ÉMILE BOREL

L'intégration des fonctions non bornées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 36 (1919), p. 71-92
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__71_0>

SUR

L'INTÉGRATION DES FONCTIONS NON BORNÉES

ET SUR

LES DÉFINITIONS CONSTRUCTIVES

PAR M. ÉMILE BOREL.

M. Lebesgue vient de publier [1] un Mémoire « à l'occasion de remarques formulées par M. Borel sur les définitions qu'il appelle *définitions constructives* ». Dans ce Mémoire assez étendu j'ai cru distinguer trois idées essentielles : critique mathématique de ma définition de l'intégrale des fonctions non bornées, discussion méthodologique et pédagogique sur les définitions constructives, revendications de priorité. J'examinerai successivement ces trois points; je n'aurais pas, selon mes habitudes, discuté les questions de priorité, si je n'étais mis en cause d'une manière inusitée qui m'oblige à prouver par des textes que, dans mes publications et en particulier dans ma Notice de 1912, j'ai pleinement rendu justice à M. Lebesgue et ai été très loin d'exagérer la part qui me revient.

Je ne ferai état dans ce Mémoire que de mes résultats entièrement publiés; je réserve pour des publications ultérieures les développements inédits que j'avais annoncés avant la guerre et dont la rédaction et la publication se sont trouvées retardées.

---

[1] *Annales de l'École Normale*, juin à août 1918 (fascicules parus en avril 1919).

I. — L'intégration des fonctions non bornées.

Dans ma Notice (p. 29 et 30), je renvoie aux Notes suivantes, désignées par les numéros 38, 39, 53 :

38. *Sur la définition de l'intégrale définie* (*Comptes rendus*, t. CL, p. 375).

39. *Sur une condition générale d'intégrabilité* (*Ibid.*, p. 508).

53. *Le calcul des intégrales définies* (*Journal de Mathématiques*, 1912).

Les énoncés donnés par M. Lebesgue aux pages 209 et 215 de son Mémoire sont contredits par un exemple qui figure dans la Note 39; je vais développer la démonstration de l'existence de l'intégrale, en reprenant cet exemple.

Soient a_n les nombres rationnels compris entre 0 et 1 rangés en série simple d'après l'un des procédés connus; on pose

$$f(x) = \Sigma e^{-n} | x - a_n |^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Cette égalité définit la fonction $f(x)$ lorsque la série converge; lorsqu'elle diverge ou qu'un des termes est infini, la fonction $f(x)$ est infinie. L'ensemble des infinis de $f(x)$ a la puissance du continu (¹). Pour montrer que la fonction $f(x)$ est intégrable par ma méthode, « *la seule précaution à prendre est la suivante : il ne suffit pas que l'ensemble des intervalles d'exclusion tende vers zéro lorsqu'on fait varier l'ensemble de ces intervalles; il faut encore avoir soin, dans chaque choix particulier que l'on fait de ces intervalles, d'assujettir leur décroissance asymptotique à ne pas être trop rapide* (²) ». Sans cette précaution, en effet, il pourrait se trouver dans les parties non exclues des points de divergence de la série, c'est-à-dire des infinis de $f(x)$; la définition

(¹) *Voir*, par exemple, ma Note *Sur les ensembles de mesure nulle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1913).

(²) *Comptes rendus*, t. CL, p. 510.

serait donc inexistante, et point ne serait besoin de longs développements pour démontrer qu'elle ne s'applique pas.

Nous allons prendre, comme il est indiqué dans la Note citée, l'intervalle d'exclusion relatif à a_n égal à $\frac{\varepsilon}{n^2}$. A chaque valeur de ε faisons correspondre un nombre m tel que l'on ait

$$\sum_{m+1}^{\infty} e^{-n} n^2 < \varepsilon^2, \tag{2}$$

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2. \tag{3}$$

Posons

$$f(x) = \varphi_m(x) + \psi_m(x), \tag{4}$$

en désignant par φ_m la somme des m premiers termes de la série et par ψ_m le reste. Nous devons, en laissant ε fixe, former les sommes de Riemann relatives à $f(x)$, en tenant compte de l'exclusion des intervalles $\frac{\varepsilon}{n^2}$; ces sommes peuvent être décomposées en deux parties, l'une relative à φ_m et l'autre relative à ψ_m. La partie relative à ψ_m est infiniment petite avec ε d'après l'inégalité (2); quant à la partie relative à φ_m, elle converge lorsque les intervalles de Riemann tendent vers zéro, à condition de faire abstraction des intervalles d'exclusion relatifs aux points singuliers de ψ_m; mais, d'après l'inégalité (3), la modification introduite du fait de ces intervalles est également infiniment petite avec ε. Ma définition de l'intégrale conduit donc à lui attribuer une valeur égale à la somme (convergente) des intégrales des termes de la série.

La démonstration s'appliquerait sans modification appréciable à une fonction telle que

$$F(x) = \sum e^{-n} \theta(x - a_n) \tag{5}$$

avec

$$\theta(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, \tag{6}$$

dont la valeur absolue n'est pas intégrable. Il y aurait lieu simplement ici de remarquer, ce qui était inutile dans le cas précédent, que l'on peut, quel que soit m, choisir d'une manière aussi irrégulière qu'on le désire les intervalles d'exclusion relatifs aux m premiers points singuliers, la décroissance asymptotique seule restant assujettie à des restrictions analogues aux précédentes. Cette remarque revient à constater, par le calcul des sommes de Riemann, l'intégrabilité au sens de Riemann de chaque terme de la série, considéré isolément.

