σ l'une de ces surfaces à courbure totale constante égale à $-\tau^2$; appliquons la construction indiquée par M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 383). Sur chaque normale portons une longueur égale à $\pm i\tau$; on obtient une surface à courbure moyenne constante parallèle à Σ dont les lignes de longueur nulle correspondent aux asymptotiques de Σ . Nous retrouvons le procédé précédemment indiqué faisant correspondre à la ligne (\mathfrak{A}) une courbe minima (M). Nous voyons de plus qu'en M la tangente à (M) est orthogonale à MA ; autrement dit, le plan osculateur à la courbe (M) au point M contient la droite MAM' ; cette droite est aussi dans le plan osculateur à la courbe (M') en M'. La surface minima lieu des milieux des cordes s'appuyant sur les deux courbes (M) et (M') n'est autre que la surface minima (1) précédemment indiquée ; la surface moyenne de Ribaucour (*Théorie des surfaces*, t. I, 2^e édition, p. 479) est circonscrite à cette surface minima et à Σ tout le long de la courbe (\mathfrak{A}).

2. De ces résultats découle un procédé intéressant pour déterminer les courbes à torsion constante.

Supposons qu'il existe un couple de deux courbes minima (M) et (M') satisfaisant aux conditions suivantes :

A chaque point M de la courbe (M) correspond un point M' de (M') tel que la droite MM' soit précisément l'intersection des plans osculateurs en M et M' aux deux courbes (M) et (M').

Dans ces conditions, le milieu A de MM' décrit une courbe à torsion constante (\mathfrak{A}).

En effet, le segment MM' orthogonal en M et M' aux deux lignes minima conserve une longueur constante. La surface minima, lieu des milieux des cordes s'appuyant sur (M) et (M'), contient la courbe (\mathfrak{A}) ; le plan tangent en A à cette surface est le plan normal en A à MM' ; la caractéristique de ce plan tangent quand M décrit (M) est la tangente Az à la courbe (\mathfrak{A}), car cette caractéristique est perpendiculaire à MM' et à la position infiniment voisine de MM', autrement dit perpendiculaire au plan asymptote de la surface réglée engendrée par MM' ; la caractéristique se trouve donc dans le plan central de cette surface réglée relatif à la génératrice MM' ; or, en M et M', les plans tangents sont

isotropes, donc A est le point central, MM'A ι est le plan central, A ι est donc bien la caractéristique cherchée.

La courbe (\mathfrak{A}) admet donc pour plan osculateur en A le plan mené perpendiculairement à MM': MM' étant la binormale de (\mathfrak{A}) et AM étant un segment de longueur constante dont l'extrémité décrit une ligne minima, il en résulte, d'après le paragraphe précédent, que (\mathfrak{A}) a sa torsion constante.

C'est la réciproque de la propriété signalée en fin du paragraphe précédent. Traduite par le calcul, on retrouve les résultats de MM. Fouché et Cosserat.

3. Pour obtenir toutes les courbes à torsion constante il est donc nécessaire et suffisant de trouver six fonctions d'un paramètre, soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 satisfaisant aux équations

$$(4) \quad \begin{cases} dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = 0, \\ dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2 = 0, \\ (x_2 - x_1)dx_1 + (y_2 - y_1)dy_1 + (z_2 - z_1)dz_1 = 0, \\ (x_2 - x_1)dx_2 + (y_2 - y_1)dy_2 + (z_2 - z_1)dz_2 = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées x, y, z du point qui décrit la courbe à torsion constante sont données par les formules

$$(5) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

J'indique d'une façon précise les calculs à effectuer : l'équation du plan osculateur en M à la courbe (M) et les coordonnées de M seront données par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} (1 - u^2)x_1 + i(1 + u^2)y_1 + 2uz_1 + 4f(u) = 0, \\ x_1 = (1 - u^2)f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u), \\ y_1 = i(1 + u^2)f''(u) - 2iuf'(u) + 2if(u), \\ z_1 = 2uf''(u) - 2f'(u). \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$u = -\frac{dx_1 + i dy_1}{dz_1} = \frac{dz_1}{dx_1 - i dy_1}.$$

On aura de même pour la courbe (M')

$$(7) \quad \begin{cases} (1 - v^2)x_2 + i(1 + v^2)y_2 + 2vz_2 + 4\varphi(v) = 0, \\ x_2 = (1 - v^2)\varphi''(v) + 2v\varphi'(v) - 2\varphi(v), \\ y_2 = i(1 + v^2)\varphi''(v) - 2iv\varphi'(v) + 2i\varphi(v), \\ z_2 = 2v\varphi''(v) - 2\varphi'(v). \end{cases}$$

Les cosinus directeurs de la normale en A à la surface minima sont

$$(8) \quad c = \frac{1 - uv}{u - v}, \quad c' = i \frac{1 + uv}{u - v}, \quad c'' = \frac{u + v}{u - v}.$$

Les équations (6) et (7) remplacent les deux premières équations (4); les deux dernières équations (4) peuvent être remplacées, en désignant par τ une constante, par

$$(9) \quad x_2 - x_1 = 2i\tau c, \quad y_2 - y_1 = 2i\tau c', \quad z_2 - z_1 = 2i\tau c''.$$

Ajoutons membre à membre les équations (9) après les avoir multipliées respectivement par les multiplicateurs

$$1 - v^2, \quad i(1 + v^2), \quad 2v,$$

ou encore par

$$-v, \quad iv, \quad 1,$$

ou encore par

$$-1, \quad i, \quad 0.$$

Nous obtenons

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi(v) = \frac{(v - u)^2}{2} f''(u) + (v - u)f'(u) + f(u), \\ \varphi'(v) = (v - u)f''(u) + f'(u) - i\tau, \\ \varphi''(v) = f''(u) - \frac{2i\tau}{v - u}. \end{cases}$$

Ces équations (10) doivent, comme de juste, se réduire à deux; en effet, en différentiant la première et tenant compte de la seconde, on obtient

$$(11) \quad f'''(u) du + 2i\tau \frac{dv}{(v - u)^2} = 0.$$

Mais alors, si l'on différentie la seconde équation (10), on obtient

$$\varphi''(\nu) d\nu = (\nu - u) f'''(u) du + f''(u) d\nu,$$

et en remplaçant $f'''(u) du$ par la valeur tirée de (11), on retombe sur la troisième équation (10) qui résulte ainsi des deux premières.

On se donnera donc arbitrairement la première courbe minima (M) ce qui revient à se donner la fonction $f(u)$; l'équation (11) donne ensuite ν au moyen de u par une équation de Riccati; ayant choisi une intégrale de cette équation, la valeur de $\varphi(\nu)$ est donnée par la première équation (10) et alors tout le reste est connu.

Inversement, si l'on connaît une courbe de rayon de torsion constant et égal à τ , lieu du point x, y, z , la courbe minima (M) est le lieu du point $x - i\tau c, y - i\tau c', z - i\tau c''$; la courbe minima (M') est celui du point $x + i\tau c, y + i\tau c', z + i\tau c''$, de sorte que $u, \nu, f(u), \varphi(\nu)$ s'obtiennent algébriquement au moyen des coordonnées x, y, z du point variable A. La courbe (A) et l'ensemble des deux courbes (M) et (M') sont donc simultanément algébriques ou transcendentes.

Nous avons bien retrouvé la conclusion de M. Fouché, à savoir que tout revient à trouver une fonction algébrique ν de la variable u telle que $\frac{1}{(u - \nu)^2} \frac{d\nu}{du}$ soit la dérivée troisième d'une fonction algébrique de u : c'est ce qu'exprime l'équation (11).

Les résultats de M. Cosserat conduisaient à la fois à retrouver cette condition et à mettre en évidence la surface minima (M₀) représentée par les équations (2).

Il est intéressant de montrer que cette équation (11) se retrouve encore par la considération de la surface minima (M). En effet (A) est ligne asymptotique de la surface (M), donc tout le long de (A) les rayons de courbure principaux de (M) sont égaux à $\pm \tau$; si nous employons les formules connues relatives aux asymptotiques et aux rayons principaux des surfaces minima, nous aurons, tout le long de (A) sur la surface (M),

$$(12) \quad \begin{cases} \sqrt{f'''(u)} du = i\sqrt{f_1'''(u_1)} du_1, \\ -2\tau = (1 + uu_1)^2 \sqrt{f'''(u)} f_1'''(u_1); \end{cases}$$

u étant la variable déjà employée et u_1 remplaçant $\frac{1}{\nu}$. L'élimination

de $f_1'''(u_1)$ donne

$$f'''(u) du + \frac{2i\tau du_1}{(1 + uu_1)^2} = 0,$$

équation qui n'est autre que (11) où ν est remplacée par $\frac{-1}{u_1}$.

4. Il est utile de signaler l'importance que présentent les lignes à torsion constante au point de vue de la recherche des surfaces à courbure totale constante.

Les surfaces dont la courbure totale est égale à une constante donnée $\frac{-1}{\tau^2}$ satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(13) \quad \tau^2(rt - s^2) + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

et, en appliquant la méthode connue (*Théorie des surfaces* de M. Darboux, t. III, p. 263), on trouve comme équation des caractéristiques

$$(14) \quad \begin{cases} dz - p dx - q dy = 0, \\ \tau dp \pm (1 + p^2 + q^2) dy = 0, \\ \tau dq \mp (1 + p^2 + q^2) dx = 0; \end{cases}$$

les signes supérieurs ou inférieurs se correspondant. On déduit de là $dp dx + dq dy = 0$, c'est-à-dire que les caractéristiques sont asymptotiques des surfaces intégrales; elles ont donc pour rayon de torsion $\pm \tau$. Si l'on écrit les équations (14) sous la forme équivalente

$$(15) \quad \begin{cases} x = \varepsilon \tau \int \frac{dq}{1 + p^2 + q^2}, \\ y = -\varepsilon \tau \int \frac{dp}{1 + p^2 + q^2}, \\ z = \varepsilon \tau \int \frac{p dq - q dp}{1 + p^2 + q^2}, \end{cases}$$

les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe à torsion constante (\mathcal{A}) sont données par ces trois intégrales où p et q sont liées par une relation arbitraire. Les équations (14) ne possèdent aucune combinaison intégrable; d'autre part, le cône directeur des binormales de (\mathcal{A}) a pour trace sur le plan $z = -1$ par exemple la courbe lieu du point $(p, q, -1)$, de sorte que les trois intégrales (19) sont des intégrales curvilignes attachées à cette section plane du cône directeur des binormales.

Ceci montre bien l'intérêt que présente la recherche des courbes à torsion constante ; il est permis d'espérer de construire des surfaces à courbure totale constante par un assemblage convenable de courbes à torsion constante.

CHAPITRE II.

ÉTUDE SPÉCIALE DES COURBES ALGÈBRIQUES

1. Tout ce qui précède s'applique sans distinction aux courbes à torsion constante transcendentes ou algébriques.

Je suppose connu du lecteur l'exposé de M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. I, Chap. I et IV, et t. IV, Note 4). J'ai conservé pour le signe de la torsion celui qui est adopté au Tome I, première édition, et au Tome IV. Dans la seconde édition du Tome I, M. Darboux a été conduit à changer le signe de la torsion ; le trièdre mobile formé par la tangente à la courbe, la normale principale et la binormale est animé d'un mouvement où la rotation instantanée a pour composantes suivant ces trois droites $\frac{1}{\tau}$, 0, $\frac{1}{\rho}$, où ρ et τ sont les rayons de courbure et de torsion de la courbe, à condition d'adopter les conventions de signe de la seconde édition ; avec les conventions de la première édition, on a, au contraire, $\frac{-1}{\tau}$, 0, $\frac{1}{\rho}$. Mais ce changement de τ en $-\tau$ n'a aucune importance pour la suite.

M. Darboux insiste sur ce fait que la courbure et la torsion offrent une différence essentielle en ce sens que la première s'exprime au moyen d'un radical carré, tandis que la seconde s'exprime rationnellement au moyen de x, y, z coordonnées du point de la courbe et de leurs dérivées des trois premiers ordres. On sait l'interprétation du signe de la torsion au point de vue du sens d'enroulement de la courbe. Je profite de la circonstance pour insister sur ce fait intéressant, bien que jusqu'ici laissé dans l'ombre, c'est qu'une courbe à torsion constante, transcendante ou algébrique, ne peut admettre ni centre de

symétrie ni plan de symétrie, car dans l'une ou l'autre de ces symétries, aux points correspondants les deux rayons de torsion sont égaux et de signe contraire. La symétrie par rapport à un axe est admissible ; le cône des binormales admet alors ce même axe pour axe de symétrie et le plan perpendiculaire mené par le sommet comme plan de symétrie.

2. J'adopte dans tout ce qui suit les notations suivantes :

- A (x, y, z) , point qui décrit la courbe (\mathfrak{A}) à torsion constante ;
- τ , rayon de torsion de cette courbe ;
- B (c, c', c'') , point correspondant à A sur l'indicatrice (\mathfrak{B}) des torsions ;
- C, cône de sommet à l'origine, admettant pour directrice (\mathfrak{B}) ; c'est le cône directeur des binormales ;
- I, cône isotrope de sommet origine.

Je prends sur la génératrice OB du cône C un point arbitraire de coordonnées h, k, l qui décrira une certaine courbe sur C quand B décrira (\mathfrak{B}) . La courbe (\mathfrak{A}) est donnée par les formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \tau \int \frac{l dk - k dl}{h^2 + k^2 + l^2}, \\ y = \tau \int \frac{h dl - l dh}{h^2 + k^2 + l^2}, \\ z = \tau \int \frac{k dh - h dk}{h^2 + k^2 + l^2}. \end{array} \right.$$

A un cône C donné correspond, à une translation près, si la constante τ est donnée, une courbe (\mathfrak{A}) et une seule.

Le cône C est réel si la courbe (\mathfrak{A}) est réelle et inversement. Le cône C est algébrique si la courbe (\mathfrak{A}) est algébrique, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie (l'hélice circulaire par exemple correspond à un cône C de révolution).

Notre but est maintenant de trouver des courbes (\mathfrak{A}) algébriques ; nous nous bornons donc dorénavant à étudier les cônes C algébriques ; le problème est ramené à exprimer que les intégrales abéliennes (1) sont elles-mêmes des fonctions algébriques.

3. Sur la génératrice OB, prenons en particulier le point

$$\mu\left(\xi = \frac{c}{c'}, \eta = \frac{c'}{c'}, 1\right)$$

qui décrit la section σ de C par le plan $z = 1$; nous aurons alors les formules déjà trouvées au Chapitre précédent avec de légères différences de notation :

$$(2) \quad \begin{cases} x = \tau \int \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ y = -\tau \int \frac{d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ z = \tau \int \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}. \end{cases}$$

La courbe σ est du même genre que (\mathcal{A}_c) ; si $F(\xi, \eta) = 0$ est l'équation dans son plan de la courbe σ , tout revient à déterminer F, de sorte que les trois intégrales (2) soient algébriques : les conditions à écrire sont algébriques par rapport aux coefficients du polynôme F.

Nous allons indiquer un cas particulièrement simple où quelques-unes de ces conditions et leur interprétation géométrique s'obtiennent aisément.

Les seules singularités des intégrales (1) ou (2) correspondent aux génératrices isotropes du cône C ; supposons que C et I aient en commun une génératrice G simple sur C ; nous pouvons supposer que le plan xOy ne soit pas parallèle à G qui correspond donc à une solution finie ξ_0, η_0 des deux équations $F(\xi, \eta) = 0$, $1 + \xi^2 + \eta^2 = 0$, et nous pouvons développer au voisinage de ce point l'ordonnée η :

$$(3) \quad \eta - \eta_0 = \alpha(\xi - \xi_0) + \beta(\xi - \xi_0)^2 + \gamma(\xi - \xi_0)^3 + \delta(\xi - \xi_0)^4 + \dots;$$

d'où

$$1 + \xi^2 + \eta^2 = 2(\xi_0 + \alpha\eta_0)(\xi - \xi_0) + (1 + \alpha^2 + 2\eta_0\beta)(\xi - \xi_0)^2 + 2(\eta_0\gamma + \alpha\beta)(\xi - \xi_0)^3 + \dots$$

L'intégrale $\int \frac{d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}$ devant être algébrique, on a évidemment

$$(4) \quad \xi_0 + \alpha\eta_0 = 0$$

qui exprime qu'au point ξ_0, η_0 les deux courbes $F(\xi, \eta) = 0$,

$1 + \xi^2 + \eta^2 = 0$ ont même tangente; les deux cônes C et I se raccordent le long de G; supposons que G ne compte que pour deux unités dans l'intersection de C et I, autrement dit $1 + \alpha^2 + 2\eta_0\beta \neq 0$. Alors on a

$$\frac{1}{1 + \xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{(1 + \alpha^2 + 2\eta_0\beta)(\xi - \xi_0)^2} \left[1 - \frac{2(\eta_0\gamma + \alpha\beta)}{1 + \alpha^2 + 2\eta_0\beta} (\xi - \xi_0) + \dots \right].$$

En multipliant par $d\xi$ et intégrant, on voit que, pour éviter un logarithme, on doit avoir $\eta_0\gamma + \alpha\beta = 0$. Dans ces conditions, $\frac{1}{1 + \xi^2 + \eta^2}$ ne contient plus qu'un terme d'exposant négatif en $\frac{1}{(\xi - \xi_0)^2}$. Dans ces conditions, $d\eta$ ne devra pas contenir de terme en $\xi - \xi_0$, d'où $\beta = 0$, et comme $\eta d\xi - \xi d\eta = d\xi[\eta_0 - \alpha\xi_0 - 2\beta(\xi - \xi_0) + \dots]$, la dernière intégrale ne donnera pas de logarithme. Si nous rassemblons les conditions obtenues $\xi_0 + \alpha\eta_0 = 0$, $\eta_0\gamma + \alpha\beta = 0$, $\beta = 0$, on voit qu'on doit prendre $\eta_0\gamma = 0$ et, par suite, $\gamma = 0$; car si η_0 était nul, ξ_0 le serait aussi, ce qui est contradictoire avec $1 + \xi_0^2 + \eta_0^2 = 0$. Le développement (3) devient donc $\eta - \eta_0 = \alpha(\xi - \xi_0) + \delta(\xi - \xi_0)^4 + \dots$, ce qui prouve que le plan tangent au cône C coupe C suivant quatre génératrices confondues avec G.

Donc, si le cône C admet une génératrice isotrope simple G, il se raccorde avec I le long de G, et si le contact est simple, G est génératrice surinflexionnelle pour C.

Si le contact entre C et I était d'ordre plus élevé le long de OG, on formerait de même les conditions; mais, par cette méthode, l'interprétation géométrique serait assez difficile à obtenir.

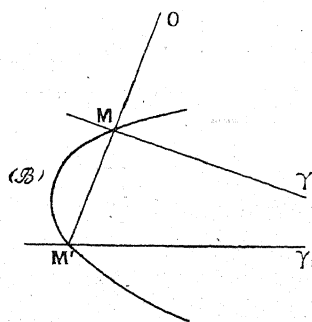
Remarquons en passant, et ceci sera utile pour les dénombrements ultérieurs, qu'une génératrice isotrope de C fournit deux sortes de conditions: un premier groupe de conditions est relatif au contact entre C et I; le second groupe s'obtient en annulant les résidus des intégrales (2) relatifs à cette génératrice; ce second groupe fournit trois équations au plus; ici, il n'y a que deux équations résiduelles.

Je me suis servi de la section plane σ , ce qui revient dans les intégrales (1) à adopter le point $(\xi, \eta, 1)$; on peut aussi se servir de l'indicatrice (\mathfrak{U}), ce qui revient à adopter le point (c, c', c'') . Voyons ce que devient l'interprétation géométrique précédente quand on étudie (\mathfrak{U}).

Pour pouvoir employer un langage géométrique simple, je fais une transformation homographique (imaginaire, mais peu importe) faisant correspondre un hyperboloïde à une nappe H à la sphère et le cône de sommet O circonscrit à l'hyperboloïde au cône I ; le cône C devient un cône de sommet O ; je conserve dans la nouvelle figure les mêmes lettres C, I, \mathfrak{U} ; P étant le plan de la conique de contact de I avec H , une homologie de pôle O et plan directeur P transforme H et \mathfrak{U} en eux-mêmes. Un plan tangent quelconque à I coupe H suivant deux génératrices γ et γ_1 , se transformant l'une dans l'autre dans cette homologie; M étant un point commun à γ et (\mathfrak{U}) , le point homologique M_1 appartient à γ_1 et (\mathfrak{U}) . Donc pour obtenir toutes les génératrices communes au cône C et au plan tangent au cône I en question, il suffit de prendre tous les points d'intersection avec (\mathfrak{U}) de l'une des deux génératrices γ ou γ_1 , γ par exemple.

Imaginons donc que C et I aient en commun une génératrice OG simple, le long de laquelle ils ont un contact simple : au point p où OG perce le plan P , C est tangent à H , donc l'intersection (\mathfrak{U}) de C et H présente en p un point double, les deux branches qui s'y croisent

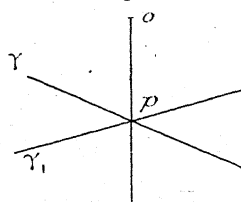
Fig. 2.



sont homologues l'une de l'autre; cherchons l'intersection du cône C avec le plan tangent commun à C et I le long de OG ; les deux génératrices γ et γ_1 passent en p . Conformément à ce qui précède, adoptons γ . Si γ n'est tangente à aucune des deux branches de (\mathfrak{U}) qui se croisent en p , le point p compte pour deux dans l'intersection de γ avec (\mathfrak{U}) , donc le plan tangent à C le long de OG a un contact simple avec C ; si, au contraire, γ a un contact d'ordre k avec l'une des branches, γ_1 a avec

cette branche $h + 1$ points communs réunis en p et avec l'autre branche qui est tangente à γ_1 , un seul point commun : au total, p compte pour

Fig. 3.



$h + 2$ dans l'intersection de γ avec (\mathfrak{w}) , le plan tangent à C le long de OG a un contact d'ordre $h + 1$ avec le cône C .

Appliquons ceci au cas particulier étudié; nous avons trouvé $h + 2 \geq 4$, donc $h \geq 2$; autrement dit, γ est tangente stationnaire pour l'une des branches de \mathfrak{w} ; γ_1 tangente stationnaire pour l'autre branche.

Je ferai de nombreuses applications de cette étude.

4. Je reprends les intégrales (1) ou (2). Au voisinage d'une génératrice non isotrope de C , ces intégrales sont régulières. On doit exprimer que la singularité logarithmique disparaît pour chaque génératrice isotrope de C . Pour trouver sans peine les conditions résiduelles, je me servirai systématiquement de la courbe σ ; je pose :

$$(5) \quad \xi + i\eta = \lambda, \quad \xi - i\eta = \mu;$$

$$(6) \quad \begin{cases} x + iy = -\tau i \int \frac{d\lambda}{1 + \lambda\mu} & = -\tau i I_1, \\ x - iy = \tau i \int \frac{d\mu}{1 + \lambda\mu} & = \tau i I_2, \\ 2s = -\tau i \int \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1 + \lambda\mu} & = -\tau i I_3. \end{cases}$$

Soit une génératrice isotrope G du cône C , simple ou multiple. Si je coupe le cône C par un plan quelconque, la trace de G sur ce plan est un point de cette section plane, origine sur cette section d'un ou plusieurs cycles; je considère ce cycle, s'il est unique, ou l'un deux s'il y en a plusieurs. Le cycle en question est caractérisé par deux entiers positifs, le degré p et la classe q ; ces deux entiers sont attachés à la

génératrice G et ne changent pas si je remplace la section plane par une autre section plane. Je prends donc cette fois comme plan xOy un plan parallèle à G , de sorte que la section σ par le plan $z = 1$ présente une direction infinie cyclique et dans ces conditions nous pourrions représenter la branche infinie relative au cycle considéré par les développements convergents pour t suffisamment petit :

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda = B t^q + B_1 t^{q+1} + \dots, \\ \mu = \frac{A}{t^p} + \frac{A_1}{t^{p-1}} + \dots; \end{cases}$$

A et B sont différents de zéro; $1 + \lambda\mu = 1 + AB t^{q-p} + \dots$

Je vais montrer d'abord que $q < p$ est impossible. Dans ce cas, on aurait en effet

$$1 + \lambda\mu = \frac{AB}{t^{p-q}} + \dots$$

et

$$I_2 = \int \left[\frac{-(p+q)}{t} + a_0 + a_1 t + \dots \right] dt$$

et alors il y aurait singularité logarithmique.

Il reste donc simplement deux hypothèses : $q > p$ ou bien $q = p$. Ceci entraîne bien que q ne soit pas nul, de sorte que p est bien le degré du cycle, q sa classe et que, de plus, le plan tangent au cône C le long de G soit le plan isotrope $x + iy = 0$; il y a encore raccordement entre le cône C et le cône I .

Prenons d'abord $q > p$; dans ce cas, on a

$$1 + \lambda\mu = 1 + AB t^{q-p} + \dots, \quad \frac{1}{1 + \lambda\mu} = 1 - AB t^{q-p} + \dots$$

Si l'on remarque que $d\lambda$ et $\frac{1}{1 + \lambda\mu}$ ne contiennent pas de termes à exposant négatif, l'intégrale I_1 ne donne aucune condition. On a

$$I_2 = \int \frac{d\mu}{1 + \lambda\mu} = \int d\mu [1 - AB t^{q-p} + \dots].$$

On peut remarquer que $d\mu$ ne contient pas de terme en $\frac{1}{t}$, donc en multipliant $d\mu$ par 1, la partie obtenue ne donne pas de singularité logarithmique; si l'on multiplie $d\mu$ par la partie complémentaire

($-ABt^{q-p} + \dots$), on remarque que $d\mu$ commence par un terme en t^{-p-1} ; donc, si $q-p \geq p+1$ ou $q \geq 2p+1$, I_2 ne donnera aucune condition. Il est impossible que $q=2p$, car on obtiendrait un terme unique en $\frac{1}{t}$ ne pouvant se réduire; enfin, si $2p > q > p$, on aura une condition facile à former. Enfin, $\lambda d\mu - \mu d\lambda$ commence évidemment par un terme en t^{q-p-1} dont l'exposant est nul ou positif, donc I_3 ne donne pas de condition.

En résumé, si q est supérieur à p , q ne peut être égal à $2p$; si q est compris entre p et $2p$, on ne trouve qu'une condition résiduelle; si q surpasse $2p$, on n'a aucune condition résiduelle; j'aurai l'occasion de faire de nombreuses applications de cette dernière remarque.

Soit maintenant $q=p$; dans ce cas, il est impossible que $I+AB$ soit différent de zéro, car on aurait, dans le cas contraire,

$$I_3 = \int \left[\frac{-2pAB}{t} + \dots \right] \left[\frac{1}{1+AB} + \dots \right] dt,$$

d'où singularité logarithmique.

Je suppose donc

$$q=p, \quad I+AB=0, \quad 1+\lambda\mu = Kt^r + \dots, \quad \frac{1}{1+\lambda\mu} = \frac{1}{Kt^r} [1 + \alpha t + \dots];$$

$$(8) \quad \begin{cases} I_1 = \int \frac{[Bpt^{p-1} + \dots][1 + \alpha t + \dots]}{Kt^r} dt, \\ I_2 = \int \left[\frac{-Ap}{t^{p+1}} + \dots \right] \frac{1 + \alpha t + \dots}{Kt^r} dt, \\ I_3 = \int \left[\frac{2p}{t} + \dots \right] \frac{1 + \alpha t + \dots}{Kt^r} dt. \end{cases}$$

On annule dans I_2 et I_3 le coefficient de $\frac{1}{t}$ sous le signe \int ; quant à I_1 , si $1 \leq r \leq p-1$, elle ne donne pas de condition; $r=p$ est impossible; si $p+1 \leq r$, I_1 donne une condition.

Nous allons résumer ceci et l'éclairer par une interprétation géométrique : si l'on pose $\mu = \frac{X}{Y}$, $\lambda = \frac{Z}{Y}$, on peut écrire

$$(9) \quad \begin{cases} X = A + A_1 t + \dots, \\ Y = t^p, \\ Z = B t^{p+q} + \dots \end{cases}$$

Nous avons déjà remarqué que q n'est pas nul puisque $q \geq p$ et cela justifie bien que p est le degré, q la classe du cycle. La génératrice G a pour équations $z = 0$, $x = iy = 0$; elle compte pour p dans l'intersection du cône C avec un plan quelconque passant par G , distinct du plan tangent $x + iy = 0$ qui est en même temps tangent au cône I ; elle compte pour $p + q$ dans l'intersection de C avec le plan tangent isotrope : on remarque que ce nombre $p + q$ est au moins égal à $2p$. L'intersection des deux cônes C et I résulte en coordonnées homogènes de l'équation $Y^2 + Z = 0$; or

$$(10) \quad Y^2 + XZ = t^{2p} + AB t^{p+q} + \dots$$

Si donc $q > p$, la génératrice G compte pour $2p$ dans l'intersection de C et I et pour $p + q > 2p$ dans l'intersection de C avec son plan tangent le long de G . Si $q = p$, G compte pour $2p + r$ dans l'intersection de C et I et pour $2p$ dans l'intersection de C avec son plan tangent, car dans ce cas on a écrit

$$(11) \quad Y^2 + XZ = k t^{2p+r} + \dots$$

J'appellerai indice de G et je représenterai par i la contribution du cycle étudié dans l'intersection de C et I . Le fait remarquable est que l'on a eu à choisir entre les deux systèmes

$$(12) \quad q = p + s, \quad i = 2p;$$

$$(13) \quad q = p, \quad i = 2p + r,$$

qui s'excluent mutuellement : s entier positif non nul, r entier positif non nul.

On peut tirer de là quelques conclusions simples : si l'indice i est impair, on est nécessairement dans le cas $q = p$. Le cas de $i = 3$ est impossible, en courbes algébriques, car nous avons vu que $r = p$ est impossible; or $i = 3$ entraîne nécessairement $p = r = 1$.

Si l'on a $i = 2$, on a $p = 1$ et $q = p + s = s + 1$; or, $s = p = 1$ est impossible, donc $s \geq 2$; mais alors dans ce cas on a $q \geq 3$ ou $q \geq 2p + 1$, donc il n'y a pas de condition résiduelle; donc $i = 2$ entraîne comme conditions nécessaires et suffisantes pour la part de G , $p = 1$, $q \geq 3$, comme nous l'avons vu plus haut géométriquement au paragraphe 3.

Pour le dénombrement des conditions, on pourra se rappeler que

si $q = p + s$, on obtient une seule condition résiduelle si $1 \leq s \leq p - 1$ et aucune condition si $s \geq p + 1$. Si $q = p$, $i = 2p + r$, on a deux conditions résiduelles si $1 \leq r \leq p - 1$ et trois si $r \geq p + 1$.

5. Si donc on se donne un cône algébrique C ou simplement l'équation $F(\xi, \mu) = 0$ de la section σ , on voit :

1° Que toute génératrice isotrope de C donne un point de (A) à distance finie et régulier;

2° Que toute génératrice isotrope de C donne un point à l'infini correspondant à une singularité polaire logarithmique si l'on n'écrit aucune condition; si l'on veut que (A) soit algébrique, il y a à écrire pour chaque génératrice isotrope des conditions de deux espèces : les unes fixent les trois entiers p, q, i et ce n'est qu'après avoir fixé d'une façon précise ces trois entiers que l'on peut écrire les conditions résiduelles en nombre égal à 3, 2, 1 ou 0, suivant le cas. Le point correspondant de (A) est à l'infini et correspond alors à une singularité polaire.

Ceci fait : ou bien le cône C est unicursal, alors les conditions déjà formées, qui sont *nécessaires*, se trouvent être *suffisantes*, d'après les principes connus; ou bien le cône C est de genre non nul, soit g . Les conditions formées, toujours nécessaires, ne sont plus suffisantes. Chaque intégrale I_1, I_2, I_3 a $2g$ périodes cycliques (au plus). En annulant les $6g$ périodes en question, on a $6g$ équations (au plus) à adjoindre aux précédentes; l'ensemble de toutes ces équations est à la fois nécessaire et suffisant. Les coordonnées x, y, z du point courant de (A) sont des fractions rationnelles des coordonnées ξ, η du point correspondant de σ ; la réciproque est évidente.

6. Nous devons maintenant indiquer le degré de la courbe (A). Il suffit pour cela de compter le nombre des zéros de l'expression $ux + vy + wz + h$ où u, v, w, h sont des constantes arbitraires; or, le nombre des zéros ou des pôles est le même; il suffira donc de compter les pôles avec leur degré.

Reprenons le cycle étudié : si $q = p$, le terme d'exposant négatif le plus élevé provient de I_2 , le degré du pôle est $p + r$ ou si l'on veut $i - p$. Si $q > p$, i est encore I_2 qui donne le degré, égal à p cette fois, suscep-

tible encore d'être représenté par $i - p$. Si donc nous appelons m le degré du cône C , M le degré de (\mathfrak{A}) , on aura $M = \Sigma(i - p) = 2m - \Sigma p$. Si l'on remarque que $i \geq 2p$, on a $2m = \Sigma i \geq 2 \Sigma p$ ou $m \geq \Sigma p$, donc $M = 2m - \Sigma p \geq m$. Le résultat $m \leq M < 2m$ ou $\frac{M}{2} < m \leq M$ est intéressant à retenir; si l'on se donne l'un des nombres M ou m , l'autre est limité inférieurement et supérieurement. L'égalité $m = M$ ne peut ainsi avoir lieu que si tous les cycles sont du type $q > p$. Ici, il serait commode d'écrire pour chaque cycle $i = 2p + r$, r étant un entier positif ou nul; on a

$$m = \frac{1}{2} \Sigma i = \Sigma \left(p + \frac{r}{2} \right), \quad M = \Sigma(p + r),$$

$$M - m = \Sigma \frac{r}{2}.$$

Si la courbe (\mathfrak{A}) est réelle, C est réel et inversement; dans ce cas, à chaque génératrice G correspond la génératrice conjuguée qui donne les mêmes entiers p, q, i ; donc le degré de la courbe réelle (\mathfrak{A}) est nécessairement pair; si (\mathfrak{A}) est imaginaire, on peut avoir des courbes de degré impair: exemple, la cubique de M. Lyon.

7. Il importe de compléter ce qui précède en se rendant compte de la disposition que présentent (\mathfrak{B}) et (\mathfrak{A}) pour les génératrices isotropes de C . Soit d'abord $q = p + s$, $i = 2p$. On a

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{\xi} = \frac{c'}{\eta} = \frac{c''}{1} = \frac{c + ic'}{\lambda} = \frac{c - ic'}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\mu}}, \\ \frac{1}{1 + \lambda\mu} = 1 - AB t^{q-p} + \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\mu}} = 1 - \frac{AB}{2} t^{q-p} + \dots, \\ c + ic' = B t^q + \dots, \quad c - ic' = \frac{A}{t^p} + \dots, \quad c'' = 1 - \frac{AB}{2} t^{q-p} + \dots \end{array} \right.$$

La génératrice G a pour équations $x + iy = 0, z = 0$. La courbe (\mathfrak{B}) admet le point à l'infini de G pour point d'ordre p , la tangente en ce point est la droite $x + iy = 0, z - 1 = 0$, c'est-à-dire une génératrice de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ parallèle à G et cette tangente a q points communs avec la courbe (\mathfrak{B}) réunis au point de contact; le plan osculateur à la courbe (\mathfrak{B}) au point à l'infini étudié est le plan $x + iy = 0$, c'est-à-dire le plan tangent commun à C et I le long de OG , ce plan

a $p + q$ points communs avec la courbe (\mathfrak{A}) réunis au point de contact. La génératrice G compte aussi pour $p + q$ parmi les droites d'intersection du cône C et du plan $x + iy = 0$. Quant à la courbe (\mathfrak{A}) , d'après les formules (6) et (7) on a

$$(15) \quad \begin{cases} x + iy = \tau i I_1 = -\tau i [B t^q + \dots], \\ x - iy = \tau i I_2 = \tau i \left[\frac{A}{t^p} + \dots \right], \\ 2z = -\tau i I_3 = -\tau i \left[\frac{AB(p+q)}{p-q} t^{q-p} + \dots \right]; \end{cases}$$

d'où il résulte immédiatement que le point provenant de G est à l'infini dans la direction OG ; c'est un point multiple d'ordre p ; la tangente en ce point, en adoptant les constantes d'intégration des formules (15), est la génératrice G qui admet avec la courbe (\mathfrak{A}) q points communs confondus avec le point de contact; le plan osculateur est le plan $x + iy = 0$ ayant $p + q$ points communs avec la courbe.

Soit maintenant $q = p$, $i = 2p + r$. On a

$$(16) \quad \begin{cases} c + ic' = \frac{B}{\sqrt{K}} t^{p-\frac{r}{2}} + \dots, \\ c - ic' = \frac{A}{\sqrt{K}} \frac{1}{t^{p+\frac{r}{2}}} + \dots, \\ c'' = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{1}{t^2} + \dots; \end{cases}$$

ce qui prouve que le point à l'infini de (\mathfrak{A}) , à savoir le point à l'infini de la droite G $x + iy = 0, z = 0$, est, quand r est pair, multiple d'ordre p ; la tangente est la droite à l'infini du plan $x + iy = 0$; le plan osculateur est le plan $x + iy = 0$; le plus petit des deux nombres $p + \frac{r}{2}$ et $2p$ donne le nombre de points communs avec la tangente, l'autre le nombre de points communs avec le plan osculateur. Si r est impair, la disposition des éléments géométriques reste la même, mais l'ordre de multiplicité est $2p$ et le nombre de points communs avec la tangente ou le plan osculateur est l'un des deux

nombres $2p + r$ ou $4p$. Quant à la courbe (\mathfrak{A}) , on

$$(17) \quad \begin{cases} x + iy = -\tau i I_1 = -\tau i \left[\frac{B p}{K} \frac{l^{p-r}}{p-r} + \dots \right], \\ x - iy = \tau i I_2 = \tau i \left[\frac{A p}{K} \frac{1}{(p+r) l^{p+r}} + \dots \right], \\ 2z = -\tau i I_3 = \tau i \left[\frac{2p}{r K l^r} - \dots \right], \end{cases}$$

et cette fois la parité de r ne joue plus aucun rôle, mais c'est à p et non plus $2p$ qu'il faut comparer r ; r , comme nous savons, ne peut être égal à p . Si $r < p$, le point à l'infini de (\mathfrak{A}) , qui est toujours le point à l'infini de G , est multiple d'ordre p ; la tangente est la droite à l'infini du plan isotrope $x + iy = 0$, elle a $p + r$ points communs, réunis en ce point avec la courbe (\mathfrak{A}) ; le plan osculateur est le plan $x + iy = 0$ qui a en ce point $2p$ points communs avec (\mathfrak{A}) .

Si $r > p$, le point à l'infini est encore multiple d'ordre p ; la tangente est la même que précédemment, mais elle a au point de contact $2p$ points réunis communs avec (\mathfrak{A}) , le plan osculateur est le plan de l'infini qui a $p + r$ points communs confondus en ce point avec la courbe (\mathfrak{A}) .

On voit donc que toute courbe algébrique à torsion constante a tous ses points à l'infini sur le cercle de l'infini; le plan osculateur en chacun de ces points est ou bien isotrope ou confondu avec le plan de l'infini. Si la courbe est réelle, elle est donc de degré pair et fermée.

8. Nous avons à faire la même étude séparément pour chaque cycle isotrope.

Cela amène naturellement à considérer l'intersection de C avec la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et à distinguer le cas où cette intersection ne se décompose pas du cas où elle se décompose en deux courbes symétriques l'une de l'autre par rapport au centre de la sphère.

Dans le premier cas, la courbe (\mathfrak{A}) admet le centre de la sphère comme centre de symétrie, la surface minima (M_0) circonscrite à la sphère le long de (\mathfrak{A}) admet l'origine pour centre, la surface

minima (M) est double. Dans le second cas, la surface minima M est simple. Nous reviendrons sur ces propriétés.

Le fait que (\mathcal{C}) peut être indécomposable ou non est aussi à considérer quand il s'agit de chercher les axes de symétrie que peut posséder une courbe à torsion constante. Si un tel axe existe, les binormales aux points qui se correspondent sont elles-mêmes symétriques par rapport à l'axe, de sorte que l'intersection complète de C avec la sphère admet à la fois un axe de symétrie D parallèle au proposé et un plan P de symétrie perpendiculaire à cet axe; si la directrice sphérique est indécomposable, elle admet D pour axe de symétrie, P pour plan de symétrie, O pour centre de symétrie; mais si elle se décompose en deux courbes (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) symétriques l'une de l'autre par rapport à O, deux cas peuvent se présenter :

1° \mathcal{C}_1 est symétrique de \mathcal{C}_2 par rapport à D, (\mathcal{C}_1) [ainsi que (\mathcal{C}_2)] admet P pour plan de symétrie;

2° \mathcal{C}_1 est symétrique de \mathcal{C}_2 par rapport à P, (\mathcal{C}_1) [ainsi que (\mathcal{C}_2)] admet D pour axe de symétrie.

Quant à la section planée σ , si l'on a pris D pour axe des z , que la directrice sphérique de C soit ou non décomposable, elle admet pour centre de symétrie le point $(0, 0, 1)$ où son plan rencontre D.

Il est utile de montrer que, réciproquement, si σ admet le point $(0, 0, 1)$ pour centre, la courbe (\mathcal{C}) , *supposée algébrique*, admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des z . Pour déterminer (\mathcal{C}) , j'écris :

$$(18) \quad \begin{cases} x = \tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{\xi, \eta} \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ y = -\tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{\xi, \eta} \frac{d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ z = \tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{\xi, \eta} \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \end{cases}$$

où (ξ_0, η_0) est un point pris sur σ une fois pour toutes; le point mobile (ξ, η) décrit σ ; les intégrales curvilignes sont prises sur σ de (ξ_0, η_0) à (ξ, η) .

Je considère le point A' correspondant à $(-\xi, -\eta)$, j'ai :

$$(19) \quad \begin{cases} x' = \tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{-\xi, -\eta} \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ y' = -\tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{-\xi, -\eta} \frac{d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ z' = \tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{-\xi, -\eta} \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}. \end{cases}$$

En raison de la symétrie de σ , nous pouvons, au lieu de (19), écrire

$$(20) \quad \begin{cases} x' = -\tau \int_{-\xi_0, -\eta_0}^{\xi, \eta} \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ y' = \tau \int_{-\xi_0, -\eta_0}^{\xi, \eta} \frac{d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ z' = \tau \int_{-\xi_0, -\eta_0}^{\xi, \eta} \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}. \end{cases}$$

De (18) et (20), on tire évidemment

$$(21) \quad \begin{cases} x + x' = \tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{-\xi_0, -\eta_0} \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ y + y' = -\tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{-\xi_0, -\eta_0} \frac{d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ z - z' = \tau \int_{\xi_0, \eta_0}^{-\xi_0, -\eta_0} \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}. \end{cases}$$

La dernière intégrale (21) est nulle, car changer ξ en $-\xi$ et η en $-\eta$ revient, d'une part, en raison de la symétrie, à laisser l'intégrale inaltérée, et, d'autre part, à changer simplement les limites. On a donc bien

$$(22) \quad x + x' = a, \quad y + y' = b, \quad z - z' = 0;$$

a et b étant des constantes. La démonstration est donc faite; mais ceci pourrait être en défaut si les intégrales n'étaient pas algébriques, car chacune serait déterminée seulement à une somme de périodes près; l'exemple de l'hélice circulaire met précisément la démonstration en défaut.

De même, si le cône C se reproduit par une rotation de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz , la courbe (\mathcal{A}) supposée algébrique jouit de la même propriété; dans le cas où la directrice sphérique (\mathcal{B}) est indécomposable, il n'y a rien à ajouter; mais si elle se décompose en une courbe (\mathcal{B}) et la courbe (\mathcal{B}') symétrique de (\mathcal{B}) par rapport à O , la rotation $\frac{2\pi}{m}$ peut ou bien faire coïncider (\mathcal{B}) avec elle-même ou bien l'appliquer sur (\mathcal{B}') . La démonstration est toute pareille et se fait par l'intermédiaire de σ , l'axe de rotation ayant été pris pour axe Oz .

