

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

**Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 1<sup>re</sup> série*, tome 7 (1870), p. 175-180

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1870\\_1\\_7\\_\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7__175_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR  
UNE SÉRIE DE LIGNES

ANALOGUES

AUX LIGNES GÉODÉSIQUES,

PAR M. G. DARBOUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES  
AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

---

Les géomètres regardent comme un des plus beaux théorèmes de Gauss celui qui est relatif à la courbure totale d'un triangle géodésique, et qui a été donné dans les *Recherches générales sur les surfaces courbes*. Le but de cette Note est de montrer que les principes donnés par Gauss ont un très-grand degré de généralité et peuvent s'appliquer à un grand nombre de questions analogues à celle qu'il a traitée le premier.

Considérons une surface définie par la formule

$$(1) \quad ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

où nous supposons, pour plus des implicité, les axes rectangulaires. Le rayon de courbure géodésique  $\rho_g$  d'une courbe quelconque, tracée sur la surface, est défini par une équation de la forme

$$(2) \quad \frac{ds}{\rho_g} = di + M du + N dv,$$

où  $i$  désigne l'angle de la tangente à la ligne avec les lignes  $u = \text{const.}$ ,

et où l'on a

$$(3) \quad \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{AC}{RR'},$$

$R, R'$  désignant les rayons de courbure de la surface.

L'équation différentielle des lignes géodésiques sera donc

$$(4) \quad di + M du + N dv = 0.$$

Cela posé, d'après un théorème bien connu, l'intégrale double

$$\iint \frac{AC du dv}{RR'} = \iint \left( \frac{dM}{dv} - \frac{dN}{du} \right) du dv,$$

étendue à tout un contour fermé, sera égale à l'intégrale

$$\int (M du + N dv),$$

prise dans un sens convenable le long du contour.

Si le contour fermé est formé de lignes géodésiques, on aura toujours, d'après l'équation (4),

$$(5) \quad \int (M du + N dv) = - \int di.$$

Cette formule équivaut, comme on sait, au théorème de Gauss.

La démonstration précédente indique plusieurs modes de généralisation du théorème de Gauss. Considérons d'abord, au lieu des lignes géodésiques, les lignes définies par l'équation différentielle plus générale

$$(6) \quad di + M du + N dv = d\varphi(u, v).$$

On obtiendra pour un contour formé de ces lignes, au lieu de l'équation (5), la suivante :

$$(7) \quad \int (M du + N dv) = - \int di - \int d\varphi(u, v);$$

la seconde intégrale simple, s'étendant à tout un contour fermé, s'annule généralement; ainsi :

*Si l'on considère sur la surface des lignes satisfaisant à une équation différentielle du second ordre*

$$di + M du + N dv = d\varphi(u, v),$$

où  $\varphi$  désigne une fonction arbitraire (nulle dans le cas des lignes géodésiques), la courbure totale d'un triangle formé de trois de ces lignes s'exprime en fonction de la somme des angles de la même manière que dans le cas des lignes géodésiques.

La formule (2) donne, pour le rayon de courbure géodésique de ces lignes, l'expression suivante :

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\varphi(u, v).$$

Donc l'angle de contingence géodésique est la différentielle exacte d'une fonction de point. De cette propriété découlent plusieurs relations géométriques.

L'extension précédente est loin d'être la seule dont soit susceptible le théorème de Gauss.

D'abord, on peut, au lieu de considérer seulement la courbure totale, prendre une intégrale double quelconque  $\iint H du dv$ , qu'on mettra sous la forme  $\iint \left( \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} \right) du dv$ , ce qui est toujours possible et d'une infinité de manières. Alors l'intégrale double, étendue à tous les points d'un contour fermé, pourra être remplacée comme précédemment par l'intégrale simple

$$(8) \quad \int (P du + Q dv).$$

Supposons, en outre, que les courbes qui limitent le contour satisfassent toutes à une même équation de la forme

$$(9) \quad P du + Q dv = d\varphi \left( u, v, \frac{du}{dv}, \frac{d^2 u}{dv^2}, \dots \right);$$

l'intégrale rectiligne (8) s'obtiendra sans difficulté et s'évaluera pour tout polygone formé de nos courbes, en fonction des éléments relatifs aux sommets.