Comme je l'indique à la fin de mon Mémoire de 1912, c'est pour résoudre des questions précises se rattachant à mes recherches sur les fonctions monogènes non analytiques, que j'avais été amené à réfléchir à l'intégration des fonctions non bornées; toute ma rédaction a été influencée par la pensée de cette application; en outre, comme je l'indique à la fin du Mémoire, j'étais arrivé, entre temps, à exposer les résultats essentiels de la théorie des fonctions monogènes non analytiques en évitant, au moins formellement, l'emploi de fonctions non bornées [1]; j'y utilise, par contre, des chemins d'intégration d'une nature discontinue très particulière. Par l'emploi de tels chemins dans le plan complexe, on démontrerait aisément qu'une fonction telle que $F(x)$ est la dérivée de son intégrale définie et que la valeur que j'attribue à son intégrale peut s'exprimer au moyen de la fonction primitive. L'intégration terme à terme d'une telle fonction me paraît exiger des procédés de raisonnement, sinon identiques, du moins équivalents à ceux que j'ai employés [2]. Je n'aperçois d'ailleurs pas d'applications simples d'un tel résultat; c'est pourquoi, dans ma Notice de 1912, je n'ai pas consacré plus de quatre lignes à l'intégration des fonctions non bornées. C'est pourquoi également je n'ai pas jusqu'ici développé la démonstration de l'existence de l'inté-

---

[1] *Voir* la Note I de mes *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*. Cette Note renferme une partie des résultats annoncés en 1912 comme devant paraître dans un Mémoire des *Acta mathematica*, Mémoire qui n'a pas été rédigé.

[2] Si l'on remplace un intervalle d'exclusion par le demi-cercle situé au-dessus de Ox, décrit sur cet intervalle comme diamètre, la valeur de l'intégrale dans le plan complexe est modifiée de πe^{-n}, e^{-n} étant le résidu relatif à cet intervalle. On peut ainsi démontrer que la fonction (5) est la dérivée de son intégrale indéfinie, car cette propriété est évidente si on limite la série à un nombre fini de termes et les demi-cercles, correspondant aux termes négligés, introduisent une erreur inférieure à $\pi\varepsilon$, ε étant arbitrairement petit.

grale, d'après ma définition, pour une fonction telle que (5); car un tel résultat, si l'on n'en donne pas d'applications, n'a pas à mes yeux grand intérêt.

M. Lebesgue trouve arbitraire la définition que j'ai donnée; elle s'imposait à moi par la nature du problème : une fonction ne peut être intégrable que si l'ensemble de ses infinis est de mesure nulle; car, le produit de l'infini par zéro étant indéterminé, on peut espérer que ce produit a une valeur finie, tandis que le produit de l'infini par un nombre fini ne peut être qu'infini; or, tout ensemble de mesure nulle fait partie d'un ensemble régulier (1), défini par une infinité dénombrable de points fondamentaux et des intervalles d'exclusion qui décroissent suivant une certaine loi asymptotique. Si l'on se place au point de vue d'une fonction donnée *a priori*, abstraitement, et non d'une manière constructive, on peut se demander si les points fondamentaux sont bien déterminés, c'est-à-dire si un choix particulier de points fondamentaux se distingue des autres choix possibles par des propriétés objectives, comme c'est le cas pour les fonctions que je considère. C'est là une question dont l'intérêt est peut être grand pour les mathématiciens qui croient à l'intérêt de l'étude des fonctions données arbitrairement, mais dont je n'aperçois en ce moment aucune application pratique possible (2).

M. Lebesgue signale un défaut d'homogénéité dans mon Mémoire de 1912; ce défaut est réel, mais je voudrais en préciser, à mon sens, la nature : tandis que le début du Mémoire (jusqu'au milieu de la seconde Partie) est rédigé comme un Ouvrage didactique, la fin a plutôt le caractère de Notes préliminaires destinées à être développées ultérieurement. J'ai eu tort de ne pas séparer ces deux Parties en deux Mémoires distincts; l'une et l'autre y eussent gagné.

II. — Sur les définitions constructives.

Depuis tantôt vingt-cinq ans, mes idées sur les définitions construc-

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, 1913 (*loc. cit.*).

(2) Dans le cas de certains ensembles de mesure nulle à définition asymptotique, le choix des points fondamentaux est arbitraire dans de très larges conditions; c'est là un

tives et les questions connexes ont subi une évolution que je n'ai pas dissimulée : j'ai cru devoir, au contraire, y attirer l'attention dans la mesure où il m'a semblé qu'elle pouvait présenter quelque intérêt scientifique [1]. Mais, depuis une dizaine d'années, ma doctrine est restée stable et je croyais l'avoir exposée d'une manière claire; les interrogations que pose M. Lebesgue me prouvent que j'y suis insuffisamment parvenu; je vais donc essayer d'être plus clair; la principale difficulté que j'y rencontre est que certains points me paraissent tellement évidents que je me fais scrupule d'y insister; malheureusement l'évidence est parfois subjective.

C'est un fait d'expérience que l'infini énumérable est le seul infini sur lequel tous les mathématiciens sont pratiquement toujours d'accord (j'entends lorsqu'ils font des mathématiques). Certaines suites énumérables particulières peuvent être *données* soit avec une précision absolue (suite des carrés des nombres entiers, suite des nombres premiers), soit avec une approximation indéfinie (a_n peut être calculé à ε près, quels que soient n et ε). On peut, d'autre part, considérer des *classes* de suites énumérables, telles que l'ensemble des fractions continues, ou l'ensemble des séries de Taylor de rayon de convergence donné, et faire sur ces classes des raisonnements mathématiques. Ces raisonnements sont, ou bien des raisonnements généraux, tenant lieu de raisonnements particuliers sur chaque individu de la classe qui pourra être ultérieurement défini; l'exemple le plus simple en est une formule telle que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, ou bien des raisonnements de probabilités, tels que ceux dont j'ai donné des exemples dans mon Mémoire : *Sur les Probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques;* mais je ne vois pas comment on pourrait prétendre raisonner sur un individu déterminé, mais non *défini;* il y a là une contradiction dans les termes sur laquelle j'ai plusieurs fois insisté; j'avais cru jusqu'ici que M. Hadamard était le seul géomètre français qui ne fût pas de mon avis sur ce point; je m'aperçois que les idées de M. Lebesgue ont subi une évolution en

point que j'étudie dans un Mémoire sur les ensembles de mesure nulle qui est en cours d'impression dans le *Bulletin de la Société mathématique*.