9. Nous pouvons maintenant donner une représentation géométrique simple des conditions d'algèbre de la courbe (\mathcal{A}) correspondant à un cône algébrique C donné.

Nous avons négligé jusqu'ici la courbe (\mathcal{B}) pour σ , parce que, au cas où la directrice sphérique de C est indécomposable, cette directrice est d'un genre en général supérieur à celui de la directrice plane σ . Revenons désormais à (\mathcal{B}) ; nous pouvons établir une correspondance point par point entre (\mathcal{B}) et une certaine courbe plane $H(X, Y) = 0$, de telle sorte que c, c', c'' soient exprimées rationnellement en X, Y et inversement; d'autre part, le point analytique (X, Y) peut être figuré par un point d'une surface de Riemann convenablement choisie; au point $B(c, c', c'')$ de (\mathcal{B}) , j'associe donc le point figuratif b de cette surface de Riemann. Si le cône C algébrique a été pris quelconque, les formules déjà employées

$$(23) \quad \begin{cases} x = \tau \int_{B_0}^B c'' dc' - c' dc'', \\ y = \tau \int_{B_0}^B c' dc - c dc', \\ z = \tau \int_{B_0}^B c dc'' - c'' dc, \end{cases}$$

où B_0 est un point fixe de (\mathcal{B}) et B le point variable, déterminent les coordonnées x, y, z du point A de (\mathcal{A}) une fois indiqué le chemin suivi de b_0 à b . Les diverses déterminations de x, y, z ne diffèrent que par des périodes polaires ou cycliques, c'est-à-dire ne diffèrent que

par des intégrales prises le long de certains chemins fermés suivis sur la surface de Riemann, de sorte que si l'on considère tous les points réels et imaginaires de la courbe (\mathfrak{U}) , on prend les intégrales sur certains circuits fermés, réels ou imaginaires, partant d'un point de (\mathfrak{U}) et y revenant. Par exemple, pour une génératrice isotrope G du cône C , on aura un point g de la surface de Riemann et un circuit fermé décrit autour du point g , auquel correspond sur l'indicatrice (\mathfrak{U}) un certain arc imaginaire entourant la génératrice isotrope considérée. Je définirai même avec précision le circuit décrit autour de g : si g n'est pas point de ramification, on prendra un cercle de rayon infiniment petit décrit dans le sens direct une seule fois autour de g , et si g est point de ramification, le circuit décrit dans le sens direct autour de g limitant le domaine du point g . Si u, v, w sont les valeurs des trois intégrales $\tau \int c'' dc' - c' dc''$, $\tau \int c dc'' - c'' dc$, $\tau \int c' dc - c dc'$ le long de ce circuit fermé, le vecteur (u, v, w) sera le *vecteur période polaire* de la courbe (\mathfrak{A}) relatif à la génératrice isotrope G . Si le cône C est de genre supérieur ou égal à l'unité, il y aura lieu de définir les *vecteurs périodes cycliques* de la courbe (\mathfrak{A}) correspondant aux circuits donnant sur la surface de Riemann les périodes cycliques des trois intégrales. Si donc $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), \dots, (u_n, v_n, w_n)$ sont les divers vecteurs périodes, polaires ou cycliques, au point x, y, z de (\mathfrak{A}) correspondent une infinité de points congruents :

$$(24) \quad \begin{cases} x + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \\ y + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \\ z + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n, \end{cases}$$

où les λ sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, arbitraires.

La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (\mathfrak{A}) soit algébrique est que chacun des vecteurs $(u_1, v_1, w_1), \dots, (u_n, v_n, w_n)$ soit nul. On peut remarquer que si (\mathfrak{U}) est de genre supérieur à σ , la surface de Riemann relative à (\mathfrak{U}) peut être remplacée par la surface de Riemann plus simple relative à σ , mais cela importe peu pour le but que je me propose dans ce paragraphe.

Songons maintenant à l'interprétation géométrique des trois inté-

grales $\int c' dc'' - c'' dc'$, $\int c'' dc - c dc''$, $\int c dc' - c' dc$ qui entrent en jeu ici. M. Kœnigs, dans la Note rappelée plus haut, l'a donnée. Soit un arc $B_0 B$ de (\mathfrak{B}) ; je le décompose en un certain nombre d'arcs infiniment petits $B_0 B_1$, $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, ..., $B_{k-1} B$ dont le nombre k croît indéfiniment; les cordes $B_0 B_1$, $B_1 B_2$, ..., $B_{k-1} B$ forment un système de vecteurs ayant pour résultante de translation la corde $B_0 B$ et, à la limite, pour moment résultant par rapport à l'origine $\int_{B_0}^B c' dc'' - c'' dc'$, $\int_{B_0}^B c'' dc - c dc''$, $\int_{B_0}^B c dc' - c' dc$. Si le point B coïncide avec B_0 , nous avons un circuit fermé, réel ou imaginaire, partant de B_0 et y revenant; le système de vecteurs que nous avons imaginé forme un couple; l'axe de ce couple est compris dans l'une des expressions

$$(25) \quad \begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \\ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n. \end{cases}$$

Si la courbe (\mathfrak{A}) est algébrique, chacun des circuits fermés découpés sur la courbe (\mathfrak{B}) donne un système de vecteurs constituant, non plus un couple, mais un système équivalent à zéro.

M. Kœnigs, qui a introduit cette conception, ne l'avait appliquée qu'à un circuit unique, à savoir le circuit réel constitué par la portion réelle de l'indicatrice (\mathfrak{B}) .

Il faut exprimer que tous les points de l'ensemble (25) se réduisent à l'origine. Il y a lieu d'étudier à part les vecteurs périodes polaires et les vecteurs périodes cycliques.

On sait que la somme des résidus d'une fraction rationnelle sur une surface de Riemann est nulle. Donc, pour les vecteurs périodes polaires, il suffira d'exprimer que les vecteurs relatifs à toutes les génératrices isotropes, moins une prise au hasard, se réduisent à zéro. En particulier, si le cône C n'a qu'une génératrice isotrope, auquel cas il est nécessairement imaginaire, le résidu est nul pour chaque intégrale, et alors si C est unicursal, la courbe (\mathfrak{A}) est algébrique. Nous verrons plus loin que la détermination des cônes unicursaux à unique génératrice isotrope revient à la résolution de l'identité célèbre $AD - BC \equiv 1$

entre quatre polynomes; j'y reviendrai plus loin. La cubique de M. Lyon est le type le plus simple.

La réduction du nombre total de conditions, si le cône C présente soit un axe de rotation, soit un axe et un plan de symétrie, devient intuitive. L'ensemble des points donnés par les formules (25) possède évidemment la propriété de se reproduire par les rotations et les symétries du cône C . Remarquons, en effet, qu'un circuit fermé et le symétrique de ce circuit par rapport à l'origine ont même axe; on peut donc se borner aux rotations laissant le cône C invariant; un circuit fermé découpé sur (\mathfrak{U}) devient après la rotation, suivie s'il est besoin d'une symétrie par rapport à O , un circuit fermé découpé sur (\mathfrak{U}) ; le vecteur période n'a fait que tourner autour de l'axe de rotation de l'angle caractérisant cette rotation. Et ceci, bien entendu, s'applique aux points qui dérivent de la composition des vecteurs périodes polaires pris isolément; pour les vecteurs périodes cycliques, ceci s'applique aussi.

Donnons dès maintenant une application très simple: supposons que le cône algébrique C n'ait que deux génératrices isotropes; si le cône C ne présente aucune propriété de rotation ou symétrie, j'exprime que l'un des deux vecteurs périodes est nul et j'ai trois conditions (au plus). Si le cône C admet le plan xOy pour plan de symétrie, et par suite Oz pour axe de symétrie, tout en n'ayant que deux génératrices isotropes, deux circonstances peuvent se présenter: les deux génératrices isotropes sont dans le plan xOy , ou bien sont contenues toutes deux dans un plan passant par Oz , aucune n'étant dans le plan xOy . Dans le premier cas, chaque génératrice isotrope est à elle-même sa symétrique par rapport à Oz , le vecteur période correspondant est à lui-même son symétrique par rapport à Oz , il est porté sur Oz , donc il suffit d'écrire une seule condition pour annuler les vecteurs périodes. Dans le second cas, les deux génératrices isotropes s'échangent dans une symétrie par rapport à Oz , donc les deux vecteurs périodes correspondants étant à la fois symétriques par rapport à Oz et opposés sont dans le plan xOy : il suffit de deux conditions pour annuler l'ensemble des deux vecteurs périodes. Nous donnerons des exemples précis de ces deux cas.

Si le cône C n'a que deux génératrices isotropes et coïncide avec

lui-même après une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz , m étant un entier supérieur à 2 sans égalité, les deux vecteurs périodes étant d'une part opposés et d'autre part se reproduisant dans leur ensemble par une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz sont nécessairement alignés sur Oz , donc il suffit encore d'une condition unique pour annuler l'ensemble des deux vecteurs périodes polaires.

Pour éviter toute objection, je fais observer que j'ai défini avec précision, en grandeur, direction et sens, le vecteur période polaire relatif à une génératrice isotrope : dans une symétrie, ou rotation, la courbe (15) présente une transformation rationnelle en elle-même où les génératrices isotropes s'échangent soit en elles-mêmes, soit les unes avec les autres; dans ces transformations analytiques, les circuits infinitésimaux tracés sur la surface de Riemann s'échangent dans les mêmes conditions et les sens positifs se conservent, remarque essentielle à faire pour la rigueur de ce qui précède.

Dans ce qui précède, je ne suppose rien sur la réalité ou non-réalité des éléments géométriques. Si l'équation du cône C est à coefficients imaginaires, nous obtenons des équations entre quantités imaginaires. Si le cône C est réel (au sens vulgaire) ou du moins représenté par une équation à coefficients réels (réel au sens de M. Goursat), les génératrices isotropes sont deux à deux imaginaires conjuguées, les résidus correspondants sont imaginaires conjugués; les périodes cycliques sont deux à deux imaginaires conjuguées. Donc les équations dénombrées coïncident, dans leur ensemble, avec le système des équations conjuguées; on peut donc s'arranger par un choix convenable d'inconnues pour que ces équations soient des équations à coefficients réels entre quantités réelles.

Les exemples qui suivent au Chapitre III éclaireront ce qui précède; c'est grâce à l'ensemble des considérations *a priori* qui vient d'être exposé que j'ai pu me placer dans les circonstances les plus favorables pour obtenir des exemples de courbes à torsion constante algébriques, imaginaires ou réelles, unicursales ou non.

10. Rendons-nous compte de ce qui se passe dans le cas précis où le cône C est unicursal; soit m le degré de C . La section σ est unicur-

sale, de degré m . J'écris donc :

$$(26) \quad \xi = \frac{P(t)}{R(t)}, \quad \eta = \frac{Q(t)}{R(t)},$$

où P, Q, R sont trois polynomes de degré m en t . Dans les formules (1), je peux supposer h, k, l remplacées par P, Q, R , d'où

$$(27) \quad \begin{cases} x = \tau \int \frac{RQ' - QR'}{P^2 + Q^2 + R^2} dt, \\ y = \tau \int \frac{PR' - RP'}{P^2 + Q^2 + R^2} dt, \\ z = \tau \int \frac{QP' - PQ'}{P^2 + Q^2 + R^2} dt. \end{cases}$$

Les génératrices isotropes sont données par l'équation $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$ qui est de degré $2m$ et ne doit avoir que des racines multiples. Les numérateurs des fractions à intégrer sont du degré $2m - 2$ seulement; la somme des résidus est bien nulle.

Si tous les indices sont pairs, $P^2 + Q^2 + R^2$ est le carré d'un polynome entier $S(t)$ et alors la directrice sphérique du cône C se compose d'une courbe (\mathfrak{U}) unicursale de degré m , $c = \frac{P(t)}{S(t)}$, $c' = \frac{Q(t)}{S(t)}$, $c'' = \frac{R(t)}{S(t)}$, et de la courbe symétrique (\mathfrak{U}') . Il y a avantage à se servir ici de la directrice sphérique (\mathfrak{U}) plutôt que de la directrice plane σ ; considérons, en effet, les coordonnées curvilignes employées sur la sphère :

$$(28) \quad \alpha = \frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'}, \quad \beta = \frac{c - ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c + ic'}.$$

Ici :

$$\alpha = \frac{P + iQ}{S - R} = \frac{S + R}{P - iQ}, \quad \beta = \frac{P - iQ}{S - R} = \frac{S + R}{P + iQ}.$$

En vertu de l'identité $P^2 + Q^2 = (S + R)(S - R)$, le polynome $S - R$ a des racines communes avec $P + iQ$ et avec $P - iQ$, de sorte que les fractions α et β peuvent se simplifier, et nous écrivons

$$(29) \quad \alpha = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \quad \beta = \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)};$$

f et φ étant deux polynomes premiers entre eux, ainsi que f_1 et φ_1 .

Si nous coupons la courbe (\mathfrak{U}) par un plan tangent quelconque de la sphère, le nombre des points d'intersection, égal à m , s'obtient en totalisant les racines des deux équations $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ en désignant par α_0 et β_0 les paramètres des deux génératrices de la sphère contenues dans le plan tangent. Si donc la fraction α est du degré m_1 et la fraction β du degré m_2 , on a $m_1 + m_2 = m$, tandis qu'avant réduction on semblait avoir deux fractions de degré m . Si le cône C est réel, les deux fractions α et β sont de même degré, égal à $\frac{m}{2}$. Si l'on remarque que

$$c = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad c' = i \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}, \quad c'' = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1}$$

et, par suite,

$$\xi = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta - 1} = \frac{f\varphi_1 + f_1\beta}{ff_1 - \varphi\varphi_1}, \quad \eta = i \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta - 1} = i \frac{f_1\varphi - f\varphi_1}{ff_1 - \varphi\varphi_1},$$

on voit que l'équation $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$ devient $(ff_1 + \varphi\varphi_1)^2 = 0$. On a exprimé automatiquement, sous la forme (29), que $P^2 + Q^2 + R^2$ est carré parfait. Sous la forme (26), on doit introduire $3m + 2$ coefficients non homogènes, avec m conditions pour exprimer que $P^2 + Q^2 + R^2$ est carré parfait; sous la forme (29), on n'a que $(2m_1 + 1) + (2m_2 + 1)$ coefficients non homogènes, nombre égal à $2m + 2$, résultat qui coïncide bien avec le premier dénombrement. Nous retiendrons que chaque indice doit être pris au double de l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation $ff_1 + \varphi\varphi_1 = 0$. Nous verrons même plus loin que si l'on se donne, le cône C étant supposé réel, le nombre des racines de $ff_1 + \varphi\varphi_1$ avec leur degré de multiplicité, on sait exprimer explicitement les quatre polynômes f , φ , f_1 , φ_1 au moyen des arbitraires strictement indépendantes.

Les exemples réels, connus avant ce Mémoire, avaient été trouvés par M. Fabry, correspondant à des cônes à deux génératrices isotropes, sans utiliser la simplification provenant de l'indicatrice sphérique; le lecteur pourra juger de l'importance de cette simplification.

Si le cône C est réel, dans le cas où les indices sont pairs, la courbe unicursale (\mathfrak{U}) est d'un seul tenant et fermée.

11. Supposons maintenant que tous les indices ne soient pas tous pairs, mais qu'il y en ait deux au plus qui soient impairs. En vertu de la relation $\Sigma i = 2m$, le nombre des indices impairs est pair; donc il y aura exactement deux indices impairs; en supposant, ce qui est toujours permis, que les deux valeurs de t correspondantes soient finies, on a $P^2 + Q^2 + R^2 = (t - t_1)(t - t_2)S^2(t)$; il résulte de là que c, c', c'' ne sont pas exprimés rationnellement en t , mais que si l'on écrit $\theta^2 = (t - t_1)(t - t_2)$ on pourra exprimer rationnellement t et θ au moyen d'un nouveau paramètre T auxiliaire, de sorte que la courbe c, c', c'' est néanmoins unicursale; c'est une courbe de degré $2m$ symétrique par rapport au centre de la sphère. Comme précédemment, on pourra écrire

$$(30) \quad \alpha = \frac{f(T)}{\varphi(T)}, \quad \beta = \frac{f_1(T)}{\varphi_1(T)},$$

la somme des degrés des deux fractions étant égale à $2m$; la seule différence avec ce qui précède est que, à chaque valeur de t , correspondent deux valeurs de θ et par suite de T échangeant c, c', c'' avec $-c, -c', -c''$, c'est-à-dire α en $\frac{-1}{\beta}$ et β en $\frac{-1}{\alpha}$. Les coordonnées d'un point de (\mathcal{A}) sont exprimées rationnellement en t : la représentation de ces coordonnées en T est une représentation impropre qui fait parcourir la courbe (\mathcal{A}) deux fois, mais la courbe (\mathcal{B}) une seule fois.

Si le cône C est réel, les deux génératrices d'indice impair sont conjuguées, m est nécessairement impair. On peut s'arranger pour que $t_1 = -t_2 = i$, et, en posant $t = \tan \varphi$,

$$(31) \quad P^2 + Q^2 + R^2 = (1 + t^2)S^2(t),$$

$$c = \frac{\cos \varphi P(\tan \varphi)}{S(\tan \varphi)}, \quad c' = \frac{\cos \varphi Q(\tan \varphi)}{S(\tan \varphi)}, \quad c'' = \frac{\cos \varphi R(\tan \varphi)}{S(\tan \varphi)},$$

en partant d'un point réel A_0 de (\mathcal{A}) avec la valeur φ_0 et faisant varier φ de φ_0 à $\varphi_0 + \pi$, on décrit toute la courbe (\mathcal{A}) revenant au point de départ A_0 , mais aboutissant sur la courbe (\mathcal{B}) au point B'_0 diamétralement opposé au point de départ B_0 . La courbe (\mathcal{B}) est fermée et d'un seul tenant; elle jouit de cette propriété intéressante, c'est que, si l'on prend au hasard deux points diamétralement opposés sur elle B_0 et B'_0 , le circuit obtenu par une circulation réelle ou imaginaire sur

cette courbe à partir de B_0 pour aboutir à B'_0 , puis par le trajet rectiligne $B'_0 B_0$, qui ramène en B_0 , a son axe nul, au sens de M. Kœnigs; ou, si l'on veut, le système des vecteurs infiniment petits mis bout à bout sur le trajet curviligne $B_0 B'_0$ est équivalent à un vecteur unique $B_0 B'_0$.

À la rigueur, nous pourrions dire ici que l'indicatrice sphérique des binormales est une courbe ouverte réunissant deux points diamétralement opposés de la sphère.

La surface minima (M) est double, la surface minima (M_0) a un centre.

Dans ce cas qui vient d'être étudié, je dirai que l'indicatrice sphérique (\mathfrak{W}) est *mixte*, pour rappeler que si c, c', c'' ne s'expriment pas rationnellement en t , ils s'expriment pourtant rationnellement au moyen d'un autre paramètre.

12. Soit maintenant le cas où les indices impairs sont en nombre supérieur à deux; ce nombre est pair. La courbe (\mathfrak{W}) est indécomposable de degré $2m$ double de celui de C et σ , symétrique par rapport à l'origine, mais n'est plus unicursale.

Si la courbe (\mathfrak{A}) est réelle, nous supposons que le paramètre t est réel pour les points réels de (\mathfrak{A}), ou σ , et l'on écrira

$$(32) \quad P^2 + Q^2 + R^2 = S^2(t) [(t - a_1)^2 + b_1^2] \dots [(t - a_h)^2 + b_h^2].$$

$S(t)$ étant un polynôme à racines deux à deux imaginaires, donc de degré pair; on a donc $2m = 4p + 2h$ ou $m = 2p + h$, le degré du cône C est de même parité que le nombre des couples d'indice impair. D'autre part, on a

$$c = \frac{P(t)}{S(t) \sqrt{[(t - a_1)^2 + b_1^2] \dots [(t - a_h)^2 + b_h^2]}}$$

et formules analogues pour c', c'' ; si donc on fait varier t de $-\infty$ à $+\infty$, de façon à décrire toute la courbe (\mathfrak{A}), nous suivrons par continuité la variation de c, c', c'' ; supposons le radical pris positivement pour une certaine valeur t_0 de t ; comme il ne s'annule jamais, il reste toujours positif; le polynôme $S(t)$ garde un signe constant, donc de $-\infty$ à $+\infty$ le dénominateur de c, c', c'' garde un signe constant;

si m et h sont impairs, les polynomes P, Q, R ont changé de signe lorsque la variation de t depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ a ramené au point de départ; autrement dit, l'indicatrice (\mathfrak{U}) se compose encore d'une courbe ouverte joignant deux points diamétralement opposés de la sphère; si nous parcourons la courbe (\mathfrak{A}) deux fois coup sur coup dans le même sens, nous décrivons d'abord la courbe ouverte, puis la portion symétrique: ces deux portions réunies constituent la courbe (\mathfrak{U}) complète, qui est d'un seul tenant.

Si maintenant m et h sont pairs, le même raisonnement montre qu'une circulation complète sur (\mathfrak{A}) ramène au point c, c', c'' de départ, donc l'indicatrice (\mathfrak{U}) se compose de deux branches séparées, symétriques l'une de l'autre, fermées chacune et d'un seul tenant; ces deux courbes sont les deux moitiés d'une même courbe algébrique.

Quelle que soit la parité de m , la surface minima (M) est double.

13. Dans le cas où le cône C est de genre non nul, il peut arriver que la directrice sphérique soit composée d'une courbe (\mathfrak{U}) et d'une courbe (\mathfrak{U}') symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine et analytiquement distinctes. Dans ce cas, le degré et le genre de C sont les mêmes que ceux de (\mathfrak{U}) ; les indices des génératrices isotropes sont tous pairs, la courbe (\mathfrak{A}) a pour genre le genre commun de (\mathfrak{U}) et C . La surface minima M est simple. Ces résultats dérivent de ce que l'équation du cône est de la forme

$$(33) \quad (x^2 + y^2 + z^2) B^2(x, y, z) - A^2(x, y, z) = 0,$$

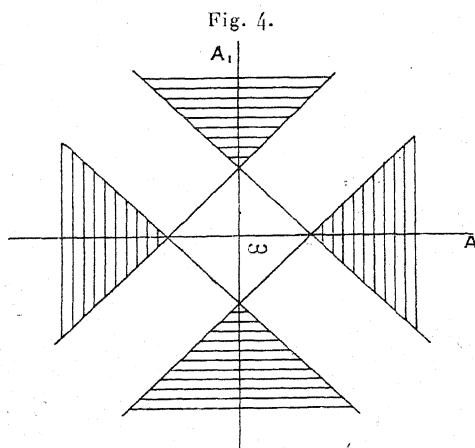
où A et B désignent des polynomes homogènes en x, y, z .

Si l'intersection de C et de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se compose d'une seule courbe indécomposable analytiquement, symétrique par rapport à l'origine, le degré C est égal à la moitié du degré de (\mathfrak{U}) , le genre commun de (\mathfrak{A}) et C est en général inférieur à celui de (\mathfrak{U}) , mais il peut lui être égal, comme le prouve l'exemple des cônes unicursaux à directrice mixte; quant aux indices des cycles isotropes, des circonstances bien distinctes au point de vue de la parité sont à considérer. Il peut arriver ici que tous les indices soient pairs et que, néanmoins, la directrice sphérique (\mathfrak{U}) soit une courbe indécom-

sable admettant pour centre le centre de la sphère; il peut arriver qu'il y ait des génératrices isotropes d'indice impair (en nombre pair, comme nous savons). Dans le cas où il existe des génératrices isotropes d'indice impair, nous sommes certains que l'intersection de C avec la sphère se compose d'une seule courbe indécomposable. Je donne immédiatement un exemple de cône non unicursal, n'admettant que des génératrices isotropes d'indice pair, dont la directrice sphérique est une courbe indécomposable à centre. J'écris :

$$(34) \quad \begin{cases} c + ic' = \frac{Aq^{4m} + A_1}{q^r}, & c - ic' = \frac{A + A_1q^{4m}}{q^{4m-r}}, \\ c'' = \frac{\sqrt{-AA_1q^{8m} + (1 - A^2 - A_1^2)q^{4m} - AA_1}}{q^{2m}}, \end{cases}$$

où A et A_1 sont deux constantes réelles et m, r deux entiers premiers entre eux, r étant compris entre 0 et $2m$ et impair. Si l'on pose $q = e^{i\varphi}$, où φ est un nombre réel arbitraire, on voit aisément que le point c, c' est réel; pour que c'' soit réel et non imaginaire pure, tout au moins pour des valeurs de φ convenablement choisies, il faut et suffit que le point (A, A_1) dans le plan ωAA_1 ne soit pas compris dans les régions hachurées; ces régions sont les angles droits opposés par



le sommet aux angles du carré formé par les points des axes ωA et ωA_1 , situés à la distance 1 de l'origine. La courbe (\mathfrak{C}) est du degré $2(8m - 2r)$, double du degré de la courbe (c, c') et de genre $4m - 1$.

A deux valeurs de q égales et de signe contraire, on peut faire correspondre deux points de $(\mathfrak{U})(c, c', c'')$ et $(-c, -c', -c'')$ diamétralement opposés, donc le cône C est du degré $8m - 2r$ seulement. Si l'on écrit

$$\lambda = \frac{c + ic'}{c''} = q^{2m-r+1} \frac{Aq^{4m} + A_1}{\sqrt{q^2[-AA_1q^{8m} + (1 - A^2 - A_1^2)q^{4m} - AA_1]}},$$

$$\mu = \frac{1}{q^{2m-r-1}} \frac{A + A_1q^{4m}}{\sqrt{q^2[-AA_1q^{8m} + (1 - A^2 - A_1^2)q^{4m} - AA_1]}}.$$

Si l'on pose $q^2 = Q$, on voit que la courbe (λ, μ) correspond birationnellement à la courbe $z^2 = Q[-AA_1Q^{4m} + (1 - A^2 - A_1^2)Q^{2m} - AA_1]$ qui est de genre $2m$; le cône C n'a que deux cycles isotropes correspondant à $Q = 0$ et $Q = \infty$; chacun de ces deux cycles est d'indice $8m - 2r$, nombre pair.

Nous verrons ultérieurement que pour les cônes C réels non unicursaux conduisant à une courbe (\mathfrak{A}) algébrique, il peut fort bien arriver que la courbe (\mathfrak{U}) se compose d'un nombre arbitraire d'arcs fermés séparés les uns des autres, et la courbe (\mathfrak{A}) d'un même nombre d'arcs fermés aussi et séparés.

La surface M est toujours simple si l'intersection complète de C et de la sphère se décompose en deux courbes analytiquement distinctes, et double dans le cas contraire.

14. Pour terminer ces généralités, il est nécessaire d'indiquer le parti à tirer des éléments imaginaires et de préciser la notion de *réalité*.

Si l'emploi des imaginaires constitue un instrument précieux de recherches, il est bon que dans le résultat on ne trouve plus trace que d'éléments réels, j'entends par là réels au sens vulgaire de ce terme. Le plus bel exemple de l'emploi des imaginaires à ce point de vue est fourni par les surfaces minima.

Ici, les surfaces applicables sur le paraboloïde constituent une belle application des courbes à torsion constante : étant donnée une courbe réelle ou imaginaire (\mathfrak{U}) , cette courbe définit une infinité de courbes à torsion constante homothétiques entre elles, le rapport d'homothétie étant égal au rapport des rayons de torsion. Or, si l'on prend le rayon

de torsion égal à une imaginaire pure τi , la courbe (\mathfrak{A}) est nécessairement imaginaire et, jointe à la courbe conjuguée (\mathfrak{A}_1) , permet de construire un couple de deux surfaces *réelles* S et S' applicables sur le parabolôide de révolution de paramètre p égal à 2τ . La seule différence qui se passe, entre le cas où (\mathfrak{B}) est imaginaire ou réelle, est que, dans le second cas, la courbe (\mathfrak{A}) peut s'obtenir à partir d'une courbe réelle par une homothétie dont le rapport est imaginaire pure, et que les surfaces S et S' ont un centre de symétrie, en supposant que (\mathfrak{A}) , S et S' soient algébriques. Je renvoie le lecteur au Mémoire que je publie au *Bulletin de la Société mathématique*.

Dans ce travail, j'ai rencontré, après M. Goursat, une série d'éléments imaginaires offrant la particularité intéressante de coïncider avec l'élément conjugué : ainsi, pour les surfaces, le cône isotrope ou la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ coïncident avec la surface conjuguée ; pour les courbes, l'intersection de deux surfaces réelles, qui n'ont pas de points réels communs, constitue, si elle est indécomposable, un exemple de cette nature. J'ai été amené, pour simplifier le langage, à appeler ces éléments géométriques réels au sens de M. Goursat ou simplement réels (\mathcal{G}) . Ces éléments aussi sont plutôt intéressants comme *moyen* que comme *résultat*. Dans le cas où il est besoin de spécifier, j'appelle les éléments réels au sens vulgaire, éléments réels (ν) .

Or, j'ai montré que si le cône C est réel (\mathcal{G}) , les surfaces réelles (ν) applicables sur le parabolôide S et S' qui lui correspondent sont encore à centre avec cette différence que pour un cône C réel (ν) le centre est un point conique non isolé de S et S' et un point conique isolé si le cône C est réel (\mathcal{G}) . D'ailleurs, si le cône C est réel (\mathcal{G}) et si la directrice sphérique de ce cône ne se décompose pas, cette courbe (\mathfrak{B}) est réelle (\mathcal{G}) . Mais si la directrice sphérique du cône réel (\mathcal{G}) se décompose en deux courbes symétriques (\mathfrak{B}) et (\mathfrak{B}') , deux cas peuvent se présenter : (\mathfrak{B}) peut être à elle-même sa conjuguée, autrement dit est réelle (\mathcal{G}) , ou bien (\mathfrak{B}) est conjuguée de (\mathfrak{B}') , de sorte que cette fois, même au sens de M. Goursat, (\mathfrak{B}) et (\mathfrak{B}') ont cessé complètement d'être réelles.

Il est bon de voir ce que l'on obtient exactement au point de vue de la réalité pour les surfaces minima (M) et (M_0) associées aux courbes

à torsion constante. Il est bien clair que toute courbe sphérique réelle (ν) donne une courbe (\mathfrak{A}), une surface minima (M), et la surface adjointe (M_0) toutes réelles (ν) si le nombre τ est réel. Mais qu'arrive-t-il si le cône C est simplement réel (\mathcal{G})? Dans ce cas, il est facile de voir qu'en prenant τ réel, on peut, si la courbe (\mathfrak{A}) est *algébrique*, obtenir une courbe (\mathfrak{A}) réelle (\mathcal{G}); si la directrice sphérique de C est indécomposable, ou si elle se décompose en deux courbes symétriques, réelles (G) séparément, la surface (M) et la surface (M_0) sont réelles (ν); c'est là le résultat intéressant à noter.

Prenons d'abord la courbe (\mathfrak{A}); je considère la section σ de C par le plan $z = 1$; c'est une courbe réelle (\mathcal{G}), et j'écris les formules déterminant x, y, z sur la courbe (\mathfrak{A});

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \tau \int_{P_0}^P \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2} + \alpha, \\ y = \tau \int_{P_0}^P \frac{-d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2} + \beta, \\ z = \tau \int_{P_0}^P \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2} + \gamma; \end{array} \right.$$

P_0 étant un point fixe de σ , P un point variable; α, β, γ sont trois constantes pour l'instant arbitraire que nous déterminerons ultérieurement. En écrivant que les coordonnées du point de (\mathfrak{A}), obtenu en remplaçant P par le point conjugué P' , coïncident avec les conjuguées de x, y, z , on a manifestement, en appelant α', β', γ' les conjuguées de α, β, γ et P'_0 , la conjuguée de P_0 :

$$\tau \int_{P'_0}^{P'} \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2} + \alpha' = \tau \int_{P_0}^{P'} \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2} + \alpha$$

ou

$$\alpha' - \alpha = \tau \int_{P_0}^{P'_0} \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}$$

et égalités analogues pour $\beta' - \beta$ et $\gamma' - \gamma$. Ces égalités sont possibles, précisément parce que les seconds membres sont des imaginaires pures, comme on s'en aperçoit en remarquant que l'inversion des limites, pourvu que l'intégrale indéfinie soit algébrique, revient

indifféremment à changer l'intégrale de signe ou à la remplacer par l'intégrale conjuguée. Et alors la partie imaginaire de α, β, γ est complètement déterminée; la partie réelle est arbitraire, ce qui correspond à une translation réelle. Nous pourrions donc prendre

$$(37) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\tau}{2} \int_{P_0}^{P_1} \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ \beta = \frac{\tau}{2} \int_{P_0}^{P_1} \frac{-d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \\ \gamma = \frac{\tau}{2} \int_{P_0}^{P_1} \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}. \end{cases}$$

Cela posé, pour définir la surface minima (M), je dois d'abord considérer la courbe minima

$$(\mathfrak{M}) \quad x - ci\tau, \quad y - c'i\tau, \quad z - c''i\tau;$$

puis la courbe minima

$$(\mathfrak{M}') \quad x + ci\tau, \quad y + c'i\tau, \quad z + c''i\tau,$$

et prendre le milieu des cordes qui joignent au point de la première à un point de la deuxième.

Si l'intersection du cône C avec la sphère ne se décompose pas, ces deux courbes ne sont pas analytiquement distinctes; nous avons dit qu'en effet dans ce cas la surface (M) est double. J'associerai alors les points provenant de P et P' respectivement, à savoir $(x - ci\tau, y - c'i\tau, z - c''i\tau)$ d'une part et $(x_1 + c_1i\tau, y_1 + c'_1i\tau, z_1 + c''_1i\tau)$ de l'autre, points évidemment conjugués, de sorte que la surface minima (M) est réelle (σ). Si, au contraire, la directrice sphérique de C se décompose en une courbe sphérique (\mathfrak{U}) et la courbe symétrique (\mathfrak{U}'), les deux courbes (\mathfrak{M}) et (\mathfrak{M}') sont analytiquement distinctes, la surface (M) est simple. Portons sur σ du point P et suivons par continuité la variation de c, c', c'' ; quand nous arrivons en P', c, c', c'' sont devenues soit c_1, c'_1, c''_1 conjuguées de c, c', c'' si la courbe (\mathfrak{U}) est à elle-même sa conjuguée, soit $-c_1, -c'_1, -c''_1$ si la conjuguée de (\mathfrak{U}) est (\mathfrak{U}'). Dans le premier cas, le point de (\mathfrak{M}) correspondant à φ et le point de (\mathfrak{M}')

correspondant à \mathcal{Q}' sont $x - ci\tau$, $y - c'i\tau$, $z - c''i\tau$ d'une part ; $x_1 + c_1i\tau$, $y + c'_1i\tau$, $z + c''_1i\tau$, et cela montre bien que la surface (M) est réelle (ν). Les circonstances sont différentes dans le second cas, car la courbe minima (\mathfrak{M}) contient alors le point $x - ci\tau$, $y - c'i\tau$, $z - c''i\tau$ correspondant à \mathcal{Q} et le point $x_1 + c_1i\tau$, $y_1 + c'_1i\tau$, $z_1 + c''_1i\tau$ correspondant à \mathcal{Q}_1 ; la courbe (\mathfrak{M}) admet pour conjuguée elle-même et non plus (\mathfrak{M}'), de sorte que la surface (M) est imaginaire. Quant à la surface (M_0) étant l'adjointe de (M), elle est réelle (ν) ou imaginaire en même temps que (M).

Cette surface (M_0) est circonscrite à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \tau^2$ le long de la courbe τc , $\tau c'$, $\tau c''$ homothétique de (\mathfrak{M}). De même qu'une surface réelle du second degré peut être circonscrite à une sphère le long d'un cercle imaginaire, mais réel (\mathcal{G}), une surface minima algébrique réelle peut, dans certains cas, être inscrite à une sphère le long d'une courbe réelle (\mathcal{G}). Ce point était intéressant à élucider. Dans mon travail sur la parabolôïde, j'ai donné des exemples précis des divers cas étudiés ici ; j'en indiquerai d'autres dans le cours de ce Mémoire même.

15. Avant de passer aux exemples, je résume les diverses formules qui me seront nécessaires :

Section du cône C par le plan $z = 1$:

$$\xi = \frac{c}{c''}, \quad \eta = \frac{c'}{c''}, \quad \lambda = \frac{c + ic'}{c''}, \quad \mu = \frac{c - ic'}{c''};$$

Indicatrice (B) :

$$c + ic' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda\mu}}, \quad c - ic' = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \lambda\mu}}, \quad c'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\mu}};$$

Courbe (A) :

$$x + iy = -\tau i \int \frac{d\lambda}{1 + \lambda\mu}, \quad x - iy = \tau i \int \frac{d\mu}{1 + \lambda\mu}, \quad 2z = -\tau i \int \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1 + \lambda\mu}.$$

Si l'on emploie les coordonnées α et β sur la sphère de rayon 1, on a :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'}, \quad \beta = \frac{c - ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c + ic'}; \\ c + ic' = \frac{2\alpha}{1 + \alpha\beta}, \quad c - ic' = \frac{2\beta}{1 + \alpha\beta}, \quad c'' = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1}; \\ x + iy = 2\tau i \int \frac{d\alpha + \alpha^2 d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad c + ic' = 2 \int \frac{d\alpha - \alpha^2 d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}; \\ x - iy = -2\tau i \int \frac{d\beta + \beta^2 d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad c - ic' = 2 \int \frac{d\beta - \beta^2 d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}; \\ z = 2\tau i \int \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad c'' = 2 \int \frac{\beta d\alpha + \alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}. \end{array} \right.$$

La comparaison des trois intégrales donnant $x + iy$, $y - iy$, z avec les expressions des différentielles algébriques $d(c + ic')$, $d(c - ic')$, dc'' montre que l'on peut, si l'on veut, prendre au hasard une intégrale et une seule dans chaque colonne :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}; \\ \int \frac{\alpha^2 d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\beta^2 d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \end{array} \right.$$

et exprimer que ces trois intégrales sont algébriques. Cela revient d'ailleurs à écrire des formules, utiles pour l'intégration :

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{y - ix}{\tau} + c + ic' = 4 \int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \frac{y - ix}{\tau} - (c + ic') = 4 \int \frac{\alpha^2 d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}; \\ \frac{y + ix}{\tau} + c - ic' = 4 \int \frac{d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \frac{y + ix}{\tau} - (c - ic') = 4 \int \frac{\beta^2 d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}; \\ \frac{iz}{\tau} + c'' = 4 \int \frac{\alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \quad \frac{-iz}{\tau} + c'' = 4 \int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}. \end{array} \right.$$

Dans le cas où la réalité de la courbe (A) ne joue pas un rôle essentiel, on pourra employer avec fruit les coordonnées sphériques (u , v)

à (α, β) par les relations $u = \alpha$, $v = \frac{-1}{\beta}$ qui donnent :

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'}, \quad v = -\frac{1 - c''}{c - ic'} = -\frac{c + ic'}{1 + c''}; \\ c + ic' = \frac{-2uv}{u - v}, \quad c - ic' = \frac{2}{u - v}, \quad c'' = \frac{u + v}{u - v}; \\ x + iy = -2i\tau \int \frac{v^2 du + u^2 dv}{(u - v)^2}, \quad c + ic' = -2 \int \frac{v^2 du - u^2 dv}{(u - v)^2}; \\ x - iy = -2i\tau \int \frac{du + dv}{(u - v)^2}, \quad c - ic' = -2 \int \frac{du - dv}{(u - v)^2}; \\ z = -2i\tau \int \frac{v du + u dv}{(u - v)^2}, \quad c'' = -2 \int \frac{v du - u dv}{(u - v)^2}. \end{array} \right.$$

Les colonnes analogues à (39) sont :

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{du}{(u - v)^2}, \quad \int \frac{v du}{(u - v)^2}, \quad \int \frac{v^2 du}{(u - v)^2}; \\ \int \frac{dv}{(u - v)^2}, \quad \int \frac{u dv}{(u - v)^2}, \quad \int \frac{u^2 dv}{(u - v)^2}. \end{array} \right.$$

On aura donc :

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} \frac{y - ix}{\tau} + c + ic' = 4 \int \frac{v^2 du}{(u - v)^2}, \quad \frac{y - ix}{\tau} - (c + ic') = 4 \int \frac{u^2 dv}{(u - v)^2}; \\ \frac{y + ix}{\tau} + c - ic' = 4 \int \frac{dv}{(u - v)^2}, \quad \frac{y + ix}{\tau} - (c - ic') = 4 \int \frac{du}{(u - v)^2}; \\ \frac{iz}{\tau} + c'' = 4 \int \frac{u dv}{(u - v)^2}, \quad \frac{iz}{\tau} - c'' = 4 \int \frac{v du}{(u - v)^2}. \end{array} \right.$$

Enfin on se rappellera que le déplacement *réel* le plus général de la courbe (\mathfrak{A}) à la surface de la sphère revient à la même substitution homographique $u_1 = \frac{mu + n}{-n_0 u + m_0}$, $v_1 = \frac{mv + n}{-n_0 v + m_0}$, effectuée sur u et v , m et n désignant deux constantes dont m_0 et n_0 sont les conjuguées. Quand il s'agit de courbes imaginaires, on peut appliquer à la courbe (\mathfrak{A}) la substitution plus générale $u_1 = \frac{mu + n}{pu + q}$, $v_1 = \frac{mv + n}{pv + q}$ qui fait correspondre à une courbe (\mathfrak{A}) algébrique une autre courbe (\mathfrak{A}_1) algébrique ; cette nouvelle substitution, au lieu de ne dépendre que de trois paramètres réels, comme celle qui précède, dépend de six para-

mètres réels; elle revient à la composition de la substitution correspondant au déplacement réel avec la substitution $u_1 = \lambda u + \mu + \nu i$, $v_1 = \lambda v + \mu + \nu i$, où λ, μ, ν sont trois constantes réelles; les deux substitutions peuvent être effectuées successivement dans un ordre arbitraire, à condition de donner des valeurs convenables aux coefficients. De la sorte, à une surface S algébrique réelle applicable sur le paraboloïde correspondent toute une série de nouvelles surfaces algébriques et réelles applicables sur le même paraboloïde, obtenues en faisant varier λ, μ, ν qui sont alors des paramètres de *forme* et non plus des paramètres de *déplacement*.

CHAPITRE III.

EXEMPLES DIVERS DE COURBES ALGÈBRIQUES, UNICURSALES, IMAGINAIRES ET RÉELLES.

Nous pouvons dès maintenant donner de nombreux exemples obtenus par des cônes C , réels ou imaginaires, à directrice sphérique unicursale ou mixte. Ces exemples seront nécessaires pour rendre intuitives les lois relatives à la symétrie ou à la rotation ainsi que certaines transformations qui seront étudiées au Chapitre suivant, de façon à construire sans peine les exemples plus compliqués correspondant aux cônes unicursaux à directrice sphérique non unicursale, puis aux courbes à torsion constante de genre non nul.