On peut supposer que la fonction  $\varphi$  ne contienne que la dérivée première; mais il faut qu'elle contienne au moins une dérivée : sans cela, les courbes n'étant définies que par une équation du premier ordre, on ne serait pas sûr d'obtenir avec plusieurs d'entre elles un polygone fermé.

L'aire de la surface s'exprimant par une intégrale double, on voit qu'on pourra obtenir des courbes définies, par exemple, par une équation de la forme

$$(10) \quad P du + Q dv = d\varphi\left(u, v, \frac{du}{dv}\right),$$

et telle que l'aire comprise dans un triangle formé de ces courbes soit exactement assignable. Il est vrai qu'on ne saura pas toujours intégrer l'équation (10); mais la même difficulté se présente pour les lignes géodésiques sans nuire à l'intérêt du théorème de Gauss, et, d'ailleurs, la fonction arbitraire  $\varphi$  que nous introduisons pourra être déterminée, on le conçoit, de manière à faciliter l'intégration.

Les mêmes principes s'appliquent aux intégrales triples. Soit, en effet, une intégrale  $\iiint H dx dy dz$ ; on pourra toujours évidemment, et d'une infinité de manières, la mettre sous la forme

$$(11) \quad \iiint \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Il suffira de résoudre l'équation indéterminée

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = H.$$

Il est, du reste, facile de donner la solution générale de cette équation. Soit  $A, B, C$ , une solution particulière. On aura généralement

$$A = A_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$B = B_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$C = C_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

D'après une formule connue, l'intégrale (11), étendue à tout le volume intérieur à une surface fermée, sera égale à l'intégrale double

$$(12) \quad \iint (A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma) d\sigma,$$

étendue à la surface qui limite le volume,  $d\sigma$  désignant l'élément de surface,  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles que fait avec les axes la normale à la surface.

Cela posé, supposons que, les surfaces qui limitent le volume étant définies par une équation

$$\lambda = \varpi(x, y, z),$$

$\lambda$  satisfasse à l'équation différentielle

$$(13) \quad A \frac{d\lambda}{dx} + B \frac{d\lambda}{dy} + C \frac{d\lambda}{dz} = \begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{dx} & \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\psi}{dx} \\ \frac{d\lambda}{dy} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\psi}{dy} \\ \frac{d\lambda}{dz} & \frac{d\varphi}{dz} & \frac{d\psi}{dz} \end{vmatrix} = \Delta,$$

où  $\varphi, \psi$  sont des fonctions quelconques de  $\lambda$  et de ses dérivées partielles par rapport à  $x, y, z$ , prises jusqu'à un ordre quelconque. L'intégrale triple à évaluer sera remplacée par la suivante :

$$(14) \quad \iint^{\Delta} \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},$$

étendue aux surfaces qui limitent le volume et qu'on peut remplacer, d'après un théorème relatif aux déterminants fonctionnels, par

$$\iint d\varphi d\psi.$$

Considérons un polyèdre curviligne, formé des surfaces satisfaisant toutes à la même équation différentielle. Pour chaque face de ce polyèdre, l'intégrale double précédente pourra se remplacer évidemment par l'intégrale rectiligne

$$\int \varphi d\psi - \psi d\varphi,$$

étendue au contour. Donc :

*Étant donnée une intégrale triple, on peut déterminer une classe de surfaces satisfaisant à une même équation aux dérivées partielles, et telles que*

*l'intégrale triple étendue à tout volume limité par ces surfaces s'exprime en fonction d'intégrales simples prises le long des arêtes du polyèdre curviligne formé des surfaces qui limitent le volume.*

Les applications des propositions précédentes sont nombreuses. Je les développerai prochainement.