[1] *Voir* notamment ma *Notice* de 1912, p. 14, et la *Préface* de la deuxième édition de mes *Leçons sur la théorie des fonctions* (1914).

sens contraire de la mienne et que, tandis que, en 1905 [1], il était en gros d'accord avec moi contre M. Hadamard, il n'est plus d'accord avec moi aujourd'hui; mais je n'oserais pas affirmer qu'il est d'accord avec M. Hadamard.

Si j'ai mentionné cette divergence de points de vue, bien qu'elle soit d'un intérêt surtout théorique (car, en définitive, ni M. Lebesgue, ni M. Hadamard, ni M. Zermelo, n'ont jamais considéré *un* être mathématique dont la définition complète eût exigé un nombre infini de mots), c'est qu'elle ne me paraît pas être sans rapport avec l'attitude pratique que prennent les mathématiciens dans l'orientation de leurs recherches.

Les uns s'intéressent surtout aux questions générales, d'autres aux problèmes particuliers; certains, enfin, voient dans les méthodes générales, non une fin en soi, mais un moyen pour résoudre quelques questions particulières. Pour nous borner à la théorie des fonctions, l'étude des fonctions particulières et celle des théories générales ne doivent être négligées ni l'une ni l'autre; mais on peut cultiver les théories générales pour elles-mêmes ou en vue d'applications particulières. Il est évident que celui même qui cultive les théories générales en elles-mêmes ne peut espérer les appliquer à une fonction qui ne sera jamais construite; en ce sens, M. Lebesgue a théoriquement raison quand il dit que tous utilisent plus ou moins la méthode constructive; mais la différence pratique entre les uns et les autres me paraît néanmoins très grande. Ceux que j'appellerais volontiers les adeptes de la méthode constructive s'attachent spécialement à l'étude des fonctions construites par certaines méthodes qu'ils regardent comme simples et naturelles; c'est à ces fonctions et à ces procédés de construction qu'ils adaptent leurs démonstrations. Si, par la suite, on se trouve amené à considérer des procédés de construction nouveaux, ils seront amenés à compléter ou même à modifier leurs théories; c'est là, pour eux, un inconvénient réel et inévitable, auquel échappent les géomètres de l'école dans laquelle paraît se ranger M. Lebesgue. Par contre, les démonstrations et les méthodes à objectif plus limité sont

---

[1] *Voir* les *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1905).

généralement plus simples et mieux adaptées à leur objet, plus aisément utilisables dans les applications; il arrive, d'autre part, le plus souvent que, lorsqu'on veut en arriver effectivement à l'application numérique, les méthodes en apparence plus générales de l'école non constructive exigent un effort d'adaptation équivalent à celui qui fut nécessaire pour la méthode constructive.

Enfin, si la méthode constructive a été judicieusement appliquée, c'est-à-dire si les procédés de construction considérés comme simples et naturels ont été bien choisis, il arrivera souvent que, dans la pratique, les résultats obtenus auront une généralité aussi grande qu'il est souhaitable, au moins pendant de nombreuses années. Comme exemples de choix qui me paraissent avoir été heureux, je me permettrai de citer les résultats que j'ai obtenus sur les fonctions entières à croissance régulière et sur la sommation des séries divergentes par la méthode exponentielle. Dans l'un et dans l'autre cas, la catégorie d'êtres analytiques auxquels s'appliquent ces résultats est infiniment restreinte, si l'on se place au point de vue abstrait. En fait, les seules fonctions entières nouvelles découvertes depuis vingt ans, à savoir les fonctions entières définies par les équations différentielles de M. Painlevé, sont à croissance régulière, et la méthode de sommation exponentielle a vu le champ de ses applications s'accroître beaucoup en ces dernières années; tout récemment encore, M. Nörlund est arrivé, par des formules qui en dérivent, à des résultats de grande importance dans la théorie des équations aux différences finies.

Une théorie de la mesure et de l'intégration qui s'appliquerait aux fonctions que M. Baire appelle « de classe finie » et aux ensembles correspondants serait, dans la pratique, très suffisante pour l'enseignement élémentaire et même pour la plupart des chercheurs. C'est cette théorie que j'ai voulu édifier dans mon Mémoire de 1912; j'y traite des cas plus généraux, mais j'indique (p. 178) que les démonstrations sont très notablement simplifiées lorsqu'on introduit ces restrictions; il m'avait paru inutile, pour éviter des redites, de développer explicitement ces démonstrations simplifiées, elles sont aisées à rétablir. Cette exposition didactique me paraît devoir être, comme je le dis dans la Préface de la deuxième édition de mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, « une introduction à l'étude des belles recherches de M. Lebesgue ». Ceux-là seuls qui n'ont jamais essayé de lire un Mémoire ou un Livre de M. Lebesgue penseront qu'une telle introduction pouvait être superflue. Je ne prétends d'ailleurs pas être arrivé du premier coup à la forme didactique qui deviendra classique et pourra prendre place dans les Cours élémentaires de calcul différentiel et intégral; je crois du moins que mon Mémoire contribuera utilement à la simplification sans laquelle une théorie neuve ne devient pas classique.