1. Je commence par divers exemples imaginaires. Nous avons vu que si le cône unicursal C n'a qu'une génératrice isotrope, la courbe (\mathcal{C}) est algébrique et unicursale. Il est bien clair que C et (\mathcal{C}) sont imaginaires; m étant le degré du cône C , l'indice de la génératrice isotrope est $2m$, nombre pair, donc la directrice (\mathcal{D}) est unicursale, de degré m ; nous supposons le paramètre t choisi de façon que la génératrice isotrope corresponde à $t = \infty$; la directrice (\mathcal{D}) est définie

par les équations

$$(1) \quad u = \frac{A}{B}, \quad v = \frac{C}{D},$$

où A, B, C, D sont quatre polynômes entiers en t tels que l'équation $u - v = 0$ ou $AD - BC = 0$ n'ait qu'une racine, d'ailleurs infinie ; donc $AD - BC$ se réduit à une constante, à qui l'on peut donner telle valeur que l'on voudra, puisque l'on peut multiplier A et B par un même facteur numérique. Nous écrivons donc

$$(2) \quad AD - BC \equiv 1.$$

C'est l'identité célèbre dite *identité de Bezout* ; à toute solution de cette identité correspond une courbe (A) algébrique imaginaire et par suite deux surfaces réelles applicables sur le parabolôide. J'ai montré (*Comptes rendus*, janvier 1917, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1919) que l'on peut donner sans calcul l'expression explicite des quatre polynômes A, B, C, D.

Les intégrations se font immédiatement ; on a, en effet, et cela justifie la théorie,

$$(3) \quad \begin{cases} \int \frac{du}{(u-v)^2} = \int (BA' - AB') D^2 dt, & \int \frac{dv}{(u-v)^2} = \int (DC' - CD') B^2 dt; \\ \int \frac{v du}{(u-v)^2} = \int (BA' - AB') CD dt, & \int \frac{u dv}{(u-v)^2} = \int (DC' - CD') AB dt; \\ \int \frac{v^2 du}{(u-v)^2} = \int (BA' - AB') C^2 dt, & \int \frac{u^2 dv}{(u-v)^2} = \int (DC' - CD') A^2 dt. \end{cases}$$

L'arc de l'indicatrice des torsions s'obtient aisément en se rappelant que sur la sphère on a $ds^2 = \frac{4 du dv}{(u-v)^2}$, on a donc pour élément d'arc de l'indicatrice

$$2 dt \sqrt{(BA' - AB')(DC' - CD')};$$

l'arc de la courbe (A) a pour élément le produit de l'élément précédent par τ . Je signale en passant que ceci est l'interprétation d'une remarque que M. Lyon a faite sur les simplifications qui se produisent en calculant l'arc d'une courbe algébrique à torsion constante ; cette simplification a lieu chaque fois que l'intersection du cône C avec la sphère

se décompose, car la courbe (\mathfrak{A}) est en général de degré supérieur à celui du cône C (voir Chap. II, § 6).

Nous avons donc des courbes et des surfaces de degré aussi grand que l'on veut, en nombre infini. Essayons de les classer. Nous savons que l'on peut effectuer sur u et v une même substitution

$$u_1 = \frac{mu + n}{-n_0u + m_0}, \quad v_1 = \frac{mv + n}{-n_0v + m_0},$$

où m et m_0 sont imaginaires conjuguées ainsi que \bar{n} et n_0 , correspondant à un déplacement autour de l'origine de toute la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Je profite de cette substitution pour supposer B de degré inférieur à A, ce qui revient à supposer que l'unique génératrice isotrope de C est la droite $z = 0, x - iz = 0$. Nous supposons donc A de degré p , B de degré $p - h$, où h est un entier au moins égal à 1. On peut trouver un polynôme C_1 et un seul de degré $p - 1$ au plus, un polynôme D_1 et un seul de degré $p - h - 1$ au plus tels que $AD_1 - BC_1 \equiv 1$ et l'on a

$$C \equiv C_1 + AQ, \quad D \equiv D_1 + BQ,$$

où Q est un polynôme arbitraire, pouvant se réduire à une constante ou même à zéro. On écrit donc

$$(4) \quad u = \frac{A}{B}, \quad v = \frac{C_1 + AQ}{D_1 + BQ}.$$

Si Q n'est pas identiquement nul, la fraction v est de degré au moins égal à celui de u ; nous pouvons toujours supposer qu'il en est ainsi, sinon on échange u avec v , ce qui ne change pas le cône C, puisque cela revient à remplacer la courbe (\mathfrak{B}) par la courbe symétrique par rapport à l'origine. Le degré de Q étant égal à d , le cône C et la courbe (\mathfrak{B}) sont du degré $2p + d$; le cycle isotrope unique a pour indice $2(2p + d)$, pour degré et classe h ; il en résulte que le degré de (\mathfrak{A}) , soit M, est égal à $4p + 2d - h$. Si l'on remarque que $p \geq h$ entraîne $4p + 2d - h \geq 3p + 2d$, on voit que les degrés minimum de C et (\mathfrak{A}) sont respectivement 2 et 3 obtenus pour $d = 0, p = 1$, ce qui entraîne $h = 1$. Nous reviendrons sur ce cas.

Remarquons que le nombre $M = 4p + 2d - h$ peut être rendu égal

à un nombre quelconque égal ou supérieur à 3, les nombres 4 et 6 exceptés. Pour obtenir $M = 4$, il faudrait avoir $4 \geq 3p + 2d \geq 3p$ et p ne pourrait avoir que la valeur 1, d que la valeur 0, ce qui entraîne $h = 1$ et $M = 3$ et non pas $M = 4$. Ce cas écarté, si M est pair, h est nécessairement pair et entre autres solutions on pourra adopter $h = 2$, $2p + d = \frac{M}{2} + 1$, autrement dit p entier quelconque compris entre 2 et $\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + 1\right)$. Si M est impair, on pourra adopter $h = 1$, $2p + d = \frac{M+1}{2}$. Pour avoir $M = 6$, on a d'abord $6 \geq 3p + 2d$; or h étant pair et non nul, h est au moins égal à 2, p est au moins égal à h , c'est-à-dire à 2, on a donc $p = 2$, $d = 0$, $h = 2$; mais $d = 0$, $p = h$ donne simplement pour u et v deux polynômes entiers dont la différence est constante, autrement dit on retrouve la cubique de M. Lyon avec une représentation impropre, donc $M = 6$ est lui-même impossible ici.

Revenons donc à $p = 1$, $h = 1$, $d = 0$; cela revient à supposer que les deux numérateurs A et C sont du premier degré et les deux dénominateurs sont du degré zéro; u et v sont donc deux binômes du premier degré en t dont la différence est constante. Je vais donc faire un changement de paramètre qui me donnera des formules plus simples; l'expression $\frac{u+v}{2}$ est, elle aussi, un binôme du premier degré que je prends pour paramètre; je l'appelle t et j'ai $u = t + k$, $v = t - k$, où k est une constante réelle ou imaginaire. En faisant tourner les axes autour de Oz , on multiplie u et v par $e^{i\alpha}$, je peux encore remplacer $te^{i\alpha}$ par t , et j'ai $u = t + ke^{i\alpha}$, $v = t - ke^{i\alpha}$; je peux donc profiter de l'indéterminée α pour supposer k réel, et même positif si je veux. J'ai donc, avec un seul paramètre k réel,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = t + k, \quad v = t - k; \\ c = \frac{1 + k^2 - t^2}{2k}, \quad c' = i \frac{1 - k^2 + t^2}{2k}, \quad c'' = \frac{t}{k}; \\ x = \frac{i\tau}{2k^2} \left[\frac{t^3}{3} + (k^2 - 1)t \right], \quad y = \frac{\tau}{2k^2} \left[\frac{t^3}{3} + (k^2 + 1)t \right], \quad z = \frac{-i\tau t^2}{2k^2}. \end{array} \right.$$

On obtient ainsi une cubique à torsion constante. Elle ne renferme, en dehors des paramètres correspondant au déplacement le plus général, qu'un paramètre τ de grandeur, correspondant à une homo-

thétique et que le paramètre réel k ; ce paramètre k est le seul intéressant. C'est un paramètre de forme. J'ai étudié en détail cette cubique et les surfaces applicables sur le paraboloidé qui en dérivent. J'ai tenu à bien insister sur ce fait que la cubique de M. Lyon ne renferme, en dehors des sept paramètres les plus généraux de similitude, qu'un paramètre de forme; M. Fabry l'a lui aussi signalé. Comme $c - ic'$ est une constante $\frac{1}{k}$ l'élément d'arc de (\mathfrak{W}) se réduit à dc'' , celui de (\mathfrak{A}) à $\tau dc''$; l'arc de (\mathfrak{A}) est donc égal à $\frac{\tau \ell}{k}$, il est rectifiable. L'indicatrice des courbures est la courbe

$$a = \frac{i}{2k}(\ell^2 + k^2 - 1), \quad a' = \frac{\ell^2 + k^2 + 1}{2k}, \quad a'' = \frac{-i\ell}{k},$$

courbe qui se déduit de l'indicatrice des torsions en remplaçant k par ik ; cette indicatrice est donc égale à la précédente, elle s'en déduit par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz ; comme précédemment, puisque $a - ia' = \frac{-i}{k}$, l'arc de cette indicatrice a pour élément da'' ou $\frac{-i\ell dt}{k}$; il en résulte que le rayon de courbure de la cubique est égal à $i\tau$; il est, lui aussi, constant.

2. Voici maintenant un autre exemple qui généralise celui du numéro précédent :

$$(6) \quad \begin{cases} u = t^\alpha (t - a_1)^{\alpha_1} \dots (t - a_h)^{\alpha_h} (t - b_1)^{\beta_1+1} \dots (t - b_k)^{\beta_k+1} \frac{A(t)}{B(t)}, \\ v = t^{2\alpha+1} (t - a_1)^{2\alpha_1+1} \dots (t - a_h)^{2\alpha_h+1} (t - b_1)^{\beta_1} \dots (t - b_k)^{\beta_k} \frac{C(t)}{D(t)}; \end{cases}$$

A, B, C, D sont des polynomes entiers en t ; les a et b sont des constantes réelles ou imaginaires, les α et β sont des entiers positifs non nuls. On a

$$(7) \quad u - v = t^\alpha (t - a_1)^{\alpha_1} \dots (t - a_h)^{\alpha_h} (t - b_1)^{\beta_1} \dots (t - b_k)^{\beta_k} \times \left[(t - b_1)^{\beta_1+1} \dots (t - b_k)^{\beta_k+1} \frac{A}{B} - t^{\alpha+1} \dots (t - a_h)^{\alpha_h+1} \frac{C}{D} \right].$$

On détermine les polynômes A, B, C, D par l'identité

$$(8) \quad (t - b_1)^{\beta_1+1} \dots (t - b_h)^{\beta_h+1} AD - t^{\alpha+1} \dots (t - a_h)^{\alpha_h+1} BC \equiv 1.$$

On a supposé les nombres $0, a_1, a_h, b_1, \dots, b_k$ tous distincts les uns des autres ; pour résoudre l'identité (8) on peut se donner arbitrairement les a et b , le polynôme A et le polynôme C et alors B et D se calculent par application de l'identité de Bezout ; on peut même supposer que A admet quelques-uns des facteurs $(t - b_i)$ à un exposant quelconque, que C admet l'un des facteurs t ou $t - a_j$ à un exposant quelconque, mais on suppose que ni B ni D n'admettent les facteurs $t - a_j, t - b_i$ ou t .

Dans ces conditions, pour $t = a_j$, on a un cycle isotrope porté par la droite $x + iy, z = 0$, de degré α_j exactement, de classe $2\alpha_j + 1$ si C n'admet pas le facteur $t - a_j$, de classe égale, si C admet ce facteur, à la somme de $2\alpha_j + 1$ et de l'exposant de $t - a_j$ dans C ; l'indice du cycle est $2\alpha_j$. Nous savons que ces conditions suffisent pour que le vecteur période polaire relatif à $t - a_j$ soit nul. Pour $t = b_i$, mêmes résultats : cycle isotrope porté par la même droite $x + iy = 0, z = 0$, de degré β_i , de classe égale à $2\beta_i + 1$ si A n'est pas divisible par $t - b_i$, de classe supérieure à $2\beta_i + 1$ si A est divisible par $t - b_i$; l'indice est $2\beta_i$. Nous avons ainsi $h + k + 1$ cycles tous portés par la même génératrice isotrope ; h et k peuvent d'ailleurs être nuls. En dehors de ces cycles, il n'y a plus, en vertu de l'identité (8) que le cycle correspondant à $t = \infty$. Puisque tous les autres vecteurs périodes sont nuls, le vecteur relatif à $t = \infty$ est donc nul aussi, la courbe (C) est donc algébrique et unicursale. Si l'on a l'inégalité

$$\text{degré B} < \text{degré A} + \alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_h + (2\beta_1 + 1) + \dots + (2\beta_k + 1),$$

le cycle $t = \infty$ est porté par la droite $x = iy = 0, z = 0$ conjuguée de la première ; si l'inégalité est renversée, le cycle $t = \infty$ est porté lui aussi par la première droite ; si l'inégalité est remplacée par une égalité, la droite isotrope support du cycle $t = \infty$ peut être une droite isotrope quelconque.

Nous remarquerons d'ailleurs que le procédé indiqué pour résoudre l'identité (8) fait intervenir comme intermédiaire un certain poly-

nombre B_i de degré au plus égal à

$$\text{degré } \lambda + (\beta_1 + 1) + (\beta_2 + 1) + \dots + (\beta_k + 1) - 1,$$

de sorte qu'il existe effectivement des polynomes B correspondant à l'un quelconque des trois cas qui viennent d'être envisagés. Tous les cônes C ou toutes les courbes (A) de ce type sont imaginaires ; les cônes C ont deux génératrices isotropes, pouvant être confondues, dont l'une porte un nombre de cycles égal à un entier quelconque au moins égal à 1.

3. Je peux encore généraliser, toujours en courbes imaginaires, en écrivant

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{u}{Ku+1} = \frac{t^\lambda (t-a_1)^{\alpha_1} \dots (t-a_h)^{\alpha_h} (t-b_1)^{\beta_1+1} \dots (t-b_k)^{\beta_k+1}}{(t-1)^\gamma (t-c_1)^{\gamma_1} \dots (t-c_l)^{\gamma_l} (t-d_1)^{\delta_1+1} \dots (t-d_m)^{\delta_m+1}} \frac{A(t)}{B(t)}, \\ \frac{v}{Kv+1} = \frac{t^{2\lambda+1} (t-a_1)^{2\alpha_1+1} \dots (t-a_h)^{2\alpha_h+1} (t-b_1)^{\beta_1} \dots (t-b_k)^{\beta_k}}{(t-1)^{2\gamma+1} (t-c_1)^{2\gamma_1+1} \dots (t-c_l)^{2\gamma_l+1} (t-d_1)^{\delta_1} \dots (t-d_m)^{\delta_m}} \frac{C(t)}{D(t)}. \end{cases}$$

Comme précédemment, A, B, C, D sont des polynomes entiers en t ; les a sont des constantes réelles ou imaginaires dont le nombre est l'entier h positif ou nul ; même définition pour les constantes b, c, d et les entiers k, l, m ; K est une constante réelle finie.

Nous pouvons, comme nous l'avons remarqué en fin du Chapitre II, effectuer sur (u, v) la substitution homographique $U = \frac{u}{Ku+1}$, $V = \frac{v}{Kv+1}$, de sorte que nous raisonnerons sur la courbe (U, V) , on a

$$(11) \quad U - V = \frac{t^\lambda (t-a_1)^{\alpha_1} \dots (t-a_h)^{\alpha_h} (t-b_1)^{\beta_1} \dots (t-b_k)^{\beta_k}}{(t-1)^\gamma (t-c_1)^{\gamma_1} \dots (t-c_l)^{\gamma_l} (t-d_1)^{\delta_1} \dots (t-d_m)^{\delta_m}} \\ \times \left[\frac{(t-b_1)^{\beta_1+1} \dots (t-b_k)^{\beta_k+1}}{(t-d_1)^{\delta_1+1} \dots (t-d_m)^{\delta_m+1}} \frac{A}{B} - \frac{t^{2\lambda+1} (t-a_1)^{2\alpha_1+1} \dots (t-a_h)^{2\alpha_h+1}}{(t-1)^{2\gamma+1} (t-c_1)^{2\gamma_1+1} \dots (t-c_l)^{2\gamma_l+1}} \frac{C}{D} \right].$$

On détermine A, B, C, D de façon à avoir l'identité

$$(12) \quad (t-b_1)^{\beta_1+1} \dots (t-b_k)^{\beta_k+1} (t-1)^{\gamma+1} \dots (t-c_l)^{\gamma_l+1} AD \\ - t^{2\lambda+1} (t-a_1)^{2\alpha_1+1} \dots (t-a_h)^{2\alpha_h+1} (t-d_1)^{\delta_1+1} \dots (t-d_m)^{\delta_m+1} BC \equiv 1.$$

On se donne arbitrairement, par exemple, les a, b, c, d et les deux polynômes A et C, l'identité donnera B et D. Le cône C relatif à (u, v) a alors trois génératrices isotropes, à savoir :

1° La génératrice $\mathcal{G}x + iy = 0, z = 0$ portant les cycles relatifs à $t = 0, a_1, \dots, a_h, b, \dots, b_k$ en nombre $h + k + 1$, le vecteur période étant nul pour chacun ;

2° La génératrice $\mathcal{G}' \frac{x + iy}{1} = \frac{x - iy}{-k^2} = \frac{z}{k}$ portant les cycles relatifs à $t = 1, c_1, \dots, c_l, d_1, \dots, d_m$ en nombre $l + m + 1$, le vecteur période étant nul aussi pour chacun ;

3° La génératrice \mathcal{G}'' correspond à $t = \infty$, ne portant qu'un cycle isotrope ; le vecteur période de ce dernier cycle est nécessairement nul.

On peut remarquer que si les deux termes de la fraction $\frac{''}{k u + 1}$ ne sont pas du même degré en t , cette troisième génératrice \mathcal{G}'' coïncide avec l'une des deux précédentes. La vérification par le calcul de toutes les propriétés annoncées ne fait aucune difficulté. Les hypothèses faites ont servi à n'introduire que les paramètres essentiels, à nous débarrasser des paramètres correspondant à un déplacement réel ou à une substitution homographique sur t : La droite perpendiculaire au plan de la droite G et de la droite conjuguée a été prise comme axe des z , la droite de même définition relative à G' détermine avec Oz un plan qui a été pris pour plan zOx . Enfin, on a pris pour trois cycles distincts du cône C les valeurs de t égales respectivement à 0, 1, ∞ .

Les exemples traités dans ces trois paragraphes donnent des surfaces algébriques réelles applicables sur le parabolôide, offrant des propriétés intéressantes dans certains cas, relativement aux symétries planes ou aux points à l'infini.

4. Je vais maintenant démontrer une propriété commune aux courbes, réelles ou imaginaires, unicursales : il n'existe pas de courbe unicursale à torsion constante pour laquelle le cône C n'aurait que des génératrices isotropes d'indice 2. Pour un cône unicursal de degré m n'ayant que des génératrices isotropes d'indice 2, on pourrait repré-

senter la directrice (15) de degré m aussi par les équations

$$u = \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}, \quad v = \frac{f_2(t)}{\varphi_2(t)},$$

où la fraction u est de degré m_1 , la fraction v de degré m_2 avec $m_1 + m_2 = m$. S'il existe un cycle isotrope d'indice 2, correspondant à $t = t_0$, et si la courbe (16) est algébrique, l'une des deux équations $u = u_0$, $v = v_0$ admet $t = t_0$ pour racine simple et l'autre pour racine triple au moins; supposons que $v = v_0$ est l'équation qui a t_0 pour racine simple, $u = u_0$ l'équation qui a t_0 pour racine triple (ceci, je le fais remarquer incidemment, exige que la fraction u soit du troisième degré au moins en t , donc que le cône C soit du quatrième degré au moins). On déduit de là que t_0 est racine des équations

$$u_0 \varphi_1(t) - f_1(t) = 0, \quad u_0 \varphi_1'(t) - f_1'(t) = 0, \quad u_0 \varphi_1''(t) - f_1''(t) = 0;$$

on en déduit encore que t_0 est racine des deux équations

$$\varphi_1 f_1' - f_1 \varphi_1' = 0, \quad \varphi_1 f_1'' - f_1 \varphi_1'' = 0,$$

donc racine double de la première. Comme l'équation $\varphi_1 f_1' - f_1 \varphi_1' = 0$ est de degré $2m_1 - 2$, elle ne peut avoir au plus que $m_1 - 1$ racines doubles au plus. On déduit de là qu'il ne peut y avoir plus de $m_1 - 1$ cycles isotropes d'indice 2 correspondant à une tangente stationnaire pour (15) qui soit génératrice du système (u), et de même qu'il ne peut y avoir plus de $m_2 - 1$ cycles isotropes d'indice 2 correspondant à une tangente stationnaire du système (v). Donc le maximum possible de cycles isotropes d'indice 2 est $(m_1 - 1) + (m_2 - 1)$ ou $m - 2$, et la présence d'un cycle isotrope ou plusieurs entraîne $m \geq 4$.

Qu'arriverait-il si un cône unicursal C de degré m admettait $m - 2$ cycles isotropes d'indice 2? La somme totale des indices des cycles isotropes vaut $2m$, les cycles déjà existants donnent un total égal à $2m - 4$, donc il faut compléter par une certaine quantité d'indices, au moins égaux à 2, et de total 4. Donc il n'y a que deux combinaisons possibles: $2 + 2$ ou 4. La première, nous venons de le voir, ne peut exister. Donc il reste simplement un seul indice égal à 4. Cela entraîne que le cône C soit imaginaire; j'ai cherché à réaliser de tels exemples, mais j'ai constaté pour $m = 4, 5, 6$ l'impossibilité de ce résultat; il

m'a paru assez vraisemblable que le résultat n'existe pour aucune valeur de m .

Plaçons-nous alors dans le cas où le cône C est réel (au sens vulgaire ou au sens de M. Goursât). Nous avons déjà vu que, de toutes façons, pour les cônes réels, $m - 2$ cycles d'indice 2 ne peuvent avoir lieu ; essayons $m - 3$. Dans ce cas, il faut compléter les cycles d'indice 2 par plusieurs cycles deux à deux conjugués pour lesquels les indices, supérieurs à 2, ont un total égal à 6. Il ne resterait donc que l'hypothèse $3 + 3$, qui ne peut se réaliser, puisqu'en courbes algébriques l'indice 3 est impossible, Prenons donc $m - 4$; ceci entraîne d'abord que m soit pair, afin que les $m - 4$ cycles se partagent en $\frac{m}{2} - 2$ couples de deux cycles conjugués. On complétera donc par une somme d'indices entiers deux à deux égaux, de total égal à 8, sans qu'aucun puisse égaler 2 non plus que 3 : il ne reste donc que le choix unique $4 + 4$. Autrement dit, on cherchera un cône C unicursal de degré pair, soit $2m$, admettant $m - 2$ couples de cycles conjugués isotropes d'indice 2 et un couple conjugué isotrope d'indice 4. Or nous trouverons plus loin que le cône du quatrième degré conduit à une impossibilité : il y aurait alors un seul couple d'indice 4 ; mais avec des cônes du sixième degré, on arrive à un cône réel, au sens de M. Goursat seulement.

5. Jusqu'ici nos pérégrinations dans le domaine des courbes unicursales ont été réglées par la considération du cône des binormales et par le désir soit d'avoir l'indice maximum (cône C de degré m avec un cycle unique d'indice $2m$), soit l'indice minimum (cône C de degré m possédant le plus grand nombre possible de cycles d'indice 2). Avant de passer définitivement aux cônes réels, continuons en cherchant cette fois ce que donnent les cônes de plus faible degré ; soit m le degré de C.

Si le cône C est de degré 2, on doit résoudre l'égalité $i_1 + i_2 + \dots = 4$, où les i sont les divers indices ; ils sont au moins égaux à 2, donc il ne peut y en avoir que deux ou un ; $2 + 2$ est impossible, donc il reste un seul indice égal à 4 ; c'est l'exemple de la cubique de M. Lyon.

Pour $m = 3$, on résout $i_1 + i_2 + \dots = 6$; il ne peut y avoir plus de

trois entiers, puisque chacun est au moins égal à 2; trois indices égaux à 2 ne peuvent exister; $2+4$ est impossible aussi, car nous avons remarqué que l'existence d'un seul indice égal à 2 entraîne $m \geq 4$; $3+3$ est impossible. Donc il ne reste que 6 tout court; c'est le cas fourni par l'identité de Bezout correspondant aux valeurs $p=1$, $d=1$, $h=1$ des entiers considérés au paragraphe 1; la courbe (A) est alors du degré 5 et imaginaire.

Soit maintenant $m=4$; on résout $i_1 + i_2 + \dots = 8$ et, comme plus haut, on arrive aux seules solutions $2+2+4$; $2+6$; $4+4$; 8. Dans tous les cas, la directrice sphérique de C sera unicursale et de degré 4. Le troisième cas, deux cycles d'indice 4, sera étudié plus bas, il conduit à une impossibilité. Le dernier correspond à l'identité de Bezout: on a alors soit $p=2$, $d=0$, $h=1$, et une courbe (A) de degré 7, soit $p=1$, $d=2$, $h=1$, et une courbe (A) de degré 7. Dans les deux premiers cas, la courbe (A) est du quatrième ordre, imaginaire, et l'une des coordonnées sphériques u , v est du troisième degré, l'autre du premier degré. Je peux donc supposer que la génératrice G, de C d'indice 2 a pour équations $x - iy = 0$, $z = 0$, autrement dit correspond à $u = \infty$, $v = \infty$ et que u' , qui est fraction du premier degré en t , soit exactement égal à t . J'écris donc, pour représenter (A),

$$u = t, \quad t = At^3 + Bt^2 + Ct + D;$$

dans le premier cas, si t_0 est la valeur du paramètre qui donne la seconde génératrice d'indice 2, on pourra écrire plus simplement $u = t$, $v = t_0 + A(t - t_0)^3$; l'équation qui donne les génératrices isotropes, $u - v = 0$, devient $(t - t_0)[1 - A(t - t_0)^2] = 0$; elle admet pour racines $t = \infty$ et $t = t_0$ racines simples; il est impossible que l'équation débarrassée de ces deux racines, à savoir $1 - A(t - t_0)^2 = 0$ ait une racine double. Donc le premier cas est impossible. Dans le second cas, il suffit manifestement d'écrire

$$(13) \quad u = t, \quad v = t + A(t - t_0)^3$$

pour avoir une courbe (A) algébrique, rentrant d'ailleurs, avec un simple changement de notations dans le type (G); la courbe (A) s'obtient aisément, elle est du sixième degré.

Ce qui précède montre qu'il n'existe pas de courbe unicursale du

quatrième degré à torsion constante, car nous savons que le degré du cône C est au plus égal à celui de (\mathcal{A}) et nous avons passé en revue les cônes de degré 2, 3, 4 sans trouver de courbe du quatrième degré. Nous avons trouvé des courbes (\mathcal{A}) unicursales de degré 3, 5, 6, 7 toutes imaginaires.

Nous allons voir qu'à partir du degré 5 pour le cône unicursal C et pour tous les degrés supérieurs à 5, on trouve des courbes unicursales (\mathcal{A}) réelles. Celle qui a le plus faible degré est de degré 8 et correspond à un cône C du cinquième degré.

6. Je porte maintenant mes efforts sur les courbes unicursales réelles. Les génératrices isotropes de C s'associent par couples de deux génératrices conjuguées; chaque couple est caractérisé par son degré, sa classe et son indice; m étant le degré du cône C , on doit, en désignant par i_1, i_2, \dots les indices des divers couples isotropes, résoudre l'équation $i_1 + i_2 + \dots = m$, tous les i étant supérieurs à l'unité, aucun n'étant égal à 3; les i ne peuvent être égaux tous à 2, de sorte que le nombre des i est au plus égal à l'entier immédiatement inférieur à $\frac{m}{2}$. Si m est donné, le nombre d'essais est donc limité. De même si l'on se donne, non plus m , mais le degré M de (\mathcal{A}) , le nombre d'essais reste limité, puisque $\frac{M}{2} < m \leq M$. Si l'on se donne $m = 5$, il n'y a qu'une solution possible, à savoir $i_1 = 5$; si $m = 6$, il y a deux solutions $i_1 = 6$ ou bien $i_1 = 4, i_2 = 2$. Or, pour chaque valeur de m , la solution $i_1 = m$ est admissible et correspond au cas le plus simple. La directrice (\mathcal{B}) , dans ce cas, est unicursale et de degré m si m est pair, mixte et de degré $2m$ si m est impair.

Les exemples connus avant ce Mémoire, dus exclusivement à M. Fabry, correspondaient tous à ce cas. Je le reprends.

Je dois d'abord éliminer les paramètres superflus provenant d'une substitution homographique sur t et d'un déplacement de (\mathcal{B}) à la surface de la sphère. Le cône C étant réel, je choisis le paramètre t réel pour les points réels de (\mathcal{B}) et j'ai le droit de supposer que i et $-i$ sont les valeurs de t correspondant aux génératrices isotropes; c, c', c'' sont donc des fractions rationnelles en t , de degré m si m est pair,

$2m$ si m est impair, ayant pour dénominateur $(1+t^2)^{\frac{m}{2}}$ ou $(1+t^2)^m$; si donc on pose $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, chacun des cosinus c, c', c'' est une expression de la forme

$$\lambda + \lambda_1 \cos \varphi + \mu_1 \cos \varphi + \dots + \lambda_h \cos h\varphi + \mu_h \sin h\varphi.$$

et réciproquement. On reconnaît le type employé par M. Fabry. Nous avons montré l'avantage d'employer les coordonnées sphériques α, β ; d'autre part, les intégrales à étudier portent sur des fractions rationnelles en t ayant pour dénominateur une puissance de $(1+t^2)$. Si donc j'introduis le paramètre q égal à $e^{i\varphi}$, avec $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, j'ai $q = \frac{1+it}{1-it}$, $t = i \frac{1-q}{1+q}$, et pour $t = i$, q est nul; pour $t = -i$, q est infini. Avec le paramètre q , les intégrales portent sur une fraction rationnelle en q dont le dénominateur est simplement une puissance de q : l'intégration se fait alors à vue, la condition d'algébricité est évidente. Ces deux raisons combinées, d'une part l'emploi des coordonnées α, β , d'autre part l'emploi du paramètre q , apportent de grosses simplifications: réduction du nombre d'inconnues, simplification des équations restantes. Le lecteur pourra comparer les calculs dans les deux méthodes: celle de M. Fabry et celle que j'emploie ici.

La substitution homographique faite sur t de façon à obtenir les génératrices isotropes pour $+i$ et $-i$ laisse un paramètre à notre disposition. Raisonnons avec q : q doit avoir une valeur de module unité pour les points réels; on peut remplacer q par $qe^{i\omega}$, où ω est une constante réelle arbitraire.

Les deux génératrices isotropes G et G' de C sont imaginaires conjuguées. Leur plan est réel, nous le prenons pour plan des xy ; il nous reste donc un paramètre à notre disposition, à savoir une rotation autour de Oz . Si l'on suppose que $q = 0$ donne la droite G , $x + iy = 0$, $z = 0$ et $q = \infty$ la droite G' , $x - iy = 0$, $z = 0$, on pourra écrire

$$(14) \quad \alpha = q^2 \frac{q^m + A_1 q^{m-1} + \dots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \dots + B_m}, \quad \beta = \frac{1}{q'} \frac{1 + A'_1 q + \dots + A'_m q^m}{B' + B'_1 q + \dots + B'_m q^m},$$

m et r étant deux entiers positifs; $A, A_2 \dots A_m, B \dots B_m$ des constantes réelles ou imaginaires ayant respectivement pour conjuguées $A'_1 \dots A'_m$,

$B'_1 \dots B'_m$. La première fraction représente bien, en effet, la fraction rationnelle la plus générale nulle pour $q = 0$, infinie pour $q = \infty$; la seconde s'en déduit en remarquant que, pour les valeurs de q égales à $e^{i\varphi}$, où φ est une constante réelle, l'expression conjuguée de la fraction α est bien celle que l'on a adoptée pour β . Sous la forme (14), on voit que le degré de (\mathfrak{U}) est $2(m+r)$, le degré de C est $2(m+r)$ ou $m+r$, suivant que (\mathfrak{U}) n'admet pas ou admet O pour centre. On écrit que le cône C admet simplement les génératrices $q = 0$, $q = \infty$ comme génératrices isotropes; nous formons $1 + \alpha\beta$ et l'on a l'identité

$$(15) \quad (q^m + A_1 q^{m-1} + \dots + A_m)(1 + A'_1 q + \dots + A'_m q^m) \\ + (Bq^m + B_1 q^{m-1} + \dots + B_m)(B' + \dots + B'_m q^m) \equiv (1 + A_1 A'_1 + \dots + B_m B'_m) q^m.$$

Nous devons tenir compte de la possibilité de changer q en $q e^{i\omega}$ et α en $\alpha e^{i\omega'}$, β en $\beta e^{-i\omega'}$, ω et ω' désignant des constantes réelles arbitraires. Si nous effectuons ces opérations, on voit que cela revient à faire les échanges

$$(16) \quad \begin{cases} A_1, & A_2, & \dots, & A_m, & A'_1, & A'_2, & \dots, & A'_m, \\ A_1 e^{i\omega}, & A_2 e^{-2i\omega}, & \dots, & A_m e^{-mi\omega}, & A'_1 e^{i\omega}, & A'_2 e^{2i\omega}, & \dots, & A'_m e^{mi\omega} \end{cases}$$

sur les A , et d'autre part sur les B , en posant $r\omega + \omega' = \omega''$,

$$(17) \quad \begin{cases} B, & B_1, & \dots, & B_m, & B', & \dots, & B'_m, \\ B e^{i\omega''}, & B_1 e^{-i\omega - i\omega''}, & \dots, & B_m e^{-mi\omega - i\omega''}, & B' e^{i\omega''}, & \dots, & B'_m e^{mi\omega + i\omega''}. \end{cases}$$

On peut donc disposer de ω et ω' pour rendre A_m et B_m réelles, car si ω_m est l'argument de A_m , on écrira $\omega_m - m\omega = 2k\pi$ ou encore $\omega_m - m\omega = (2k+1)\pi$, ce qui donnera pour ω une valeur à choisir parmi une succession de $2m$ nombres différant les uns des autres de $\frac{\pi}{m}$; pour ω' , on trouve l'une ou l'autre de deux valeurs différant de π . Dans ce cas, je dirai que le cône C a été mis dans la position canonique en même temps que q a reçu la forme canonique lui aussi.

Si l'on tient compte de l'identité (15) qui entraîne

$$A_m + B_m B' = 0, \quad A'_m + B B'_m = 0,$$

on voit que A_m et B_m étant devenus réels, B aussi l'est devenu. Nous

avons fait disparaître complètement les paramètres superflus; posons

$$A_j = a_j + i a'_j, \quad A'_j = A_j - i a'_j, \quad B_k = b_k + i b'_k, \quad B'_k = b_k - i b'_k,$$

les formules (14) contiennent les constantes réelles a et b , en nombre $2m - 1$ au numérateur de α et $2m$ au dénominateur, en tout $4m - 1$ constantes entre lesquelles l'identité (15) établit les relations suivantes :

1° Le coefficient de q^{2m} ou le terme constant donnent la relation $a_m + b_m b = 0$;

2° Le coefficient de q^λ , où λ est l'un des nombres $1, 2, \dots, m - 1$, donne une relation entre les lettres A, B ; le coefficient de $q^{2m-\lambda}$ donne évidemment la relation conjuguée, de sorte que, en ajoutant et retranchant membre à membre ces deux relations, on a deux équations à coefficients réels entre les a et b .

Comme le coefficient de q^m est le même de part et d'autre, nous avons, par l'identité (15), un total de $2m - 1$ équations entre les $4m - 1$ lettres a, b . Nous verrons plus tard, comme application d'une proposition générale, que l'on peut exprimer rationnellement les a, b au moyen de $2m$ arbitraires $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2m}$, de sorte qu'à tout système de valeurs réelles des μ corresponde un cône unicursal C réel du type envisagé.

Mais on n'a pas terminé : la courbe (A) n'est algébrique que si le vecteur période relatif à $q = 0$ est nul; cela fait trois équations au

maximum à écrire encore. La fraction $\frac{\frac{d\alpha}{dq}}{(1 + \alpha\beta)^2}$ est le quotient d'un polynôme entier en q par une puissance de q : on a donc immédiatement la condition relative à $\int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$ et il est clair que $\int \frac{d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$ donne la relation conjuguée : ces deux relations donnent, comme précédemment, deux équations (au plus) à coefficients réels entre les a et b . Enfin, $\int \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$ fournit une relation qui est elle-même sa conjuguée. On a donc trois équations nouvelles (au plus) à écrire entre les a, b ou, si l'on veut, les μ .

Nous reviendrons plus tard sur cette étude. Je passe immédiatement à un exemple.

7. Le cas du cône C de degré 4 à deux génératrices d'indice 4 avait été réservé; nous allons voir qu'il ne donne rien. J'écris

$$(18) \quad \alpha = q \frac{q + A}{Bq + C}, \quad \beta = \frac{1 + Aq}{q(B + Cq)},$$

où A, B, C, d'après ce qui précède, peuvent être supposés réels si le cône C est réel. La relation $A + BC = 0$ donne

$$1 + \alpha\beta = \frac{(1 + A^2 + B^2 + C^2)q}{(Bq + C)(B + Cq)}.$$

Ici, le changement de q en $\frac{1}{q}$ échange α en β , ce qui correspond à une symétrie de (18) par rapport à zOx ; ce changement transforme $\int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$ en $\int \frac{d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$, de sorte qu'il suffit d'étudier $\int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$ et $\int \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$. Par un calcul simple, on voit que la première intégrale donne $AC + B = 0$. En réunissant $A + BC = 0$, $AC + B = 0$, on a $C^2 = 1$; comme on peut changer de signe B et C simultanément (rotation de π autour de Oz), on prend $C = 1$, d'où $A = -B$. Il ne reste donc plus qu'une arbitraire A, que l'on devrait espérer déterminer par l'unique équation restant à écrire; cet espoir ne se réalise pas, car le terme en $\frac{dq}{q}$ de la dernière intégrale a pour coefficient $\frac{2}{(1 + A^2 + B^2 + C^2)^2}$ et ne peut donc jamais s'annuler. Ceci prouve qu'il ne faut accorder qu'une confiance relative aux dénombrements simultanés d'équations et d'inconnues: sous la forme (18) on a, en effet, trois inconnues A, B, C entre lesquelles la théorie établit seulement trois équations; la discussion a montré que ce système est incompatible. J'aurai l'occasion de revenir longuement sur ce genre de considérations.

Je fais alors l'essai suivant:

$$(19) \quad \alpha = q^p \frac{q^m + A}{Bq^m + C}, \quad \beta = \frac{1}{q^p} \frac{1 + Aq^m}{B + Cq^m},$$

où A, B, C sont réels, m et p deux entiers positifs. On a immédiate-

ment la relation $A + BC = 0$ pour exprimer qu'il n'y a que les deux génératrices isotropes $q = 0$ et $q = \infty$. On a alors

$$1 + \alpha\beta = \frac{(1 + B^2)(1 + C^2)q^m}{(Bq^m + C)(B + Cq^m)},$$

et comme l'échange de q en $\frac{1}{q}$ échange α en β , $\frac{dx}{(1 + \alpha\beta)^2}$ en $\frac{d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$, je me borne aux deux intégrales $\int \frac{dx}{(1 + \alpha\beta)^2}$, $\int \frac{\beta dx}{(1 + \alpha\beta)^2}$. Si je pose $q^m = x$, j'ai

$$(20) \quad \frac{dx}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{\{pBx^2 + C[p + m + B^2(m - p)]x - pBC^2\}(B + Cx)^2}{(1 + B^2)^2(1 + C^2)^2x^2} q^{p-1} dq;$$

$$(21) \quad \frac{\beta dx}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{\{pBx^2 + C[p + m + B^2(m - p)]x - pBC^2\}(B + Cx)(1 + Ax)}{(1 + B^2)^2(1 + C^2)^2x^2} \frac{dq}{q}.$$

Si $m = 1$, je supposerai $p \geq 3$ de façon que l'intégrale (20) ne donne pas de condition.

Si m est plus grand que 1, on suppose p premier avec m ; sinon, il est clair que, δ étant le plus grand commun diviseur de m et p , on prendrait q^δ pour nouveau paramètre. Dans ce cas de $m \geq 2$, l'intégrale (20) ne donne aucune condition, puisqu'elle porte sur cinq termes d'exposant $p - 1 + hm$, où h a l'une des valeurs 2, 1, 0, -1, -2 : p et m étant premiers, aucun de ces exposants ne se réduit à -1. Il ne reste donc que l'intégrale (21) : le multiplicateur de $\frac{dq}{q}$ est une fraction au numérateur de laquelle il suffit évidemment d'annuler le terme en x^2 ; A est égal à $-BC$ et les deux paramètres B et C sont liés par l'unique relation

$$pB^2 + C^2(1 - B^2)[p + m + B^2(m - p)] + pB^2C = 0.$$

Je peux diviser par C^2 et poser $C - \frac{1}{C} = u$, de sorte que j'écris

$$pB^2(u^2 + 2) + (1 - B^2)[p + m + B^2(m - p)] = 0.$$

Finalement j'obtiens, au moyen du paramètre B,

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\sqrt{B^2(m-p) - (m+p)}}{B\sqrt{p}}, \quad \sqrt{u^2 + 4} = \frac{\sqrt{B^2(m-p) + 4B^2p - (m+p)}}{B\sqrt{p}}; \\ C - \frac{1}{C} = u, \quad C + \frac{1}{C} = \sqrt{u^2 + 4}; \\ \alpha = q^p \frac{q^m - BC}{Bq^m + C}, \quad \beta = \frac{1}{q^p} \frac{1 - BCq^m}{B + Cq^m}. \end{array} \right.$$

Si p est supérieur à m , nous n'avons pas de courbe réelle (c'est donc le cas pour $m = 1$, puisqu'alors $p \geq 3$). Quand p est inférieur à m ($m \geq 2$ et p premier avec m), on donnera, pour avoir une courbe (A) réelle, à B une valeur arbitraire supérieure ou égale à $\sqrt{\frac{m+p}{m-p}}$; on calcule u puis C, et l'on a la courbe (A) qui est réelle et dépend d'un paramètre arbitraire.

Je vais faire ici quelques remarques qui reviendront constamment, mais qu'il serait fastidieux de répéter en détail : B donné, u a deux valeurs, $\sqrt{u^2 + 4}$ deux valeurs aussi que l'on peut combiner arbitrairement avec les deux valeurs de u ; cela fait donc quatre valeurs de C correspondant à un même B, à savoir C , $-\frac{1}{C}$, $-C$, $\frac{1}{C}$; si B est remplacé par $-B$, les deux valeurs de u , donc les quatre valeurs de C, ne changent pas. On obtient ainsi huit systèmes de valeurs pour l'ensemble B, C ne donnant qu'une courbe (A), à un déplacement près. D'abord, on peut changer B et C simultanément de signe : rotation de 180° autour de Oz. Conformément à ce qui a été expliqué au paragraphe 6, je peux changer C de signe en changeant q en j^2q , où j est une racine de $j^3 = -1$, ce qui ne change pas la courbe, puis en faisant tourner la courbe (A) autour de Oz, de façon à multiplier α par j^{-p} et β par j^p . De là résulte évidemment que les huit systèmes de valeurs de B et C ont été réduits à deux. Maintenant, si je remplace (A) par la courbe (A') symétrique par rapport à l'origine, ce qui revient à remplacer α par $-\frac{1}{\alpha}$ et β par $-\frac{1}{\beta}$, j'ai

$$(23) \quad \alpha = q^p \frac{q^m + \frac{B}{C}}{Bq^m - \frac{1}{C}}, \quad \beta = \frac{1}{q^p} \frac{1 + \frac{C}{B}q^m}{B - \frac{1}{C}q^m};$$

(\mathfrak{W}') définit le même cône C que (\mathfrak{W}) ; mais, tandis que (\mathfrak{W}) correspond au système de valeurs numériques (B, C) , (\mathfrak{W}') correspond au système $(B, \frac{-1}{C})$. Donc il est bien établi que les huit systèmes (B, C) envisagés sont équivalents. Cette circonstance se reproduit fréquemment; elle tient à ce qu'il y a plusieurs façons d'amener le cône C dans la position dite *canonique* ou de mettre la variable q sous sa forme canonique. Les calculs devront, dans chaque exemple, être dirigés de façon à mettre en évidence les divers systèmes de solutions pratiquement équivalents.

