ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur certains groupes discontinus correspondant aux formes quadratiques ternaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 363-371

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__363_0>

SUR

CERTAINS GROUPES DISCONTINUS

CORRESPONDANT AUX FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. J'ai donné autrefois ([1]) les premiers exemples de groupes hyperfuchsiens en envisageant les substitutions à coefficients entiers complexes transformant en elle-même une forme quadratique ternaire d'Hermite. Si cette forme est à coefficients réels, et si l'on considère seulement les substitutions à coefficients réels, on a un sous-groupe du groupe hyperfuchsien; ce groupe offre quelques particularités intéressantes que je me propose d'indiquer. Il suffit, pour plus de simplicité, d'envisager seulement la forme à indéterminées conjuguées

$$xx_0 + yy_0 - zz_0 \qquad (x_0, y_0, z_0 \text{ conjuguées de } x, y, z). \tag{1}$$

Nous désignerons d'une manière générale par

$$(x, y, z;\ M_1x + N_1y + P_1z,\ M_2x + N_2y + P_2z,\ M_3x + N_3y + P_3z)$$

les substitutions à coefficients entiers réels transformant en elle-même la forme (1) et par suite aussi la forme

$$x^2 + y^2 - z^2. \tag{2}$$

2. Nous voulons étudier, au point de vue de la discontinuité, le

---

([1]) *Comptes rendus*, 1882, et *Acta mathematica*, t. I.

groupe relatif aux deux variables complexes u et v

$$(3) \qquad U = \frac{M_1 u + P_1 v + R_1}{M_3 u + P_3 v + R_3}, \qquad V = \frac{M_2 u + P_2 v + R_2}{M_3 u + P_3 v + R_3}.$$

J'ai montré (*loc. cit.*) que le groupe hyperfuchsien *général* résultant de (1), c'est-à-dire avec les M, P, R entiers complexes, est discontinu à l'intérieur de l'hypersphère

$$(\Sigma) \qquad uu_0 + vv_0 = 1.$$

Pour éviter toute confusion, rappelons que nous disons qu'un groupe est discontinu en un *point* (u, v), quand il n'existe pas de substitution du groupe, transformant le point (u, v) en un point (U, V) différant du premier d'aussi peu que l'on veut, exception faite pour un nombre limité de substitutions qui transformeraient (u, v) en lui-même.

Nous supposerons le point complexe (u, v) à distance finie; nous poserons

$$u = u_1 + iu_2, \qquad v = v_1 + iv_2,$$

et nous emploierons des notations analogues pour U et V.

Examinons d'abord le cas où l'on aurait

$$u_1^2 + v_1^2 < 1.$$

Nous pouvons alors raisonner comme dans le cas du groupe hyperfuchsien. En se rappelant la relation

$$M_3^2 + P_3^2 - R_3^2 = -1,$$

on obtient aisément l'inégalité

$$(4) \qquad |M_3 u + P_3 v + R_3| > |R_3| \frac{1 - u_1^2 - v_1^2}{2}.$$

D'autre part, il résulte des relations entre les M, P, R qu'il n'y a qu'un nombre *limité* de substitutions du groupe correspondant à une valeur de R_3. Écrivons alors les relations immédiates

$$(5) \qquad \begin{cases} 1 - U^2 - V^2 = \dfrac{1}{(M_3 u + P_3 v + R_3)^2}(1 - u^2 - v^2), \\ 1 - UU_0 - VV_0 = \dfrac{1}{|M_3 u + P_3 v + R_3|^2}(1 - uu_0 - vv_0). \end{cases}$$

De l'inégalité (4) on conclut que les dénominateurs des égalités précédentes augmentent indéfiniment, quand on prend des substitutions du groupe où R_3 grandit indéfiniment. Les deux expressions

$$1 - U_1^2 - V_1^2 + U_2^2 + V_2^2 \quad \text{et} \quad 1 - U_1^2 - V_1^2 - U_2^2 - V_2^2$$

tendent donc vers zéro. Le point (U, V) se rapproche, par suite, indéfiniment de la *courbe*

$$(C) \qquad U_2 = V_2 = 0, \qquad U_1^2 + V_1^2 = 1.$$

Nous pouvons conclure que le groupe est *certainement discontinu* dans le domaine (D), relatif aux deux variables complexes u et v, défini par l'inégalité

$$(D) \qquad u_1^2 + v_1^2 < 1.$$

De plus, les points limites sont sur la COURBE (C).

3. Si le point (u, v) n'est pas dans le domaine (D), le raisonnement précédent n'est plus applicable, l'inégalité (4) perdant tout intérêt. Nous allons chercher ce qui arrive quand (u, v) est en dehors de (D). On supposera, dans tout ce qui va suivre, que u_2 et v_2 *ne sont pas nuls à la fois.*

Montrons d'abord que si l'on a

$$(6) \qquad u_2^2 + v_2^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \neq 0,$$

le groupe est discontinu en (u, v). Je dis en effet que, dans ce cas, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de substitutions pour lesquelles

$$| M_3 u + P_3 v + R_3 |$$

soit inférieur à un nombre donné. Écrivons, en effet,

$$(7) \qquad \begin{cases} M_3 u_1 + P_3 v_1 + R_3 = \alpha, \\ M_3 u_2 + P_3 v_2 = \beta, \end{cases}$$

$|\alpha|$ et $|\beta|$ étant inférieurs à un nombre donné. On tire de là les valeurs de M_3 et P_3, qu'on porte dans la relation existant entre M_3, P_3 et R_3,

$$M_3^2 + P_3^2 - R_3^2 = -1.$$

On obtient ainsi une équation du second degré en R_3, dans laquelle le coefficient de R_3^2 est précisément l'expression (6). Il en résulte que $|R_3|$ est limité, quand α et β le sont eux-mêmes; il n'y a donc qu'un nombre limité de substitutions remplissant la condition indiquée.