Il ne m'est pas possible de *prouver* que mon exposition est plus simple et plus élémentaire que celle qui se trouve dans les publications antérieures de M. Lebesgue; je ne puis que m'en rapporter au jugement de ceux qui liront l'une et l'autre; je crois que la plupart d'entre eux seront sensibles aux simplifications qui résultent de l'emploi des domaines que j'ai appelés *élémentaires* (rectangles dans le cas de deux dimensions) et *simples* (nombre limité de domaines élémentaires) et aussi du fait que, en n'opérant que sur des polynomes, on n'a à considérer que des domaines *algébriques* pour lesquels de nombreuses complications *a priori* possibles se trouvent exclues.

M. Lebesgue reproche à ma définition de ne rien nous apprendre sur les relations entre l'intégrale et la fonction intégrée; cela signifie, si je ne me trompe, que je n'ai pas traité le problème général de la recherche des fonctions primitives; je m'explique sur ce point à la page 198 de mon Mémoire, où je renvoie aux travaux de M. Lebesgue et à ceux de M. Denjoy. Comme je l'indique (p. 199), la propriété fondamentale de l'intégrale est, à mes yeux, de donner la *valeur moyenne* d'une fonction dans un domaine ou sur une ligne; cette interprétation d'une intégrale comme une valeur moyenne fut celle des fondateurs du calcul intégral; elle est à la base des plus importants travaux de Cauchy; depuis, les divers théorèmes de la moyenne et leurs généralisations n'ont pas cessé d'être parmi les principales applications du calcul intégral. En particulier, c'est comme une valeur moyenne que se présente en général l'intégrale définie dans les applications à la Mécanique et à la Physique mathématique. Sans méconnaître l'importance du point de vue qui définit l'intégration comme l'opération inverse de la dérivation, et sans mésestimer les profondes recherches par lesquelles M. Lebesgue et M. Denjoy sont arrivés à résoudre dans tous les cas le problème inverse de la dérivation, je continue à penser que les propriétés les plus importantes de l'intégrale définie sont celles qui se rattachent à la notion élémentaire de moyenne arithmétique; c'est à ces propriétés que conduit directement le mode d'exposition que j'ai adopté. Il n'y a aucune difficulté, dans les cas simples, à rattacher l'intégrale ainsi définie aux fonctions primitives; si l'on veut arriver à traiter dans tous ses détails et toutes ses complications le problème général de la recherche des fonctions primitives, il est vraisemblable qu'on ne pourra pas échapper à des difficultés équivalentes à celles qu'ont surmontées M. Lebesgue et M. Denjoy.

M. Lebesgue reproche enfin à mon mode d'exposition de ne pas s'appliquer aux ensembles qui sont mesurables sans être bien définis; il me reproche d'avoir partagé son erreur en ce qui concerne la possibilité de définir des ensembles qui ne soient pas mesurables B, d'après sa terminologie. Il déclare (page 198 de son Mémoire) qu'il a fait à ce sujet un raisonnement « grossièrement erroné » ; cela prouve que tout le monde peut se tromper et j'aurais mauvaise grâce à ne pas reconnaître également mon erreur; je n'avais pas prévu les résultats obtenus en 1917 par MM. Souslin et Lusin; si je les avais prévus, j'aurais rédigé d'une manière légèrement différente quelques phrases de mon Mémoire. Mais, contrairement à ce que paraît penser M. Lebesgue, je n'aurais pas cessé de croire qu'il y avait un intérêt particulier à traiter à part les ensembles mesurables B, du moment qu'on peut les traiter d'une manière plus simple, car presque tous les ensembles que l'on rencontrera rentrent dans cette catégorie. C'est ainsi que la découverte de fonctions continues dépourvues de dérivées n'empêche pas l'étude des fonctions continues pourvues de dérivées de tenir une grande place dans les cours d'analyse. De même, en démontrant l'existence de fonctions monogènes non analytiques, je n'ai jamais pensé que la théorie des fonctions monogènes analytiques cesserait de devoir être enseignée et étudiée.

C'est ainsi qu'il faut, à mon avis, comprendre l'emploi de la méthode constructive. Pour reprendre comme exemple ma théorie de l'intégration des fonctions non bornées, je l'ai construite, comme je l'ai indiqué, ayant en vue certaines catégories de fonctions bien déterminées, dont j'avais besoin pour un but spécial; je crois que son champ d'application est notablement plus étendu; mais je ne pense pas qu'elle perdrait nécessairement tout intérêt si l'on arrivait à construire une catégorie spéciale de fonctions auxquelles elle ne s'appliquerait pas. S'il était nécessaire d'intégrer ces fonctions, on chercherait à bâtir pour leur intégrale une définition, en partant du procédé même par lequel elles auraient été construites. De même, si l'on découvre des fonctions entières ayant un mode de croissance différent de celui que j'ai appelé régulier, il sera vraisemblablement possible de construire pour elles une théorie analogue à celle que j'ai établie pour les fonctions à croissance régulière.

On peut juger que mon point de vue est d'un empirisme un peu méprisable. Il serait certainement plus noble de traiter d'un seul coup tous les problèmes et toutes les questions. Malheureusement, même lorsqu'on peut énoncer des résultats généraux, les difficultés particulières se présentent dès qu'on veut effectivement en arriver au détail des applications. Cela tient, au fond, à ce que, dès qu'on veut approfondir une question analytique quelconque, on se trouve très rapidement arrêté par la considération du transfini. Cette difficulté se présente dans la notion en apparence la plus élémentaire, dès qu'on quitte le domaine de l'algèbre, la notion du nombre irrationnel quelconque.