En raison de l'importance de cet exemple, je vais donner les valeurs de c, c', c'' . En posant $q = e^{i\varphi}$, on a aisément

$$(23) \quad \begin{cases} c = \frac{2 \cos(m+p)\varphi - 2uB \cos p\varphi - 2B^2 \cos(p-m)\varphi}{(1+B^2)\sqrt{u^2+4}}, \\ c' = \frac{2 \sin(m+p)\varphi - 2uB \sin p\varphi + 2B^2 \sin(m-p)\varphi}{(1+B^2)\sqrt{u^2+4}}, \\ c'' = \frac{-4B \cos m\varphi - u(1-B^2)}{(1+B^2)\sqrt{u^2+4}}. \end{cases}$$

On pourra remarquer que si B est égal à la valeur limite $\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}$, la quantité u est nulle. C est égal à 1, et l'on retrouve un des quatre exemples de M. Fabry, qu'il y a lieu d'ailleurs, on le verra, de mettre en évidence :

$$(24) \quad \begin{cases} c = \frac{\sqrt{m-p} \cos(m+p)\varphi - \sqrt{m+p} \cos(m-p)\varphi}{\sqrt{m+p} + \sqrt{m-p}}, \\ c' = \frac{\sqrt{m-p} \sin(m+p)\varphi + \sqrt{m+p} \sin(m-p)\varphi}{\sqrt{m+p} + \sqrt{m-p}}, \\ c'' = \frac{-2\sqrt[4]{m^2-p^2} \cos m\varphi}{\sqrt{m+p} + \sqrt{m-p}}, \\ \alpha = q^n \frac{q^m - \sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}}{\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}} q^m + 1}, \quad \beta = \frac{1}{q^p} \frac{1 - \sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}} q^m}{\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}} + q^m}. \end{cases}$$

Étudions les propriétés de $(\mathfrak{W}), C, (\mathfrak{A})$ en supposant $m \geq 2, p$ infé-

rieur à m et premier avec m , B supérieur à $\sqrt{\frac{m+p}{m-p}}$. Les formules (22), qui sont de la forme canonique $\alpha = q^p f(q^m)$, $\beta = \frac{1}{q^p} \varphi(q^m)$, que je signalerai ultérieurement, montrent qu'en remplaçant q par $qe^{\frac{2i\pi}{m}}$, on remplace un point de la courbe (\mathfrak{B}) par celui qui en dérive par une rotation de l'angle $2\pi \frac{p}{m}$ autour de Oz : en continuant, on a un polygone régulier étoilé de m côtés inscrit dans la courbe (\mathfrak{B}) , donc la courbe (\mathfrak{B}) ou le cône C se reproduisent par une rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{m}$ effectuée autour de Oz .

Le plan zOx est plan de symétrie pour (\mathfrak{B}) , ainsi que tous les plans qui en dérivent par une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz ; le fait que zOx est plan de symétrie et que Oz est axe de rotation $\frac{2\pi}{m}$ (locution abrégée que j'emploierai constamment) entraîne que le plan $\frac{y}{x} = \tan \frac{\pi}{m}$ est lui aussi plan de symétrie de (\mathfrak{B}) ; donc tous les plans obtenus en faisant tourner zOx autour de Oz de l'angle $\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \dots$ sont plans de symétrie de (\mathfrak{B}) et C : cela fait donc m plans de symétrie pour (\mathfrak{B}) et C ; les m droites perpendiculaires, à savoir Oy et les droites obtenues par des rotations successives de Oy autour de Oz d'angles égaux à $\frac{\pi}{m}$ sont axes de symétrie de (\mathfrak{A}) ; la courbe (\mathfrak{A}) se reproduit aussi par rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz .

Si u n'est pas nul, le cône C est, comme la courbe (\mathfrak{B}) , du degré $2(m+p)$; les deux génératrices isotropes $z=0$, $x \pm iy=0$ correspondent à des cycles de degré et classe égaux à p ; le degré de (\mathfrak{A}) est $4m+2p$. On remarquera que le degré de C est un nombre pair susceptible de prendre toutes les valeurs égales ou supérieures à 6 ; le degré de (\mathfrak{A}) est un nombre pair susceptible de prendre toutes les valeurs égales ou supérieures à 10. Pour $m=2p$, $p=1$, C est de degré 6, (\mathfrak{A}) de degré 10.

Si u est nul, c'est-à-dire B égal à la limite $\sqrt{\frac{m+p}{m-p}}$, les résultats qui précèdent subsistent si m est pair, et par suite p impair. Mais si m

est impair et p pair, on voit que le changement de φ en $\varphi + \pi$ change simultanément de signe c, c', c'' ; la directrice (\mathfrak{W}) est donc mixte, de degré $2(m+p)$ et le cône C de degré $m+p$ seulement (nombre impair susceptible de prendre toutes les valeurs impaires égales ou supérieures à 5); les deux cycles isotropes sont de degré et classe égaux à $\frac{p}{2}$; le degré de (\mathfrak{A}) est $2m+p$, nombre pair susceptible de prendre toutes les valeurs paires égales ou supérieures à 8. Pour $m=3, p=2$, C est du degré 5, (\mathfrak{A}) de degré 8.

Donc cet exemple suffit pour démontrer qu'on peut obtenir des courbes (\mathfrak{A}) unicursales réelles de degré égal à un nombre pair quelconque égal ou supérieur à 8, ou encore correspondant à un cône unicursal C de degré égal ou supérieur à 5.

Je viens d'indiquer ce qui se passe quand u est nul et p pair (par suite m impair) : la directrice (\mathfrak{W}) est mixte.

Si u est nul et p impair, auquel cas (\mathfrak{W}) est distincte de (\mathfrak{W}') , je vais montrer que C coïncide avec lui-même, non seulement après rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz , mais par simple rotation de $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz .

Mais cette fois (\mathfrak{W}) , par la rotation $\frac{\pi}{m}$, vient coïncider avec (\mathfrak{W}') et non plus avec elle-même : il suffit de remplacer q par $qe^{\frac{i\pi}{m}}$ pour passer d'un point $B(\alpha, \beta)$ de (\mathfrak{W}) à un autre point B_1 de (\mathfrak{W}) qui a pour coordonnées, comme on s'en assure aisément,

$$\left[e^{\frac{pi\pi}{m}} \frac{-1}{\beta}, \quad e^{-\frac{pi\pi}{m}} \frac{-1}{\alpha} \right];$$

si maintenant je fais tourner B_1 de l'angle $-\frac{p\pi}{m}$ autour de Oz , il vient s'appliquer sur le point de coordonnées $\left(\frac{-1}{\beta}, \frac{-1}{\alpha}\right)$, c'est-à-dire le point B' de (\mathfrak{W}') diamétralement opposé à B ; faisons tourner B_1 de l'angle $-\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{2\pi}{m}$; puisque $\frac{p+1}{2}$ est un entier, B_1 vient sur un point B_2 appartenant toujours à (\mathfrak{W}) . Je vois donc que B_2 , par une rotation égale à $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz , vient sur B' : c'est ce qu'il fallait établir; une rotation de $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz amène (\mathfrak{W}) sur (\mathfrak{W}') . La parité

de m n'a joué aucun rôle ici. Si donc u est nul et p impair, le cône C admet la rotation $\frac{\pi}{m}$, donc tous les plans obtenus en faisant pivoter zOx de l'angle $\frac{\pi}{2m}$ autour de Oz constituent $2m$ plans de symétrie de C et non plus seulement m ; les $2m$ perpendiculaires sont $2m$ axes de symétrie de (\mathfrak{A}) . La courbe (\mathfrak{A}) admet aussi la rotation $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz . Bien que la parité de m ne soit pas intervenue jusqu'ici dans ce cas, où nous supposons p impair et u nul, nous allons maintenant trouver une différence : π est égal à $m \times \frac{\pi}{m}$, une rotation de l'angle $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz amène (\mathfrak{B}) sur (\mathfrak{B}') , deux rotations successives ramènent (\mathfrak{B}') sur (\mathfrak{B}) , etc.; donc, si m est pair, (\mathfrak{B}) admet Oz pour axe de symétrie, ce qui est banal ici, cette propriété subsistant pour p impair, m pair avec u non nul; tandis que, si m est impair, toujours avec p impair et u nul, (\mathfrak{B}) et (\mathfrak{B}') sont symétriques l'une de l'autre par rapport à Oz : (c, c', c'') étant un point de (\mathfrak{B}) , $(-c, -c', c'')$ appartient à (\mathfrak{B}') , donc $(c, c', -c'')$ appartient à (\mathfrak{B}) : la courbe (\mathfrak{B}) admet le plan xOy pour plan de symétrie; mais, au point de vue de C ou (\mathfrak{A}) , cela n'ajoute aucune propriété, car nous savions déjà que (\mathfrak{A}) admettait Oz pour axe de symétrie.

8. Je viens d'étudier en détail cet exemple en me plaçant uniquement au point de vue des courbes (\mathfrak{A}) réelles. Il y aurait grosse faute à ne pas profiter de cet exemple pour les surfaces applicables sur le paraboloïde ou les surfaces minima [réelles (φ)], même quand les courbes (\mathfrak{A}) sont imaginaires. Mais les propriétés sont si nombreuses que je me bornerai à quelques cas particuliers fort simples.

Supposons B, C imaginaires pures; u et $\sqrt{u^2 + 4}$ sont donc imaginaires pures aussi. Si m est pair et p impair, la courbe (\mathfrak{B}) est imaginaire, mais réelle (\mathcal{G}). En effet, pour φ réel, les formules (23) montrent que c, c' sont imaginaires pures et c'' réel; si l'on remplace φ par $\varphi + \pi$, le point (c, c', c'') se trouve remplacé par $(-c, -c', c'')$ qui est conjugué du premier : donc (\mathfrak{B}) coïncide avec sa conjuguée, elle est réelle (\mathcal{G}). Elle conduit donc à deux surfaces réelles applicables sur le paraboloïde, admettant chacune un centre de symétrie qui est en même temps point conique isolé de ces surfaces. La surface

minima M est réelle au sens vulgaire; la surface minima M_0 est circonscrite à la sphère le long d'une courbe imaginaire mais réelle (g).

Pour définir tous les éléments par le calcul, je poserai

$$\begin{aligned} B &= iB_1, & C &= iC_1, & u &= C - \frac{1}{C} = i\left(C_1 + \frac{1}{C_1}\right) = iu_1, \\ \sqrt{u^2 + 4} &= C + \frac{1}{C} = i\left(C_1 - \frac{1}{C_1}\right) = i\sqrt{u_1^2 - 4} & (B_1 \text{ et } C_1 \text{ doivent être réels}); \\ u_1 &= C_1 + \frac{1}{C_1}, & \sqrt{u_1^2 - 4} &= C_1 - \frac{1}{C_1}. \end{aligned}$$

Nous multiplions α et β par i et $-i$ respectivement, ce qui revient à faire tourner toute la figure de 90° autour de Oz ; nous avons donc

$$(25) \left\{ \begin{aligned} C_1 + \frac{1}{C_1} &= \frac{\sqrt{B_1^2(m-p) - (m+p)}}{B_1\sqrt{p}}, \\ C_1 - \frac{1}{C_1} &= \frac{\sqrt{B_1^2(m-p) - 4pB_1^2 - (m+p)}}{B_1\sqrt{p}}; \\ \alpha &= q^p \frac{q^m + B_1C_1}{B_1q^m + C_1}, & \beta &= \frac{-1}{q^p} \frac{1 + B_1C_1q^m}{B_1 + C_1q^m} \quad (m \text{ pair, } p \text{ impair}). \end{aligned} \right.$$

La seule condition à écrire pour que C_1 soit réel est

$$B_1^2(m-p) - 4pB_1^2 - (m+p) > 0,$$

ce qui entraîne

$$m > p \quad \text{et} \quad B_1^2 > \frac{2p + \sqrt{m^2 + 3p^2}}{m-p}.$$

Ici la courbe (15) est représentée analytiquement sous l'une des formes canoniques que j'ai indiquées pour les courbes sphériques (g), à savoir $\alpha = f(q)$, $\beta = f_0\left(\frac{-1}{q}\right)$, où f et f_0 sont deux fractions conjuguées. Il y aurait également ici de nombreuses propriétés à rappeler sur les symétries planes.

Pour B_1 égal à sa limite inférieure $\sqrt{\frac{2p + \sqrt{m^2 + 3p^2}}{m-p}}$, la courbe (15) disparaît tout entière à l'infini; j'ai montré, dans le Mémoire sur le paraboloidé, l'application que l'on en peut faire pour les surfaces minima.

Les formules (23) montrent encore que, si B et u sont imaginaires

pures, mais $\sqrt{u^2+4}$ réel, on obtient le résultat suivant : pour φ réel, la courbe (\mathfrak{W}) contient le point $c = \lambda$, $c' = \mu$, $c'' = i\nu$, où λ, μ, ν sont réels; la courbe (\mathfrak{W}') contient le point $c = -\lambda$, $c' = -\mu$, $c'' = -i\nu$; or si, comme précédemment, m est pair et p impair, l'axe des z est axe de symétrie, soit pour (\mathfrak{W}) , soit pour (\mathfrak{W}') ; donc la courbe (\mathfrak{W}') contient aussi le point $c = \lambda$, $c' = \mu$, $c'' = -i\nu$ conjugué du point considéré sur (\mathfrak{W}) ; donc cette fois (\mathfrak{W}) et (\mathfrak{W}') sont conjuguées l'une de l'autre, le cône C est encore réel (\mathfrak{G}); on obtient donc encore des surfaces à centre applicables sur le paraboloïde, réelles (\mathfrak{C}); mais les surfaces minima M ou M_0 sont imaginaires. Je poserai encore $B = iB_1$, et j'aurai

$$u = \frac{i\sqrt{B_1^2(m-p) - (m+p)}}{B_1\sqrt{p}} = C - \frac{1}{C},$$

$$\sqrt{u^2+4} = \frac{\sqrt{-B_1^2(m-p) + 4pB_1^2 + (m+p)}}{B_1\sqrt{p}} = C + \frac{1}{C},$$

u étant imaginaire pure et $\sqrt{u^2+4}$ réel. C sera une imaginaire de module égal à l'unité; ici il faudra que

$$B_1^2(m-p) - (m+p) > 0 \quad \text{et} \quad B_1^2(m-p) + 4pB_1^2 - (m+p) < 0.$$

On a donc

$$m > p \quad \text{et} \quad \frac{2p + \sqrt{m^2 + 3p^2}}{m-p} > B_1^2 > \sqrt{\frac{m+p}{m-p}};$$

je conserverai les formules (23) en remplaçant B par iB_1 . Ici, pour $B_1 = \sqrt{\frac{m+p}{m-p}}$, on retrouvera l'existence de rotations égale à $\frac{\pi}{m}$ parce qu'alors on a $u = 0$, $C = 1$.

Le lecteur pourrait sans peine généraliser ces résultats pour les hypothèses négligées sur les parités de m et p .

9. Cet exemple du paragraphe 7 généralise donc l'exemple de M. Fabry, qui correspond simplement à la valeur limite $\sqrt{\frac{m+p}{m-p}}$ du paramètre B . On a vu que, pour obtenir des courbes réelles, il était nécessaire que m soit supérieur à p . Ceci met sur la voie d'une proposition plus générale, dont la démonstration est immédiate : si un cône

unicursal C n'a que deux génératrices isotropes et si la courbe à torsion constante correspondante est algébrique, il est nécessaire, pour que la courbe soit réelle (au sens vulgaire), que le degré de chacun des deux cycles isotropes soit inférieur au quart du degré de C. Écrivons en effet, en remarquant que la directrice (\mathfrak{W}) est unicursale ou mixte,

$$(26) \quad \begin{cases} \alpha = q^p \frac{q^m + A_1 q^{m-1} + \dots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \dots + B_m}, & \beta = \frac{1 + A'_1 q + \dots + A'_m q^m}{q^p B + B'_1 q + \dots + B'_m q^m}, \\ 1 + \alpha\beta = \frac{(1 + A_1 A'_1 + \dots + A_m^2 + B^2 + B_1 B'_1 + \dots + B_m^2) q^m}{(B q^m + \dots + B_m)(B + B'_1 q + \dots + B'_m q^m)}. \end{cases}$$

On en déduit

$$(27) \quad \begin{cases} c + ic' = \frac{2\alpha}{1 + \alpha\beta} = 2q^{p-m} \frac{(q^m + A_1 q^{m-1} + \dots + A_m)(B + B'_1 q + \dots + B'_m q^m)}{(1 + A_1 A'_1 + \dots + B_m^2)}, \\ c'' = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1} = \frac{(1 + \dots + B_m^2)q^m - 2(B q^m + \dots + B_m)(B + B'_1 q + \dots + B'_m q^m)}{(1 + A_1 A'_1 + \dots + B_m^2)q^m}. \end{cases}$$

En divisant, on a $\lambda = \frac{c + ic'}{c''}$, qui contient q^p en facteur, tandis que μ contient $\frac{1}{q^p}$ en dénominateur; ceci prouve que le cycle $q = 0$ est de degré et classe p , d'indice $2(m + p)$ si (\mathfrak{W}) est distincte de (\mathfrak{W}'), tandis que si (\mathfrak{W}) est mixte, le degré ou classe sera $\frac{p}{2}$, l'indice $m + p$.

Je forme l'intégrale

$$\int (c + ic') d(c + ic') = \frac{c^2 + c'^2}{2} + i \int c' dc - c dc';$$

elle doit être algébrique. On a

$$(28) \quad \begin{cases} c + ic' = D q^{p+m} + D_1 q^{p+m-2} + \dots + D_{2m} q^{p-m}, \\ c - ic' = D' q^{-p-m} + D'_1 q^{-p-m+1} + \dots + D'_{2m} q^{-p+m}; \end{cases}$$

D_j et D'_j étant imaginaires conjuguées. On égale à zéro le coefficient de $\frac{1}{q}$ dans $(c + ic') \frac{d(c - ic')}{dq}$ et l'on trouve manifestement

$$(29) \quad (p + m)DD' + (p + m - 1)D_1 D'_1 + \dots + (p - m)D_{2m} D'_{2m} = 0,$$

et si l'entier p , positif, était supérieur ou égal à m , le premier membre de (29) ne contiendrait que des termes positifs. On a donc bien, si la courbe (A) est réelle (v), $p < m$ sans égalité; si l'on appelle d le nombre $2(m+p)$, $p < m$ revient à $4p < d$. Si (v) est distincte de (v'), p est le degré du cycle, d le degré de C. Si (v) est mixte, p et d sont doubles du degré du cycle et du degré de C; donc, de toutes façons, la propriété est établie.

10. Dans les paragraphes qui précèdent, le cas où le cône C est unicursal et de degré 2, 3, 4 a été épuisé complètement : on n'a eu que des courbes imaginaires de degré 3, 5, 6, 7. Puis nous avons été amenés à étudier à fond un cas très particulier de cône C réel, à deux génératrices isotropes, de degré arbitraire. Je vais maintenant étudier *complètement* les cônes réels de degré 5 et 6 et indiquer quelques cônes particuliers de cônes réels du degré 8. Cette étude sera nécessaire pour les lois générales que j'établirai au Chapitre suivant.

Soit d'abord le cas où C est de degré 5; il n'y a qu'une hypothèse possible, à savoir deux génératrices d'indice 5. La directrice (v) est mixte; nous savons que α et β sont deux fractions de degré 5 en q ($t = \tan \frac{\varphi}{2}$, $q = e^{i\varphi}$) telles que le changement de φ en $\varphi + \pi$, c'est-à-dire de q en $-q$ remplace α par $\frac{-1}{\beta}$ et β par $\frac{-1}{\alpha}$. On en déduit immédiatement la forme de α et β :

$$\alpha = \frac{q^5 + Aq^4 + Bq^3 + Cq^2 + Dq}{-D'q^4 + C'q^3 - B'q^2 + A'q - 1}, \quad \beta = \frac{1 + A'q + B'q^2 + C'q^3 + D'q^4}{-Dq + Cq^2 - Bq^3 + Aq^4 - q^5},$$

où chaque lettre accentuée est la conjuguée de la même lettre non accentuée. En écrivant que l'équation $1 + \alpha\beta = 0$ n'a que les deux racines $q = 0$, $q = \infty$ d'ordre 5, on a d'abord $D = D' = 0$; j'écris donc simplement

$$(30) \quad \alpha = \frac{q^5 + Aq^4 + Bq^3 + Cq^2}{Cq^3 - B'q^2 + A'q - 1}, \quad \beta = \frac{1 + A'q + B'q^2 + Cq^3}{Cq^2 - Bq^3 + Aq^4 - q^5},$$

où A, B ont pour conjuguées A' et B' et où C désigne une quantité réelle, comme c'est notre droit, en amenant le cône C dans sa position canonique. En écrivant

$$(q^3 + Aq^2 + Bq + C)(1 + A'q + B'q^2 + Cq^3) + (Cq^3 - B'q^2 + A'q - 1)(C - Bq + Aq^2 - q^3) \equiv 2(1 + AA' + BB' + C^2)q^2,$$

puis exprimant que le terme en $\frac{dq}{q}$ disparaît dans $\frac{dx}{(1+\alpha\beta)^2}, \frac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, \frac{\beta dx - \alpha d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$, j'obtiens, par des calculs que je ne reproduis pas,

$$(31) \quad \begin{cases} B' + AC = 0, & B + A'C = 0, \\ (2A' - AB')C^2 - BC[3AA' - BB' - C^2 - 5] \\ \quad + (A'B - 2A)(B^2 + 2AC) - (AB + C)(A'C - 3B) - C(A^2 + 2B) = 0 \\ \text{(équation conjuguée de la précédente),} \\ C^4 - 5 - (B^2 - 2AC)(B'^2 - 2A'C) - 3(A^2 - 2B)(A'^2 - 2B') = 0. \end{cases}$$

Il y a deux cas à distinguer suivant que A et B sont réelles toutes deux ou imaginaires. Dans le premier cas, zOx est plan de symétrie pour (15), Oy axe de symétrie de (16). Les équations (31) se réduisent alors à trois entre les trois inconnues A, B, C. Je recopie le système en supposant A, B, C réelles :

$$(32) \quad \begin{cases} B + AC = 0, \\ (2 - B)AC^2 - BC[3A^2 - B^2 - C^2 + 5] \\ \quad + A(B - 2)(B^2 + 2AC) - (AB + C)(AC - 3B) - C(A^2 + 2B) = 0, \\ C^4 - 5 - (B^2 - 2AC)^2 - 3(A^2 - 2B)^2 = 0. \end{cases}$$

Il est clair qu'en remplaçant B par $-AC$ dans la seconde équation (32), AC est en facteur. J'ai donc plusieurs cas à distinguer :

Première solution : $A = 0, B = 0, C^4 = 5$. — En prenant $A = 0, B = 0, C = \sqrt[4]{5}$, on a le cône du cinquième degré déjà rencontré au paragraphe 7 pour $m = 3, p = 2$ donnant une courbe (A) du huitième degré. Les formules relatives à ce cône sont

$$(33) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{q^5 + \sqrt[4]{5}q^2}{\sqrt[4]{5}q^3 - 1}, & \beta = \frac{1 + \sqrt[4]{5}q^3}{\sqrt[4]{5}q^2 - q^3}; \\ c + ic' = \frac{\sqrt{5} - q^6}{(\sqrt{5} + 1)q}, & c - ic' = \frac{-1 + \sqrt{5}q^6}{(\sqrt{5} + 1)q^3}, & c'' = \frac{\sqrt[4]{5}(q^6 + 1)}{(\sqrt{5} + 1)q^3}. \end{cases}$$

On remarquera que l'équation $C^4 = 5$ admet la solution imaginaire $C = i\sqrt[4]{5}$. Si l'on prend cette valeur de C, on trouve aisément une courbe (15) imaginaire du dixième degré définie par

$$c + ic' = \frac{\sqrt{5} + q^6}{(\sqrt{5} - 1)q}, \quad c - ic' = \frac{1 + \sqrt{5}q^6}{(\sqrt{5} - 1)q^3}, \quad c'' = \frac{-i\sqrt[4]{5}(q^6 + 1)}{(\sqrt{5} - 1)q^3}$$

jouissant de cette propriété que sa projection sur le plan xOy est une courbe réelle (v), tout entière extérieure au cercle $x^2 + y^2 = 1$. Cette courbe est symétrique par rapport au plan xOy de sa courbe conjuguée et ceci est intéressant pour les surfaces réelles applicables sur le parabolôïde : elles admettent xOy pour plan de symétrie.

Deuxième solution : $C = B = 0$, $5 + 3A^4 = 0$. — On trouve un second cône imaginaire, d'ailleurs signalé, lui aussi, au paragraphe 7, pour $m = 1$, $p = 4$.

Troisième solution : $A \neq 0$, $C \neq 0$. — On a à résoudre

$$(34) \quad \begin{cases} C^4 - 3A^2(A + 2C)^2 = 5 + A^2C^2(AC - 2)^2, \\ (A^2C^2 + 5)(A + C) = C(3A^2 + AC - C^2). \end{cases}$$

Ces deux équations n'ont que des solutions imaginaires; c'est très aisé à constater en remarquant que si l'on prend deux axes de coordonnées ωA , ωC , la première équation représente une courbe contenue dans les régions définies par l'inégalité

$$[C^2 - A\sqrt{3}(A + 2C)][C^2 + A\sqrt{3}(A + 2C)] > 0;$$

ces régions sont délimitées par quatre droites indéfinies se croisant à l'origine. De même, la seconde équation représente une courbe tout entière contenue dans les régions définies par l'inégalité $(A + C)C(3A^2 + AC - C^2) > 0$; ces nouvelles régions sont encore délimitées par quatre droites issues de l'origine et l'on constate aisément que les angles positifs relatifs à la seconde courbe sont tout entiers compris dans les angles négatifs de la première.

Nous avons donc à étudier le second cas. J'ai écrit :

$$(35) \quad \alpha = \frac{q^5 + Aq^4 + Bq^3 + Cq^2}{Cq^3 - B'q^2 + A'q - 1}, \quad \beta = \frac{1 + A'q + B'q^2 + Cq^3}{Cq^2 - Bq^3 + Aq^4 - q^5},$$

en amenant le cône C dans sa position canonique et employant la forme canonique pour q ; mais il faut nous rappeler que ce choix de position et de variable n'est pas unique, comme il a été expliqué. Si nous remplaçons q par $qe^{i\omega}$, α par $\alpha e^{-5i\omega}$ et β par $\beta e^{5i\omega}$, nous aurons

$$\alpha = \frac{q^5 + Ae^{-i\omega}q^4 + Be^{-2i\omega}q^3 + Ce^{-3i\omega}q^2}{Ce^{3i\omega}q^3 - B'e^{2i\omega}q^2 + A'e^{i\omega}q - 1},$$

et l'on voit que si $e^{3i\omega} = \pm 1$, on a une autre position canonique du même cône C, A étant remplacé par $Ae^{\frac{ik\pi}{3}}$, B par $Be^{\frac{ik\pi}{3}}$, où k désigne un entier. Ceci prouve qu'il y a avantage probable à prendre pour inconnues le module B et l'argument de A. Je pose $A = \rho e^{i\varphi}$, $A' = \rho e^{-i\varphi}$; d'où $B = -C\rho e^{-i\varphi}$, $B' = -C\rho e^{i\varphi}$. Je porte ces valeurs de A, A', B, B' dans la troisième équation (31), j'égalise à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, de sorte que j'obtiens deux équations remplaçant la troisième et la quatrième équation (31). On obtient ainsi

$$(36) \quad \begin{cases} \rho C^2 \cos 3\varphi + C[3\rho^2 - 5 - C^2 - C^2\rho^2] - C^2\rho^3 \cos 3\varphi - 5\rho \cos 3\varphi = 0 \\ [C^2(1 + \rho^2) \sin 3\varphi = 0. \end{cases}$$

Or si l'on prend $\sin 3\varphi = 0$, d'où $\varphi = \frac{k\pi}{3}$, les diverses valeurs de l'entier k donnent toujours le même cône C dans des positions différentes; or, pour $k = 0$, A et B sont réels, donc ce cas est à écarter, puisqu'il a déjà été vu. Prenons donc $C^2(1 + \rho^2) = 5$. En tenant compte de cette relation, la première équation (36) donne $\cos 3\varphi = \frac{3\rho^2 - 10}{2\rho^3 C}$. J'écris maintenant la dernière équation (31)

$$4\rho^3 C(C^2 - 3) \cos 3\varphi + C^4 - 5 - C^2\rho^2(\rho^2 C^2 + 16) - 3\rho^4 = 0.$$

Dans cette équation je remplace $2\rho^3 C \cos 3\varphi$ par $3\rho^2 - 10$ et $C^4 - C^2\rho^2(\rho^2 C^2 + 16)$ par $C^4(1 - \rho^4) - 16C^2\rho^2$ ou en tenant compte de $C^2(1 + \rho^2) = 5$ et $C^2\rho^2 = 5 - C^2$ par $5C^2(1 - \rho^2) - 16(5 - C^2)$; j'ai donc une équation qui devient une fois réduite

$$C^2\rho^2 + C^2 - 18\rho^2 - 25 - 3\rho^4 = 0,$$

et puisque $C^2(1 + \rho^2) = 5$, j'ai simplement

$$3\rho^4 + 18\rho^2 + 20 = 0$$

qui est l'équation résolvante; ρ étant calculé, on a ensuite $C = \sqrt{\frac{5}{1 + \rho^2}}$, puis φ et par suite A, A', B, B'. Ici l'équation en ρ n'ayant pas de racines réelles, nous n'obtenons pas de courbe réelle.

En raison de l'intérêt qu'une telle courbe présente pour les surfaces

applicables sur le paraboloïde, je termine les calculs. Nous avons

$$\rho^2 = \frac{-9 + \varepsilon\sqrt{21}}{3},$$

ε désignant $+1$ ou -1 ; puis

$$C^2 = \frac{5}{1 + \rho^2} = -6 - \varepsilon\sqrt{21}; \quad C^2\rho^2 = 5 - C^2 = 11 + \varepsilon\sqrt{21}.$$

On a

$$\begin{aligned} \rho &= \varepsilon' i \sqrt{\frac{9 - \varepsilon\sqrt{21}}{3}}, & C &= \varepsilon'' i \sqrt{6 + \varepsilon\sqrt{21}}, & C\rho &= -\varepsilon'\varepsilon'' \left[\sqrt{\frac{21}{2}} + \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}} \right], \\ \cos 3\varphi &= \frac{3\rho^2 - 10}{2\rho^2(\rho C)} = \frac{-\varepsilon'\varepsilon''[3\varepsilon + 7\sqrt{21}]}{20\sqrt{2}}, & \sin 3\varphi &= \frac{-\varepsilon'\varepsilon'' i [3\sqrt{21} + 7\varepsilon]}{20\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

J'ai désigné, par ε' et ε'' , $+1$ ou -1 ; je n'ai pris que l'une des déterminations de $\sin 3\varphi$, car prendre l'autre revient à échanger A avec A', B avec B', ce qui revient à remplacer le cône C par son symétrique par rapport au plan zOx , ou encore par rapport à Oy ; cela revient donc à faire tourner (36) de 180° autour de Oy . On a donc $e^{i\varphi} = \frac{-\varepsilon'\varepsilon''[\sqrt{21} - \varepsilon]}{5\sqrt{2}}$; en extrayant la racine cubique on peut se borner à une seule détermination; je prends donc

$$e^{i\varphi} = -\varepsilon'\varepsilon'' \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - \varepsilon}{5\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad e^{-i\varphi} = -\varepsilon'\varepsilon'' \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + \varepsilon}{2\sqrt{2}}},$$

d'où, finalement, tous les radicaux étant arithmétiques,

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= -i\varepsilon'' \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - \varepsilon}{5\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{9 - \varepsilon\sqrt{21}}{3}}, \\ A' &= -i\varepsilon'' \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + \varepsilon}{2\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{9 - \varepsilon\sqrt{21}}{3}}, \\ B &= -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + \varepsilon}{2\sqrt{2}}} \left[\sqrt{\frac{21}{2}} + \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}} \right], \\ B' &= -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - \varepsilon}{5\sqrt{2}}} \left[\sqrt{\frac{21}{2}} + \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}} \right], \\ C &= \varepsilon'' i \sqrt{6 + \varepsilon\sqrt{21}}. \end{aligned} \right.$$

Dans les formules (37) restent deux quantités $\varepsilon, \varepsilon''$ égales à ± 1 ; on peut se débarrasser de ε'' , car le changement de signe de ε'' revient à changer de signe A, A', C , résultat que l'on peut obtenir en changeant dans les formules (35) q en $-q$, puis faisant tourner le cône C de 180° autour de Oz . Il ne reste donc, en prenant $\varepsilon'' = 1$, que deux solutions distinctes correspondant à $\varepsilon = +1$ ou -1 . Chacune des deux courbes (15) que l'on obtient ainsi est symétrique par rapport au plan γOz de sa conjuguée; en effet, A, A', C étant imaginaires pures, tandis que B et B' sont réelles, le changement de q en $i q_1$ donne $\alpha = i f(q_1)$, $\beta = i \varphi(q_1)$, où les fractions f et φ sont à coefficients réels; donc pour q_1 réel, les quantités c' et c'' sont réelles et c imaginaire pure, ce qui justifie la proposition. Les deux surfaces applicables sur le parabolôide déduites de la courbe (15) sont unicursales, réelles et admettent γOz pour plan de symétrie. Je dois d'ailleurs faire remarquer qu'il y a lieu de considérer non seulement la courbe sphérique (35), où A, A', B, B' et C ont les valeurs (37), mais encore toutes les courbes sphériques qui s'en déduisent par la substitution signalée à la fin du Chapitre II. En négligeant un déplacement réel, on obtient donc une courbe sphérique (u_1, v_1) à trois paramètres :

$$(38) \quad \begin{cases} u = \frac{q^3 + Aq^2 + Bq^2 + Cq^2}{Cq^3 - B'q^2 + A'q - 1}, & v = \frac{q^3 - Aq^2 + Bq^2 - Cq^2}{Cq^3 + B'q^2 + A'q + 1}; \\ u_1 = \lambda u + \mu + \nu i, & v_1 = \lambda v + \mu + \nu i. \end{cases}$$

On remarquera que si μ et ν sont nulles toutes deux, le cône C_1 correspondant à la courbe (u_1, v_1) admet les deux génératrices $z = 0$, $x \pm iy = 0$; mais si cette double condition $\mu = \nu = 0$ n'est pas vérifiée, le cône C_1 admet deux génératrices isotropes non conjuguées. On peut dire encore que C est la position canonique du cône C_1 , mais ceci n'a plus d'interprétation géométrique si l'on se borne aux déplacements réels. On peut remarquer que si μ est nul, u_1 et v_1 sont comme u et v imaginaires pures quand q est lui-même imaginaire pure et la même conclusion en découle, à savoir que γOz est plan de symétrie des surfaces applicables sur le parabolôide déduites de C_1 .

Le résumé de la discussion complète faite pour les cônes du cinquième degré est que nous avons eu une seule courbe réelle (15) de

degré 8, unicursale. Nous verrons que c'est la courbe réelle de degré minimum.

10. Je passe maintenant aux cônes réels unicursaux du sixième degré. J'ai dit plus haut que l'on doit envisager le cas où il y a un couple d'indice 6 et celui où il y a un couple d'indice 4, un couple d'indice 2. Soit donc le cas où il y a un couple unique d'indice 6. La directrice sphérique (38) a pour équations

$$(39) \quad \alpha = \frac{q^3 + Aq^2 + Bq}{Cq^2 + Dq + E}, \quad \beta = \frac{1 + A'q + Bq^2}{Cq + D'q^2 + Eq^3},$$

où B, E, C sont réels; A et A' sont imaginaires conjuguées, D et D' aussi. Nous obtiendrons trois familles de cônes à un paramètre :

1° A = D = 0, cas traité au paragraphe 6 pour $m = 2, p = 1$. Je n'y reviens pas : il y a deux plans de symétrie pour C, $\varepsilon O x$, $\varepsilon O y$ si $B > \sqrt[4]{3}$; pour $B = \sqrt[4]{3}$, le cône C admet en plus les deux plans $x = y$ et $x = -y$ comme plans de symétrie;

2° A et D non nuls, mais réels, le cône C admet un seul plan de symétrie $\varepsilon O x$;

3° A et D imaginaires, le cône C n'admet pas de plan de symétrie.

Dans les trois cas, le degré et la classe des deux cycles isotropes sont égaux à l'unité, la courbe (38) est du degré 10. J'indique rapidement les calculs pour la deuxième et la troisième famille.

Deuxième famille : cônes à plan de symétrie unique. — Par la méthode exposée plus haut, on obtient quatre équations entre les cinq inconnues A, B, C, D, E :

$$(40) \quad \begin{cases} B + EC = 0, & A(1 + B) + D(C + E) = 0, \\ DC^2 + (AD + 3E - BC)DC + AE(D^2 + 2EC) + BDE^2 = 0, \\ C^2 + 2D^2 + 2ACD + A^2D^2 - B^2C^2 \\ \quad + 3E^2 + 4ADE + 2BCE + 2A^2E^2 + 2ABDE + B^2E^2 = 0. \end{cases}$$

On peut avoir une équation unique entre C et E en remplaçant partout B par $-CE$, puis écrivant $D = \frac{E}{C+E} \rho$, $A = \frac{-E}{1-CE} \rho$, où ρ est une

inconnue auxiliaire. La troisième équation devient alors, en posant

$$E - \frac{1}{E} = u,$$

$$\rho^2 = C(u + C)[C(u - C) - 3],$$

et alors, écrivant la dernière équation sous la forme

$$C^2 \left[E^2 + \frac{1}{E^2} \right] + 2 \left[A^2 + \frac{2AD}{E} + \frac{D^2}{E^2} \right] + \frac{A^2 D^2}{E^2} - C^2 + 3 - 2C^2 + \frac{2AD}{E} C \left(\frac{1}{E} - E \right) = 0,$$

on constate aisément qu'en remplaçant A, B, D par leurs valeurs en C et E, elle devient

$$[C^2 u^2 - (C^2 - 3)][1 - C^2 - Cu]^2 - 2\rho^2[C + u][(C^2 - 1)u - 4C] + \rho^4 = 0.$$

Je récapitule :

$$(41) \quad \begin{cases} [C^2 u^2 - C^2 + 3][1 - C^2 - Cu]^2 - 2\rho^2[C + u][(C^2 - 1)u - 4C] + \rho^4 = 0, \\ \rho^2 = C(u + C)[C(u - C) - 3], \\ E - \frac{1}{E} = u, \quad D = \frac{E}{C + E} \rho, \quad A = \frac{-E}{1 - CE} \rho, \quad B = -EC. \end{cases}$$

La première équation (41), où ρ^2 est, bien entendu, remplacé par l'expression donnée au-dessous en C et u, représente dans un plan ωCu une courbe symétrique par rapport au point ω ; le point (C, u) étant choisi, on a ρ par une extraction de racine, E par une équation du second degré, puis A, B, D rationnellement au moyen des quantités déjà calculées. Si le point (u, C) est réel, les deux valeurs de E sont réelles, mais les deux valeurs de ρ ne sont réelles que si le point (u, C) satisfait à la condition $C(u + C)[C(u - C) - 3] > 0$; les quatre systèmes correspondant pour E, ρ , A, B, D à (u, C), joints aux quatre systèmes correspondant à (-u, -C), formant huit systèmes donnant le même cône à un déplacement près [changement de q en -q; rotation de 180° autour de Oz, ou encore échange de \mathfrak{W} avec \mathfrak{W}' , ce qui revient à faire les échanges

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha, & \beta, & A, & C, & D, & E, & u \\ \frac{-1}{\beta}, & \frac{-1}{\alpha}, & \frac{D}{E}, & C, & \frac{-A}{E}, & \frac{-1}{E}, & u; \end{array}$$

ces trois hypothèses combinées deux à deux conduisent aux huit systèmes indiqués].

Tout revient donc à déterminer les points réels de la courbe Γ définie par la première équation (41) satisfaisant à l'inégalité $C(u+c)[C(u-c)-3] > 0$. Je construis les courbes séparatrices et couvre de hachures les régions où l'expression de ρ^2 est négative. Or on constate immédiatement que la courbe Γ n'a aucun point réel à distance finie commun avec les courbes frontières $C=0$, $u+C=0$, $C(u-C)-3=0$. La conclusion sera donc que toute branche réelle de Γ , ou bien conviendra tout entière, ou bien sera tout entière à rejeter. Développons l'équation de Γ :

$$(42) \quad \begin{cases} 2u^4C^2 + u^3(8C^3 - 6C) + u^2(10C^4 - 23C^2) \\ + u(4C^5 - 30C^3 - 6C) + 3 - 6C^2 - 13C^4 = 0. \end{cases}$$

Cette courbe est du sixième degré; l'origine est centre, les directions asymptotiques sont données par $2u(u+2C)C^2(u+C)^2=0$. Il y a donc une branche asymptote à ωC qui ne convient pas; il y a une branche asymptote à la droite $u+2C=0$, qui convient tout entière. On vérifie immédiatement que la droite $u+2C=0$ n'a aucun point commun à distance finie avec Γ et que la courbe a la disposition indiquée sur la figure.

Maintenant pour l'asymptote ωu , je pose $C = \frac{t}{u}$ et j'étudie t pour les grandes valeurs de u : l'équation (42) devient alors

$$2t^2 - 6t + \frac{1}{u^2}(\dots) = 0;$$

pour $\frac{1}{u} = 0$, on a $t=0$ et $t=3$, d'où deux développements pour C , à savoir $C = \frac{1}{2u^3} + \dots$ et $C = \frac{3}{u} + \frac{1}{u^3} + \dots$, procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{u}$; comme la branche d'hyperbole frontière asymptote à ωu correspond au développement $C = \frac{3}{u} + \frac{9}{u^3} + \dots$, on voit immédiatement qu'aucune des deux branches de Γ asymptotes à ωu ne convient.

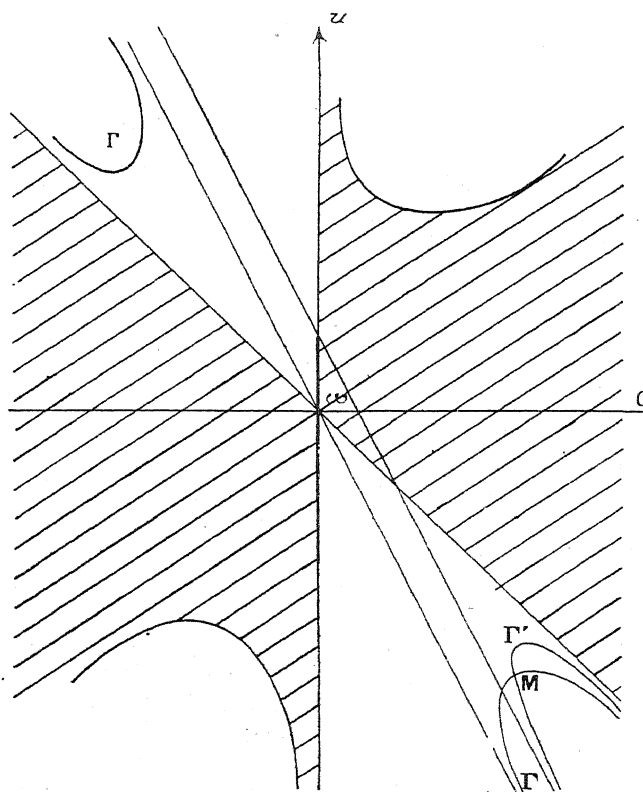
Enfin, pour la direction asymptotique $u+C=0$, j'écris $u+C = \frac{t}{C}$

et j'obtiens aisément deux développements en série convergents pour C très grand

$$u = -C + \frac{3}{2C^3} + \dots \quad \text{et} \quad u = -C - \frac{1}{C} - \frac{2}{C^3} + \dots,$$

dont la première ne convient pas et dont la seconde convient. Il résulte de là nécessairement que cette branche asymptote à $u + C = 0$, ne pouvant traverser les frontières des hachures non plus que la droite $u + 2C = 0$ doit aller rejoindre la branche asymptote à la droite $u + 2C = 0$; on a donc entre les deux droites $u + C = 0$, $u + 2C = 0$ une branche de courbe réelle soit dans le deuxième, soit dans le quatrième quadrant donnant des courbes réelles (3) dépendant d'un paramètre arbitraire.

