ÉMILE PICARD

Sur la nature algébrico-logarithmique des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces régulières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 373-379
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__373_0>

SUR LA NATURE ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUE

DES

INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES

RELATIVES

AUX SURFACES ALGÉBRIQUES RÉGULIÈRES,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. J'ai démontré autrefois la proposition suivante [1] relative aux intégrales de différentielles totales de troisième espèce correspondant à une fonction algébrique quelconque de deux variables : *Sur une surface algébrique, on peut tracer* ρ *courbes algébriques irréductibles particulières*

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\rho$$

telles qu'il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce, ayant seulement pour courbes logarithmiques la totalité ou une partie de ces courbes C, *mais telles qu'il existe une intégrale ayant seulement pour courbes logarithmiques une* $(\rho+1)^{\text{ième}}$ *courbe algébrique irréductible quelconque* Γ *de la surface, et la totalité ou une partie des courbes* C.

Il est nécessaire de rappeler rapidement les considérations dont j'ai fait usage et pour le détail desquelles je renvoie au Livre cité. On envisage $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$\text{(1)} \qquad I_i = \int \frac{Q_i(x, y, z)\,dx}{f'_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

---

[1] *Annales de l'École Normale*, 1901. On peut aussi consulter ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. II, Chap. IX, p. 231.

relatives à la courbe entre x et z :

$$f(x, \overline{y}, z) = 0 \tag{2}$$

$[f(x, y, z) = 0$ étant l'équation de la surface de degré $m]$, les Q_i étant des polynomes en x, y et z.

Une courbe algébrique C_h étant donnée sur la surface, on considère ensuite une intégrale de troisième espèce relative à la courbe (2), ayant pour points logarithmiques les points de C_h, correspondant à la valeur $\overline{y}$, avec la période logarithmique *un*, et en outre *un des points* à l'infini de la courbe (2). Désignons cette intégrale par J_h, et faisons successivement $h = 1, 2, \ldots, \lambda$, en posant $\lambda = \rho + 1$. On peut déterminer les fonctions rationnelles a de y, et les constantes c de manière que les périodes, regardées comme fonctions de y, de l'intégrale relative à la courbe (2)

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_1 J_1 + \ldots + c_\lambda J_\lambda \tag{3}$$

ne dépendent pas de y. La considération du groupe de monodromie d'une certaine équation différentielle linéaire E, qui a joué un rôle essentiel dans toutes mes recherches sur les fonctions algébriques de deux variables, conduit à former le système d'équations du premier degré relatives aux constantes P et c,

$$P_i = m_1^i P_1 + m_2^i P_2 + \ldots + m_{2p}^i P_{2p} + c_1 \mu^i + c_2 \nu^i + \ldots + c_\lambda \pi^i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{4}$$

pour chacune des substitutions fondamentales du groupe de E (les m, ainsi que les $\mu, \nu, \ldots, \pi$, sont des entiers). Si nous prenons pour courbes C_h les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ et Γ, l'ensemble de ces équations admettra une solution avec les constantes c non toutes nulles. On aura certainement $c_\lambda \neq 0$; de plus, les rapports des c sont déterminés, car s'il y avait plus d'une arbitraire, on pourrait former une intégrale avec les *seules* courbes logarithmiques $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$. On peut donc supposer que les c sont des nombres entiers parfaitement déterminés.

Les équations donnant les fonctions *rationnelles* $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ de y sont

$$a_1 \omega_i^1 + a_2 \omega_i^2 + \ldots + a_{2p} \omega_i^{2p} + \Upsilon_i = P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p), \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\Upsilon_i = c_1 \upsilon_i^1 + c_2 \upsilon_i^2 + \ldots + c_\lambda \upsilon_i^\lambda,$$

les ω et les υ étant les périodes des I et des J, la signification des indices étant évidente.