J'ai déjà indiqué en plusieurs occasions comment l'introduction d'un seul nombre irrationnel pouvait renfermer en germe les difficultés analytiques les plus compliquées; de tels résultats ont été parfois interprétés comme tendant à prouver qu'on ne peut pas écarter ces difficultés [1]; ils devraient plutôt mettre en garde contre cette idée trop répandue, qu'on sait ce que c'est qu'un nombre irrationnel *quelconque*. En réalité, nous ne connaissons que ceux des nombres irrationnels que nous savons *construire* par des procédés déterminés et, dans toute recherche où interviendra la nature arithmétique de ces nombres, il nous faudra limiter les procédés de construction que nous

---

[1] J'ai moi-même adopté autrefois cette interprétation, notamment dans un passage de ma Notice de 1901 qui a été, par inadvertance, reproduit sans modification dans ma Notice de 1912 (p. 67 et 68); si j'avais récrit ce passage à cette époque, au lieu de me borner à envoyer à l'imprimerie le texte de 1901, j'aurais modifié la rédaction dans le sens que j'indique ici.

aurons le droit d'utiliser, sous peine d'ouvrir la porte à des difficultés transfinies. Il en est de même pour les fonctions entières croissantes, pour les séries de Taylor, pour les séries trigonométriques, pour les fonctions orthogonales, etc. La complication apparente qu'il y a à suivre pas à pas les méthodes constructives et à leur adapter les théories et les procédés de calcul est en réalité une simplification lorsqu'on en vient aux applications. Je ne conteste pas, bien entendu, l'utilité des théories générales et des synthèses hardies; elles sont souvent très fécondes, assouplissent toujours l'esprit et le guident dans les applications de la méthode constructive; mais, à mes yeux, elles sont un moyen et non une fin en soi. J'ai exposé ce point de vue, il y a plus de vingt ans, à propos de la théorie des ensembles, dans la Préface de mes *Leçons sur la théorie des fonctions*; je n'ai pas varié sur ce point.

J'ai indiqué dans ma Notice de 1912 (p. 15) quel était le rôle essentiel que me paraissait devoir jouer, en théorie des fonctions, « l'étude systématique des procédés de construction à partir des éléments » ; c'est, en effet, à la construction des ensembles et des fonctions que j'applique l'expression de méthode constructive et non pas à la définition de la mesure ou de l'intégrale; je suis d'accord avec M. Lebesgue sur les avantages de la définition *descriptive* de la mesure que j'ai donnée en 1898; seulement, il me paraît désirable d'appliquer méthodiquement, comme je l'ai indiqué à cette date, et d'étendre, de proche en proche, cette définition à des ensembles construits successivement d'une manière de plus en plus compliquée à partir des ensembles élémentaires.

III. — Les questions de priorité.

J'examinerai successivement les réclamations de priorité de M. Lebesgue relatives à la théorie de la mesure et à la théorie de l'intégrale définie [1].

---

(1) M. Lebesgue dit, en un passage de son Mémoire, qu'il est *essentiel* d'observer que je dis théorie de l'intégrale au lieu de définition de l'intégrale. J'ai publié en 1910 une Note ayant pour titre : *La définition de l'intégrale définie*. Quelqu'un, qui est peut-être bien M. Lebesgue, me fit observer ce qu'il y avait d'apparemment bizarre en un tel titre :

Pour la mesure, M. Lebesgue n'a jamais contesté l'antériorité de mes travaux ni leur influence sur les siens; de mon côté, je n'ai jamais contesté l'importance de son apport; dans ma Notice de 1912 (p. 15), j'écrivais : « depuis, grâce aux travaux de nombreux géomètres français et étrangers, au premier rang desquels on doit citer M. Lebesgue, les applications de cette notion de mesure sont devenues très nombreuses ».

Il y a cependant deux points sur lesquels il me paraît utile d'apporter des précisions.

Voici le premier : M. Lebesgue paraît considérer comme entièrement négligeables les travaux que j'ai publiés sur la mesure des ensembles de 1901 à 1913 [1]. Sinon, il ne s'étonnerait pas que la théorie de la mesure tienne plus de place dans ma Notice de 1912 que dans celle de 1901. Sans doute, aucun de ces travaux ne peut être complètement indépendant de ceux de M. Lebesgue, pas plus qu'aucun travail de M. Lebesgue sur ces matières ne peut être regardé comme complètement indépendant des miens; il en est toujours ainsi lorsque deux géomètres travaillent un même sujet pendant une même période,

---

définir une intégrale qui était déjà définie ! Ce reproche verbal me fut sensible et j'évitai le plus possible depuis d'y donner lieu : mais je suis, paraît-il, tombé de Charybde en Scylla.

(1) Voici la liste de ces travaux, pour le cas où elle intéresserait quelques lecteurs :

Un théorème sur les ensembles mesurables (*Comptes rendus*, t. CXXXVII); *Sur une propriété des ensembles fermés* (*Ibid.*, t. CXL); *Sur la définition de l'intégrale définie* et *Sur une condition générale d'intégrabilité* (*Ibid.*, t. CL); *La structure des ensembles de mesure nulle* (*Ibid.*, t. CLII); *La classification des ensembles de mesure nulle* (*Ibid.*, t. CLIV).

Contribution à l'analyse arithmétique du continu (*Journal de Mathématiques*, 1903); *Le calcul des intégrales définies* (*Ibid.*, 1912).

Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. 27).

Sur les principes de la théorie des ensembles (*Comptes rendus du Congrès de Rome*, 1908).

Remarques sur les ensembles de droites et de plans (*Bulletin de la Société mathématique*, 1903); *Remarques sur certaines questions de probabilité* (*Ibid.*, 1905); *Lettre sur les principes de la théorie des ensembles* (*Ibid.*, 1905); *Les ensembles de mesure nulle* (*Ibid.*, 1913).