Fig. 5.



Pour les branches à négliger de Γ , que je ne construirai pas, on a

C, u réels, E est réel; ρ , D, A sont imaginaires pures; donc pour q imaginaire pure, α et β sont imaginaires pures, circonstance déjà réalisée; les surfaces applicables sur le parabolôide déduites de ces courbes imaginaires admettent zOx comme plan de symétrie.

12. J'ouvre une digression qui sera utile pour un problème ultérieur. Cherchons les génératrices d'intersection de ces cônes réels C avec le plan de symétrie zOx ; j'écris l'équation $\alpha = \beta$ qui donne $c' = 0$; on a

$$\frac{q^3 + Aq^2 - ECq}{Cq^2 + Dq + E} = \frac{1 + Aq - ECq^2}{Cq + Dq^2 + Eq^3},$$

équation réciproque admettant $q = 1$ et $q = -1$ comme racines, on a ainsi deux génératrices simples le long desquelles le cône C est normal au plan zOx . Ces deux racines enlevées, il reste l'équation réciproque

$$(43) \quad E(q^4 + q^2 + 1) + (AE + D)q(q^2 + 1) + (C - E^2C + AD + EC^2)q^2 = 0.$$

Si q_1 est racine, $\frac{1}{q_1}$ aussi est racine; à ces deux valeurs de q correspondent deux nappes du cône C se croisant le long d'une même génératrice double du cône C; or si q_1 tend vers l'unité, $\frac{1}{q_1}$ aussi, de sorte que si $q = 1$ est racine de cette équation, c'est en même temps une racine double: à cette racine double correspond une génératrice de rebroussement de C; on vérifie aisément que $\frac{d\alpha}{dq}, \frac{d\beta}{dq}$ sont nulles, de sorte que (15) admet un rebroussement dans le plan zOx , la tangente étant dans le plan zOx ; d'ailleurs nous avons vu que $c' = 0$ admettait alors $q = 1$ pour racine triple; le cône C admet une génératrice de rebroussement dans le plan zOx , le long de laquelle zOx est le plan tangent. En écrivant que l'équation (43) admet $q = 1$ pour racine, on a $C\left(\frac{1}{E} - E\right) + C^2 + 3 + 2\left(A + \frac{D}{E}\right) + \frac{AD}{E} = 0$, et en remplaçant A, D, E en u , C, ρ , on a $\rho^2 + 2(2C + u)\rho + (Cu + C^2 - 1)(C^2 + 3 - Cu) = 0$ ou, en tenant compte de la valeur trouvée pour ρ^2 simplement, $2(2C + u)\rho = C^2 + 3 - Cu$. En portant cette valeur de ρ , à savoir $\frac{C^2 + 3 - Cu}{2(2C + u)}$ dans l'expression trouvée pour ρ^2 , on a l'équation

$$(44) \quad 4C(u + C)(2C + u)^2 - (Cu - C^2 - 3) = 0.$$

Cette équation représente une courbe Γ' du quatrième degré dont il suffit d'obtenir les points d'intersection avec Γ pour obtenir un cône C à génératrice de rebroussement dans le plan zOx . Si le point d'intersection est réel, le cône C est réel, car, pour un tel point, $\rho = \frac{C^2 + 3 - Cu}{2(2C + u)}$. La courbe Γ' satisfait comme Γ à l'inégalité $C(u + C)(Cu - C^2 - 3) > 0$, elle n'a aucun point réel à distance finie avec les frontières; elle est du quatrième degré, admet l'origine pour centre. On trouve aisément que Γ' est asymptote à la droite $u + C = 0$ avec le développement $u = -C - \frac{1}{2C} + \frac{1}{8C^3} + \dots$, tandis que la branche trouvée pour Γ correspond au développement $u = -C - \frac{1}{C} - \frac{2}{C^3} + \dots$. D'autre part, la droite $u + 2C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est asymptote à Γ' ; en tenant compte de ce fait que Γ' ne peut entrer dans les régions hachurées et de la disposition que Γ' offre par rapport à l'asymptote en question, on voit que Γ' possède une branche comprise entre les deux droites $u + C = 0$, $u + 2C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ coupant nécessairement Γ en un point M réel conformément à la figure; l'ordre de multiplicité de M dans l'intersection de Γ et Γ' est ou l'unité ou un nombre impair.

Nous verrons plus loin l'utilité de cette digression. Je résume le résultat. Si je me suis proposé le problème suivant: « Trouver un cône unicursal C du sixième degré, n'ayant que les deux génératrices isotropes $z = 0$, $x \pm iy = 0$, admettant zOx pour plan de symétrie, ayant une génératrice de rebroussement dans ce plan, et donnant une courbe (46) unicursale », j'ai obtenu cinq équations à cinq inconnues. Les inconnues sont A, B, C, D, E ; les équations sont les quatre équations (40) et l'équation

$$C\left(\frac{1}{E} - E\right) + C^2 + 3 + 2\left(A + \frac{D}{E}\right) + \frac{AD}{E} = 0.$$

J'ai obtenu, par le point M , une solution de ce système: j'ai besoin de l'ordre de multiplicité de cette solution A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 . Je fais remarquer qu'il était légitime de remplacer partout dans mes cinq équations B par $-EC$, puis A par $\frac{-E}{1-CE}\rho$, D par $\frac{E}{C+E}\rho$, de façon à n'avoir plus

que trois équations à trois inconnues E, C, ρ ; l'ordre de multiplicité de la solution $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ du système primitif est bien le même que l'ordre de E_0, C_0, ρ_0 pour le nouveau. Il est légitime aussi de faire le changement de variable $E - \frac{1}{E} = u$; à toute solution du système C, u, ρ correspondent deux solutions distinctes (C, E, ρ) ou $(C, \frac{1}{E}, \rho)$ du système en C, E, ρ et l'ordre est conservé, pourvu que $u \neq \pm 2i$ ou $E \neq \pm i$, ce qui est le cas. Or mon système définitif en C, u, ρ se trouve être

$$\Gamma = 0, \quad \Gamma' = 0, \quad \rho = \frac{C^2 + 3 - Cu}{2(2C + u)},$$

Γ et Γ' ne renfermant que u et C ; l'ordre de multiplicité de la solution (C, u, ρ) est donc simplement l'ordre de multiplicité du point d'intersection des deux courbes Γ et Γ' : pour le point M , on a un ordre probablement égal à l'unité, mais en tous cas impair. Ceci sera utilisé plus tard.

13. *Troisième famille des cônes du sixième degré à un seul couple isotrope, famille n'ayant aucun plan de symétrie.* — J'écris

$$(45) \quad \alpha = \frac{q^3 + (a + ia')q^2 - ECq}{Cq^2 + (d + id')q + E}, \quad \beta = \frac{1 + (a - ia')q - ECq^2}{Cq + (d - id')q^2 + Eq^3},$$

de façon à mettre en évidence des quantités toutes réelles. Par la méthode habituelle j'obtiens

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(1+B) + d(C+E) = 0 \quad a'(1-B) + d'(C-E) = 0, \\ d[C^2 + (3E - BC)C + BE^2] \\ \quad + Ca(d^2 + d'^2) + 2aCE^2 + E[a(d^2 - d'^2) + 3a'dd'] = 0, \\ d'[C^2 - (3E - BC)C - BE^2] \\ \quad + Ca'(d^2 + d'^2) + 2a'CE^2 + E[a'(d^2 - d'^2) - 2a'dd'] = 0, \\ C^2 \left[\frac{1}{E^2} + E^2 - 2 \right] + 2 \left(\frac{d^2 + d'^2}{E^2} + a^2 + a'^2 \right) + 2C \left(\frac{1}{E} - E \right) \frac{ad + a'd'}{E} \\ \quad + \frac{(a^2 + a'^2)(d^2 + d'^2)}{E^2} - C^4 + 4 \frac{ad - a'd'}{E} + 3 = 0. \end{array} \right.$$

On a cinq équations à six inconnues a, a', d, d', C, E ; B est mis à la place de $-CE$. La résolution du système (46) est au fond très simple;

pour une même courbe (45), abstraction faite d'un déplacement, nous trouvons trente-deux solutions du système (46). En effet, faire tourner C de 180° autour de Oz revient à changer de signe C, E, d, d' . Faire tourner le cône C de 180° autour de Oy est équivalent, en raison de la symétrie de C par rapport à O, à prendre le symétrique de C par rapport à zOx ou à échanger α et β : cela revient, en échangeant en même temps q avec $\frac{1}{q}$, à changer de signe a' et d' ; changer q en $-q$ revient à changer de signe α, a', C, E ; faire tourner C de 90° autour de Oz revient, si l'on remplace en même temps q par iq , à faire les échanges

$$\begin{array}{ccccccc} a, & a', & C, & d, & d', & E, \\ a', & -a, & -C, & -d', & d, & E. \end{array}$$

Enfin échanger (45) avec (45') revient aux échanges

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha, & \beta, & a, & a', & d, & d', & C, & E, \\ \frac{-1}{\beta}, & \frac{-1}{\alpha}, & \frac{d}{E}, & \frac{-d'}{E}, & \frac{-a}{E}, & \frac{a'}{E}, & C, & \frac{-1}{E}. \end{array}$$

La composition de chacun de ces cinq procédés à deux alternatives chacun donne trente-deux solutions équivalentes. Ceci conduit aisément au changement d'inconnues

$$(47) \quad \frac{a}{C+E} = \frac{-d}{1-EC} = \rho, \quad \frac{a'}{-C+E} = \frac{d'}{1+EC} = \rho',$$

qui diminue d'ailleurs de 2 le nombre total d'inconnues. Si l'on remplace a, a', d, d' dans les troisième et quatrième équations (46), en supprimant le facteur ρ ou ρ' qui ne peut être nul qu'à condition de reprendre la première ou deuxième famille, on obtient deux équations du premier degré en ρ^2 et ρ'^2 faciles à résoudre, donnant, en posant $E - \frac{1}{E} = u$,

$$(48) \quad \rho^2 = \frac{-C(2C-u)(C^2-Cu+3)}{4(C^2+Cu-1)(C^2+1)}, \quad \rho'^2 = \frac{-C(2C+u)(C^2+Cu+3)}{4(C^2-Cu-1)(C^2+1)}.$$

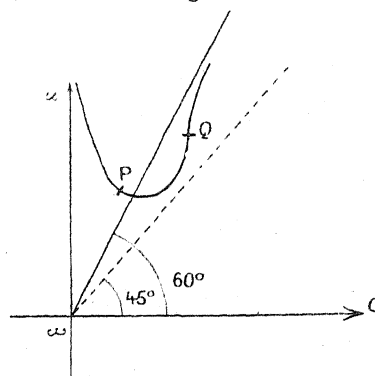
En remplaçant dans la dernière équation a, d, a', d' , en ρ, ρ', C, E , cette équation ne renferme plus que C, E, ρ^2, ρ'^2 , ce qui permet, en tenant compte de (48), d'obtenir la relation unique, que je mets sous

deux formes équivalentes :

$$(49) \quad \begin{cases} 2C^2u^4 - (5C^4 - 11C^2)u^2 - (3 - 3C^2 + 29C^4 + 3C^6) = 0, \\ u^2 = \frac{5C^2 - 11}{4} \pm \frac{C^2 + 1}{4C} \sqrt{49C^2 + 24}. \end{cases}$$

Cette équation représente dans le plan ωCu une courbe admettant ωC , ωu pour axes. L'expression $3x^3 + 29x^2 - 3x + 3$ n'a qu'une racine réelle négative, car la dérivée d'homogénéité $29x^2 - 6x + 9$ a ses racines imaginaires; donc C étant réel, l'équation bicarrée (49) en u a deux racines en u^2 réelles dont on ne prend que la positive : sous la seconde forme, on prend donc le signe $+$ si C est positif, le signe $-$ si C est négatif. Une fois le point u, C choisi sur la courbe (49), on calcule ρ, ρ' par (48), E par la relation $E - \frac{1}{E} = u$ et les formules (47) donnent a, a', d, d' . A chaque point u, C correspondent huit systèmes pour ρ, ρ', E , et en associant les quatre points $(u, C), (-u, C),$

Fig. 6.



$(u, -C), (-u, -C)$, on a l'ensemble des trente-deux solutions équivalentes. La seule condition de réalité est que ρ^2 et ρ'^2 soient positifs. Je peux me borner à supposer C et u positifs, Si C est réel positif, la valeur réelle positive de u est $u = +\sqrt{\frac{5C^2 - 11}{4} + \frac{C^2 + 1}{4C} \sqrt{49C^2 + 24}}$. Le point (u, C) décrit alors une courbe Γ asymptote à ωu et à la droite $u = C\sqrt{3}$. On vérifie aisément que la droite $u = C$ n'a pas de points communs avec Γ ; donc puisque nous sommes dans le premier quadrant,

pour tous les points de Γ , ρ'^2 est positif, car le numérateur de ρ'^2 est négatif; le dénominateur égalé à zéro donne l'hyperbole $u = C - \frac{1}{C}$ tout entière en dessous de l'asymptote $u = C$, par suite sans point commun avec Γ ; le dénominateur de ρ'^2 est donc lui aussi négatif. Il reste donc à écrire que ρ^2 est positif ou $(u - 2C)(C^2 - Cu + 3)(C^2 + Cu - 1) > 0$. L'intersection de Γ avec la droite $u = 2C$ conduit à l'équation $(3C^2 - 1)(C^2 + 1)^2 = 0$; l'intersection de Γ avec l'hyperbole $Cu = 1 - C^2$ conduit à l'équation $(3C^3 - 1)(C^2 + 1)^3 = 0$; l'intersection de Γ avec la courbe $Cu = C^2 + 3$ conduit à l'équation $(C^3 + 2C^2 - 27)(C^2 + 1)^2 = 0$, d'où $C^2 = -1 + \sqrt{28}$; je marque donc le point P de Γ correspondant à $C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et le point Q correspondant à $C = \sqrt{-1 + \sqrt{28}}$; le point P n'est pas frontière, mais Q est frontière et l'on voit aisément que l'arc partant de Q pour rejoindre l'asymptote à 60° convient seul. On peut d'ailleurs remarquer qu'au point Q, on a $\rho = 0$, donc $a = d = 0$ et, d'après ce qui a été expliqué, le cône correspondant admet $\gamma O z$ comme plan de symétrie et, par suite, rentre dans la famille précédemment déterminée.

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer que l'arc réel négligé sur Γ donne des surfaces réelles applicables sur le parabolôïde admettant $\gamma O z$ comme plan de symétrie : en effet, nous avons dit que ρ'^2 était positif, mais ρ^2 négatif, tout le long de cet arc : alors a et d sont imaginaires pures, a' et d' réels, de sorte que $a + ia'$, $d + id'$, $a - ia'$, $d - id'$ sont eux-mêmes imaginaires pures, et si q est lui-même imaginaire pure, c est imaginaire pure, c' et c'' sont réels : proposition déjà rencontrée. Les surfaces applicables sur le parabolôïde ont alors $\gamma O z$ pour plan de symétrie.

14. Je passe maintenant aux cônes unicursaux réels de degré 6 admettant un premier couple isotrope d'indice 4 et un second d'indice 2. Les équations de la courbe (15) seront alors réductibles à la forme

$$(50) \quad \alpha = \frac{(q+k)^3}{(kq+1)k(aq^2+bq+c)}, \quad \beta = \frac{\left(q+\frac{1}{k}\right)^3}{\left(\frac{q}{k}+1\right)\frac{1}{k}(cq^2+bq+a)},$$

où α, b, c, k sont réels; on a amené le cône C dans sa position canonique en supposant que le couple d'indice 2 se compose des deux droites $z = 0, x \pm iy = 0$ obtenues pour $q = -k$ ou $q = -\frac{1}{k}$ et que $q = 0$ et $q = \infty$ donnent les deux génératrices d'indice 4. Les deux génératrices d'indice 2 ne donnent aucune relation, et les deux génératrices d'indice 4 donnent deux relations fixant l'indice et deux relations résiduelles. On obtient quatre équations à coefficients réels entre α, b, c, k qui, malheureusement, n'admettent aucune solution réelle. En négligeant les déplacements, on n'obtient qu'une solution imaginaire

$$(51) \quad \alpha = \frac{(q+i)^3}{(-q+i)\left(q^2 + \frac{7iq}{4} - 1\right)}, \quad \beta = \frac{(q-i)^3}{-(q+i)\left(-q^2 + \frac{7iq}{4} + 1\right)}$$

possédant la propriété intéressante de définir une courbe ⁽¹⁵⁾ imaginaire, mais réelle au sens de M. Goursat. Je change en effet q en iq et j'ai les équations

$$(52) \quad \alpha = \frac{(q+i)^3}{(1-q)\left(q^2 + \frac{7q}{4} + 1\right)}, \quad \beta = \frac{(q-i)^3}{(q+i)\left[q^2 - \frac{7q}{4} + 1\right]}$$

rentrant dans la forme canonique $\alpha = F(q), \beta = F_0\left(\frac{-1}{q}\right)$ que j'indique dans mon Mémoire sur le paraboloïde, F désignant une fraction rationnelle, F_0 la fraction conjuguée. Le cône C est réel, au sens de M. Goursat; on obtient deux surfaces réelles unicursales à centre applicables sur le paraboloïde; le fait que F est réelle, entraîne de plus que zOx est plan de symétrie des deux surfaces.

La surface minima M_0 est réelle, admet zOx pour plan de symétrie.

La courbe ⁽¹⁶⁾ avec un choix convenable des constantes d'intégration est réelle ⁽¹⁷⁾. Elle est du degré 8.

La discussion qui vient d'être achevée complètement pour les cônes de degré 4, 5, 6 montre qu'il n'y a pas de courbe réelle unicursale de degré 6, car pour une telle courbe le degré du cône C satisferait à l'inégalité $m \leq 6 < 2m$ et m devrait donc être égal à 4, 5, 6. La courbe réelle (au sens vulgaire) dérivée du cône réel du cinquième degré (§7 et 10) et la courbe réelle (au sens de M. Goursat) trouvée à l'instant

sont du huitième degré et sont les courbes réelles unicursales de plus faible degré dont le rayon de torsion est constant.

15. J'achève ce Chapitre par une étude sommaire des cônes réels unicursaux de degré 8; les couples de génératrices isotropes conjugués ont pour indice i_1, i_2, \dots avec la relation $i_1 + i_2 + \dots = 8$. Comme quatre indices 2 sont impossibles, on ne peut avoir d'autres solutions que $i_1 = 8$; ou $i_1 = 6, i_2 = 2$; ou $i_1 = 4, i_2 = 3$; ou $i_1 = 4, i_2 = 2, i_3 = 2$.

Je m'occupe uniquement des deux premiers cas. Dans le premier j'écris

$$(53) \quad \alpha = \frac{q^4 + Aq^3 + Bq^2 + Cq}{Dq^3 + Eq^2 + Fq + G}, \quad \beta = \frac{1 + A'q + B'q^2 + Cq^3}{Dq + E'q^2 + F'q^3 + Gq^4},$$

C, D, G étant réelles; A, A', puis B et B', ou E et E', ou encore F et F' sont quatre couples de constantes imaginaires conjuguées; au total onze inconnues. L'identité

$$(54) \quad \begin{aligned} & (q^3 + Aq^2 + Bq + C)(1 + A'q + B'q^2 + Cq^3) \\ & + (Dq^3 + Eq^2 + Fq + G)(D + E'q + F'q^2 + Gq^3) \\ & \equiv (1 + AA' + BB' + C^2 + EE' + FF' + G^2)q^3 \end{aligned}$$

donne cinq relations; il y a ensuite trois relations résiduelles. On peut donc espérer obtenir des solutions dépendant de trois paramètres arbitraires.

Les calculs n'ayant en eux-mêmes aucun intérêt, cherchons des cas de simplifications: il y a d'abord le cas où A, B, E, F sont réels, le plan zOx est alors un plan de symétrie coupant le cône C suivant deux génératrices simples réelles correspondant à $q = \pm 1$; le nombre des inconnues s'abaisse à sept, l'identité (54) ne donne que trois équations, les relations résiduelles se réduisent à deux; on obtient un groupe de solutions à deux paramètres contenu dans l'ensemble à trois paramètres du cas général.

Il y a un autre genre de symétrie qu'on peut mettre en évidence ici, car en écrivant

$$(55) \quad \alpha = \frac{q^4 + Aq^3 + Bq^2 + Cq}{-Cq^3 + B'q^2 - A'q + 1}, \quad \beta = \frac{1 + A'q + B'q^2 + Cq^3}{-Cq + Bq^2 - Aq^3 + q^4},$$

le changement de q en $-q$ change α en $\frac{1}{\beta}$ et β en $\frac{1}{\alpha}$, d'où symétrie par rapport à xOy ; cette fois le plan de symétrie coupe le cône C suivant deux génératrices simples $q = 0$, $q = \infty$ imaginaires, qui sont précisément nos deux génératrices isotropes. Les inconnues sont C , réel; A et A' , puis B et B' , deux couples d'imaginaires conjuguées. Les cinq inconnues sont liées par deux équations $B' + AC = 0$ et $B + A'C = 0$ provenant de l'identité (54); maintenant si nous rappelons qu'il suffit d'étudier les trois intégrales $\int c'' dc$, $\int c'' dc$, $\int c dc'$, on remarquera que c'' , $\frac{dc}{dq}$, $\frac{dc'}{dq}$ sont des fonctions impaires de q , de sorte que $c'' \frac{dc}{dq}$ et $c'' \frac{dc'}{dq}$ ne contiennent pas de terme en $\frac{1}{q}$, les deux premières intégrales sont automatiquement algébriques et l'on n'obtient qu'une condition résiduelle.

Les deux sortes de symétrie envisagées ici successivement correspondent aux deux cas prévus *a priori* (Chap. II, § 9); dans le premier cas, les deux vecteurs périodes sont perpendiculaires à l'axe de symétrie (Oy) du cône C et directement opposés; dans le second cas, ils sont portés par l'axe de symétrie (Oz) du cône C .

Je termine les calculs relatifs au second cas de symétrie. Les cinq inconnues C , A , A' , B , B' vérifient le système des trois équations

$$(56) \quad \begin{cases} B' + AC = 0, & B + A'C = 0, \\ C^4 - A^2 A'^2 - 2C(A^3 + A'^3) - 4AA'C^2 - 2 = 0, \end{cases}$$

en posant $A = \rho e^{i\omega}$, $A' = \rho e^{-i\omega}$, $B = -C\rho e^{-i\omega}$, $B' = -C\rho e^{i\omega}$, j'ai une équation unique entre ρ et ω :

$$(57) \quad \cos 3\omega = \frac{C^4 - \rho^4 - 4\rho^2 C^2 - 2}{4C\rho^2}.$$

Le point réel C , ρ étant fixé dans le plan $\omega C\rho$ avec la relation restrictive $|\cos 3\omega| < 1$, l'angle ω peut recevoir six valeurs distinctes comprises entre $-\pi$ et $+\pi$; en rassemblant les quatre points (C, ρ) , $(-C, \rho)$, $(C, -\rho)$, et $(-C, -\rho)$ on a vingt-quatre solutions donnant, sauf déplacement, la même courbe (\mathcal{A}). L'inégalité à écrire revient à

$$(58) \quad (C^4 - \rho^4 - 4\rho^2 C^2 - 2 - 4C\rho^3)(C^4 - \rho^4 - 4\rho^2 C^2 - 2 + 4C\rho^3) < 0.$$

Chacune des deux courbes séparatrices admet ω pour centre; elles

sont symétriques l'une de l'autre par rapport à ωC ou $\omega \rho$. Elles sont faciles à construire. L'équation de la première par exemple s'écrit $C^4 - (\rho^2 + 2C\rho)^2 - 2 = 0$ ou encore $(C + \rho)^2 (C^2 - 2C\rho - \rho^2) = 2$. En posant $\rho = \lambda - C$, où λ est un paramètre, on a

$$C = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2}}{\lambda\sqrt{2}}, \quad \rho = \lambda - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2}}{\lambda\sqrt{2}}$$

qui permettent de construire très simplement la courbe. On pourra remarquer, une fois les régions déterminées, que si le point (C, ρ) vient sur l'une des frontières, par exemple sur la courbe $\cos 3\omega = 1$, on a $\omega = 0$, A et A' sont réelles, ainsi que B et B' : on a donc un cône admettant en plus xOz comme plan de symétrie et dépendant d'un seul paramètre.

Cet exemple a été obtenu par M. Fabry; le lecteur se rendra compte de la simplification apportée aux calculs par la méthode suivie ici.

Si le point C, ρ est choisi dans les régions négligées jusqu'ici, $\cos 3\omega$ est réel, $\sin 3\omega$ est une imaginaire pure; $\cos 3\omega + i \sin 3\omega$ est un nombre réel, on pourra se borner à la racine cubique réelle pour $\cos \omega + i \sin \omega$, de sorte que A, B, C, A', B' prennent des valeurs toutes réelles; pour q réel, α et β sont réelles, c et c' sont réelles et c' imaginaire pure; la courbe (\mathfrak{V}) est imaginaire, symétrique par rapport à xOz de sa conjuguée, de sorte que les surfaces applicables sur le parabolôïde déduites dans ce cas de (\mathfrak{V}) admettent xOz pour plan de symétrie; comme (\mathfrak{V}) admet xOy pour plan de symétrie, l'axe Oz est axe de symétrie de ces surfaces et, par suite, yOz en est un second plan de symétrie.

16. J'aborde maintenant le cas où le cône C unicursal du huitième degré admet deux génératrices conjuguées d'indice 2 et deux génératrices conjuguées d'indice 6. Pour simplifier, je suppose de plus que zOx soit plan de symétrie; j'écris les équations de (\mathfrak{V})

$$(59) \quad \alpha = \frac{(q-k)^2(q+m)}{(kq-1)(Aq^3+Bq^2+Cq+D)},$$

$$\beta = \frac{(1-kq)^3(1+mq)}{(k-q)(A+Bq+Cq^2+Dq^3)},$$

où A, B, C, D, k, m sont six constantes à déterminer. Toutes les con-

ditions d'indice et de résidus relatives aux génératrices $z = 0$, $x = \pm iy$ données par $q = k$ ou $q = \frac{1}{k}$ ont été déjà exprimées. J'écris l'identité

$$\begin{aligned} (60) \quad & (q - k)^2 (kq - 1)^2 (q + m)(1 + mq) \\ & + (Aq^3 + Bq^2 + Cq + D)(A + Bq + Cq^2 + Dq^3) \\ & \equiv [1 + (m - 2k)^2 + (k^2 - 2km)^2 + m^2 k^4 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2] q^3 \end{aligned}$$

fournissant trois équations exprimant que le couple isotrope $q = 0$, $q = \infty$ a pour indice 6. Le vecteur période relatif à $q = 0$ est nul moyennant deux équations complémentaires. On a donc un système de cinq équations à six inconnues dont un raisonnement très simple va prouver l'existence de solutions réelles à un paramètre. Il suffit de remarquer que si k devient égal à 1 ou -1 , les formules (59) se simplifient; la courbe (13) et le cône C s'abaissent au sixième degré; l'identité (60) exprime alors que le cône C a un couple isotrope unique d'indice 6 et les équations résiduelles obtenues continuent, quand on y fait $k = 1$ ou -1 , à exprimer que le couple isotrope d'indice 6 ne donne pas de singularité logarithmique. Il nous suffit d'ailleurs de nous borner à $k = 1$; nous remarquons que ce cône dégénéré du sixième degré admet pour $q = 1$ la génératrice Oz comme génératrice de rebroussement, le plan zOx étant le plan tangent le long de cette génératrice. Mais alors nous reconnaissons le cône du sixième degré qui a été déterminé directement au paragraphe 12 (sauf rotation autour de Oy de façon à ce que Oz coïncide avec la génératrice de rebroussement). La conclusion est donc la suivante : pour $k \neq 1$, nous avons un cône du huitième degré obtenu en résolvant un système de cinq équations à six inconnues; ce système, où k est l'une des inconnues, admet une solution réelle, d'ordre de multiplicité impair, quand on y fait $k = 1$. On peut donc prendre k comme paramètre et développer la solution générale du système suivant les puissances croissantes de $k - 1$ en séries entières à coefficients réels, convergentes pour $k - 1$ suffisamment petit en module. Il est donc bien établi que nous avons une infinité de cônes réels du huitième degré répondant aux conditions de l'énoncé.

J'ajoute simplement quelques mots pour bien vérifier ce que deviennent les cinq équations du problème quand k tend vers 1. Les équations

tions (59) donnent, en tenant compte de (60) :

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dq} = \frac{(q-k)^2 P}{(kq-1)^2 (Aq^3 + Bq^2 + Cq + D)^2}, \\ 1 + \alpha\beta = \frac{\lambda q^3}{(Aq^3 + Bq^2 + Cq + D)(A + Bq + Cq^2 + Dq^3)}, \end{cases}$$

où P est un polynome du quatrième degré et λ une constante.

On déduit de là

$$\frac{\frac{d\alpha}{dq}}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{(q-k)^2 P (A + Bq + Cq^2 + Dq^3)^2}{\lambda^2 (kq-1)^2 q^6}$$

et, par suite,

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{\beta^2 \frac{d\alpha}{dq}}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{(kq-1)^4 (1 + mq)^2 P}{\lambda^2 q^6}, \\ \frac{\beta \frac{d\alpha}{dq}}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{(q-k)(kq-1)(1 + mq)(A + Bq + Cq^2 + Dq^3)P}{\lambda^2 q^6}. \end{cases}$$

Nous savons qu'une fois l'identité (60) vérifiée, il suffit d'étudier les trois intégrales $\int \frac{\beta^2 d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$, $\int \frac{\alpha^2 d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$, $\int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$ dont les deux premières se ramènent d'ailleurs, en raison de la symétrie zOx , l'une à l'autre. Les formules (62) montrent clairement que le vecteur période relatif à l'une ou l'autre des génératrices isotropes $q = k$ ou $q = \frac{1}{k}$ est nul. Les deux conditions résiduelles s'obtiennent en écrivant que les deux numérateurs des fractions (62) ne contiennent pas de terme en q^5 .

Si l'on fait $k=1$, la directrice (15) est remplacée par la courbe

$$(59') \quad \alpha = \frac{(q-1)^2(q+m)}{Aq^3 + Bq^2 + Cq + D}, \quad \beta = \frac{(q-1)^2(1+mq)}{A + Bq + Cq^2 + Dq^3};$$

l'identité (60) où l'on remplace k par 1 est bien celle qui exprime que cette courbe (15') n'a que deux points à l'infini. La dérivée $\frac{d\alpha}{dq}$ peut s'obtenir soit en dérivant directement (59'), soit en recopiant la

dérivée calculée sur (59) et faisant ensuite $k = 1$, puis simplifiant, on a donc

$$\frac{d\alpha}{dq} = \frac{P}{(Aq^3 + Bq^2 + Cq + D)^2},$$

où P est le polynome précédemment obtenu, où k a été ensuite remplacé par 1. Et l'on a ensuite

$$(62') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta^2 \frac{d\alpha}{dq}}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{(q-1)^4 (1 + mq)^2 P}{\lambda^2 q^6}, \\ \frac{\beta \frac{d\alpha}{dq}}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{(q-1)^2 (1 + mq) (A + Bq + Cq^2 + Dq^3) P}{\lambda^2 q^6}, \end{array} \right.$$

toujours en recopiant (62) et remplaçant k par 1. La méthode est donc bien justifiée.

Les courbes unicursales (A) obtenues ici sont du degré 14, le cône C étant du huitième degré et ayant quatre cycles isotropes de degré 1.

17. Je me borne à ces exemples numériques; le lecteur peut se rendre compte que les calculs deviennent rapidement inabordables.

Je renvoie au Mémoire de M. Fabry pour la comparaison des exemples; M. Fabry a cité seulement quatre types réels; le premier est celui que j'ai trouvé au paragraphe 7, où les entiers m et p sont quelconques, mais obtenu par M. Fabry uniquement dans le cas où le paramètre que j'ai appelé B a sa valeur limite $\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}$.

Le second est constitué par les cônes obtenus au même paragraphe 7 en donnant à m la valeur 2 et à p la valeur 1, ce sont les cônes du sixième degré à deux plans de symétrie; l'exemple du paragraphe 7 est donc une généralisation de deux types de M. Fabry.

Un troisième type de M. Fabry est celui que j'ai retrouvé au paragraphe 15 : cônes du huitième degré à un seul couple isotrope. Cet exemple est peut-être celui qui montre le mieux la simplification des calculs.

Le quatrième type de M. Fabry est un cône du dixième degré que je n'ai pas cru devoir retrouver, les calculs n'ayant qu'un intérêt médiocre,

Tous ces exemples sont du type : cône des binormales unicursal ne possédant qu'un couple isotrope.

L'exemple que je donne au paragraphe 16 est fondamental pour prouver qu'il existe des cônes réels (au sens vulgaire) ayant plusieurs couples de génératrices isotropes conjuguées. L'exemple du paragraphe 14 donne aussi un type dans ce genre, à condition de prendre le mot *réel* au sens de M. Goursat. Enfin cet exemple du paragraphe 16 est fondamental aussi, par la méthode employée, qui nous permet d'esquiver la résolution et même la formation de systèmes d'équations inabordables à une discussion directe. Il suffit dans beaucoup de cas de mettre en évidence dans une famille de cônes un cône particulier dégénéré pour établir l'existence et la réalité de toute la famille.

Pour les courbes complètement imaginaires, j'ai de même indiqué des cônes de degré arbitrairement grand possédant une, deux ou trois génératrices isotropes, avec un nombre de cycles isotropes lui-même arbitraire; les seuls connus jusqu'ici n'avaient qu'un cycle isotrope, je les ai retrouvés en les rattachant à l'identité de Bezout.

La théorie des surfaces minima et la théorie des surfaces applicables sur le parabolôïde se sont trouvées en même temps notablement enrichies.

Dans les Chapitres qui suivent nous construirons des cônes unicursaux à directrice sphérique cette fois non unicursale, puis des cônes non unicursaux.

CHAPITRE IV.

SYMÉTRIES, ROTATIONS. EXEMPLES DE COURBES UNICURSALES
ADMETTANT UN NOMBRE ARBITRAIRE DE POINTS A L'INFINI.
INDICATRICES DES TORSIONS NON UNICURSALES.

I. J'énonce quelques résultats relatifs au cas où le cône C admet un plan de symétrie π ; la perpendiculaire Δ élevée à π par le sommet du cône se trouve être axe de symétrie du cône C. La courbe (\mathcal{A}) supposée algébrique admet pour axe de symétrie une certaine droite Δ' parallèle à Δ .

La directrice sphérique *complète* de C admet à la fois π ou Δ pour plan ou axe de symétrie; si elle est indécomposable, rien de plus à dire. Mais si elle se décompose en deux courbes (\mathfrak{U}) et (\mathfrak{U}') , deux cas sont à distinguer :

1° (\mathfrak{U}) admet π pour plan de symétrie; (\mathfrak{U}') aussi; les deux courbes (\mathfrak{U}) et (\mathfrak{U}') sont symétriques l'une de l'autre par rapport à Δ ;

2° (\mathfrak{U}) admet Δ pour axe de symétrie; (\mathfrak{U}') aussi; les deux courbes (\mathfrak{U}) et (\mathfrak{U}') sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan π .

J'étudierai d'abord le cas où (\mathfrak{U}) supposée unicursale admet un plan de symétrie. D'une façon générale, si une courbe unicursale plane ou gauche, sphérique ou non, admet un plan π de symétrie, les paramètres t et t' de deux points symétriques M et M' sont liés par une relation involutive $A tt' + B(t + t') + C = 0$. Si la courbe est réelle, supposons t réel pour les points réels; deux cas sont à distinguer suivant que l'équation $At^2 + 2Bt + C = 0$, qui fournit les éléments doubles de cette involution, a ses racines réelles ou imaginaires. Si les racines sont réelles, à chacune correspond un point réel coïncidant avec son symétrique, donc situé dans le plan de symétrie ou rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire; donc le plan π coupe la courbe en deux points simples réels (ou 1, ou 0) et s'il a d'autres points avec la courbe, ces points sont nécessairement doubles ou multiples d'ordre pair. Par une substitution homographique préalable sur t , on peut supposer que la relation involutive est $t + t' = 0$; supposons que M parcourt toute la courbe, le point symétrique M' la parcourra aussi tout entière, en sens inverse de M, les deux points M et M' se croisent deux fois aux points doubles de l'involution. L'ellipse offre cette disposition par rapport à l'un ou l'autre de ses deux axes; la lemniscate $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ l'offre dans la symétrie relative à Ox .

Dans le cas où les éléments doubles de l'involution sont imaginaires, on peut supposer la relation involutive réduite à la forme $tt' + 1 = 0$. En dehors de points multiples, le plan π ne peut avoir de points réels communs avec la courbe; si l'on pose $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, $t' = \tan \frac{\varphi'}{2}$, on pourra écrire $\varphi' = \varphi + \pi$. Si le point M décrit toute la courbe, le point M' décrit aussi toute la courbe dans le même sens cette fois; les

deux points M et M' restent à une distance constante, mesurée sur la courbe. La lemniscate déjà citée offre cette disposition dans la symétrie relative à Oy.

S'il s'agit de courbes unicursales sphériques, l'emploi des coordonnées α et β conduit naturellement dans le premier cas à supposer que zOx est le plan de symétrie; le paramètre ayant été choisi comme il a été dit, si l'on pose $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, $q = e^{i\varphi}$, la relation involutive est $t + t' = 0$ ou $qq' = 1$; le point (α, β) a pour symétrique le point (β, α) et l'on a pour équations paramétriques de (15)

$$(1) \quad \alpha = \frac{q^m + A_1 q^{m-1} + \dots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \dots + B_m}, \quad \beta = \frac{1 + A_1 q + \dots + A_m q^m}{B + B_1 q + \dots + B_m q^m},$$

où les coefficients A et B sont réels; les points réels de la courbe s'obtiennent en donnant à q des valeurs imaginaires de module égal à 1; la projection de la courbe sur le plan zOx comprend d'abord la projection des points réels, puis une partie réelle *virtuelle* correspondant aux valeurs de q réelles, valeurs donnant pour c et c'' des valeurs réelles et pour c' une valeur imaginaire pure. Sous les seules hypothèses faites, les formules (1) comportent une rotation arbitraire autour de Oy et le changement de t en λt où λ est une constante réelle arbitraire. Dans le cas déjà rencontré où nous étudions une courbe (15) unicursale, admettant cette symétrie par rapport à zOx et n'ayant que deux points à l'infini, les deux arbitraires en question ont été déterminées en prenant le plan xOy pour plan des deux génératrices isotropes de C et faisant correspondre $t = i$ et $t = -i$ à ces deux génératrices.

Dans l'autre genre de symétrie, il est commode au contraire de prendre le plan de symétrie pour plan xOy ; c'' changeant de signe, α est remplacé par $\frac{1}{\beta}$ et β par $\frac{1}{\alpha}$; en adjoignant encore q à t , la relation involutive est $1 + tt' = 0$ ou $q + q' = 0$; nous avons encore deux arbitraires : une relation autour de Oz et le remplacement de φ par $\varphi + \omega$, où ω est une constante arbitraire. Si l'on écrit

$$\alpha = \frac{q^m + A_1 q^{m-1} + \dots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \dots + B_m}, \quad \beta = \frac{1 + A'_1 q + \dots + A'_m q^m}{B + B'_1 q + \dots + B'_m q^m},$$

on a les relations nécessaires et suffisantes

$$\frac{1}{B'_m} = \frac{-A_1}{B_{m-1}} = \dots = \frac{(-1)^m A_m}{B} = \frac{B}{A'_m} = \dots = \frac{(-1)^m B_m}{1},$$

d'où $(-1)^m B_m B'_m = 1$; cela entraîne que m soit pair, le degré de (13) et C est multiple de 4. J'ai indiqué (Chap. III, § 6) l'utilité de la position *canonique* de C : cela fixe les deux arbitraires restant en jeu et permet de supposer A_m et B_m réelles, de sorte que B_m peut être pris égal à 1; en remplaçant m par $2m$, on a finalement

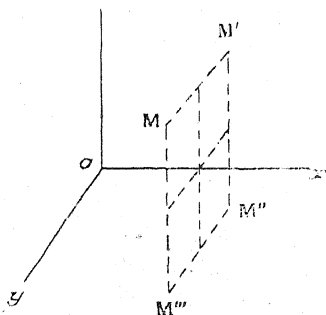
$$(2) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{q^{2m} + A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} + \dots + A_{2m}}{1 - A_1 q + A'_2 q^2 - \dots + A_{2m} q^{2m}}, \\ \beta = \frac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \dots + A_{2m} q^{2m}}{q^{2m} - A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} - \dots + A_{2m}}. \end{cases}$$

J'emploierai souvent les expressions abrégées; symétrie zOx , t en $-t$ ou q en $\frac{1}{q}$ pour définir le premier genre de symétrie; pour le second, symétrie xOy , q en $-q$.

J'avais déjà eu l'occasion de faire allusion à ces deux modes de symétrie (Chap. II, § 9; Chap. III, § 7 et 15).

2. Il est intéressant de voir dans quel cas une courbe unicursale quelconque peut admettre deux plans de symétrie rectangulaires.

Fig. 7.



Supposons-les pris pour plans des xz et des xy ; les points de la courbe sont donc associés par 4, M, M', M'', M''' comme sur la figure; la relation entre le t de M et le t' de M' est supposée ramenée à l'une

des formes $t + t' = 0$ ou $tt' + 1 = 0$. Prenons le premier cas; t'' paramètre de M'' est lié à t par une relation $At'' + B(t + t'') + C = 0$, relation qui subsiste encore si l'on remplace le couple MM'' par le couple $M'M''$, de sorte que cette relation est simplement $tt'' = K$, où K est une constante; en changeant t en λt , on peut supposer K égal à $+1$ ou à -1 . On a donc à choisir entre

$$\begin{array}{cccc} M, & M', & M'', & M''', \\ t, & -t, & \frac{1}{t}, & \frac{-1}{t} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cccc} M, & M', & M'', & M''', \\ t, & -t, & \frac{-1}{t}, & \frac{1}{t}. \end{array}$$

Si, au contraire, la symétrie xOz est caractérisée par $1 + tt' = 0$, on voit aisément qu'il suffit de permuter le rôle de xOy et xOz dans la première hypothèse que nous venons d'obtenir. On n'a donc que deux espèces de disposition : dans la première, les deux symétries planes sont du type opposé (lemniscate); dans la seconde, elles sont toutes deux du type à éléments doubles de l'involution réels (ellipse).

Le premier type, pour les courbes sphériques unicursales, donne manifestement les formules

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{q^{2m} + A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} + \dots + A_{2m}}{1 - A_1 q + A_2 q^2 - \dots + A_{2m} q^{2m}}, \\ \beta = \frac{1 + A_1 q + A_2 q^2 + \dots + A_{2m} q^{2m}}{q^{2m} - A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} + \dots + A_{2m}}, \end{cases}$$

condensation des formules (1) et (2).

Dans le second type, il sera commode au contraire de prendre xOz et yOz pour plans de symétrie; M et M'' correspondent aux valeurs q et $-q$; il suffira donc de supposer qu'on écrit les formules (1) en prenant le numérateur pair, le dénominateur impair par rapport à q ou le numérateur impair et le dénominateur pair.