L'expression (3) ainsi déterminée permet de former une intégrale de différentielle totale

$$\int \mathrm{R}\, dx + \mathrm{S}\, dy,$$

où R et S sont rationnelles en x, y et z, ayant les *seules* courbes logarithmiques $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_\lambda$. Elle peut avoir une autre ligne d'infini (non logarithmique), à savoir la courbe à l'infini de la surface.

Nous supposerons dans la suite que les cycles (1, 2), (3, 4), ..., $(2p-1, 2p)$ sont les couples de cycles formant les rétrosections classiques sur la surface de Riemann relative à $f(x, \overline{y}, z) = 0$.

Prenons la somme

$$\omega_1^h(\Upsilon_2 - \mathrm{P}_2) - \omega_2^h(\Upsilon_1 - \mathrm{P}_1) + \omega_3^h(\Upsilon_4 - \mathrm{P}_4) - \omega_4^h(\Upsilon_3 - \mathrm{P}_3) + \ldots$$

qui correspond à une combinaison normale. On voit facilement, à cause des relations (4), que cette expression ne change pas, quand on effectue sur les ω et les υ les substitutions correspondant à une circulation de y; ceci revient d'ailleurs au fait que les a sont des fonctions rationnelles de y.

2. Ces résultats antérieurs sommairement rappelés, supposons maintenant que *la surface donnée soit régulière*, c'est-à-dire qu'elle n'ait pas d'intégrales de différentielles totales *transcendantes* de seconde espèce, ou, ce qui revient au même, que tous ses cycles linéaires se ramènent à zéro, ce qui d'ailleurs est le cas général pour une surface algébrique. Ici les rapports des P et des c du paragraphe précédent sont entièrement déterminés; nous pouvons donc supposer que tous ces nombres sont des entiers. De plus, pour les surfaces régulières, les intégrales de première espèce de la courbe entre x et z représentée par l'équation $f(x, y, z) = 0$, peuvent être prises sous la forme

$$\int \frac{\mathrm{Q}_i(x, y, z)\, dx}{f'_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les Q représentant des polynomes adjoints d'ordre $m-3$ de la surface envisagée.

On va donc supposer que les intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_p$ précédemment envisagées sont de première espèce, les autres $I_{p+1}, \ldots, I_{2p}$ seront de seconde espèce.

Dans ces conditions, les

$$\omega_i^1, \quad \omega_i^2, \quad \ldots, \quad \omega_i^p$$

sont holomorphes pour $y=\infty$, et les développements commencent par un terme en $\frac{1}{y}$.

La combinaison formée plus haut

$$c_1 J_1 + c_2 J_2 + \ldots + c_\lambda J_\lambda \tag{6}$$

qui est une intégrale de troisième espèce relative à la courbe (2), n'a d'autres infinis (et ce sont des infinis logarithmiques simples) que les points de rencontre de $y=\bar{y}$ avec les courbes C. Pour $y=b$ (les b correspondant aux plans tangents parallèles au plan des xz), le genre de la courbe (2) diminue d'une unité; il y a en plus deux infinis logarithmiques nouveaux sur les deux branches de courbe passant par le nouveau point double que présente alors la courbe.

Le point $y=b$ est un point singulier logarithmique pour les υ, comme il l'est pour les ω. Les υ n'ont pas d'autres points singuliers que les b; de plus, on peut supposer que, pour $y=\infty$, l'intégrale (6) se transforme en une intégrale parfaitement déterminée. Soit, en effet, la courbe gauche C mise sous la forme

$$A(x, y)=0, \qquad z=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

P et Q étant de degrés $\mu+1$ et μ. Soient en outre $a(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ et $\varphi(x, y, z)$ les termes de degré le plus élevé dans A, P, Q et f. On peut s'arranger de manière que l'intégrale J relative à C devienne, pour $y=\infty$, une intégrale relative à la courbe

$$\varphi(x', 1, z')=0$$

et ayant comme uniques infinis (logarithmiques) les points correspondant à

$$a(x', 1) = 0, \qquad z' = \frac{p(x', 1)}{q(x', 1)} \qquad \text{(on a posé } x = x'y, \quad z = z'y\text{)},$$

cela pour chacune des courbes C_1, C_2, ..., C_λ. Dans ces conditions, il arrive que les υ sont holomorphes pour $y = \infty$.