Leçons sur les fonctions de variable réelle (Gauthier-Villars, 1905).

qu'ils ont de fréquentes conversations, se communiquent souvent leurs résultats ou les épreuves de leurs publications. Il est très difficile, après une conversation, surtout si elle est ancienne, de délimiter exactement l'apport de pensée de chacun. Cela est d'ailleurs inutile et vain. Aussi M. Lebesgue serait-il en droit de s'étonner si je revendiquais une part dans tous ses travaux, sous prétexte de cette interdépendance générale et vague; je puis, de mon côté, lui demander de ne pas revendiquer une part dans les miens. (Néanmoins, puisque M. Lebesgue met en cause mon Mémoire de 1912, je dois observer que la lecture de ma Note des *Comptes rendus* du 7 décembre 1903 et de celle de M. Lebesgue du 28 décembre 1903 précise ma part dans des énoncés qui jouent un rôle essentiel dans ce Mémoire.)

Voici maintenant le second point : M. Lebesgue paraît croire que l'une des raisons de l'importance que j'attache aux ensembles qu'il appelle mesurables B est que ce sont ceux que mes méthodes permettent de mesurer. J'ai indiqué quelles sont les raisons pour lesquelles les ensembles mesurables B me paraissent devoir être étudiés d'abord; dans l'enseignement élémentaire, je serais même d'avis qu'on se bornât à ceux de ces ensembles qui correspondent aux fonctions de classe finie de M. Baire; mais ceci n'a rien à voir avec les questions de priorité. Dans sa Thèse (p. 11), M. Lebesgue écrit : « Les ensembles que nous appelons mesurables sont donc ceux que les procédés de M. Borel permettent de mesurer à condition de tenir compte des remarques énoncées à la fin de la page 48 » (il s'agit de la page 48 des *Leçons sur la théorie des fonctions*, par Émile Borel). La phrase précédente ne se rapporte, d'après le contexte, qu'aux ensembles linéaires; le passage d'une à plusieurs dimensions est une de ces généralisations dont l'idée est banale, mais dont la réalisation est, suivant les cas, plus ou moins difficile ([1]). Voici ce qu'écrit à ce sujet M. Lebesgue dans sa Thèse : « Les considérations précédentes s'étendent sans peine aux ensembles dont les éléments sont les points d'un espace à plusieurs

---

([1]) Dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, je n'ai pas énoncé explicitement ni démontré l'extension au plan du théorème fondamental sur lequel est basée la théorie de la mesure; mais je l'ai énoncé implicitement et utilisé (p. 70); j'indique là que, si je ne développe pas l'étude des ensembles à deux dimensions, c'est parce que je n'en ai pas besoin pour les applications que j'ai en vue.

dimensions; nous nous bornerons au cas du plan. » Après avoir défini la mesure d'un carré et celle d'un triangle, il ajoute : « Il faut démontrer que *la mesure d'un triangle, somme de triangles n'empiétant pas les uns sur les autres, est la somme des mesures de ces triangles*. Les raisonnements exposés par M. Hadamard dans la Note D de sa *Géométrie élémentaire* prouvent qu'il en est bien ainsi si les triangles composants sont en nombre fini. Le cas où ils sont en nombre infini se traite par un raisonnement semblable à celui qui nous a été utile dans le cas des ensembles de points sur une droite (Borel, *Théorie des fonctions*, p. 42). » On voit que, tandis que M. Lebesgue ne jugeait pas superflu d'entrer dans des détails assez minutieux pour étendre au plan la propriété élémentaire d'après laquelle la mesure de la somme d'un nombre fini d'intervalles est égale à la somme des mesures, aucune explication ne lui paraît nécessaire pour étendre à deux dimensions le théorème correspondant où il s'agit d'une infinité dénombrable d'intervalles; on sait que c'est ce théorème qui est la base de ma théorie de la mesure.

J'aurais donc pu écrire dans ma Notice, en adoptant les termes mêmes de M. Lebesgue : « Les ensembles que M. Lebesgue appelle *mesurables* et qui sont les plus généraux que personne ait pu jusqu'ici mesurer sont ceux que mes procédés permettent de mesurer, en tenant compte de mes remarques de la page 48. » J'aurais d'ailleurs dû ajouter que M. Lebesgue a le premier mis en évidence toute l'étendue et toute la portée de ma définition; de même, certains géomètres ont montré que le champ d'application de ma théorie des séries divergentes était plus vaste que je ne l'avais soupçonné au début (¹). Il n'est pas de joie plus grande pour un mathématicien que de voir ses théories vivre et se développer en dehors de lui ; vis-à-vis de ceux qui lui auront procuré cette joie, il ne formulera jamais spontanément aucune réclamation de priorité.

Aussi ai-je été très surpris de constater que quelques lignes de ma Notice de 1912 avaient paru à M. Lebesgue être une réclamation de priorité tendant à m'attribuer une part dans sa définition de l'intégrale.

Il prend la peine de vérifier que je n'ai jamais parlé de l'intégrale

---

(¹) *Voir* notamment les travaux de MM. Hardy, Watson, Nörlund.

définie avant sa première Note; s'il m'avait communiqué ses doutes, j'aurais volontiers déclaré que, non seulement je n'avais rien écrit, mais que je n'avais jamais pensé à appliquer à l'intégration mes méthodes et définitions sur la mesure. Une telle déclaration est d'ailleurs superflue pour quiconque connaît la question; car si j'y avais pensé, c'est que j'aurais rapproché l'évaluation d'une intégrale de celle d'une aire plane; j'aurais donc donné une définition de l'intégrale équivalente à celle de M. Lebesgue et c'est mon nom qui y serait attaché, et non le sien. En fait, la publication de la première Note de M. Lebesgue sur l'intégrale m'a causé à la fois une très grande surprise et une très grande admiration que je n'ai jamais dissimulée. Je renvoie dans ma Notice à l'article que j'ai publié en 1909 dans la *Revue générale des Sciences* où je dis notamment :

« La définition de la mesure a été donnée par M. G. Cantor pour les ensembles fermés; son extension pure et simple aux ensembles non fermés conduisait à des résultats non satisfaisants; on a universellement adopté aujourd'hui la définition à laquelle j'ai été conduit par l'étude de problèmes particuliers et que M. Henri Lebesgue a systématisée.