Le même mode de raisonnement prouve aisément qu'une courbe unicursale *gauche* ne peut avoir trois plans de symétrie deux à deux rectangulaires. Pour une courbe plane unicursale, les trois plans peuvent exister (ellipse, lemniscate), mais l'un de ces plans est précisément le plan de la courbe. Il existe une infinité de courbes algébriques gauches ayant trois plans de symétrie deux à deux rectangulaires : elles ne sont donc pas unicursales.

Une courbe unicursale ou algébrique ne peut avoir deux plans de symétrie parallèles, mais elle peut avoir deux plans de symétrie sécants, faisant entre eux un angle commensurable avec π ; l'intersection des deux plans est alors un axe de rotation de la courbe; ceci sera étudié plus loin.

3. Nous devons maintenant étudier le cas où la courbe (\mathfrak{U}) admet un axe de symétrie Δ , que nous prenons pour axe des z .

Un point M et son symétrique M' ont leurs paramètres liés par une involution que l'on peut ramener soit à la forme $t + t' = 0$ ou $tt' + 1 = 0$. Ceci entraîne des conséquences analogues à celles indiquées pour la symétrie plane relativement au sens de circulation de M et M' sur la courbe. Dans le premier cas, les équations paramétriques de (\mathfrak{U}) seront

$$(4) \quad \alpha = \left(q - \frac{1}{q}\right)f\left(q + \frac{1}{q}\right), \quad \beta = \left(\frac{1}{q} - q\right)f_0\left(q + \frac{1}{q}\right),$$

où f et f_0 sont deux fractions rationnelles conjuguées. Le second cas donne

$$(5) \quad \alpha = qf(q^2), \quad \beta = \frac{1}{q}f_0\left(\frac{1}{q^2}\right),$$

où f et f_0 sont encore deux fractions rationnelles conjuguées.

Il peut d'ailleurs être aussi commode de prendre Δ comme axe des x ou bien si l'involution est à éléments doubles réels de la réduire à la forme $tt' = 1$ au lieu de $t + t' = 0$.

4. Supposons maintenant que le cône C se reproduise par une rotation d'amplitude V autour d'une droite que je prends pour Oz , l'angle V est nécessairement commensurable avec π si le cône C est algébrique. Le cas $V = \pi$ vient d'être étudié; inutile d'y revenir. Si l'intersection de C avec la sphère ne se décompose pas, rien de plus à dire. Mais si elle se décompose en deux courbes (\mathfrak{U}) et (\mathfrak{U}') , comme précédemment la rotation V superpose (\mathfrak{U}) soit avec elle-même, soit avec (\mathfrak{U}') ; dans ce dernier cas, une nouvelle rotation V ramènerait (\mathfrak{U}) sur elle-même par une rotation totale égale à $2V$.

Je me borne donc à étudier le cas où une courbe gauche unicursale

se reproduit par une rotation d'amplitude V autour de Oz ; le point M de paramètre t vient se superposer à un point M' de paramètre t' et l'on a manifestement une relation homographique $Att' + Bt + Ct' + D = 0$ entre t et t' ; les points doubles de cette homographie sont nécessairement imaginaires si la courbe est réelle et si l'angle V n'est pas égal à π ; nous supposons donc qu'ils correspondent à $t = +i$ ou $-i$; la relation sera donc $\frac{t-t'}{1+tt'} = K$, où K est une constante; en posant toujours $t = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$, $q = e^{i\varphi}$, on a $\varphi' - \varphi = V$, $\frac{q'}{q} = e^{iV}$; du point M on déduit donc tous les points de la suite

$$q, \quad q e^{iV}, \quad q e^{2iV}, \quad \dots;$$

on devra donc avoir, si m est le nombre de termes distincts, $V = 2\pi \frac{k}{m}$, où k est un entier premier avec m . Je pourrai donc ranger autrement les valeurs de q , à savoir :

$$q, \quad q e^{\frac{2i\pi}{m}}, \quad q e^{\frac{4i\pi}{m}}, \quad \dots, \quad q e^{\frac{2(m-1)i\pi}{m}},$$

la rotation faisant passer du point q au point $q e^{\frac{2i\pi}{m}}$ sera égale à $2\pi \frac{p}{m}$, où p est un entier premier avec m . Cette rotation multiplie α par $e^{\frac{2pi\pi}{m}}$, donc $\frac{\alpha}{q^p}$ reste invariant par le changement de q en $q e^{\frac{2i\pi}{m}}$ et je peux donc écrire

$$(6) \quad \alpha = q^p f(q^m), \quad \beta = \frac{1}{q^p} f_0\left(\frac{1}{q^m}\right),$$

où f et f_0 sont deux fractions conjuguées; la réciproque est immédiate.

Nous avons déjà rencontré des exemples de cônes à rotation au Chapitre III, § 7, en particulier. A ce paragraphe, j'ai même signalé le cas où (\mathfrak{W}) s'applique sur (\mathfrak{W}') . On vérifiera sans peine que ce cas correspond aux formules

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = q^p \frac{q^{(2h-1)m} + A_1 q^{(2h-2)m} + A_2 q^{(2h-3)m} + \dots + A_{2h-1}}{1 - A'_1 q^m + A'_2 q^{2m} + \dots - A'_{2h-1} q^{(2h-1)m}}, \\ \beta = \frac{1}{q^p} \frac{1 + A'_1 q^m + A'_2 q^{2m} + \dots}{q^{(2h-1)m} - A_1 q^{(2h-2)m} + \dots}, \end{cases}$$

où p est un entier impair; la rotation $\frac{\pi}{m}$ fait coïncider (\mathfrak{W}) avec (\mathfrak{W}') .

5. Il ne me reste plus qu'à signaler comment on reconnaîtra si une courbe unicursale tracée sur la sphère admet le centre de la sphère pour plan de symétrie, autrement dit est l'une de ces directrices que j'ai appelées *mixtes*. J'ai, au Chapitre II, § 11, indiqué le choix du paramètre; en posant $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, $q = e^{i\varphi}$, φ augmentant de π ou q étant remplacé par $-q$, α est remplacé par $\frac{-1}{\beta}$ et β par $\frac{-1}{\alpha}$. On arrive aisément aux formules

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{q^{2m+1} + A_1 q^{2m} + \dots + A_{2m+1}}{1 - A'_1 q + \dots - A'_{2m+1} q^{2m+1}} e^{i\omega}, \\ \beta = \frac{1 + A'_1 q + \dots + A'_{2m+1} q^{2m+1}}{q^{2m+1} - A_1 q^{2m} + \dots - A_{2m+1}} e^{-i\omega}. \end{cases}$$

Ces formules sont tout à fait analogues à celles relatives à la symétrie xOy , q en $-q$; le mode de formation des fractions α et β est le même dans les deux cas avec cette différence que dans l'un des cas les fractions sont de degré pair, dans l'autre de degré impair. Dans les formules (8), si l'on prend la position canonique autour de Oz , on pourra supposer ω nul et A_{2m+1} réelle.

6. Tout ce qui précède dans ce Chapitre s'applique à toutes les courbes algébriques ou unicursales sphériques, sans que nous devions nous préoccuper de savoir si la courbe correspondante (\mathcal{A}) est ou non algébrique. Il est utile de signaler une autre proposition importante concernant les cônes réels unicursaux dont la directrice sphérique est unicursale ou mixte, que la courbe (\mathcal{A}) d'ailleurs soit algébrique ou non. Je me borne d'abord au cas où la directrice (\mathcal{B}) est effectivement unicursale et non mixte. Nous savons que si l'on se donne le degré nécessairement pair $2m$ du cône C à directrice sphérique unicursale proprement dite, et les indices $2i_1, 2i_2, \dots, 2i_p$ des divers couples isotropes, on a d'abord $m = i_1 + i_2 + \dots + i_p$, et les équations paramétriques de la directrice (\mathcal{B}) sont de la forme

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{A q^m + A_1 q^{m-1} + \dots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \dots + B_m}, \\ \beta = \frac{A' + A'_1 q + \dots + A'_m q^m}{B' + B'_1 q + \dots + B'_m q^m}, \end{cases}$$

les coefficients $A, A'; A_1, A'_1; \dots; B, B'; \dots; B_m, B'_m$ sont répartis par groupes de deux imaginaires conjugués et doivent satisfaire à une identité

$$(10) \quad (Aq^m + \dots + A_m)(A' + \dots + A'_m q^m) + (Bq^m + \dots + B_m)(B' + \dots + B'_m q^m) \\ \equiv K(q + k_1)^{i_1}(k'_1 q + 1)^{i_1}(q + k_2)^{i_2}(k'_2 q + 1)^{i_2} \dots,$$

où K est une constante réelle et $k_1, k'_1; k_2, k'_2; k_p, k'_p, p$ nouveaux couples d'imaginaires conjugués.

Le résultat intéressant annoncé est le suivant : Quand on a fixé les indices i_1, i_2, \dots, i_p (ce qui donne m), on peut exprimer rationnellement toutes les inconnues $A, A'; \dots; A_m, A'_m; B, B'; \dots; B_m, B'_m$ au moyen d'un certain nombre d'arbitraires indépendantes; et si ces arbitraires sont réelles, le cône C est réel.

La démonstration montrera même, mais c'est moins important, que $K; k_1, k'_1; \dots; k_p, k'_p$ seront, elles aussi, exprimées rationnellement au moyen de ces arbitraires.

Cette proposition est importante, car la méthode suivie pour arriver aux courbes (26) algébriques réelles se divise en deux parties successives : premièrement, déterminer un cône C algébrique connaissant les indices de ses divers couples de génératrices isotropes conjugués; deuxièmement, choisir parmi les cônes ainsi obtenus ceux qui donnent effectivement une courbe algébrique. Le problème préliminaire se trouve résolu si le cône C est non seulement algébrique, mais unicursal et si le nombre de couples d'indice impair est égal à 1 ou 0.

La démonstration est intuitive : supposons, en effet, les nombres i_1, i_2, \dots, i_p fixés numériquement et le résultat acquis, soit si p a reçu une valeur inférieure, soit si p ayant la même valeur, l'un au moins des nombres i_1, i_2, \dots, i_p a une valeur inférieure.

Je porte mon attention sur le couple G, G'_1 d'indice $2i_1$; je prends pour plan xOy le plan OG, G'_1 , je suppose que G, G'_1 correspondent respectivement à $q = 0$ et $q = \infty$; choisissant arbitrairement un entier $r \leq i_1$, je dois écrire pour (25) les équations paramétriques

$$(11) \quad \alpha = q^r \frac{Aq^h + A_1 q^{h-1} + \dots + A_h}{Bq^h + B_1 q^{h-1} + \dots + B_h}, \quad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{A' + A'_1 q + \dots + A'_h q^h}{B' + B'_1 q + \dots + B'_h q^h},$$

où je suppose A et B_h différentes de zéro, $h + r = m$; des deux quan-

tités A_h et B une au moins est différente de zéro. Il suffira donc de connaître les formules (11) et d'imprimer à C le mouvement le plus général autour de l'origine.

Or, pour connaître les formules (11), il suffit manifestement de connaître la courbe (\mathfrak{W}_1) correspondant aux formules (11) recopiées purement et simplement après suppression du facteur q^r ou $\frac{1}{q^r}$; soit

$$(12) \quad \alpha = \frac{Aq^h + A_1q^{h-1} + \dots + A_h}{Bq^h + B_1q^{h-1} + \dots + B_h}, \quad \beta = \frac{A' + A'_1q + \dots + A'_h q^h}{B' + B'_1q + \dots + B'_h q^h}.$$

Le cône C de directrice (\mathfrak{W}) , formules (11), ou le cône C_1 de directrice (\mathfrak{W}_1) , formules (12), ont l'un et l'autre leurs génératrices isotropes définies par l'équation

$$(13) \quad (Aq^h + A_1q^{h-1} + \dots + A_h)(A' + A'_1q + \dots + A'_h q^h) + (Bq^h + \dots + B_h)(B' + B'_1q + \dots + B'_h q^h) = 0$$

Un couple tel que $G_2G'_2$ de C , distinct de $G_1G'_1$, correspond à deux racines d'ordre de multiplicité i_2 de (13) et ces mêmes valeurs de q donnent sur C_1 un couple isotrope, d'indice $2i_2$ aussi, ayant une autre position dans l'espace. Quant au couple $G_1G'_1$, si $r = i_1$, l'équation (13) n'admet plus la racine $q = 0$, le couple $G_1G'_1$ n'a pas d'équivalent sur le cône C_1 qui a donc seulement $p - 1$ couples isotropes d'indice i_2, \dots, i_p . Au contraire, si $r < i_1$, l'équation (13) admet la racine $q = 0$ au degré $i_1 - r$, le cône C_1 admet pour $q = 0$ et $q = \infty$ un couple isotrope d'indice $2(i_1 - r)$ seulement correspondant à $G_1G'_1$, donc le cône C_1 a p couples isotropes comme C , $p - 1$ couples ayant même indice sur C ou C_1 ; mais un autre a un indice plus faible. Donc la proposition est établie si l'on sait la démontrer pour C_1 , que r soit égal à i_1 ou inférieur à i_1 .

On peut non seulement se donner i_1, i_2, \dots, i_p , mais décomposer chacun des nombres i_1, \dots, i_p en une somme d'entiers positifs choisis arbitrairement. Autrement dit, soient $r, r', \dots, r^{(n-1)}$ des entiers positifs choisis arbitrairement, mais de somme i_1 ; si le nombre n est égal à l'unité, le cône C sera à déduire du cône C_1 à $p - 1$ couples; si $n - 1$ n'est pas nul, nous avons une série de cônes C, C_1, C_2, \dots, C_n dont le dernier est à $p - 1$ couples; tandis que $C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_1, C$ possèdent en plus de ces $p - 1$ couples un couple

supplémentaire dont l'indice va en croissant en passant de C_{n-1} à C_{n-2} , puis C_{n-3} , ..., et enfin C_1 et C .

Cela posé, supposons obtenues par un moyen quelconque les équations paramétriques $\alpha = f(Q)$, $\beta = f_0\left(\frac{1}{Q}\right)$ de la directrice sphérique d'un cône unicursal à $p-1$ couples isotropes d'indice pair, cône supposé mis dans une position quelconque autour de son sommet, f et f_0 désignant deux fractions conjuguées; pour laisser subsister ces $p-1$ couples avec leur indice et ajouter un couple complémentaire, je remarque que k et k' désignant deux imaginaires conjuguées, si Q a une valeur de module unité, l'expression $\frac{Q-k}{1-Qk'}$ est le quo-

tient de deux imaginaires conjuguées et a pour module l'unité; il en sera donc de même du produit de cette fraction par $\frac{1}{Q}$; $\frac{Q-k}{1-Qk'}$ a pour module l'unité, si Q a pour module 1; si l'on effectuait la substitution homographique $q = \frac{Q-k}{1-Qk'}$, à $Q = k$ correspondrait $q = 0$, à $Q = \frac{1}{k'}$ correspondrait $q = \infty$, de sorte que, d'après ce qui précède, les équations

$$\alpha = \left(\frac{Q-k}{1-Qk'}\right)^r f(Q), \quad \beta = \left(\frac{1-Qk'}{Q-k}\right)^r f_0\left(\frac{1}{Q}\right)$$

représentent la directrice sphérique d'un nouveau cône unicursal ayant d'abord $p-1$ couples isotropes de même indice que le précédent, plus un nouveau, pour $Q = k$ ou $\frac{1}{k'}$, d'indice $2r$; si nous imprimons le déplacement le plus général à ce cône autour de son sommet, cela reviendra à écrire $\alpha = f_1(Q)$, $\beta = f_{1,0}\left(\frac{1}{Q}\right)$, où l'on a

$$(14) \quad \begin{cases} f_1(Q) = \frac{\lambda \left(\frac{Q-k}{1-Qk'}\right)^r f(Q) + \mu}{-\mu_0 \left(\frac{Q-k}{1-Qk'}\right)^r f(Q) + \lambda_0}, \\ f_{1,0}\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{\lambda_0 \left(\frac{1-Qk'}{Q-k}\right)^r f_0\left(\frac{1}{Q}\right) + \mu_0}{-\mu \left(\frac{1-Qk'}{Q-k}\right)^r f_0\left(\frac{1}{Q}\right) + \lambda}. \end{cases}$$

Si je veux laisser au couple $\left(k, \frac{1}{k'}\right)$ l'indice $2r$, j'en reste là; si je

veux lui donner l'indice $2r + 2r_1$, je n'ai qu'à écrire $\alpha = f_2(Q)$,
 $\beta = f_{2,0}\left(\frac{1}{Q}\right)$, avec

$$(15) \quad \begin{cases} f_2(Q) = \frac{\lambda_1 \left(\frac{Q-k}{1-Qk'}\right)^{r_1} f_1(Q) + \mu_1}{-\mu_{1,0} \left(\frac{Q-k}{1-Qk'}\right)^{r_1} f_1(Q) + \lambda_{1,0}}, \\ f_{2,0}\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{\lambda_{1,0} \left(\frac{1-Qk'}{Q-k}\right)^{r_1} f_{1,0}\left(\frac{1}{Q}\right) + \mu_{1,0}}{-\mu_1 \left(\frac{1-Qk'}{Q-k}\right)^{r_1} f_{1,0}\left(\frac{1}{Q}\right) + \lambda_1}, \end{cases}$$

et ainsi de suite, f_1 et $f_{1,0}$, f_2 et $f_{2,0}$, ... désignant des fractions conjuguées; λ et λ_0 , λ_1 et $\lambda_{1,0}$, ... désignant des couples de constantes conjuguées.

Tout revient donc à construire un cône unicursal n'ayant qu'un couple isotrope d'indice pair; or la méthode du début s'applique comme on le voit sans peine: le cône se ramène successivement à une suite de cônes n'ayant tous qu'un couple isotrope, diminuant d'indice à chaque fois, tout en changeant de position dans l'espace, obtenu toujours pour les mêmes valeurs du paramètre, que je peux supposer être $q = 0$, $q = \infty$. Le dernier cône de la série se réduit nécessairement par un déplacement convenable à un cône $\alpha = Aq^p$, $\beta = \frac{A}{q^p}$, à représentation impropre, si $p > 1$, cône de révolution autour de Oz , A étant une constante que je peux supposer réelle et j'effectue successivement les opérations analogues à celles de la suite (14), (15),

J'écris successivement, A et B étant réels,

$$(16) \quad \begin{cases} f(q) = \frac{q^p - AB}{Aq^p + B}, & f_0\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1 - ABq^p}{A + Bq^p}; \\ f_1(q) = \frac{\lambda q^{p_1} f(q) + \mu}{-\mu_0 q^{p_1} f(q) + \lambda_0}, & f_{1,0}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\lambda_0 \frac{1}{q^{p_1}} f_0\left(\frac{1}{q}\right) + \mu_0}{-\mu \frac{1}{q^{p_1}} f_0\left(\frac{1}{q}\right) + \lambda}; \\ f_2(q) = \frac{\lambda_1 q^{p_2} f_1(q) + \mu_1}{-\mu_{1,0} q^{p_2} f_1(q) + \lambda_{1,0}}, & f_{2,0}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\lambda_{1,0} \frac{1}{q^{p_2}} f_{1,0}\left(\frac{1}{q}\right) + \mu_{1,0}}{-\mu_1 \frac{1}{q^{p_2}} f_{1,0}\left(\frac{1}{q}\right) + \lambda_1}; \end{cases}$$

et dans la suite (16) les équations $\alpha = f_n(q)$, $\beta = f_{n,0} \left(\frac{1}{q} \right)$ définiront un cône unicursal ayant un seul couple isotrope d'indice

$$2p + 2p_1 + 2p_2 + \dots + 2p_n;$$

on doit supposer $n \geq 1$ à moins qu'il ne s'agisse d'un cône de révolution. On transforme ensuite ce cône en cône à deux couples, puis trois couples, ...; les opérations successives n'introduisent que des calculs rationnels; les valeurs du paramètre correspondant aux divers couples sont mises en évidence et rentrent précisément dans les constantes arbitraires.

Pour étendre cette proposition aux cônes à directrice mixte, écrivons les équations paramétriques générales d'une courbe sphérique mixte de degré $2(2m+1)$:

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{q^{m+1} + A_1 q^{2m} + A_2 q^{2m-1} + \dots + A_{2m+1}}{1 - A'_1 q - A'_2 q^2 - \dots - A'_{2m+1} q^{2m+1}}, \\ \beta = \frac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \dots + A'_{2m+1} q^{2m+1}}{q^{2m+1} - A_1 q^{2m} + A_2 q^{2m-1} - \dots - A_{2m+1}}. \end{cases}$$

L'équation aux génératrices isotropes du cône C est alors

$$(18) \quad (q^{2m+1} + A_2 q^{2m-1} + A_4 q^{2m-3} + \dots + A_{2m} q) (1 + A'_2 q^2 + \dots + A'_{2m} q^{2m}) \\ + (A_1 q^{2m} + A_3 q^{2m-2} + \dots + A_{2m+1}) (A'_1 q + \dots + A'_{2m+1} q^{2m+1}) = 0.$$

Le premier membre de (18) est un polynôme entier impair en q , admettant la racine $q = 0$ à un ordre impair de multiplicité, indice du couple isotrope d'indice impair; les autres racines sont associées par groupe de 4, à savoir $k_1, -k_1, \frac{1}{k'_1}, \frac{-1}{k'_1}$ qui donnent un couple d'indice pair égal au double de l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines. Supprimant le facteur q dans le premier membre de (18), nous aurons en posant $q^2 = x$ une identité

$$(19) \quad (x^m + A_2 x^{m-1} + A_4 x^{m-2} + \dots + A_{2m}) (1 + A'_2 x + \dots + A'_{2m} x^m) \\ + (A_1 x^m + A_3 x^{m-1} + \dots + A_{2m+1}) (A'_1 + \dots + A'_{2m+1} x^m) \\ \equiv K x^i (x - k_1^2)^{i_1} (k_1'^2 x - 1)^{i_1} (x - k_2^2)^{i_2} (k_2'^2 x - 1)^{i_2} \dots$$

Si donc on a fixé l'indice $2i+1$ du couple d'indice impair, les indices $2i_1, 2i_2, \dots, 2i_p$ des autres couples, l'identité (19) ne diffère que par

les rotations de l'identité (10) et le résultat est que nous savons exprimer rationnellement au moyen d'arbitraires les quantités $A_2, A_4, \dots, A_{2m}, A'_2, \dots, A'_{2m}$, et $A_1, A_3, \dots, A_{2m+1}, A'_1, \dots, A'_{2m+1}$, ainsi que $K, k_1^2, k_2^2, \dots, k_p^2, k_1'^2, \dots$.

On passe par l'intermédiaire de la courbe sphérique unicursale auxiliaire

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{q^m + A_2 q^{m-1} + A_4 q^{m-2} + \dots + A_{2m}}{A_1 q^m + A_3 q^{m-1} + \dots + A_{2m+1}}, \\ \beta = \frac{1 + A'_2 q + \dots + A'_{2m} q^m}{A'_1 + A'_3 q + \dots + A'_{2m+1} q^m}, \end{cases}$$

qui sert de base à un cône unicursal admettant le couple $q = 0, q = \infty$ d'indice $2i$, le couple $k_2^2, \frac{1}{k_1'^2}$ d'indice $2i_1, \dots$, etc.

Dans cette proposition ainsi établie, il faut se rappeler que je n'ai fixé aucune autre indication *a priori* que les valeurs des indices des divers couples; toute autre condition donnée à l'avance, relativement, par exemple, au degré ou à la classe des cycles, diminuerait le nombre des arbitraires, mais il ne serait, en général, plus vrai que les coefficients inconnus s'expriment rationnellement au moyen d'un certain nombre d'arbitraires. Cela se conçoit aisément, car en nous bornant aux conditions de l'énoncé primitif, nous avons tous les coefficients inconnus exprimés rationnellement au moyen d'arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$; les relations nouvelles se traduisent par des relations $f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = 0$ dont nous ne pouvons rien dire.

Il est bon de signaler que si l'on impose au cône C d'admettre un axe de rotation, la propriété subsiste: car, en prenant Oz pour axe, les équations $\alpha = q^p f(q^m), \beta = \frac{1}{q^p} f_0\left(\frac{1}{q^m}\right)$ conduisent à considérer la courbe $\alpha = f(x), \beta = f_0\left(\frac{1}{x}\right)$ que l'on déterminera par la méthode indiquée ici.

Dé même, si l'on suppose que le cône C et la courbe (15) admettent le plan Oz pour plan de symétrie, q en $\frac{1}{q}$, le résultat subsistera pourvu que les points d'intersection de (15) avec le cercle de l'infini se répartissent en couples de deux points à la fois conjugués et symétriques par rapport à xOz , car alors il suffira, dans les diverses formules (14),

(15) ou (16), de supposer les fonctions f ou f_0 réelles, les quantités $\lambda, \mu, \lambda_1, \dots$ toutes réelles, ainsi que k, k_1, \dots .

Nous allons voir que, dans le cas de la symétrie q en $-q$, le résultat subsiste complètement; supposons que le plan de symétrie soit xOy , les équations de la directrice (15) sont réductibles à l'une ou l'autre forme :

$$(21) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2p+1} \frac{q^{2m+1} + A_1 q^{2m} + A_2 q^{2m-1} + \dots + A_{2m+1}}{1 - A'_1 q + A'_2 q^2 - \dots - A'_{2m+1} q^{2m+1}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2p+1}} \frac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \dots + A'_{2m+1} q^{2m+1}}{q^{2m+1} - A_1 q^{2m} + A_2 q^{2m-1} - \dots - A_{2m+1}}, \end{cases}$$

ou

$$(22) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2p} \frac{q^{2m} + A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} + \dots + A_{2m}}{1 - A'_1 q + A'_2 q^2 + \dots + A'_{2m} q^{2m}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2p}} \frac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \dots + A'_{2m} q^{2m}}{q^{2m} - A_1 q^{2m-1} + \dots + A_{2m}}, \end{cases}$$

où p est un entier positif ou nul. Dans le premier cas, la méthode exposée conduit à déterminer la courbe auxiliaire

$$(21') \quad \begin{cases} \alpha = \frac{q^{2m+1} + A_1 q^{2m} + \dots + A_{2m+1}}{1 - A'_1 q + \dots - A'_{2m+1} q^{2m+1}}, \\ \beta = \frac{1 + A'_1 q + \dots + A'_{2m+1} q^{2m+1}}{q^{2m+1} - A_1 q^{2m} + \dots - A_{2m+1}}, \end{cases}$$

correspondant à un cône à directrice mixte : problème qui a été résolu complètement.

Dans le second cas, la méthode conduit à étudier la courbe auxiliaire

$$(22') \quad \begin{cases} \alpha = \frac{q^{2m} + A_1 q^{2m-1} + \dots + A_{2m}}{1 - A'_1 q + \dots + A'_{2m} q^{2m}}, \\ \beta = \frac{1 + A'_1 q + \dots + A'_{2m} q^{2m}}{q^{2m} - A_1 q^{2m-1} + \dots + A_{2m}}. \end{cases}$$

Cette courbe [identique à la courbe (22) si $p = 0$] est la directrice d'un cône admettant aussi la symétrie xOy en $-q$, admettant pour chaque couple isotrope du premier un couple isotrope de même indice, exception faite pour le couple $z = 0$, $x \pm iy = 0$ d'indice $4p$ sur le premier, couple qui ne se retrouve plus sur le second. La considération des génératrices isotropes, soit du cône (22), soit du

cône (22'), conduit à l'identité

$$(23) \quad (q^{2m} + A_2 q^{2m-2} + \dots + A_{2m})(1 + A'_2 q^2 + \dots + A'_{2m} q^{2m}) \\ + (A_1 q^{2m-2} + A_3 q^{2m-4} + \dots + A_{2m-1})(A'_1 q^2 + \dots + A'_{2m-1} q^{2m}) \\ \equiv K(q^2 - k_1^2)^{i_1} (k_1'^2 q^2 - 1)^{i_1} (q^2 - k_2^2)^{i_2} (k_2'^2 q^2 - 1)^{i_2} \dots$$

En remplaçant q^2 par x , j'ai l'identité

$$(23') \quad (x^m + A_2 x^{m-1} + \dots + A_{2m})(1 + A'_2 x + \dots + A'_{2m} x^m) \\ + (A_1 x^{m-1} + \dots + A_{2m-1})(A'_1 x + \dots + A'_{2m-1} x^m) \\ \equiv K(x - k_1^2)^{i_1} (k_1'^2 x - 1)^{i_1} (x - k_2^2)^{i_2} (k_2'^2 x - 1)^{i_2} \dots$$

Et il est alors naturel de considérer le cône auxiliaire de directrice sphérique

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{x^m + A_2 x^{m-1} + \dots + A_{2m}}{A_1 x^{m-1} + \dots + A_{2m-1}}, \\ \beta = \frac{1 + A'_2 x + \dots + A'_{2m} x^m}{A'_1 x + \dots + A'_{2m-1} x^m}, \end{cases}$$

qui, en vertu de l'identité (23'), admet un couple $\left(x = k_1^2 \text{ ou } \frac{1}{k_1'^2}\right)$ d'indice $2i_1$, un couple $\left(k_2^2, \frac{1}{k_2'^2}\right)$ d'indice $2i_2, \dots$: la seule différence qu'il y ait avec le cas général, correspondant à l'identité (10), est que l'on a spécifié qu'au dénominateur de α le terme en x^m a son coefficient nul. Or cette condition est facile à exprimer : le cône (24) dérive par la méthode indiquée d'un cône antérieur

$$\alpha = \frac{ax^h + a_1 x^{h-1} + \dots + a_h}{bx^h + b_1 x^{h-1} + \dots + b_h}, \quad \beta = \frac{a' + a'_1 x + \dots + a'_h}{b' + b'_1 x + \dots + b'_h}$$

par les formules (14), à savoir

$$\alpha = \frac{\lambda(x - k_1)^r(ax^h + \dots + a_h) + \mu(1 - k_1'x)^r(bx^h + \dots + b_h)}{-\mu_0(x - k_1)^r(ax^h + \dots + b_h) + \lambda_0(1 - k_1'x)^r(bx^h + \dots + b_h)};$$

il suffit donc d'écrire $\mu_0 a - (-1)^r \lambda_0 k_1'^r b = 0$ pour avoir une condition donnant rationnellement μ_0 en fonction de λ_0 et μ en fonction de λ , de sorte que, finalement, la méthode générale s'est appliquée jusqu'au bout; dans la dernière transformation successive de cônes, au lieu que $\lambda, \lambda_0, \mu, \mu_0$ soient arbitraires, il n'y a que λ et λ_0 qui le soient; tous les coefficients ont encore été exprimés rationnellement au

moyen d'arbitraires, entre lesquelles il ne reste aucune relation à écrire.

7. Nous avons maintenant à notre disposition tous les éléments nécessaires pour aborder la recherche générale des courbes (1) unicursales ou algébriques, en dénombrant les inconnues, ainsi que le nombre de conditions auxquelles satisfont ces inconnues.

J'insiste d'abord sur ce fait classique qu'une simple énumération d'inconnues et d'équations est tout à fait insuffisante. Il ne suffit pas de constater qu'un problème de géométrie sera résolu si l'on *sait* (ou du moins si l'on *peut*) trouver $m + p$ quantités satisfaisant à m relations pour affirmer qu'il y a des solutions (réelles ou imaginaires) et que la solution la plus générale dépend de p paramètres arbitraires. Pour bien nous rendre compte de cette proposition, supposons que, suivant l'habitude, toutes les équations écrites aient zéro pour second membre : si m individus isolés écrivent chacun au hasard une fonction algébrique de $m + p$ variables x_1, x_2, \dots, x_{m+p} , le système obtenu en égalant à zéro chacune de ces fonctions sera compatible et aura effectivement sa solution générale dépendant de p arbitraires, parce que les m premiers membres sont indépendants; mais, si l'on considère le problème de géométrie que j'ai imaginé, se traduisant par un système de m équations à $m + p$ variables, si arbitraire qu'il ait pu être l'énoncé, rien ne prouve que les m premiers membres doivent être indépendants. Nous devons nous livrer à une discussion préalable, souvent trop négligée dans la pratique, qui nous conduira à l'une des trois hypothèses suivantes :

- 1° Le système est effectivement formé d'équations indépendantes; la solution générale dépend de p paramètres;
- 2° Les premiers membres ne sont pas indépendants et le système est incompatible;
- 3° Les premiers membres ne sont pas indépendants et le système se réduit à m' équations distinctes ($m' < m$), les $m - m'$ autres étant de pures conséquences des premières; le système est compatible et sa solution générale dépend de $p + m - m'$ paramètres arbitraires.

Nous avons rencontré des exemples nombreux de problèmes

suivant le cas) de $x_{m+1} - x_{m+1}^0, \dots, x_{m+p} - x_{m+p}^0$. C'est ce qui a été fait pour le cône du huitième degré rappelé plus haut.

8. Abordons, comme application, des problèmes généraux : supposons le cône C unicursal de degré $2m$ n'ayant qu'un couple isotrope d'indice $2m$, de degré et classe égaux à r et admettant la symétrie $\pm O x q$ en $\frac{1}{q}$. On a, d'après ce qui a été expliqué au Chapitre II (§ 7) et au début de ce Chapitre, le droit d'écrire

$$(26) \quad \begin{cases} \alpha = q^r \frac{q^h + A_1 q^{h-1} + \dots + A_h}{B q^h + \dots + B_h} \\ \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A_1 q + \dots + A_h q^h}{B + B_1 q + \dots + B_h q^h} \end{cases} \quad (h + r = m),$$

où les A et B sont réels, en nombre $2h + 1$. L'identité

$$(27) \quad (q^h + A_1 q^{h-1} + \dots + A_h)(1 + A_1 q + \dots + A_h q^h) + (B q^h + \dots + B_h)(B + B_1 q + \dots + B_h q^h) \equiv (1 + A_1^2 + \dots + B_h^2) q^h$$

exprime que le couple $q = 0$ et $q = \infty$ a pour indice $2(h + r)$; d'après ce qui a été expliqué au paragraphe 6, cette identité permet d'exprimer $A_1, \dots, A_h, B, \dots, B_h$ rationnellement au moyen d'arbitraires indépendantes; l'identité (27) donnant h relations entre les A et B, le nombre d'arbitraires indépendantes est $h + 1$.

Il ne reste plus qu'à écrire les deux conditions résiduelles fournies par $\int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}, \int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$; on a donc deux équations seulement entre $h + 1$ inconnues. Donc, il est permis d'espérer obtenir des solutions à $h - 1$ paramètres; nous connaissons un cas d'impossibilité : le degré et la classe étant égaux tous deux à r pour les deux cycles isotropes conjugués, si l'indice $2(h + r)$ est égal à $3r$, c'est-à-dire si $r = 2h$, on est dans un cas d'impossibilité. Nous avons vu un autre cas d'impossibilité, à savoir $h = 1$ et $r = 1$. [Je rappellerai pour mémoire que si

$r = 2h + 1$, la fraction $\frac{\frac{d\alpha}{dq}}{(1 + \alpha\beta)}$ est un polynôme entier en q , de sorte qu'il n'y a qu'une équation entre les $(h + 1)$ inconnues.]

Occupons-nous maintenant de la réalité : au Chapitre III (§ 9) nous

avons vu que, pour la réalité, il est nécessaire que r soit inférieur à h sans égalité (ce qui élimine alors les deux cas $r = 2h$ et $r = h = 1$). Nous avons fait la discussion en particulier pour $h = 2$, $r = 1$ (cônes du sixième degré à plan de symétrie) et reconnu que le nombre de paramètres arbitraires restant est bien égal au nombre prévu par le simple dénombrement, et qu'il y a des solutions réelles (avec un paramètre arbitraire).

Il serait sans doute assez pénible de reconnaître si, pour toutes les valeurs de h et de r , il y a des solutions (réelles ou imaginaires) ou s'il y a des solutions réelles pour h quelconque et $r < h$.

Il y a un moyen très simple de démontrer qu'il y a effectivement des solutions à h paramètres si $r \geq 2h + 1$, à $h - 1$ paramètres si $r < 2h$.

En effet, au Chapitre III (§ 7), nous avons mis en évidence une solution particulière obtenue en faisant

$$A_1 = B_2 = \dots = A_{h-1} = B_1 = B_2 = \dots = B_{h-1} = 0.$$

Cette solution renferme un paramètre arbitraire; donc si r est supérieur ou égal à $2h + 1$, la solution générale dépend bien de h arbitraires, mais donne toujours une courbe imaginaire; si $r < 2h$, on peut considérer comme très probable que les deux équations obtenues entre les $h + 1$ inconnues sont distinctes (car il en est bien ainsi pour $h = 2$, $r = 1$) et alors la solution générale dépendra de $h - 1$ arbitraires; en tous les cas, si les deux équations n'étaient pas distinctes, l'existence d'une solution particulière entraînerait simplement cette conséquence que ces deux équations se ramèneraient à une seule, et il y aurait h arbitraires au lieu de $h - 1$. Quant à la réalité, nous savons qu'il est nécessaire que r soit inférieur à h ; si cela a lieu, la solution particulière à un paramètre rappelée à l'instant est réelle si le paramètre varie entre certaines limites; mais cela ne suffit pas pour affirmer que, parmi les solutions à $h - 1$ paramètres, il y en ait effectivement une infinité à $h - 1$ paramètres qui sont réelles. Pour bien comprendre ceci, imaginons un point x, y, z satisfaisant à une condition unique $f(x, y, z) = 0$; il y a deux paramètres arbitraires, le point décrit une surface S : si l'on sait trouver une infinité de solutions réelles à un paramètre pour x, y, z réparties sur une courbe Γ ,

cela n'entraîne pas que la surface S soit réelle; si l'équation $f = 0$ est algébrique, on pourra l'affirmer par exemple si Γ est ligne simple ou multiple d'ordre impair sur la surface S . Ce sont des considérations analogues qui entrent en jeu ici.

Je ferai remarquer encore pour mémoire que si r n'est pas premier avec h , la solution particulière $\alpha = q^r \frac{q^h + A_h}{Bq^h + B_h}$, $\beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A_h q^h}{B + B_h q^h}$, ainsi mise en évidence, est mise sous forme paramétrique impropre; mais cela ne gêne nullement pour la démonstration.

Il y a un autre groupe de solutions particulières que nous aurions pu employer: supposons que h n'est pas premier, soit d un diviseur de h autre que 1, posons $h = h'd$. Les équations

$$(28) \quad \begin{cases} \alpha = q^r \frac{q^{h'd} + a_1 q^{(h'-1)d} + a_2 q^{(h'-2)d} + \dots + a_{h'}}{bq^{h'd} + b_1 q^{(h'-1)d} + b_2 q^{(h'-2)d} + \dots + b_{h'}}, \\ \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + a_1 q^d + \dots + a_{h'} q^{h'd}}{b + b_1 q^d + \dots + b_{h'} q^{h'd}} \end{cases}$$

donnent, nous allons le voir, des solutions à h' paramètres. Comme plus haut, si r et d ne sont pas premiers, la représentation (28) est impropre, mais cela laisse subsister le résultat.

9. Nous sommes conduits tout naturellement à étudier le cas où le cône C satisfait aux mêmes conditions que précédemment et où la courbe (13) admet Oz pour axe de rotation. J'écris, r et m étant premiers entre eux,

$$(29) \quad \begin{cases} \alpha = q^r \frac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \dots + A_h}{Bq^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \dots + B_h}, \\ \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A_1 q^m + \dots + A_h q^{hm}}{B + B_1 q^m + \dots + B_h q^{hm}}, \end{cases}$$

où je garde les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, afin que nous nous rendions compte de l'analogie des calculs. Le fait que le cône C ne contient que les deux génératrices isotropes $q = 0$, $q = \infty$, se traduit par l'identité

$$(30) \quad \begin{aligned} & (x^h + A_1 x^{h-1} + \dots + A_h)(1 + A_1 x + \dots + A_h x^h) \\ & + (Bx^h + B_1 x^{h-1} + \dots + B_h)(B + \dots + A_h x^h) \\ & \equiv (1 + A_1^2 + \dots + B_h^2)x^h, \end{aligned}$$

qui est exactement la même qu'au paragraphe précédent, de sorte que nous retrouvons les mêmes expressions paramétriques de $A_1, A_2, \dots, A_h, B, B_1, \dots, B_h$ au moyen de $h + 1$ arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h+1}$.

Cette fois, m étant supposé différent de 1, les deux intégrales $\int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$ et $\int \frac{d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$ sont automatiquement algébriques. L'intégrale $\int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$ donne une relation nécessaire et suffisante entre les λ . Formons cette relation. Je puis poser $q^m = x$, $\alpha = q^r \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\beta = \frac{1}{q^r} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, et j'ai

$$(31) \quad \int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2} = \int \frac{[rf\varphi + mx(\varphi f' - f\varphi')][f_1\varphi_1]}{[1 + A_1^2 + \dots + B_h^2]^2 q x^{2h}} dq.$$

Il suffit donc d'exprimer que le polynôme en x de degré h $[rf\varphi + mx(\varphi f' - f\varphi')][f_1\varphi_1]$ n'a pas de terme en x^{2h} ; j'ai appelé f' la dérivée du polynôme $f(x) \equiv x^h + A, x^{h-1} + \dots + A_h, \dots$. On peut remarquer que si m devenait égal à 1, q^m ou x coïnciderait avec q et, par suite, le calcul que nous faisons serait encore valable pour $m = 1$. Les calculs que nous avons faits jusqu'ici : réalisation de l'identité (30), condition fournie par l'intégrale (31), sont donc valables même pour $m = 1$; la différence est la suivante, suivant que m surpasse 1 ou égale 1 : si m surpasse 1, nous avons obtenu *toutes* les conditions ; si m est égal à 1, nous n'en avons qu'une partie ; il faut adjoindre aux conditions déjà écrites, recopiées en y faisant $m = 1$, la relation fournie par $\int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$ (d'ailleurs si $r \geq 2h + 1$, cette nouvelle intégrale ne donne pas de condition). La remarque que nous faisons ici sur les calculs analogues relatifs à un cône à rotation et à un cône sans rotation sera exploitée avec tous les détails nécessaires.

Cette digression faite, il est bien clair que la relation fournie par (31) est de la forme

$$(32) \quad \frac{r}{m} = F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h+1}).$$

Il est alors naturel de poser la question de la façon suivante : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h+1}$ sont $h + 1$ variables qui doivent être réelles pour que la courbe (29) soit réelle. Considérons-les comme les coordonnées d'un

point dans l'espace à $h + 1$ dimensions ; cherchons entre quelles limites varie la fonction F quand le point $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h+1})$ balaie cet espace tout entier : soient l la limite inférieure, L la limite supérieure de F ; quand $\frac{r}{m}$ aura une valeur rationnelle prise arbitrairement entre l et L , l'équation (32) représentera une variété réelle à h dimensions dans cet espace à $h + 1$ dimensions ; donc, nous aurons des courbes (21) réelles algébriques pour toutes ces valeurs $\frac{r}{m}$, courbes à h paramètres. Autrement dit, la méthode revient, la valeur de h étant donnée, à considérer $\frac{r}{m}$ comme une nouvelle inconnue, qui ne prendra toutefois que des valeurs rationnelles.