3. Nous nous proposons maintenant d'étudier les $2p$ équations (5), en $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$.

Je dis d'abord que $a_{p+1} = \ldots = a_{2p} = 0$.

Multiplions en effet ces équations respectivement par

$$-\omega_2^h, \quad +\omega_1^h, \quad -\omega_4^h, \quad +\omega_3^h, \quad \ldots, \quad -\omega_{2p}^h, \quad +\omega_{2p-1}^h$$

et faisons la somme. En donnant successivement à h les valeurs $1, 2, \ldots, 2p$, nous obtiendrons un système équivalent au premier. Or considérons les p premières de ces équations; elles seront homogènes et linéaires en $a_{p+1}, \ldots, a_{2p}$, car les coefficients des autres a et les termes indépendants des a sont des fonctions uniformes de y, partout holomorphes, et dont le développement, dans le voisinage de $y = \infty$, commence par un terme en $\frac{1}{y}$; tous ces coefficients et tous ces termes sont donc nuls. On tire de là immédiatement :

$$a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_{2p} = 0.$$

Je dis maintenant que les *p premiers a sont des fonctions linéaires et entières de y*. On peut le voir en recourant à l'analyse de ma *Théorie des fonctions algébriques* (t. II, p. 428 et suiv.), analyse développée pour un autre but. La seule différence consiste en ce que, dans les équations (5), on a les termes en υ, mais leur présence ne change rien aux raisonnements.

Il résulte de là que *nous avons formé une intégrale de différentielle totale de troisième espèce avec une seule période (entière)*

$$(7) \qquad \int R\,dx + S\,dy,$$

ayant les courbes logarithmiques (simples) $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$, *c'est-à-dire devenant infinies d'une manière purement logarithmique suivant toutes ces courbes ou quelques-unes d'entre elles* (C_λ *étant certainement l'une d'elles*), *et n'ayant aucune autre courbe d'infini (polaire ou logarithmique).*

On en conclut que l'expression

$$e^{2\pi i \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} R\,dx + S\,dy}$$

est une fonction rationnelle de (x, y, z). Par suite, l'intégrale (7) est de la forme

$$A \log T(x, y, z),$$

T étant rationnelle en (x, y, z) et A une constante.

4. Soit maintenant

$$(8) \qquad I = \int P\,dx + Q\,dy$$

une intégrale de différentielle totale algébrique, absolument quelconque, correspondant à notre surface *régulière* f. Désignons ses courbes logarithmiques (qui peuvent être aussi en même temps des lignes d'infini *non* logarithmiques) par $D_1, D_2, \ldots, D_s$. On peut former avec $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ et D_i une intégrale de la forme

$$(9) \qquad A_i \log T_i(x, y, z),$$

la période logarithmique de (9) pour D_i étant égale à celle de l'intégrale (8). Si l'on fait la différence

$$(10) \qquad I - \Sigma A_i \log T_i(x, y, z),$$

on aura une intégrale de différentielle totale qui ne pourra avoir *d'autres courbes logarithmiques* que les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$, ce qui est impossible. La différence (10) sera donc une intégrale de seconde espèce, c'est-à-dire, puisque la surface est régulière, une fonction rationnelle $H(x, y, z)$. On a donc

$$I = H(x, y, z) + \Sigma A_i \log T_i(x, y, z).$$

Par suite, *pour une surface algébrique* RÉGULIÈRE, *toute intégrale de différentielle totale est une expression algébrico-logarithmique*.

Nous retrouvons donc le théorème énoncé par M. Severi [1], et que l'éminent géomètre italien a établi par des considérations géométriques assez délicates. Il m'a paru intéressant de le déduire de l'analyse même qui m'avait conduit à la notion du nombre ρ, fondamental dans la théorie des courbes algébriques tracées sur une surface algébrique.

---

(1) F. SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (*Mathematische Annalen*, t. LXII, 1906).