» A cette théorie de la mesure, on peut rattacher la théorie nouvelle de l'intégration due à M. Henri Lebesgue. Nous y reviendrons tout à l'heure, mais je tiens à me hâter de dire que ce n'est point là une de ces généralisations faciles, conséquence nécessaire des travaux antérieurs, et qui doivent nécessairement être trouvées par quelqu'un. Cette théorie de l'intégration est une découverte capitale, dont l'importance dépasse de beaucoup la théorie de la mesure des ensembles; c'est un instrument analytique nouveau, mis à la disposition des géomètres par M. Lebesgue; nous indiquerons plus loin quelques-uns des progrès qui ont pu être réalisés jusqu'ici grâce à cet instrument; il y a tout lieu de croire que leur nombre et leur importance ne cesseront de croître, mais on peut dès à présent considérer cette découverte de M. Lebesgue comme le plus bel exemple de progrès importants réalisés dans la Théorie des fonctions. ..

» J'ai déjà fait allusion à la découverte capitale de M. Lebesgue concernant l'intégration; je voudrais essayer d'en indiquer le principe et de faire pressentir l'influence considérable qu'elle exercera certainement sur le développement de nombreuses théories mathématiques. »

Il était, en effet, bien moins naturel de penser à l'intégrale à propos de la mesure que de penser aux ensembles à plusieurs dimensions à propos d'ensembles à une dimension, D'ailleurs, dans ma Notice, dans le passage même que cite M. Lebesgue, j'oppose *la théorie de l'intégrale de M. Lebesgue à ma définition de la mesure ;* je ne me serais pas exprimé ainsi si j'avais revendiqué une part directe quelconque dans cette théorie. Par contre, j'écris : « Il n'est cependant pas inutile de faire observer que, si la théorie de l'intégrale de M. Lebesgue était loin d'être une conséquence évidente de ma théorie de la mesure, du moins entre ces deux théories, il n'y a pas de discontinuité logique, tandis qu'il y a un véritable fossé entre ma définition de la mesure et les définitions de la mesure et de l'intégrale qui étaient classiques et universellement admises, avec l'autorité des plus grands noms. »

J'avais déjà indiqué la même idée, sous une forme un peu différente, dans un Mémoire publié en 1903 [1]; après avoir exposé la méthode à laquelle j'ai donné le nom de méthode d'exclusion et l'avoir opposée à la méthode de division, j'ajoutais : « Il y a donc ici une différence essentielle entre les deux méthodes; j'ai indiqué, pour la première fois, cette différence à propos de la définition de la mesure des ensembles linéaires de points. M. Lebesgue a ensuite appliqué des principes analogues à la généralisation de la notion d'intégrale définie et est arrivé à des résultats fort remarquables. »

Ce parallélisme, entre *mesure* au sens de Cantor-Jordan et *intégrale* de Riemann d'une part et *mesure* au sens de Borel-Lebesgue et *intégrale* de Lebesgue d'autre part, a frappé tous ceux qui se sont occupés de ces questions. Dans l'Ouvrage didactique le plus considérable qui ait été consacré depuis quinze ans aux fonctions de variable réelle [2], M. Hobson s'exprime ainsi :

---

[1] *Contribution à l'analyse arithmétique du continu* (*Journal de Mathématiques*, 1903).

[2] *Theory of functions of a real variable* (*Cambridge University Press*, 1907).

« A definition of integration has been developed by Lebesgue which is applicable to a more extensive class of functions than those which are integrale in accordance with Riemann's definition. The theory depends essentially upon the employment of the conception of the measure of a set of points, in the sense in which the term is employed by Borel and Lebesgue (p. 390). »

« Sets of points which are not measurable according to Jordan's system are in general measurable in accordance with the Borel-Lebesgue definition ; accordingly functions which are not integrale according to Riemann's definition may be so according to Lebesgue's definition (p. 392). »

M. Lebesgue déclare qu'on ne peut pas lui « opposer » les analogies entre la mesure et l'intégrale, puisque c'est précisément la découverte de ces analogies qui est son principal mérite. J'ai insisté moi-même sur le fait, qu'il y avait là une découverte profonde et non une généralisation aisée et facile; ce fait ne supprime pas la réalité des analogies ; pour que la découverte de ces analogies fût possible, il fallait tout d'abord que l'un des éléments, c'est-à-dire ma théorie de la mesure, existât au préalable ; je n'ai jamais dit autre chose : si je n'avais pas publié en 1898 mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, M. Lebesgue n'aurait probablement pas publié sa définition de l'intégrale. Je tiens à ajouter que la forme très personnelle et, *à certains égards*, inutilement compliquée, que M. Lebesgue a donnée à la théorie de la mesure et de l'intégration, l'a particulièrement bien préparé à certaines applications importantes ; c'est ce que j'avais voulu exprimer en écrivant que ces applications lui sont « entièrement personnelles ». J'entendais par là qu'elles dérivent plus particulièrement de la partie de la pensée de M. Lebesgue qui ne dérive pas de la mienne, de sorte que je renonçais même à revendiquer une paternité indirecte sur ces applications.