Une digression en passant : j'ai supposé jusqu'ici r positif ; mais il est bien clair qu'il n'y a aucune raison, dans le calcul de l et L , à éliminer *a priori* les valeurs négatives de r ; en effet, dans (29), si r est négatif, rien d'essentiel n'est changé ; d'ailleurs, nous pouvons alors faire tourner C de 180° autour de Oy , ce qui se traduit indifféremment soit par la même rotation de (\mathfrak{U}) autour de Oy , soit par l'échange de (\mathfrak{U}) avec la symétrique de (\mathfrak{U}) par rapport à zOx ; or cet échange revient à permuter α avec β : dans un tel échange, déjà signalé nombreuses fois, r change de signe en même temps que les coefficients $A_1, \dots, A_h, B, \dots, B_h$ sont remplacés respectivement par $\frac{A_{h-1}}{A_h}, \frac{A_{h-2}}{A_h}, \dots$

Il résulte de là que $l = -L$; bornons-nous donc à calculer L et à prendre r positif ; nous savons *a priori* que la réalité exige $r < hm$, donc $L \leq h$. D'autre part, il est évident, en raison de l'exemple du Chapitre III (§ 7), que $L = h$, en effet, nous savons que

$$A_1 = A_2 = \dots = A_{h-1} = 0, \quad B_1 = B_2 = \dots = B_{h-1} = 0, \quad B_h = 1, \\ A_h = -B = \sqrt{\frac{hm+r}{hm-r}}$$

est une solution particulière, réelle si $\frac{r}{m} < h$; donc la proportion est bien établie.

10. La même méthode donnera les résultats suivants :

Cône unicursal n'ayant ni rotation, ni plan de symétrie, à deux génératrices isotropes :

$$(33) \quad \begin{cases} \alpha = q^r \frac{q^h + A_1 q^{h-1} + \dots + A_h}{B q^h + B_1 q^{h-1} + \dots + B_h}, \\ \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \dots + A'_h q^h}{B + B'_1 q + B'_2 q^2 + \dots + B'_h q^h}. \end{cases}$$

En tenant compte des résultats du Chapitre III (§ 6) et de ce Chapitre, les quantités A_1, \dots, B_h s'expriment rationnellement au moyen de $2h$ arbitraires si l'on se borne à exprimer qu'il n'y a qu'un couple isotrope; trois conditions résiduelles s'ajoutent, de sorte que la solution générale est à $2h - 3$ arbitraires (sauf cas d'exception $r = 2h$ et $r = h = 1$); la solution particulière du Chapitre III (§ 7), correspondant à

$$A_1 = A_{h-1} = A'_1 = \dots = A'_{h-1} = 0, \\ B_1 = B_2 = \dots = B_{h-1} = B'_1 = \dots = B'_{h-1} = 0,$$

permet d'affirmer en toute rigueur cette existence. Enfin, pour la réalité, il est nécessaire que $r < h$ et il est *vraisemblable* qu'en général cette inégalité sera suffisante, car pour $h = 2$ il en est bien ainsi.

Soit maintenant le cône unicursal à deux génératrices isotropes, dépourvu de plan de symétrie, mais ayant un axe de rotation

$$(34) \quad \begin{cases} \alpha = q^r \frac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \dots + A_h}{B q^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \dots + B_h}, \\ \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A'_h q^{hm}}{B + B'_1 q^m + \dots + B'_h q^{hm}}. \end{cases}$$

Comme pour (33) les A et B s'expriment rationnellement au moyen de $2h$ arbitraires; cette fois, il n'y a qu'une relation résiduelle provenant de $\int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$; comme plus haut, pour la réalité, il est nécessaire et

suffisant que $\frac{r}{m}$ soit inférieur à h : on a des courbes réelles à $2h - 1$ arbitraires.

Soit un cône unicursal à deux génératrices isotropes d'indice impair,

admettant le plan zOx pour plan de symétrie q en $\frac{1}{q}$:

$$(35) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2r} \frac{q^{2h+1} + A_1 q^{2h} + A_2 q^{2h-1} + \dots + A_{2h+1}}{1 - A_1 q + A_2 q^2 + \dots - A_{2h+1} q^{2h+1}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2r}} \frac{1 + A_1 q + A_2 q^2 + \dots + A_{2h+1} q^{2h+1}}{q^{2h+1} - A_1 q^{2h} + A_2 q^{2h-1} + \dots - A_{2h+1}}. \end{cases}$$

Nous avons vu que la condition que $q = 0$ et $q = \infty$ donnent le seul couple isotrope permet d'exprimer rationnellement $A_1 A_2 \dots A_{2h+1}$ au moyen de $h + 1$ arbitraires, lesquelles seront liées ensuite par deux conditions résiduelles. Pour les mêmes raisons, la solution générale, si $r > 2h + 1$, dépend de h arbitraires, mais est imaginaire; pour $r = 2h + 1$, il y a impossibilité; pour $r < 2h + 1$, la solution générale dépend de $h - 1$ arbitraires; pour avoir des solutions réelles, il est nécessaire que r soit inférieur ou égal à h et l'existence des solutions réelles est alors vraisemblable; tout cela a été vérifié pour $h = 1$, $r = 1$.

Prenons maintenant le cône unicursal à deux génératrices isotropes d'indice impair sans plan de symétrie :

$$(36) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2r} \frac{q^{2h+1} + A_1 q^{2h} + \dots + A_{2h+1}}{1 - A'_1 q + \dots - A_{2h+1} q^{2h+1}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2r}} \frac{1 + A'_1 q + \dots + A_{2h+1} q^{2h+1}}{q^{2h+1} - A_1 q^{2h} + \dots - A_{2h+1}}. \end{cases}$$

Comme précédemment, les lettres $A_1, A'_1, \dots, A_{2h}, A'_{2h}, A_{2h+1}$ peuvent s'exprimer, avant toute condition résiduelle, rationnellement au moyen de $2h + 1$ arbitraires; il y a trois conditions résiduelles (deux seulement si r surpasse $2h + 1$); donc, si r surpasse $2h + 1$, la solution générale existe et renferme $2h - 1$ arbitraires; pour $r = 2h + 1$, il y a impossibilité; pour $r < 2h + 1$, il y a $2h - 2$ arbitraires et l'on peut, si $r \leq h$, obtenir dans certains cas des solutions réelles : pour $r = h = 1$, on n'avait eu que des solutions imaginaires.

Nous pouvons considérer les cônes de même définition géométrique que précédemment, mais admettant en plus Oz comme axe de rotation,

m étant un entier impair, premier avec r :

$$(37) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2r} \frac{q^{(2h+1)m} + A_1 q^{2hm} + \dots + A_{2h+1}}{1 - A_1 q^m + \dots - A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2r}} \frac{1 + A_1 q^m + \dots + A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}{q^{(2h+1)m} - A_1 q^{2hm} + \dots - A_{2h+1}}. \end{cases}$$

Si h et r ont les mêmes valeurs que dans (35), il y a un paramètre arbitraire de plus pour le cône (37) que le cône (35), mais cette fois la réalité est établie en toute rigueur pour $\frac{2r}{m} < 2h + 1$. De même pour le cône

$$(38) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2r} \frac{q^{(2h+1)m} + A_1 q^{2hm} + \dots + A_{2h+1}}{1 - A_1 q^m + \dots - A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2r}} \frac{1 + A_1 q^m + \dots + A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}{q^{(2h+1)m} - A_1 q^{2hm} + \dots - A_{2h+1}}, \end{cases}$$

il y a deux paramètres de plus que dans (36) et l'existence de solutions réelles est établie en toute rigueur pour $\frac{2r}{m} < 2h + 1$.

Passons maintenant aux cônes unicursaux à deux génératrices isotropes d'indice pair tels que la courbe (15) admette le plan xOz pour plan de symétrie q en $\frac{1}{q}$ et le plan xOy comme plan de symétrie q en $-q$. La directrice (15) a pour équations

$$(39) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2r+1} \frac{q^{2h+1} + A_1 q^{2h} + \dots + A_{2h+1}}{1 - A_1 q + \dots - A_{2h+1} q^{2h+1}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2r+1}} \frac{1 + A_1 q + A_2 q^2 + \dots + A_{2h+1} q^{2h+1}}{q^{2h+1} - A_1 q^{2h} + A_2 q^{2h-1} + \dots - A_{2h+1}}. \end{cases}$$

Avant toute relation résiduelle, on peut exprimer les A au moyen de $h + 1$ arbitraires et l'on a une seule relation résiduelle, car c, c' sont paires en q , c'' impaire; $\int c \frac{dc''}{dq} dq$, $\int c' \frac{dc''}{dq} dq$ sont automatiquement algébriques et l'intégrale $\int c dc'$ fournit seule une relation, relation que l'on peut former avec $\int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$. Par le même raisonnement que pour les cônes à rotation, on montre que si $r < h$, on a une infinité de solutions réelles à h paramètres. Cela a été vérifié pour $h = 1$, $r = 0$.

Si l'on prend le cône unicursal à deux génératrices isotropes d'indice pair tel que la courbe (15) admette la symétrie xOy q en $-q$, les équations de la directrice (15) sont

$$(40) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2r+1} \frac{q^{2h+1} + A_1 q^{2h} + \dots + A_{2h+1}}{1 - A'_1 q + \dots - A_{2h+1} q^{2h+1}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2r+1}} \frac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \dots + A_{2h+1} q^{2h+1}}{q^{2h+1} - A_1 q^{2h} + \dots - A_{2h+1}}; \end{cases}$$

avant toute relation résiduelle, les A s'expriment au moyen de $2h+1$ arbitraires et il n'y a toujours qu'une relation résiduelle : il y a une infinité de solutions réelles à $2h$ paramètres, si $r < h$; nous l'avons vérifié pour $h=1$, $r=0$.

Enfin, si nous prenons les formules

$$(41) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2r+1} \frac{q^{(2h+1)m} + A_1 q^{2hm} + \dots + A_{2h+1}}{1 - A'_1 q^m + \dots - A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2r+1}} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}{q^{(2h+1)m} - A_1 q^{2hm} + \dots - A_{2h+1}}, \end{cases}$$

où m est premier avec $2r+1$, on ne gagne aucune simplification ni aucun paramètre par rapport au cône (39). Ici, le cône C admet l'axe Oz pour axe de rotation $\frac{\pi}{m}$, cette rotation de $\frac{\pi}{m}$ appliquant (15) sur (15'); si m est pair, (15) admet Oz pour axe de symétrie q en $-q$; si m est impair, (15) admet xOy pour plan de symétrie q en $-q$. La seule condition pour obtenir des courbes réelles est $2r+1 < (2h+1)m$. Mêmes considérations pour les cônes

$$(42) \quad \begin{cases} \alpha = q^{2r+1} \frac{q^{(2h+1)m} + A_1 q^{2hm} + \dots + A_{2h+1}}{1 - A'_1 q^m + \dots - A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}, \\ \beta = \frac{1}{q^{2r+1}} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}{q^{(2h+1)m} - A_1 q^{2hm} + \dots - A_{2h+1}}, \end{cases}$$

comparés à (40). Le cône (42) possède les mêmes propriétés géométriques que le cône (41), sauf la symétrie zOx .

11. Le paragraphe précédent généralise tout ce qui était connu avant ce Mémoire sur les courbes algébriques réelles à torsion constante : les seuls exemples connus consistaient, en effet, en courbes

unicursales dont le cône directeur des binormales n'a que deux génératrices isotropes. J'ai réalisé, outre la généralisation de ces types, un autre progrès en donnant des types où le cône des binormales a quatre génératrices isotropes : Chapitre III (§ 14), cône réel (g) du sixième degré, et (§ 16) cône réel (v) du huitième degré. Les calculs étaient assez pénibles pour le premier ; mais, pour le second, ils étaient inabordables de front ; j'ai pu les esquiver par l'application des méthodes générales exposées dans ce Chapitre. Si nous songeons aux propriétés des cônes à rotation, nous formons sans effort un type de degré aussi grand que l'on veut par des calculs analogues à ceux du cône réel (g) du sixième degré, mais plus simples. Cette extension n'est qu'un cas particulier d'une méthode générale qui sera exposée plus bas. J'écris, en supposant r et m premiers entre eux et $m > 1$,

$$(42) \quad \begin{cases} \alpha = q^r \frac{(q^m + k)^3}{(kq^m + 1)(Aq^{2m} + Bq^m + C)}, \\ \beta = \frac{1}{q^r} \frac{(1 + kq^m)^3}{(k + q^m)(A + Bq^m + Cq^{2m})}. \end{cases}$$

Pour chacune des racines de $q^m + k = 0$, on obtient un cycle isotrope porté par la droite $x + iy = 0$, $z = 0$, de degré 1, classe 3, indice 2 : le vecteur période polaire correspondant est nul. Pour les m racines de $kq^m + 1 = 0$, on obtient les cycles symétriques par rapport à xOz . J'exprime maintenant que le cône C ne possède plus que les deux cycles $q = 0$, $q = \infty$ en dehors de ceux-là et j'ai ainsi

$$(43) \quad k^2 + AC = 0, \quad (A + C)B + 2k(1 + k^2) = 0,$$

équations qui permettent, par exemple, d'exprimer explicitement C et B au moyen des deux arbitraires indépendantes A et k . Nous n'avons plus maintenant qu'une relation résiduelle à écrire, qui sera de la forme $\frac{r}{m} = F(A, k)$, où F est une fraction rationnelle en A et k ; il suffira donc de déterminer la limite inférieure et supérieure l et L de la fraction F dans le champ réel A, k ; pour toute valeur rationnelle de $\frac{r}{m}$ comprise entre l et L, on aura donc des courbes réelles (1) à un paramètre. J'indique rapidement les calculs : on a, P_4 désignant un certain polynôme du quatrième degré en x et posant $q^m = x$,

$$\lambda = 1 + 4k^2 + k^4 + A^2 + B^2 + C^2 :$$

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dq} = \frac{q^{r-1}(x+k)^2 P_4}{(kx+1)^2 (Ax^2+Bx+C)^2}, \\ \frac{\beta^2 \frac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2} = \frac{P_4(1+kx)^4}{\lambda^2 q^{4m+r+1}}, \\ \frac{\beta \frac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2} = \frac{P_4(A+Bx+Cx^2)(k+x)(1+kx)}{\lambda^2 x^4 q}. \end{array} \right.$$

Il nous suffit d'étudier les trois intégrales

$$\int \frac{\beta^2 d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\alpha^2 d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\beta d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2},$$

dont les deux premières se transforment l'une en l'autre en changeant q en $\frac{1}{q}$. Comme vérification de la théorie, nous constatons que les cycles $kq^m + 1 = 0$ ou $q^m + k = 0$ ne jouent aucun rôle dans les intégrales

$$\int \frac{\beta^2 d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\alpha^2 d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

Il n'y a qu'à annuler le coefficient de x^4 dans le produit

$$P_4(A+Bx+Cx^2)(k+x)(1+kx)$$

et nous avons ainsi

$$(45) \quad \frac{r}{m} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (Ak^2+Bk+A)(3Ak^2-Bk-A) \\ + [Bk^2+(A+C)k+B][2Bk^2+2(A-C)k-2B] \\ + (Ck^2+Bk+C)(Ck^2+Bk-3C) \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} A^2k^2+(A+Bk+Ak^2)^2 \\ + [B+(A+C)k+Bk^2]^2 + (C+Bk+Ck^2)^2 + k^2C^2 \end{array} \right\}}.$$

A condition de faire tourner C de 180° autour de Oy , ce qui revient comme on a vu à échanger α et β , on peut remplacer r par $-r$, donc $l = -L$. Nous remarquons que si A augmente indéfiniment, k étant fixe, C tend vers zéro ainsi que B et le second membre de (45) tend vers $\frac{3k^4+4k^2-1}{k^4+4k^2+1}$, fraction susceptible de prendre toutes les valeurs entre -1 et $+3$. Donc, on a $3 \leq L$ et ceci prouve que si $\frac{r}{m}$, en nous

bornant aux valeurs positives de r , est inférieur à 3, nous avons des courbes réelles (\mathfrak{A}) à 1 paramètre.

Le degré du cône C est $2(3m+r)$; il y a $2m$ cycles isotropes de degré 1, classe 3, indice 2 et 2 cycles isotropes de degré et classe égaux à r et d'indice $4m+2r$. Le degré de (\mathfrak{A}) est $10m+2r$. Comme les plus faibles valeurs de m et r sont respectivement $m=2$, $r=1$, la courbe la plus simple sera de degré 22, et il en existe, qui sont réelles, de ce type, puisque $\frac{1}{2}$ est dans l'intervalle convenable pour $\frac{r}{m}$. Ici encore on peut obtenir des courbes de degré arbitrairement grand, à un nombre de cycles isotropes arbitrairement grand, mais tous ces cycles sont portés par deux droites seulement, à savoir $z=0$, $x \pm iy=0$.

Si l'on ne se préoccupe pas de la réalité, il n'y a aucune condition à imposer à r et m , sauf $m > 1$. Il n'est pas sans intérêt de remarquer que si l'on a des solutions où A et C sont réelles, B et k imaginaires pures, le cône C est réel (\mathfrak{C}), la courbe (\mathfrak{A}) étant elle aussi réelle (\mathfrak{A}). On s'en aperçoit en écrivant $k = ik_1$, $B = iB_1$, $q = jq_1$, où j est une racine primitive de $j^m = i$: la vérification se fait exactement comme pour $m=1$, $r=0$, exemple du cône du sixième degré traité directement au Chapitre III. Or si, dans les équations (44) et (45), on remplace k par ik_1 et B par iB_1 , ou aura à faire un calcul de limites l , L analogue à celui déjà fait, conduisant à la fraction $\frac{3k_1^4 - 4k_1^2 - 1}{k_1^4 - 4k_1^2 + 1}$, laquelle varie de $-\infty$ à $+\infty$; donc pour toutes les valeurs de la fraction $\frac{r}{m}$ on obtient des cônes réels (\mathfrak{C}) à un paramètre, ce qui est intéressant au point de vue des surfaces applicables sur le paraboloïde et des surfaces minima réelles circonscrites à une sphère.

12. Je donne un dernier exemple qui sera fondamental pour arriver aux cônes unicursaux à directrice sphérique non unicursale. J'écris les équations

$$(46) \quad \begin{cases} \alpha = q^r \frac{(q^m + k)^3 (q^m - k) (q^m + A)}{(1 - kq^m)^3 (1 + kq^m) (1 - Aq^m)}, \\ \beta = \frac{1}{q^r} \frac{(1 + kq^m)^3 (1 - kq^m) (1 + Aq^m)}{(q^m - k)^3 (q^m + k) (q^m - A)} \end{cases}$$

qui définissent, A et k étant réelles, une courbe unicursale (\mathfrak{U}) ayant zOx pour plan de symétrie. Je me borne, pour abréger, aux valeurs impaires pour m et paires pour r , m étant supposé supérieur à 1 et premier avec r . Dans ces conditions, le changement de q en $-q$ remplace α par $-\frac{1}{\beta}$, donc la courbe (\mathfrak{U}) est mixte. Le cône C est alors de degré $5m + r$, il admet m cycles isotropes d'indice 2 obtenus pour $q^m = \pm k$ portés par la droite $x + iy = 0$, $z = 0$; le degré de ces cycles étant 1 et la classe 3, ces cycles ont leur vecteur période nul. Les racines de $q^m = \pm \frac{1}{k}$ donnent les m cycles à la fois conjugués et symétriques des précédents. En écrivant que le cône C ne possède plus que deux autres cycles isotropes d'indice $3m + r$ pour $q = 0$, $q = \infty$, on obtient l'unique relation

$$(47) \quad 2(1 + k^2)A + (1 + A^2)k = 0.$$

L'unique condition résiduelle donnée par ce couple provient de

$$(48) \quad \frac{r}{m} = \frac{\int \frac{\beta/\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}; \text{ c'est } \left\{ \begin{array}{l} 3(k^4 - 1)[2k^2A^2 + (1 + k^4)(1 + A^4)] \\ + 2(A^2k^2 - 1) \\ \times [2Ak(1 + k^2 + k^4) + (1 - k^2)(1 + k^4)(1 - A^2)] \\ + 2(1 + k^2 + k^4)(k - A)(1 - Ak)[A(1 - k^2) - k(1 - A^2)] \end{array} \right\}}{4k^2A^2(1 + k^4) + (1 + A^4)(1 + 4k^4 + k^8)}.$$

Suivant la méthode habituelle, construisons la courbe (47) dans un plan oAk , c'est une cubique, et cherchons entre quelles limites varie le second membre de (48), quand le point A , k décrit la cubique.

On peut remarquer que les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} q, \quad r, \quad A, \quad k \\ \frac{1}{q}, \quad -r, \quad \frac{1}{A}, \quad \frac{1}{k} \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} q, \quad r, \quad A, \quad k \\ -q, \quad r, \quad -A, \quad -k \end{array} \right\}$$

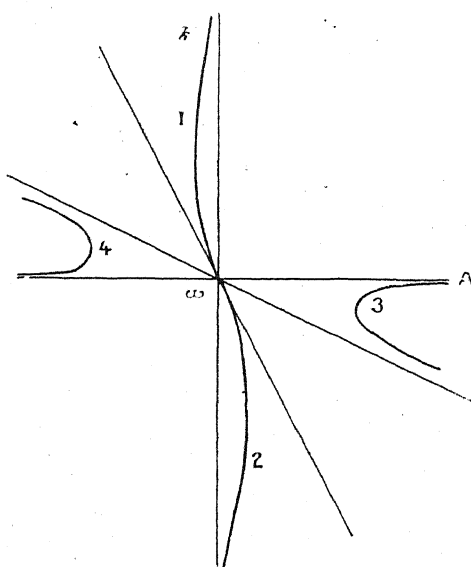
reviennent à changer α et β de signe, donc donnent la même courbe (\mathfrak{U}) à une rotation près.

L'équation de la cubique, mise sous la forme

$$(2k + A)Ak + 2A + k = 0,$$

met en évidence les trois asymptotes et la tangente à l'origine. L'échange $(A, k; \frac{1}{A}, \frac{1}{k})$ transforme la branche 1 en la branche 4, la branche 2 en la branche 3; en raison de la symétrie de 1 et 2, je me bornerai donc à la seule branche 2, sur laquelle le second membre de (48) varie de -5 , quand le point (A, k) part de ω jusqu'à $+3$ pour le point à l'infini sur la partie négative de ωk .

Fig. 8.



Il résulte de là que si l'on s'arrange pour prendre r toujours positif, à toute valeur positive de $\frac{r}{m}$ inférieure à 3 correspondent au moins deux courbes unicursales de ce type (non égales entre elles) et à toute valeur de $\frac{r}{m}$ comprise entre 3 et 5 en correspond au moins une. Les courbes ainsi obtenues ne renferment pas de paramètre arbitraire; la plus petite valeur de m , en nous bornant aux nombres impairs, est 3 : prenant $m = 3$, pour $r = 2, 4, 6, 8$, on a au moins deux courbes réelles; pour $r = 10, 12, 14$, on a une courbe réelle au moins.

J'aurai besoin ultérieurement de l'exemple relatif à $m = 3, r = 2$,

Le cône C est alors de degré 17, chacune des deux droites $x \pm iy = 0$, $z = 0$ porte quatre cycles isotropes dont trois sont d'indice 2 et le quatrième d'indice 11. La courbe (\mathcal{A}) est alors du degré 26. Pour cette courbe particulière, j'aurai besoin de la directrice plane dans le plan $z = 1$: je formerai donc les quantités

$$\lambda = \frac{c + ic'}{c''} = \frac{2\alpha}{\alpha\beta - 1}, \quad \mu = \frac{2\beta}{\alpha\beta - 1}.$$

On trouve ainsi

$$(49) \quad \begin{cases} \alpha = q^2 \frac{(q^3 + k)^3 (q^3 - k) (q^3 + A)}{(1 - kq^3)^3 (1 + kq^3) (1 - Aq^3)}, & \beta = \frac{1}{q^2} \frac{(1 + kq^3)^3 (1 - kq^3) (1 + Aq^3)}{(q^3 - k)^3 (q^3 + k) (q^3 - A)}, \\ \lambda = \frac{q^2 (q^6 - k^2)^3 (q^6 - A^2)}{(1 - k^2 q^6) \{ A k^2 (q^{18} + 1) + [A(1 + 5k^2 + k^4) + 2k(1 + k^2)(1 + A^2)] (q^{12} + q^6) \}}, \\ \mu = \frac{(1 - k^2 q^6)^3 (1 - A^2 q^6)}{q^2 (q^6 - k^2) \{ A k^2 (q^{18} + 1) + [A(1 + 5k^2 + k^4) + 2k(1 + k^2)(1 + A^2)] (q^{12} + q^6) \}}, \end{cases}$$

où A et k sont certaines constantes numériques bien déterminées que je ne calcule pas; il nous suffit de savoir qu'il y a deux systèmes (au moins) de valeurs pour A et k.

13. Les paragraphes précédents, à partir du n° 8, font concevoir d'une façon tout intuitive que si nous connaissons par un moyen quelconque une courbe (\mathcal{A}) unicursale correspondant à la directrice sphérique (\mathcal{B})

$$(13) \quad \alpha = q^\rho f(q), \quad \beta = \frac{1}{q^\rho} f_0\left(\frac{1}{q}\right),$$

où ρ est un entier positif ou nul, f et f_0 deux fractions rationnelles à coefficients imaginaires conjugués, il y aura toute une série de courbes (\mathcal{A}_i) unicursales elles aussi, se déduisant de la première par le procédé suivant : si ρ n'est pas nul, le cône C admet le couple isotrope $q = 0, q = \infty$; si ρ est nul, je supposerai encore que f et f_0 soient choisies de sorte que $q = 0$ et $q = \infty$ donnent un couple isotrope sur C; à ce couple de C correspondra, sur le nouveau cône C_1 , le couple isotrope $z = 0, x \pm iy = 0$ et le cône C_1 admettra Oz pour axe de rotation; si C n'a qu'un couple isotrope, le cône C_1 n'aura que ce couple isotrope $z = 0, x \pm iy = 0$; si le cône C a d'autres couples isotropes,

à chacun de ces couples, nous faisons correspondre sur C , un ensemble de m couples isotropes, déduits de l'un d'eux par des rotations successives de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz , l'indice de chacun d'eux étant égal à celui du couple correspondant de C . On arrivera au résultat en appelant F ce que devient la fraction connue f , si on la recopie en remplaçant chaque coefficient par un coefficient indéterminé; les équations de (\mathfrak{B}_1) seront de la forme

$$(\mathfrak{B}_1) \quad \alpha = q^r F(q^m), \quad \beta = \frac{1}{q^r} F_0\left(\frac{1}{q^m}\right).$$

Dans les paragraphes qui précèdent, ce procédé a été utilisé, nous avons vu que les calculs nécessaires pour trouver (\mathfrak{A}_1) sont calqués sur ceux qui conduisent à la courbe (\mathfrak{A}) et qu'en général, ils sont même plus faciles, surtout si l'on considère la fraction $\frac{r}{m}$ comme une nouvelle inconnue.

Je vais préciser; mais je rappelle un résultat relatif au degré et à la classe des cycles isotropes du cône C , quand on suppose ce cône C satisfaisant aux conditions voulues pour que (\mathfrak{A}) soit algébrique : au Chapitre II (§ 4 et suivants), j'ai choisi les axes et le paramètre de façon qu'un cycle isotrope corresponde aux développements $\lambda = Bt^q + \dots$, $\mu = \frac{A}{t^p} + \dots$; on en a déduit, si $q > p$, $\alpha = \frac{2}{A} t^p + \dots$, $\beta = \frac{2}{B} \frac{1}{t^q} + \dots$, et si $q = p$, $\alpha = Bt^p + \dots$, $\beta = \frac{A}{t^p} + \dots$, de sorte que de toutes façons les quantités α et $\frac{1}{\beta}$ admettent toutes deux la racine $t = 0$ avec un degré indiquant le degré et la classe du cycle $t = 0$; si l'on remplace (\mathfrak{B}) par (\mathfrak{B}') , α et $\frac{1}{\beta}$ s'échangent, donc il nous suffira d'indiquer que le plus petit des deux exposants de t donne le degré du cycle et l'autre la classe. On verra aisément, au paragraphe 6 de ce Chapitre entre autres, que, si le cône C est simplement unicursal sans que (\mathfrak{A}) soit algébrique, ce résultat n'est plus nécessairement vérifié.

14. Soit donc un cône C connu donnant une courbe (\mathfrak{A}) unicursale, la directrice (\mathfrak{B}) étant unicursale. Je porte mon attention sur un couple

isotrope G, G' de C et je suppose le paramètre habituel q choisi de façon que ce couple s'obtienne pour $q = 0$, $q = \infty$. Quant aux axes de coordonnées, je peux supposer que le plan xOy coïncide avec le plan OGG' , ou en diffère.

Soit le premier cas; j'ai alors à distinguer si le couple G, G' est du type où le degré et la classe du cycle isotrope sont égaux ou du type où la classe surpasse le degré.

J'adopte la première hypothèse : soit φ le degré et la classe du cycle $q = 0$. Les équations de (50) sont alors

$$(50) \quad \begin{cases} \alpha = q^\varphi \frac{q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h}{b q^h + b_1 q^{h-1} + \dots + b_h}, \\ \beta = \frac{1}{q^\varphi} \frac{1 + a'_1 q + \dots + a_h q^h}{b + b'_1 q + \dots + b_h q^h}; \end{cases}$$

où b, a_h, b_h sont trois quantités réelles non nulles, a_1 et a'_1, \dots des couples de constantes conjuguées. Les indices des divers couples isotropes de C sont mis en évidence par l'identité

$$(51) \quad \begin{aligned} & (q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h) (1 + a'_1 q + \dots + a_h q^h) \\ & + (b q^h + b_1 q^{h-1} + \dots + b_h) (b + b'_1 q + \dots + b_h q^h) \\ & \equiv l q^{p_1} (q + k_2)^{p_2} (k'_2 q + 1)^{p_2} \dots, \end{aligned}$$

qui exprime que le couple G, G' a pour indice $2(\varphi + p_1)$, que le couple G_2, G'_2 correspondant à $q = -k_2$ ou $q = \frac{-1}{k'_2}$ a pour indice $2p_2$, etc.

Nous allons chercher un nouveau cône C_1 de directrice (51) :

$$(52) \quad \begin{cases} \alpha = q^r \frac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \dots + A_h}{B q^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \dots + B_h}, \\ \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A_h q^{hm}}{B + B'_1 q^m + \dots + B_h q^{hm}}, \end{cases}$$

où les lettres A, B sont, cette fois, des inconnues et j'écris l'identité

$$(53) \quad \begin{aligned} & (x^h + A_1 x^{h-1} + \dots + A_h) (1 + A'_1 x + \dots + A_h x^h) \\ & + (B x^h + B_1 x^{h-1} + \dots + B_h) (B + B'_1 x + \dots + B_h x^h) \\ & \equiv L x^{p_1} (x + K_2)^{p_2} (K'_2 x + 1)^{p_2} \dots \end{aligned}$$

calquée sur l'identité (51) : de la sorte les deux droites $x \pm iy = 0$

et $z = 0$ seront des génératrices isotropes de C_1 , comme sur C ; les deux cycles correspondants ont pour degré et classe sur C_1 le nombre r et pour indice $2(r + p, m)$. Ce couple joue sur C et C_1 un rôle exceptionnel; prenons maintenant le couple $G_2 G'_2$ de C , qui a pour indice $2p_2$: il lui correspond sur C_1 un *groupement* de m couples isotropes, d'indice $2p_2$ aussi, correspondant aux racines de $q^m + K_2 = 0$ ou $K'_2 q^m + 1 = 0$; et ainsi pour les autres couples de C . Si donc le cône C admet n couples de génératrices isotropes conjuguées, le cône C_1 admet un nombre total de $2 + 2(n - 1)m$ génératrices isotropes; il y a augmentation du nombre si n est supérieur à 1.

Pour être tout à fait général, il faut prévoir le cas où le cône C ou bien le cône C_1 , soit séparément, soit simultanément, sont à directrice sphérique mixte: dans ce cas, il n'y a qu'à procéder comme si, par inadvertance, ce résultat avait échappé: le couple unique d'indice impair sera traité comme ayant un indice *factice* double de son indice *strict*; les deux génératrices de chaque couple d'indice pair sont obtenues deux fois chacune pour deux valeurs de q distinctes, liées par une certaine relation involutive; nous traiterons l'une et l'autre valeur de q comme donnant deux génératrices isotropes distinctes, ayant pour indice l'indice effectif de cette génératrice en réalité unique. Le cône sera lui-même considéré comme ayant un degré factice double de son degré strict. Si c'est le cône C qui a une directrice mixte, le couple exceptionnel de C pourra être soit le couple d'indice impair, soit un des couples d'indice pair; mais si c'est C_1 qui a une directrice mixte, ce sera nécessairement le couple exceptionnel de C_1 qui est à indice impair. Le lecteur se convaincra aisément de l'utilité de cette extension en se rappelant que même pour le cas très simple

$$\alpha = q^r \frac{q^m - B}{B q^m + 1}, \quad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 - B q^m}{B + q^m},$$

on peut avoir, suivant les parités de m et r , soit une directrice mixte, soit une directrice unicursale à plan de symétrie.

Ceci posé, pour que le cône C_1 conduise à une courbe (\mathcal{C}_1) unicursale, il faut écrire que l'identité (53) est vérifiée, puis que les conditions résiduelles correspondant à chaque groupement isotrope sont

vérifiées. Je regarde donc

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \dots, A_h; \quad B, B_1, \dots, B_h; \\ A'_1, \dots, A'_{h-1}; \quad B'_1, \dots, B'_{h-1}; \\ L, K_2, K'_2, \dots \end{aligned}$$

comme des inconnues ainsi que la fraction irréductible $\frac{r}{m}$. Or, les relations provenant de l'identité (53) admettent manifestement une solution toute connue, à savoir

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad \dots, \quad B = b, \quad \dots, \quad L = l, \quad K_2 = k_2, \quad \dots$$

D'autre part, les conditions résiduelles provenant du groupement $q^m = -K_2$ et $q^m = \frac{-1}{K'_2}$ se composent des équations ainsi obtenues : j'annule le vecteur période relatif à *une* des génératrices $q^m = -K_2$, d'où trois équations au plus, auxquelles j'ajoute les équations conjuguées. Ceci résulte comme on l'a vu de ce que les vecteurs périodes des cycles $q^m = -K_2$ dérivent les uns des autres par des rotations successives de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz . Les équations fournies par ce groupement admettent aussi la solution indiquée à l'instant à laquelle il faut incorporer $\frac{r}{m} = \rho$, puisque $\frac{r}{m}$ est aussi considérée comme inconnue. Ce résultat est tout à fait évident, si l'on songe que les intégrales à étudier sont de la forme

$$\int q^{r-1} F(q^m) dq, \quad \text{ou} \quad \int \frac{F(q^m)}{q^{r+1}} dq, \quad \text{ou} \quad \int \frac{F(q^m) dq}{q},$$

où F est une certaine fraction rationnelle; la théorie classique des fractions rationnelles donne un grand nombre de moyens de le vérifier, je ne m'y attarde pas. Les calculs peuvent être dirigés de façon à ne faire aucune hypothèse sur la fraction $\frac{r}{m}$ et subsistent pour $m = 1$, r quelconque, égal à ρ en particulier, du moment qu'il ne s'agit pas du couple $q = 0$, $q = \infty$. Enfin, il faut considérer le couple $q = 0$, $q = \infty$: puisqu'on a annulé les vecteurs périodes de tous les autres cycles isotropes, on se borne à considérer le cycle $q = 0$: sur C_1 , il donne une seule relation résiduelle provenant de $\int \frac{\beta dx}{(1 + \alpha \beta)^2}$, intégrale de la forme $\int \frac{F(q^m) dq}{q}$, ou encore, en posant $q^m = x$, de la forme $\int \frac{F(x) dx}{x}$; cette

condition est encore valable pour $m = 1$, $r = \rho$; elle admet donc la solution connue que nous avons indiquée. Donc toutes les conditions relatives au cône C_1 sont vérifiées quand on substitue C à C_1 : d'après ce qui a été expliqué dans les paragraphes précédents, les équations fournies par C_1 sont donc compatibles, quelle que soit la valeur rationnelle donnée à $\frac{r}{m}$, sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles; et si C , le cône connu, est réel, dans bien des cas, on pourra en déduire une infinité de cônes C_1 réels, pourvu que $\frac{r}{m}$ reste entre certaines limites.

Il faut bien remarquer que les équations de conditions du cône C_1 , recopiées en remplaçant les grandes lettres par les petites et $\frac{r}{m}$ pour ρ sont toujours valables, si l'on y regarde les petites lettres comme des inconnues; mais quand on se préoccupe de trouver le cône C lui-même, il y a à considérer le vecteur période du cycle $q = 0$: ce vecteur donne non seulement une relation provenant de $\int \frac{\beta d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$, mais encore celles qui proviennent de $\int \frac{dz}{(1 + \alpha\beta)^2}$ et $\frac{d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}$: ces deux dernières relations disparaissent automatiquement sur C_1 , le vecteur période étant alors dirigé suivant Oz , mais il n'arrive pas en général qu'il en soit de même pour le cône C ; si donc on considère le cône C lui-même comme inconnu, on peut profiter des calculs faits pour C_1 , mais il y aura souvent à ajouter une ou deux équations complémentaires; par conséquent, le système relatif à C_1 sera, en général, plus simple que le système relatif à C ; il peut arriver que l'on puisse trouver des solutions pour C_1 , sans qu'il en existe pour le cône C , mais le résultat essentiel pour nous est le suivant, c'est que, si un cône C existe, on en déduit immédiatement l'existence d'une infinité de cônes C_1 , de degré arbitrairement grand; la réalité reste le point délicat. Tout ceci a été vérifié en étudiant les directrices

$$\alpha = q^r \frac{q^m + A}{B q^m + C}, \quad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A q^m}{B + q C^m} \quad (\text{Chap. III, § 7}),$$

ou encore

$$\alpha = q^r \frac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \dots + A_h}{B q^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \dots + B_h}, \quad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A_h q^{hm}}{B + B'_1 q^m + \dots + B_h q^{hm}} \\ (\text{Chap. IV, § 9}),$$

ou encore

$$\alpha = q^r \frac{(q^m + k)^3}{(kq^m + 1)(Aq^{2m} + Bq^m + C)}, \quad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{(1 + kq^m)^3}{(k + q^m)(A + Bq^m + Cq^{2m})}$$

(Chap. III, § 14, et Chap. IV, § 11).

15. Je reprends la seconde hypothèse : j'ai pris le plan OGG' du couple, exceptionnel de C pour plan αOy , ce couple est fourni par $q = 0$, $q = \infty$. Mais cette fois le cycle $q = 0$ est de degré ρ , classe $\rho + s$ et indice 2ρ . Les équations de la directrice (\mathfrak{V}) sont donc

$$(54) \quad \begin{cases} \alpha = q^\rho \frac{q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h}{b_s q^{h-s} + \dots + b_h}, \\ \beta = \frac{1}{q^\rho} \frac{1 + a'_1 q + \dots + a_h q^h}{b'_s q^s + \dots + b_h q^h} \end{cases}$$

et l'on a une identité

$$(55) \quad \begin{aligned} & (q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h)(1 + a'_1 q + \dots + a_h q^h) \\ & + (b_s q^{h-s} + \dots + b_h)(b'_s q^s + \dots + b_h q^h) \\ & \equiv l(q + k_1)^{p_1}(k'_1 q + 1)^{p_1}(q + k_2)^{p_2}(k'_2 q + 1)^{p_2} \dots, \end{aligned}$$

le couple $q = 0$, $q = \infty$ est d'indice 2ρ et l'identité (55) met en évidence les autres couples, tels que $q = k_1$, $q = \frac{-1}{k'_1}$ d'indice $2p_1$, etc.

Pour le cône inconnu C_1 , j'écrirai

$$(56) \quad \alpha = q^r \frac{q^{mh} + A_1 q^{(h-1)m} + \dots + A_h}{B_1 q^{(h-1)m} + \dots + B_h}, \quad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A_h q^{mh}}{B'_1 q^m + \dots + B_h q^{mh}}$$

et j'écrirai l'identité

$$(57) \quad \begin{aligned} & (x^h + A_1 x^{h-1} + \dots + A_h)(1 + A'_1 x + \dots + A_h x^h) \\ & + (B_1 x^{h-1} + \dots + B_h)(B'_1 x + \dots + B'_h x^h) \\ & \equiv L(x + K_1)^{p_1}(K'_1 x + 1)^{p_1} \dots, \end{aligned}$$

au couple GG' de C correspond le couple $q = 0$, $q = \infty$ sur C_1 d'indice $2r$, de degré r : la classe des deux cycles en question est $r + m$ si B_1 est différent de zéro ; si B_1 est nul, supposons que B_j soit le

premier coefficient non nul, la classe sera $r + jm$; mais, peu importe, $A_1, A_2, \dots, A_h, A'_1, \dots, A'_{h-1}; B_1, \dots, B_h, B'_1, \dots, B'_{h-1}$ sont des inconnues ainsi que L, K_1, K'_1, \dots . Sauf la légère modification relative au couple exceptionnel sur C et C_1 , tout ce qui a été dit au numéro précédent subsiste intégralement.

Enfin, si je prends la troisième hypothèse, à savoir celle où je prends comme plan xOy un plan différent du plan $G_1G'_1$ du couple exceptionnel de C , j'écris pour équations de (\mathfrak{V})

$$(58) \quad \alpha = \frac{q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h}{b q^h + b_1 q^{h-1} + \dots + b_h}, \quad \beta = \frac{1 + a'_1 q + \dots + a_h q^h}{b + b'_1 q + \dots + a_h q^h}$$

avec l'identité

$$(59) \quad (q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h)(1 + a'_1 q + \dots + a_h q^h) \\ + (b q^h + \dots + b_h)(b + b'_1 q + \dots + b_h q^h) \equiv l q^{p_1}(q + k_2)^{p_2}(k'_2 q + 1)^{p_2} \dots$$

Pour le cône inconnu C_1 , j'écris les équations de (\mathfrak{V}_1)

$$(60) \quad \alpha = q^r \frac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \dots + A_h}{B q^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \dots + B_h}, \quad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A_h q^{hm}}{B + B'_1 q^m + \dots + B_h q^{hm}}$$

et l'identité

$$(61) \quad (x^h + A_1 x^{h-1} + \dots + A_h)(1 + A'_1 x + A_h x^h) \\ + (B x^h + B_1 x^{h-1} + \dots + B_h)(B + B'_1 x + \dots + B_h x^h) \\ \equiv L x^{p_1}(x + K_2)^{p_2}(K'_2 x + 1)^{p_2} \dots$$

Sur C_1 , le couple exceptionnel donné par $q = 0, q = \infty$ coïncide avec les deux droites $z = 0, x \pm iy = 0$ distinctes cette fois de $G_1G'_1$; $G_1G'_1$ ont pour indice $2p_1$ sur C , mais pour degré et classe des nombres qui ne sont plus mis en évidence; sur C_1 , le couple exceptionnel a pour degré et classe r et pour indice $2r + p_1 m$. A partir de ce moment, tout ce qui a été dit au paragraphe précédent subsiste: d'ailleurs, ce dernier cas revient à supposer $p = 0$ dans les formules du premier cas.

Dans les trois cas, les équations de condition du cône C_1 , recopiées en y faisant $\frac{r}{m} = \rho$, ρ étant le nombre positif ou nul relatif à C , sont vérifiées par les coefficients de C : donc les équations fournies par C_1 sont nécessairement compatibles si le cône C existe et il arrivera souvent, au cas où C est réel, que, si le nombre rationnel $\frac{r}{m}$ reste suffisamment voisin de ρ , le cône C_1 lui-même soit réel. Comme les coefficients de C doivent souvent satisfaire non seulement à ces équations recopiées, mais à une ou deux équations complémentaires, si nous considérons le cône C lui-même comme inconnu, le cône C_1 contiendra 0, 1 ou 2 paramètres arbitraires de plus que C dans le cas où le couple exceptionnel de C_1 coïncide dans l'espace avec le couple exceptionnel de C ; dans le cas où le couple exceptionnel de C_1 est un couple isotrope distinct du couple exceptionnel de C , il y aura à ajouter à ce nombre de paramètres supplémentaires les deux unités qui sont introduites par la détermination d'un plan arbitraire passant par l'origine : C_1 contient donc cette fois, 2, 3, 4 paramètres arbitraires de plus que C . Je n'ai parlé, bien entendu, que des paramètres de *forme*, rejetant ceux qui correspondent à un *déplacement* ou une *homothétie*.

La transformation appliquée à un cône C qui n'a qu'un couple isotrope n'est pas très intéressante en ce sens qu'elle n'augmente pas le nombre des points à l'infini de la courbe (α). Et c'est pour cela qu'il était indispensable de trouver des exemples de cônes unicursaux ayant au moins deux couples isotropes. J'ai dit qu'il était nécessaire ici d'introduire le cas échéant un degré factice pour les cônes, un indice factice pour les cycles isotropes. Le résultat a été que, pour les couples non exceptionnels de C , l'indice est conservé, un couple C étant remplacé sur C_1 par un groupement de m couples, tandis que l'indice du couple exceptionnel change en passant de C à C_1 : j'indique dans les trois cas la valeur de l'indice sur C et C_1 du couple exceptionnel :

$$\begin{array}{ll} (C) & 2(\rho + p_1), \quad 2\rho, \quad 2p_1; \\ (C_1) & 2(r + p_1 m), \quad 2r, \quad 2(r + p_1 m). \end{array}$$

Jusqu'ici, la transformation, telle qu'elle a été exposée, suppose C

à directrice sphérique unicursale ou mixte et livre un cône C_1 , lui aussi, à directrice sphérique unicursale ou mixte.

16. Il n'y a plus qu'un léger effort à faire pour arriver à des cônes unicursaux de directrice sphérique non unicursale. L'exemple le plus simple, lorsqu'on n'exige pas que la courbe (\mathfrak{A}) soit algébrique, est un cône unicursal du sixième ordre à quatre génératrices isotropes d'indice 3, mais nous savons qu'un indice 3 est incompatible avec l'algébricité de la courbe (\mathfrak{A}) ; donc l'exemple le plus simple, en courbes (\mathfrak{A}) algébriques, ne peut être obtenu qu'avec un cône unicursal du dixième ordre à quatre génératrices isotropes d'indice 5. Ce type existe, nous l'obtiendrons au Chapitre suivant confondu par la nature intime des choses avec des cônes non unicursaux. Nous allons en obtenir ici d'autres types, grâce à la transformation qui précède, réalisée cette fois, non plus avec la directrice sphérique (\mathfrak{B}) , mais avec la directrice plane σ . Il est nécessaire de donner quelques explications préliminaires : Avec les notations adoptées λ, μ et le paramètre habituel q , la courbe unicursale plane réelle la plus générale est représentée par des équations paramétriques

$$(62) \quad \lambda = q^\rho \frac{aq^h + a_1q^{h-1} + \dots + a_h}{bq^h + b_1q^{h-1} + \dots + b_h}, \quad \mu = \frac{1}{q^\rho} \frac{a' + a'_1q + \dots + a'_hq^h}{b' + b'_1q + \dots + b'_hq^h},$$

où $a, a_1, \dots, a_h; b, b_1, \dots, b_h$ sont des constantes ayant pour conjuguées $a', a'_1, \dots, a'_h; b', b'_1, \dots, b'_h$; ρ est un entier positif, nul, ou négatif. On pourra remarquer qu'une racine de $bq^h + \dots + b_h$, non racine de $b' + b'_1q + \dots + b'_hq^h$, donne une génératrice isotrope de C pour laquelle λ est infini, μ fini, autrement dit pour laquelle le plan tangent au cône C n'est pas confondu avec le plan tangent au cône $x^2 + y^2 + z^2 = 0$: donc si cela a lieu, la courbe (\mathfrak{A}) n'est pas algébrique (Chap. II, § 4). Si nous voulons que (\mathfrak{A}) soit algébrique, il faut donc qu'une telle racine, si elle existe, soit racine du numérateur de μ avec un degré de multiplicité au moins égal ; il en sera de même pour les racines du dénominateur de μ qui ne sont pas racines du dénominateur de λ , elles annuleront le numérateur de λ . Finalement, en se bornant aux courbes σ conduisant à une courbe (\mathfrak{A}) unicursale,

on aura

$$(63) \quad \begin{cases} \lambda = q^{\rho} \frac{aq^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots} \frac{c' + c'_1 q + \dots + c'_k q^k}{cq^k + c_1 q^{k-1} + \dots + c_k}, \\ \mu = \frac{1}{q^{\rho}} \frac{a' + a'_1 q + \dots + a'_h q^h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots} \frac{cq^k + c_1 q^{k-1} + \dots + c_k}{c' + c'_1 q + \dots + c'_k q^k}; \end{cases}$$

l'entier k étant positif ou nul. Il suffira d'ailleurs de réduire λ et μ au même dénominateur pour qu'on puisse se borner à écrire

$$(64) \quad \lambda = q^{\rho} \frac{aq^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots}, \quad \mu = \frac{1}{q^{\rho}} \frac{a' + a'_1 q + \dots + a'_h q^h}{(bq^h + b') + \dots}.$$

Les génératrices isotropes du cône C , en adoptant les équations (64), sont données par l'équation

$$(65) \quad (aq^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h)(a' + a'_1 q + \dots + a'_h q^h) + [(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots]^2 = 0.$$

Si $q = 0$ est racine de l'équation (65), l'indice commun du cycle $q = 0$ et du cycle $q = \infty$ s'obtient en ajoutant le nombre $|2\rho|$ au degré de multiplicité de la racine nulle de (65). Si $q = 0$ n'est pas racine et si ρ n'est pas nul, l'indice du cycle isotrope $q = 0$ ou $q = \infty$ est $|2\rho|$; si $q = 0$ n'est pas racine et si ρ est nul, il est clair que $q = 0$ ou $q = \infty$ ne donnent pas de génératrice isotrope. Enfin, si $q = q_0$ est racine d'ordre j de (65), $q = q_0$ et $q = \frac{1}{q'_0}$, où q'_0 désigne la conjuguée de q_0 , donnent deux cycles isotropes conjugués d'indice j .

Le résultat fondamental pour notre but, c'est que cette fois, sauf pour le couple $q = 0$, $q = \infty$ qui jouera encore le rôle exceptionnel, l'indice d'un couple est égal à l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation (65) et non plus au double de cet ordre, comme cela a lieu pour la directrice sphérique.

Je me borne en passant à donner quelques indications sur le problème consistant à déterminer un cône unicursal réel connaissant simplement le nombre de couples isotropes distincts et l'indice de chacun d'eux : on suppose qu'il y ait au moins deux couples d'indice impair, sinon le problème a été déjà résolu. On est alors ramené à trouver la solution générale de l'identité

$$(66) \quad \begin{aligned} & (aq^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h)(a' + a'_1 q + \dots + a'_h q^h) \\ & + [(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots]^2 \\ & \equiv l(q + k_1)^{p_1} (k'_1 q + 1)^{p_1} \dots \end{aligned}$$

Cette identité est un cas particulier de l'identité

$$(67) \quad (Aq^h + A_1q^{h-1} + \dots + A_h)(A' + A'_1q + \dots + A'_hq^h) \\ + (Bq^h + B_1q^{h-1} + \dots + B_h)(B' + B'_1q + \dots + B'_hq^h) \\ \equiv L(q + K_1)^{p_1}(K'_1q + 1)^{p_1} \dots$$

que nous avons résolu : en écrivant $B = B'_h, B_1 = B'_{h-1}, \dots$, on obtient un certain nombre de relations entre les arbitraires au moyen desquelles on a exprimé $A, A_1, \dots, A_h, A', \dots; B, \dots, B_h, B', \dots, B'_h, L, K_1, K'_1, \dots$; donc les calculs qui ont été faits précédemment permettent sinon de résoudre l'identité (66) dans tous les cas, mais de diminuer de beaucoup le nombre d'inconnues. On pourrait citer un assez grand nombre de cas où l'on peut effectivement exprimer rationnellement tous les coefficients au moyen d'un certain nombre d'arbitraires indépendantes.

17. Cela posé, je partirai comme précédemment d'un cône C connu, en distinguant trois cas comme précédemment et je calquerais les équations d'un cône inconnu C_1 sur celles de C , les deux cônes C et C_1 étant définis par leur section plane σ ou σ_1 . Le couple exceptionnel de C sera toujours défini par $q = 0, q = \infty$, aura pour correspondant le couple $z = 0, x = \pm iy$ sur C_1 , et l'indice de ce couple ne sera pas le même sur C ou C_1 ; un autre couple quelconque de C aura pour correspondant tout un groupement de m couples sur C_1 , avec conservation de l'indice : cette fois, il n'y a plus lieu de distinguer un indice factice; il n'y a que l'indice strict proprement dit. Si donc le cône C n'est pas un cône à couple isotrope unique et si l'un des couples a un indice impair, il suffira d'éviter de prendre ce couple comme couple exceptionnel pour que le cône C_1 soit à directrice sphérique non unicursale, car m étant au moins égal à 2, le cône C_1 possède au moins deux couples d'indice impair. C'est pour cela que je me suis efforcé de trouver un cône à directrice mixte ayant plusieurs couples isotropes: au paragraphe 12 de ce Chapitre, nous en avons obtenu un, par des calculs très simples, et cela nous permet d'arriver enfin à un cône unicursal de directrice sphérique non unicursale.

J'indique rapidement les formules relatives aux trois cas.

Premier cas. — On a pris le plan G, G_1 pour plan xOy , le couple G, G_1 de C ayant même degré et même classe ρ , et pour

indice $2\rho + p_1$:

$$\begin{aligned}
 (C) \quad & \left\{ \begin{aligned} \lambda &= q^\rho \frac{q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots}, \\ \mu &= \frac{1}{q^\rho} \frac{1 + a'_1 q + \dots + a'_h q^h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots} \\ &\quad (a_h \neq 0, b \neq 0), \\ &\quad (q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_h)(1 + a'_1 q + \dots + a'_h q^h) \\ &\quad + [(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots]^2 \\ &\quad \equiv lq^{p_1}(q + k_2)^{p_2}(k'_2 q + 1)^{p_3} \dots; \end{aligned} \right. \\
 (C_1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \lambda &= q^r \frac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \dots + A_h}{(Bq^{hm} + B') + (B_1 q^{(h-1)m} + B'_1 q^m) + \dots}, \\ \mu &= \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A'_h q^{hm}}{(Bq^{hm} + B') + (B_1 q^{(h-1)m} + B'_1 q^m) + \dots}, \\ &\quad (x^h + A_1 x^{h-1} + \dots + A_h)(1 + A'_1 x + \dots + A'_h x^h) \\ &\quad + [(Bx^h + B') + \dots]^2 \\ &\quad \equiv Lx^{p_1}(x + K_2)^{p_2}(K'_2 x + 1)^{p_3} \dots \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Deuxième cas. — Le couple GG' choisi sur C est de degré ρ , classe $\rho + s$, indice 2ρ , et l'on a pris le plan GG' pour plan xOy :

$$\begin{aligned}
 (C) \quad & \left\{ \begin{aligned} \lambda &= q^\rho \frac{q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_{h-s} q^s}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \dots}, \\ \mu &= \frac{1}{q^\rho} \frac{1 + a'_1 q + \dots + a'_{h-s} q^{h-s}}{(bq^h + b') + \dots} \\ &\quad (b \neq 0, s \geq 1), \\ &\quad (q^h + a_1 q^{h-1} + \dots + a_{h-s} q^s)(1 + a'_1 q + \dots + a'_{h-s} q^{h-s}) \\ &\quad + [(bq^h + b') + \dots]^2 \\ &\quad \equiv l(q + k_2)^{p_1}(k'_1 x + 1)^{p_2} \dots; \end{aligned} \right. \\
 (C_1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \lambda &= q^r \frac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \dots + A_{h-1} q^m}{(Bq^{hm} + B') + (B_1 q^{(h-1)m} + B'_1 q^m) + \dots}, \\ \mu &= \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \dots + A'_{h-1} q^{(h-1)m}}{(Bq^{hm} + B') + \dots}, \\ &\quad (x^h + A_1 x^{h-1} + \dots + A_{h-1} x)(1 + A'_1 x + \dots + A'_{h-1} x^{h-1}) \\ &\quad + [(Bx^h + B') + \dots]^2 \\ &\quad \equiv L(x + K_1)^{p_1}(K'_1 x + 1)^{p_2} \dots \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Troisième cas. — On a pris pour plan xOy un plan arbitraire distinct du plan du couple G, G' d'indice p_1 sur C .

Il suffit de supposer, dans les formules du premier cas, φ remplacé par zéro.

J'indique dans les trois cas la valeur de l'indice sur C et C_1 du couple exceptionnel :

$$\begin{array}{ll} (C) & 2\rho + p_1, \quad 2\rho, \quad p_1, \\ (C_1) & 2r + p_1 m, \quad 2r, \quad 2r + p_1 m. \end{array}$$

Pour les couples autres que le couple exceptionnel, l'indice se conserve et, en particulier, conserve sa parité; pour le couple exceptionnel, l'indice change : pour que ce couple soit d'indice impair sur C_1 , il est nécessaire que l'indice sur C soit impair et, qu'en plus, m aussi soit impair.

Pour un cône C à directrice sphérique non unicursale, nous n'avons à notre disposition que l'emploi de σ pour cette transformation et le cône obtenu est lui aussi à directrice sphérique non unicursale. Si le cône C est à directrice sphérique unicursale proprement dite, il en est de même du cône C_1 , que l'on passe par (\mathfrak{W}) ou σ , et comme l'emploi de σ ne peut donner autre chose que l'emploi de (\mathfrak{W}) , il y a avantage à se servir de (\mathfrak{W}) qui donne des calculs beaucoup plus simples; d'ailleurs, accidentellement, C_1 pourrait être alors à directrice mixte. Si le cône C est à directrice sphérique mixte, l'emploi de (\mathfrak{W}) donne toujours un cône C_1 à directrice sphérique unicursale ou mixte; l'emploi de σ , si le couple d'indice impair de C joue le rôle exceptionnel, ne donne rien de plus que l'emploi de (\mathfrak{W}) , donc doit être évité comme précédemment; on emploiera donc σ en évitant de faire jouer au couple unique d'indice impair le rôle exceptionnel, ce qui implique qu'il y ait au moins deux couples isotropes sur C .

J'ajoute un dernier mot : si le cône C est lui-même un cône à axe de rotation (l'angle de rotation étant $\frac{2\pi}{m}$, où m est un entier supérieur à 1), le plan perpendiculaire à l'axe de rotation coupe C suivant un couple isotrope et les autres couples de C se répartissent en groupements de m couples dans chaque groupement; si j'applique la trans-

formation qui précède [avec (10) en σ suivant le cas) en prenant un axe des z distinct de l'axe de rotation de C , il n'y a rien à dire, la rotation de C ne joue aucun rôle particulier. Mais si le couple exceptionnel de C est celui qui est perpendiculaire à l'axe de rotation et si cet axe est pris pour axe des z , il y a simplement ceci de modifié, c'est que, si à un couple de C autre que le couple exceptionnel correspond toujours un groupement de m_1 couples isotropes sur C_1 , tous les couples de C , appartenant au même groupement de m couples, conduisent tous au même groupement de m_1 couples sur C_1 .

Si donc je pars d'un cône C comme nous l'avons fait, nous arrivons à un cône C_1 : nous pouvons continuer la transformation sur C_1 , mais à condition de faire jouer le rôle exceptionnel à un autre couple de ce cône C_1 . Et alors le nombre des paramètres de forme de la courbe (1) augmentera à chaque fois.

18. Je vais donner un exemple précis de cône unicursal à directrice sphérique non unicursale. Je pousserai même la discussion de façon à établir la réalité du type obtenu, car j'ai bien spécifié dans tout ce Chapitre que la notion de réalité reste le point délicat.

Je recopie les équations (49) en remplaçant q^2 par q et k^2 par ρ^3 . J'obtiens ainsi

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{q(q^3 - \rho^3)^3(q^3 - A^2)}{(1 - \rho^3 q^3) \{ A \rho^3(q^3 + 1) + [A(1 + 5\rho^3 + \rho^6) + 2\rho^{\frac{3}{2}}(1 + A^2)(1 + \rho^3)](q^6 + q^3) \}}, \\ \mu &= \frac{(1 - \rho^3 q^3)^3(1 - A^2 q^3)}{q(q^3 - \rho^3) \{ A \rho^3(q^3 + 1) + [A(1 + 5\rho^3 + \rho^6) + 2\rho^{\frac{3}{2}}(1 + A^2)(1 + \rho^3)](q^6 + q^3) \}}, \end{aligned} \right.$$

formules où A et ρ sont deux nombres réels, ρ étant positif, qui ont été calculés. Il y a trois couples isotropes conjugués d'indice 2, fournis par les valeurs de q : $\rho, \frac{1}{\rho}; j\rho, \frac{j}{\rho}; j^2\rho, \frac{j^2}{\rho}$ et un couple d'indice 11 fourni par $q = 0, q = \infty$. Ce dernier couple ne doit pas jouer le rôle exceptionnel ; je fais donc la substitution $q = \frac{Q + \rho}{\rho Q + 1}$ de façon que $Q = 0$ donne $q = \rho$, et $Q = \infty$ donne $q = \frac{1}{\rho}$.

On obtient aisément, en posant

$$B = A(1 + 5\rho^2 + \rho^6) + 2\rho^{\frac{3}{2}}(1 + A^2)(1 + \rho^3) :$$

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= Q \frac{\rho + Q}{\rho(Q + 1)} \frac{\left\{ (1 - \rho^2)^2 Q^2 [(\rho + Q)^3 - A^2(\rho Q + 1)^3] \right.}{\left\{ [\rho^4 + \rho^2 + 1 + 3\rho(1 + \rho^2)Q + 3\rho^2 Q^2] \right.} \\ &\quad \left. \times [(\rho^4 + \rho^2 + 1)Q^2 + 3\rho Q(1 + \rho^2) + 3\rho^2] \right\}}{\left\{ A\rho^3[(\rho + Q)^9 + (\rho Q + 1)^9] \right.} \\ &\quad \left. + B(\rho + Q)^3(\rho Q + 1)^3[(\rho + Q)^3 + (\rho Q + 1)^3] \right\}} \\ \mu &= \frac{1}{Q} \frac{\rho Q + 1}{\rho + Q} \frac{\left\{ (1 - \rho^2)^2 [(\rho Q + 1)^3 - A^2(\rho + Q)^3] \right.}{\left\{ [(\rho^4 + \rho^2 + 1)Q^2 + 3\rho(1 + \rho^2)Q + 3\rho^2] \right.} \\ &\quad \left. \times [(\rho^4 + \rho^2 + 1)Q^2 + 3\rho Q(1 + \rho^2) + 3\rho^2] \right\}}{\left\{ A\rho^3[(\rho + Q)^9 + (\rho Q + 1)^9] \right.} \\ &\quad \left. + B(\rho + Q)^3(\rho Q + 1)^3[(\rho + Q)^3 + (\rho Q + 1)^3] \right\}} \end{aligned} \right.$$

Nous sommes dans le second cas : le couple exceptionnel $Q = 0$, $Q = \infty$ se compose des deux droites $x \pm iy = 0$, $z = 0$; chacune de ces valeurs de Q donne un cycle de degré 1 et classe 3; les formules mettent encore en évidence deux autres cycles isotropes de degré 1 et classe 3 donnés par $(\rho^4 + \rho^2 + 1)Q^2 + 3\rho Q(1 + \rho^2) + 3\rho^2 = 0$ et les deux cycles respectivement conjugués

$$\rho^4 + \rho^2 + 1 + 3\rho Q(1 + \rho^2) + 3\rho^2 Q^2 = 0;$$

enfin, chacun des cycles $\rho + Q = 0$ ou $\rho Q + 1 = 0$ est de degré 11. Nous avons déjà dit que la droite $z = 0$, $x + iy = 0$ porte quatre cycles, de même la droite $z = 0$, $x - iy = 0$.

Dans ces conditions, je considère le cône C_1 :

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= Q^r \frac{Q^{15m} + A_1 Q^{14m} + A_2 Q^{13m} + \dots + A_{14} Q^m}{B(Q^{15m} + 1) + B_1(Q^{14m} + Q^m) + \dots + B_7(Q^{8m} + Q^{7m})}, \\ \mu &= \frac{1}{Q^r} \frac{1 + A_1 Q^m + A_2 Q^{2m} + \dots + A_{14} Q^{14m}}{B(Q^{15m} + 1) + \dots + B_7(Q^{8m} + Q^{7m})}, \end{aligned} \right.$$

où A_1, \dots, A_{14} , B, B_1, \dots, B_7 sont 22 constantes réelles. J'écris l'identité

$$\begin{aligned} (71) \quad & (x^{15} + A_1 x^{14} + \dots + A_{14} x)(1 + A_1 x + \dots + A_{14} x) \\ & + [B(x^{15} + 1) + B_1(x^{14} + x) + \dots]^2 \\ & \equiv \frac{B^2}{k^{11} k_1^2 k_2^2} (x + k)^{11} (kx + 1)^{11} (x + k_1)^2 (k_1 x + 1)^2 (x + k_2)^2 (k_2 x + 1)^2, \end{aligned}$$

où k est réel et k_1, k_2 sont deux constantes imaginaires conjuguées. L'identité (71) donne 15 relations entre les 25 inconnues $A_1, \dots, B_7, k, k_1, k_2$. Je dois maintenant annuler tous les vecteurs périodes; je vais passer en revue toutes les génératrices isotropes de C_1 , sauf le cycle $Q = \infty$. Je pose $Q^m = x$ de façon à pouvoir écrire $\lambda = Q^2 \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\mu = \frac{1}{Q^r} \frac{f_1(x)}{\varphi(x)}$, où f, f_1, φ , sont trois polynomes; on a

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \lambda\mu &\equiv \frac{B^2(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2}{\varphi^2}, \\ \frac{d\lambda}{1+\lambda\mu} &= \frac{Q^{r-1}dQ}{B^2} \frac{rf\varphi + mx(\varphi f' - f\varphi')}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2}, \\ \frac{d\mu}{1+\lambda\mu} &= \frac{dQ}{Q^{r+1}B^2} \frac{-rf_1\varphi + mx(\varphi f'_1 - f_1\varphi')}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2}, \\ \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1+\lambda\mu} &= \frac{dQ}{QB^2} \frac{-2rf f_1 + mx(f'_1 f - f_1 f')}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2}. \end{aligned} \right.$$

On suppose r positif; m est supérieur à 1 et premier avec r ; la fraction $\frac{1}{1+\lambda\mu} \frac{d\lambda}{dQ}$ n'admet pas $Q = 0$ comme pôle (même si $m = 1$). La fraction $\frac{1}{1+\lambda\mu} \frac{d\mu}{dQ}$ admet $Q = 0$ pour pôle d'ordre $r+1$, mais la partie polaire relative à $Q = 0$ est de la forme

$$\frac{a}{Q^{r+1}} + \frac{a_1}{Q^{r+1-m}} + \frac{a_2}{Q^{r+1-2m}} + \dots,$$

de sorte qu'il ne peut y avoir de terme en $\frac{1}{Q}$ (mais pour $m = 1$, ceci ne subsisterait plus). Enfin, on a évidemment une simplification importante pour l'intégrale $\int \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1+\lambda\mu}$, car $\frac{dQ}{Q} = \frac{m dx}{x}$; ceci, d'ailleurs, est général quand Oz est axe de rotation $\frac{2\pi}{m}$; comme f contient x en facteur, la différentielle $\frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1+\lambda\mu}$ ne contient pas x en dénominateur (que m soit égal ou non à l'unité). Donc le vecteur période relatif à $Q = 0$ est nul automatiquement si $m > 1$ (pour $m = 1$, on a une condition et une seule).

Soit maintenant un quelconque des cycles isotropes du groupement

$x + k_1 = 0$; il suffit d'écrire que le plan tangent à C_1 le long de la génératrice support du cycle coupe C_1 , non pas seulement suivant deux, mais bien quatre génératrices confondues avec cette génératrice support : cela fait deux conditions seulement. En vertu de ce fait que le cône C_1 se reproduit par une rotation de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz , cette propriété appartient automatiquement à toutes les autres génératrices du groupement; en vertu de la symétrie de C_1 par rapport à zOx , il en sera de même pour le groupement $k_1x + 1 = 0$. Si l'on remarque que l'ensemble des deux groupements $x + k_1 = 0$, $k_1x + 1 = 0$ admet comme conjugué l'ensemble des deux groupements $x + k_2 = 0$, $k_2x + 1 = 0$, on voit que les deux équations écrites sont à compléter par les deux équations conjuguées; autrement dit, l'ensemble de ces quatre groupements donne quatre équations à coefficients réels entre les inconnues réelles A_1, \dots, A_{11} , B, \dots, B_7 , k , $k_1 + ik_2$, $k_1 - ik_2$. Un procédé de calcul simple met d'ailleurs ce fait en évidence : on peut dans un système d'axes réels $\omega\lambda\mu$ auxiliaire considérer les équations (70) comme définissant une courbe réelle, symétrique par rapport à la bissectrice $\lambda - \mu = 0$, admettant en plus une transformation birationnelle imaginaire $\lambda_1 = j'\lambda$, $\mu_1 = \frac{\mu}{j'}$, j étant une racine quelconque de $X^m - 1 = 0$. Il suffit d'exprimer que la tangente au point obtenu en prenant une racine de $Q^m + k_1 = 0$ a un contact du troisième ordre avec la courbe : en prenant les coordonnées homogènes $Q^{2r}f(Q^m)$, $f_1(Q^m)$, $Q^r\varphi(Q^m)$, ceci se traduit par ce fait que deux polynômes entiers en $x = Q^m$ sont divisibles par $x + k_1$; ce polynôme est réciproque, de sorte que $k_1x + 1$ se trouve être en même temps diviseur. Le calcul ainsi fait se trouve valable même si m devient égal à 1 : donc pour le cône C obtenu pour $m = 1$, $r = 1$, elles sont vérifiées.

Il ne reste plus qu'à étudier les deux groupements $x + k = 0$ et $kx + 1 = 0$; pour des raisons analogues aux précédentes, ces deux groupements étant à la fois symétriques et conjugués l'un de l'autre, et chacun d'eux se composant de m génératrices s'échangeant par des rotations successives de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz , on a seulement trois équations à coefficients réels entre $A_1, A_2, \dots, B, \dots, k, k_1, k_2$. Ces

équations subsistent même pour $m = 1$ et par suite pour C. Pour bien établir ce point, on peut raisonner ainsi : décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{Q^{r-1}} \frac{1}{1+\lambda\mu} \frac{d\lambda}{dQ}$, fraction qui ne dépend que de x , et soit $\frac{F(x)}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}}$ la partie polaire relative à l'ensemble des deux racines $x = -k$ et $x = -\frac{1}{k}$; F est un certain polynome entier. La différentielle $Q^{r-1}dQ \frac{F(x)}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}}$ doit être algébrique, donc est la différentielle d'une certaine fraction de la forme $\frac{Q^r F_1(x)}{(x+k)^{10}(kx+1)^{10}}$, où F_1 est un certain polynome; en écrivant cela, on a l'identité

$$[r F_1 + m x F_1'] (x+k)(kx+1) - 10 m x (2kx+1+k^2) F_1(x) \equiv F;$$

cela exige que F_1 soit d'un degré inférieur de deux unités à celui de F et alors l'identification donne par l'élimination des coefficients de F_1 deux relations entre les coefficients de F . Tous ces calculs se font sans avoir aucune hypothèse à faire sur r ou m , donc subsistent pour $m = 1$.

Comme la symétrie $\pm O x$, Q en $\frac{1}{Q}$, échange λ avec μ , ces deux équations n'ont pas besoin d'être écrites de nouveau pour $\frac{d\mu}{1+\lambda\mu}$ et le même procédé fournit une équation unique pour $\frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1+\lambda\mu}$ provenant des deux groupements $x+k=0$, $kx+1=0$.

Je rassemble donc toutes les équations obtenues pour C, m étant supérieur à 1 : l'identité (71) a donné quinze équations, l'ensemble des quatre groupements $x+k_1=0$, $k_1x+1=0$, $x+k_2=0$, $k_2x+1=0$ a donné quatre équations et l'ensemble des deux groupements $x+k=0$, $kx+1=0$ trois équations : cela fait un total de vingt-deux équations : il est tout à fait important de montrer que ces vingt-deux équations sont indépendantes quels que soient m et r ; elles auront alors une solution générale à trois paramètres et une infinité seront même réelles, comme nous le verrons. Nous établirons même que ces vingt-deux équations, toujours nécessaires pour $m = 1$, restent suffisantes pour $m = 1$, la relation supplémentaire trouvée si $m = 1$ étant conséquence des vingt-deux équations déjà écrites.

Pour vérifier ce point, nous remarquerons que si l'un des cycles pris parmi les cycles $Q^m + k_i = 0$ admet comme support la droite $x + iy = 0$, $z = 0$, il en sera de même pour tous les cycles $Q^m + k_i = 0$; il suffit que le numérateur de λ soit divisible par $Q^m + k_i$, ce qui fait une condition. De même, une seule condition assurera que tous les cycles $Q^m + k_2 = 0$ aient la même droite pour support. Donc, parmi les courbes (\mathfrak{A}_i) à trois paramètres, nous devrons en obtenir un groupe particulier à un paramètre, si nous ajoutons ces conditions géométriques. Or, il est plus simple de préparer le calcul directement en écrivant les équations définissant un cône C_2 :

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = Q^r \frac{(Q^m + k_1)^3 (Q^m + k_2)^3}{(k_1 Q^m + 1)(k_2 Q^m + 1)} \\ \quad \times \frac{Q^{7m} + A_1 Q^{6m} + A_2 Q^{5m} + A_3 Q^{4m} + A_4 Q^{3m} + A_5 Q^{2m} + A_6 Q^m}{B(Q^{11m} + 1) + B_1(Q^{10m} + Q^m) + \dots + B_5(Q^{6m} + Q^{5m})}, \\ \mu = \frac{1}{Q^r} \frac{(1 + k_1 Q^m)^3 (1 + k_2 Q^m)^3}{(Q^m + k_1)(Q^m + k_2)} \frac{1 + A_1 Q^m + \dots + A_6 Q^{6m}}{B(Q^{11m} + 1) + \dots + B_5(Q^{6m} + Q^{5m})}, \end{array} \right.$$

avec l'identité

$$(74) \quad (x + k_1)^2 (x + k_2)^2 (1 + k_1 x)^2 (1 + k_2 x)^2 (x^7 + A_1 x^6 + \dots + A_6 x) \\ \times (1 + A_1 x + \dots + A_6 x^6) + [B(x^{11} + 1) + \dots + B_5(x^6 + x^5)]^2 \\ \equiv \frac{B^2}{k^{11}} (x + k)^{11} (kx + 1)^{11}.$$

Si l'on recommençait le dénombrement des inconnues et des équations, on trouverait comme inconnues $A_1, \dots, A_6, B, \dots, B_5, k, k_1, k_2$ en nombre 15, l'identité (74) donnant onze conditions; quant aux résidus, cette fois tout a déjà été écrit pour les groupements $Q^m + k_i = 0$, $Q^m + k_2 = 0$ (que m soit ou non égal à 1) et $k_1 Q^m + 1 = 0$, $k_2 Q^m + 1 = 0$; si m est supérieur à 1, $Q = 0$ ne donne rien et l'ensemble $Q^m + k = 0$, $k Q^m + 1 = 0$ donne trois conditions; donc on a seulement quatorze équations pour lesquelles il suffira de montrer qu'elles sont indépendantes, quels que soient m ou r ; il y aura alors des solutions à un paramètre; nous verrons même qu'il y en a une infinité de réelles. Nous verrons encore comme plus haut que, même pour $m = 1$, ces quatorze équations sont suffisantes.

Je continue encore par le même procédé : dans ce cône C_2 , comme plus haut, il suffit d'une condition supplémentaire pour que les génératrices du groupement $x + k = 0$ coïncident avec la droite $x + iy = 0$, $z = 0$; on peut encore préparer le calcul en écrivant *a priori* les équations définissant un cône C_3 :

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= Q^r \frac{Q^m + k}{k Q^{m+1}} \frac{(Q^m + k_1)^3 (Q^m + k_2)^3}{(k_1 Q^m + 1)(k_2 Q^m + 1)} \\ &\quad \times \frac{Q^{5m} + A_1 Q^{4m} + \dots + A_4 Q^m}{B(Q^{9m} + 1) + B_1(Q^{8m} + Q^m) + \dots + B_4(Q^{3m} + Q^{4m})}, \\ \mu &= \frac{1}{Q^r} \frac{1 + k Q^m}{k + Q^m} \frac{(1 + k_1 Q^m)^3 (1 + k_2 Q^m)^3}{(Q^m + k_1)(Q^m + k_2)} \frac{1 + A_1 Q^m + \dots + A_4 Q^{4m}}{B(Q^{9m} + 1) + \dots + B_4(Q^{3m} + Q^{4m})}, \end{aligned} \right.$$

avec l'identité

$$(76) \quad \begin{aligned} &(x + k_1)^2 (x + k_2)^2 (1 + k_1 x)^2 (1 + k_2 x)^2 (x^5 + A_1 x^4 + \dots + A_4 x) \\ &\quad \times (1 + A_1 x + \dots + A_4 x^4) + [B(x^9 + 1) + \dots + B_4(x^3 + x^4)]^2 \\ &\equiv \frac{B^2}{k^9} (x + k)^9 (kx + 1)^9. \end{aligned}$$

Le dénombrement direct est toujours d'accord avec nos prévisions, car on a pour inconnues A_1, A_2, A_3, A_4 ; B, B_1, B_2, B_3, B_4 ; $k, k_1 + ik_2, k_1 - ik_2$ au nombre de 12; l'identité (76) donne neuf relations et, pour ce cône C_3 comme pour le cône C_2 , les conditions d'algèbricité de (\mathcal{A}_3) se réduisent aux trois conditions provenant de l'ensemble $x + k = 0, kx + 1 = 0$. On a douze équations à douze inconnues, il ne reste donc plus de paramètre arbitraire si les équations sont, comme nous l'annonçons, effectivement indépendantes.

Ce point sera établi en toute rigueur de la façon suivante : les équations obtenues soit pour C_1 , soit pour C_2 , soit pour C_3 sont nécessaires et suffisantes pour m supérieur à 1; pour $m = 1$, elles sont toujours nécessaires, mais rien ne prouve jusqu'ici qu'elles sont suffisantes. Je vais démontrer qu'elles sont encore suffisantes même pour $m = 1$. Pour plus de netteté, je renvoie la démonstration plus bas. Admettons ce point acquis.

Étudions le système relatif à C_3 : nous avons douze équations entre les douze inconnues réelles A_1, A_2, A_3, A_4 ; B_1, \dots, B_4 ; $k, k_1 + ik_2$,

$k_1 - ik_2$. Ce système dépend du paramètre fractionnaire $\frac{r}{m}$; or, pour $r = m = 1$, nous avons su le résoudre complètement; la solution est donnée par la formule (69) et la solution numérique obtenue est d'ordre de multiplicité égal à l'unité, en tous les cas impair et, de plus, elle est réelle : donc, pour $\frac{r}{m}$ suffisamment voisin de 1, il existe bien des cônes C_3 réels donnant une courbe (\mathfrak{A}_1) réelle unicursale sans paramètres; dans les formules (75), les quantités $A_1, \dots, B, \dots, k, k_1 + ik_2, k_1 - ik_2$ pourront être développées en séries entières procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{r}{m} - 1$ et à coefficients réels. Les quantités $A_1, \dots, B, k_1 + ik_2, k_1 - ik_2$ sont des fonctions algébriques de $\frac{r}{m}$ qui sont réelles dans un certain champ de variation pour $\frac{r}{m}$; nous pouvons remarquer que, si k_1 et k_2 sont réelles séparément et non imaginaires conjuguées, rien d'essentiel n'est modifié, C_3 ou C_2 ou C_1 restent réels, les groupements $x + k_1 = 0$ et $k_1 x + 1 = 0$ sont alors à la fois symétriques par rapport à zOx et conjugués, de même les deux groupements $x + k_2 = 0$ et $k_2 x + 1 = 0$; autrement dit, il suffit de considérer $k_1 + k_2$ et $k_1 k_2$, comme c'est naturel *a priori*, au lieu de k_1 et k_2 séparément. Abstraction faite de la réalité, le cône C_3 existe quelle que soit la fraction $\frac{r}{m}$, sauf pour des valeurs exceptionnelles de $\frac{r}{m}$. L'existence de cônes C_3 réels prouve l'existence de cônes C_2 et de cônes C_4 réels, les cônes C_2 étant à un paramètre et les cônes C_4 à trois paramètres.

On remarquera que le cône C_3 pouvait être considéré seul, car les équations de C_3 sont calquées exactement sur celles du cône C , suivant le procédé général développé précédemment. Mais il était bon de se débarrasser complètement de cette particularité géométrique qui consiste à donner la même génératrice isotrope pour support à plusieurs cycles, propriété qui est commode en tous cas pour construire certains types particuliers. Le mode de démonstration employé a signalé en passant certains procédés d'intégration qui peuvent être commodes soit pour avoir effectivement les coordonnées d'un point de la courbe (\mathfrak{A}) , soit pour dénombrer les relations, et qui s'appliquent quelle que soit la courbe (\mathfrak{A}) étudiée. Par exemple, si l'on prend

les formules (72), on peut écrire

$$\int \frac{d\lambda}{1+\lambda\mu} = \frac{Q^2 x F(x)}{(x+k)^{10} (kx+1)^{10} (x+k_1) (k_1x+1) (x+k_2) (k_2x+1)},$$

où $F(x)$ est un polynome de degré 23 : l'identification des deux membres donnera à la fois le polynome F et des relations d'identification, au nombre de six. Il suffit de remplacer Q par $\frac{1}{Q}$ et x par $\frac{1}{x}$ pour avoir l'intégrale $\int \frac{d\mu}{1+\lambda\mu}$. Le résultat est bien conforme à la théorie des fractions rationnelles, car il y a six séries de pôles pour la fraction $\frac{1}{1+\lambda\mu} \frac{d\lambda}{dQ}$ et chacune des six séries donne une seule condition résiduelle.

De même l'intégrale $\int \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1+\lambda\mu}$, qui ne dépend que de x et qui change de signe quand x est remplacé par $\frac{1}{x}$, donnerait une relation

$$\int \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1+\lambda\mu} = \frac{x \left(x - \frac{1}{x} \right) \Phi(x)}{(x+k)^{10} (kx+1)^{10} (x+k_1) (k_1x+1) (x+k_2) (k_2x+1)},$$

où Φ est un polynome réciproque en x de degré 22 ; l'identification des deux membres donne trois relations ; la théorie des fractions rationnelles permettrait de le prévoir comme plus haut, en raison de l'existence de six séries de pôles ; la série $x = -k_1$ et $x = \frac{-1}{k_1}$ devant donner le même résultat, ainsi que $x = -k_2$ ou $x = \frac{-1}{k_2}$ et $x = -k$ et $x = \frac{-1}{k}$, on n'a que trois relations. D'autre part, nous avons vu directement au Chapitre II (§ 3) que si un cycle d'indice 2 et degré 1 existe, si l'on annule la composante du vecteur période polaire correspondant relative à Ox et Oy , la constante relative à Oz est nulle aussi ; donc ici les trois nouvelles relations se réduisent à une seule, en tenant compte des précédentes. On retrouve donc bien le résultat annoncé : sept relations résiduelles pour C_1 ; on pourrait opérer de même pour les autres cônes C_2 et C_3 .

19. Le seul point à démontrer maintenant est donc que, si m devient

égal à 1, la relation fournie par $\int \frac{d\mu}{1+\lambda\mu}$ et le pôle $Q = 0$ est une conséquence des relations fournies par les couples autres que $Q = 0$ et $Q = \infty$.

C'est un cas particulier d'une proposition plus générale. Je considère un cône C algébrique réel; je le définis par la courbe σ trace de ce cône sur le plan $z = 1$; soit $F(\xi, \eta) = 0$ l'équation de cette solution dans son plan; le point réel ou complexe ξ est supposé balayer tout le plan de la variable complexe et je marque sur ce plan les racines de l'équation $1 + \xi^2 + \eta^2 = 0$; j'entoure chacune d'elles d'un petit cercle; les intégrales

$$\tau \int \frac{d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \quad -\tau \int \frac{d\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \quad \tau \int \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2},$$

prises dans le sens direct le long d'un de ces cercles Γ , sont les composantes du vecteur période polaire relatif au cycle isotrope correspondant de C ; soient $a + a'i$, $b + b'i$, $c + c'i$ ces composantes.

Si je prends maintenant les intégrales conjuguées des précédentes, elles se rapportent au cercle Γ' symétrique de Γ par rapport à l'axe réel, le cercle Γ' étant décrit dans le sens inverse cette fois: donc le vecteur période polaire du cycle isotrope conjugué a pour composantes $-a + a'i$, $-b + b'i$, $-c + c'i$. Donc, s'il y a n couples isotropes conjugués, la somme géométrique des $2n$ vecteurs périodes polaires est nulle et ceci se traduit par

$$\sum_1^n a' = 0, \quad \sum_1^n b' = 0, \quad \sum_1^n c' = 0.$$

Imaginons maintenant que, parmi les cycles isotropes, il y en ait un qui soit du type classe supérieure au degré. Je suppose les axes pris de sorte que la droite isotrope support soit $z = 0$, $x + iy = 0$. Alors, en nous reportant au Chapitre II (§ 4), puisque nous avons pour la courbe (\mathcal{A})

$$x + iy = -\tau i I_1, \quad x - iy = \tau i I_2, \quad 2z = -\tau i I_3,$$

et que I_1 et I_3 ne donnent pas de singularité logarithmique pour ce cycle, on en déduit que les trois composantes du vecteur période polaire sont

$$a + a'i, \quad -a' + ai, \quad 0,$$

et le vecteur polaire du cycle conjugué donne

$$-a + a'i, \quad a' + ai, \quad 0.$$

Supposons donc qu'on ait annulé tous les vecteurs périodes relatifs aux autres couples; dans ces conditions, comme la somme de tous les vecteurs est nulle, la somme des deux vecteurs écrits précédemment est nécessairement nulle : donc $a = 0$, $a' = 0$; donc chacun des deux vecteurs est nul automatiquement, comme conséquence de la nullité des autres.

Or, dans l'étude faite au numéro précédent, qu'il s'agisse de C_1 , C_2 ou C_3 , on a annulé les vecteurs périodes de tous les cycles autres que $Q = 0$, $Q = \infty$; chacun de ces deux cycles est du type classe supérieur au degré, et cela que m soit égal à 1 ou supérieur à 1.

Si m est supérieur à 1, les deux cycles $Q = 0$, $Q = \infty$ ont leur vecteur automatiquement nul; si m est égal à l'unité, ces deux vecteurs ne sont plus nuls automatiquement, mais les équations obtenues en écrivant que tous les autres vecteurs sont nuls ont pour conséquence que les deux vecteurs en question le soient; par exemple, pour $m = 1$, $r = 1$, la relation $A_{1,4} = 0$, s'il s'agit de C_1 , sera une conséquence des deux équations formées; de même pour C_2 ou C_3 ($A_6 = 0$, s'il s'agit de C_2 ; $A_4 = 0$, s'il s'agit de C_3).

Quant au calcul fait pour C_3 , en supposant $m = 1$, $r = 1$, il a été fait avec d'autres variables au paragraphe 12, de façon à n'avoir que deux inconnues au lieu de douze, mais cela importe peu pour apprécier l'ordre de multiplicité de la solution numérique obtenue; de la sorte, nous sommes bien certains que les douze équations sont indépendantes.

L'exemple ainsi obtenu en toute rigueur est le premier exemple connu jusqu'à présent de courbe unicursale à torsion constante dont le cône directeur des binormales a une directrice sphérique non unicursale. Nous en trouverons d'autres au Chapitre suivant, et en particulier le type le plus simple correspondant à quatre couples isotropes d'indice 5.

(A suivre.)