Après avoir mis au point les prétendues réclamations de priorité que m'attribue M. Lebesgue, je dois dire quelques mots de divers passages de son Mémoire qui (bien que n'étant pas compris dans le paragraphe qu'il intitule *questions de priorité*) me paraissent être des réclamations de priorité de sa part relativement à mon Mémoire de 1912. En même temps qu'il conteste l'intérêt de la forme que j'ai donnée dans ce

Mémoire à la théorie de la mesure et de l'intégration (j'ai discuté ce point dans le paragraphe précédent), M. Lebesgue revendique la priorité de tous les détails importants de ce mode d'exposition. Il y a quelque contradiction, au moins apparente, dans cette double contestation. Le seul fait que M. Lebesgue ne trouve pas d'intérêt à ce qu'il y a de plus intéressant, à mes yeux, dans mon exposition, suffit pour montrer que cette exposition n'est pas de lui. Aucune Note ou aucun Mémoire récent sur l'intégration ou sur la mesure n'a l'originalité des pages que j'ai publiées en 1898 sur la mesure, ni des pages que M. Lebesgue a publiées en 1901 sur l'intégration. Mon Mémoire de 1912 ne fait pas exception à cette remarque générale; mais, sous cette réserve, les réclamations de M. Lebesgue ne me semblent pas fondées: l'idée qui consiste à utiliser, pour définir une limite, les différences $u_n - u_m$ au lieu de la différence $u - u_n$ n'est pas plus sienne que mienne; mais l'application que j'en fais à l'intégration des suites convergentes de polynomes m'appartient entièrement; les simplifications qui en résultent sont très considérables. J'en dirai autant de l'introduction simultanée de l'approximation à *deux* ε près. M. Lebesgue déclare que j'ai introduit là un langage pittoresque; il n'a pas fait autre chose lorsqu'il a introduit l'expression *presque partout*, qui lui a permis de donner une forme plus maniable à de nombreux énoncés ([1]). En résumé, les fonctions bornées que je considère diffèrent de moins de ε d'un polynome, sauf peut-être dans une étendue ε; il en résulte que la valeur moyenne de la fonction diffère de moins de $2\varepsilon A$ de la valeur moyenne du polynome : la définition de l'intégrale, son procédé de calcul et sa propriété fondamentale sont ainsi résumés en deux lignes.

IV. — Remarques finales.

Il m'a été particulièrement pénible de me trouver contraint de dis-

([1]) Dans son dernier Mémoire, M. Lebesgue adopte une expression pittoresque que j'ai introduite dans mon article de la *Revue générale des Sciences* en disant que son intégrale est faite « sur mesure ». En fait, cette expression me paraît s'appliquer mieux à l'exposition que j'ai donnée qu'à la sienne.

cuter avec M. Lebesgue des questions de priorité; depuis vingt ans, en effet, j'ai été plusieurs fois directement ou indirectement au courant de discussions de priorité entre M. Lebesgue et divers mathématiciens et, si j'ai souvent pensé que les contradicteurs de M. Lebesgue avaient raison, je n'ai jamais cru que M. Lebesgue eût tort. Cette attitude, qui m'a souvent fait taxer d'injustice par ses contradicteurs, est basée sur l'opinion que j'ai de sa bonne foi et de la nature de son esprit. Je n'ai aucune raison pour modifier cette opinion du fait que je me trouve personnellement mis en cause : *patere legem quam fecisti*. Je suis donc amené, après avoir expliqué pourquoi je croyais avoir raison, à indiquer pourquoi je suis convaincu que M. Lebesgue n'a pas tort dans son jugement sur ses propres travaux ([1]). Il faut, pour cela, que j'essaye d'expliquer ce qui, à mes yeux, caractérise le talent de M. Lebesgue ; je ne chercherai pas à le délimiter en d'étroites formules, ni à préciser en quelques phrases son apport considérable ; même, si je m'en croyais capable, je ne le ferais pas, car la lecture des passages de son Mémoire, où il donne quelques détails sur ses travaux et les stades de sa pensée, prouvent à tous ceux qui pouvaient l'ignorer que, s'il écrivait une Notice détaillée sur ses travaux, il rendrait le plus grand service à la Science. Mais je crois pouvoir dire, sans crainte d'être contredit, que le talent de M. Lebesgue consiste surtout en une grande faculté d'assimilation, une rare originalité de pensée et une puissance créatrice exceptionnelle; tous ses travaux sont originaux et lui appartiennent en propre, lui sont *entièrement personnels*, parce qu'il ne prend jamais telle quelle une idée d'autrui, pour la développer et s'en servir; si une idée étrangère lui est utile, c'est à la manière dont un arbre puissant crée des feuilles et des fruits avec tous les aliments qu'il trouve dans le sol.

Mon maître Jules Tannery citait volontiers une phrase de Liouville; après avoir comparé les démonstrations longues aux démonstrations courtes, il concluait : « En somme, les démonstrations longues ont un

---

([1]) Bien entendu, je conserve mon opinion, contraire à la sienne, sur la portée de ma définition de l'intégrale des fonctions non bornées, sur les définitions constructives et sur la portée exacte de ce qu'il appelle ma « réclamation de priorité » au sujet de l'intégrale définie.

grand avantage, c'est d'être longues, et les démonstrations courtes ont un grand avantage, c'est d'être courtes ». Et Liouville rappelait, paraît-il, quand il était de bonne humeur, la boutade qu'on attribue à Lagrange : « Les mathématiques sont comme le cochon, tout en est bon ». Les démonstrations de M. Lebesgue ont un très grand avantage, c'est qu'elles sont compliquées ; cette complexité entraîne une richesse extraordinaire, une richesse de pensée telle que c'est à grand peine que M. Lebesgue arrive à faire entrer toutes ses idées dans un Livre ou dans un Mémoire. Il reste beaucoup d'idées qu'il n'exprime pas ; il en est d'autres qui sont indiquées seulement par une allusion ou une incidente. Aussi M. Lebesgue est-il seul à connaître toute la richesse de sa pensée et de son œuvre ; il ne faut donc point s'étonner s'il lui arrive peut-être plus fréquemment qu'à d'autres d'avoir à produire des réclamations de priorité. Elles sont certainement toujours justes à ses yeux, et c'est pourquoi j'ai toujours assuré à ceux qui se plaignaient de lui qu'ils n'étaient pas en droit de lui en vouloir ; je m'adresse à moi-même aujourd'hui cette exhortation, afin d'adoucir la peine que m'ont faite certains passages de son Mémoire.