Nous avons supposé implicitement que $u_1 v_2 - u_2 v_1$ n'était pas nul. Mais, s'il en était autrement, la conclusion subsisterait, car des équations (7) on tirerait la limitation de R_3.

Nous pouvons maintenant montrer que, sous la condition (6), *le groupe est discontinu en* (u, v). Si en effet il en était autrement, il y aurait, contrairement à ce que nous venons de voir, une infinité de substitutions du groupe pour lesquelles

$$|M_3 u + P_3 v + R_3|$$

serait infiniment voisin de l'unité; c'est ce qui résulte de la seconde des équations (5), car nous pouvons écarter le cas où l'on aurait

$$1 - u u_0 - v v_0 = 0,$$

ce qui nous ramènerait au cas déjà traité $1 - u_1^2 - v_1^2 > 0$.

Cherchons, toujours sous la condition (6), ce qui arrive des points limites. Remarquons que l'expression

$$\frac{M_3}{R_3} u + \frac{P_3}{R_3} v + 1 \tag{8}$$

a, pour toute substitution du groupe, son module supérieur à un nombre déterminé (dépendant de u et v), sauf peut-être pour un nombre limité de susbtitutions. Posons en effet

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{M_3}{R_3} u_1 + \frac{P_3}{R_3} v_1 + 1 = a, \\ &\frac{M_3}{R_3} u_2 + \frac{P_3}{R_3} v_2 = b. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

On tire de là les valeurs de $\frac{M_3}{R_3}$ et de $\frac{P_3}{R_3}$, et on les porte dans la relation

$$\frac{M_3^2}{R_3^2} + \frac{P_3^2}{R_3^2} = 1 - \frac{1}{R_3^2}.$$

On trouve ainsi une valeur de R_3^2 qui, pour $a = b = 0$, a une valeur finie. Il pourra arriver que la valeur ainsi obtenue de R_3^2 soit le carré d'un entier et corresponde à certaines substitutions du groupe en nombre limité, mais il est clair que, pour toutes les autres, la valeur de R_3^2 ne pourra être un entier que si $a^2 + b^2$ est supérieur à un nombre déterminé différent de zéro; ce qui démontre la remarque énoncée.

Il a été supposé dans ce dernier calcul que $u_1 v_2 - u_2 v_1$ n'était pas nul. S'il en était autrement, on tirerait des équations (9)

$$v_2 = a v_2 - b v_1, \qquad u_2 = a u_2 - b u_1$$

et comme $u_2^2 + v_2^2$ n'est pas nul, il n'est pas possible que $a^2 + b^2$ descende au-dessous d'une certaine limite.

La remarque relative à la limite inférieure de l'expression (8) nous permet d'énoncer la même conclusion qu'au paragraphe 2, en ce qui concerne les points limites. Il existe en effet ici, comme précédemment, un nombre positif K non nul, tel que (sauf peut-être pour un nombre limité de substitutions) on a

$$| M_3 u + P_3 v + R_3 | > K | R_3 |.$$

De là se conclut, comme plus haut, que *l'ensemble des points limites est sur la courbe* (C).

4. Examinons enfin le cas laissé jusqu'ici de côté où, pour le point (u, v), on aurait

$$u_2^2 + v_2^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = 0,$$

en supposant toujours $u_2^2 + v_2^2$ différent de zéro.

On voit d'abord qu'on n'a pas ici

car cette égalité est incompatible avec les conditions précédentes. On prouvera alors, d'après la première des équations (5), la discontinuité du groupe, si l'on montre qu'il ne peut y avoir une infinité de substitutions du groupe, pour lesquelles

$$M_3 u + P_3 v + R_3$$

diffère de ± 1 d'aussi peu qu'on veut. Or, écrivons les équations

$$\begin{aligned} M_3 u_1 + P_3 v_1 + R_3 &= \pm 1 + \varepsilon, \\ M_3 u_2 + P_3 v_2 \qquad &= \eta, \end{aligned}$$

et faisons, comme plus haut, la substitution de M_3 et P_3 dans la relation déjà décrite entre M_3, P_3 et R_3. Nous aurons ici une équation du premier degré en R_3, donnant pour R_3 la valeur finie ± 1 quand on fait $\varepsilon = \eta = 0$. Il n'y a plus alors qu'à raisonner comme ci-dessus.

On ne peut d'ailleurs, dans le cas présent, avoir

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

5. Nous pouvons, comme conclusion de l'analyse précédente, énoncer la proposition suivante :

Le groupe étudié est discontinu pour tout point (u, v) *non réel* $(u_2^2 + v_2^2 \neq 0)$, *situé à distance finie. Il est aussi discontinu pour les points réels* $u = u_1$, $v = v_1$, *pourvu qu'on ait*

$$u_1^2 + v_1^2 < 1.$$

Une différence importante est à noter en ce qui concerne les points limites. Quand l'expression

$$u_2^2 + v_2^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

n'est pas nulle, *l'ensemble des points limites est sur la courbe* (C) *définie par les équations*

$$U_2 = 0, \qquad V_2 = 0, \qquad U_1^2 + V_1^2 = 1.$$

Si, au contraire, l'expression précédente est nulle, $u_2^2 + v_2^2$ étant d'ailleurs toujours différent de zéro, on peut seulement affirmer que les points limites *à distance finie* sont nécessairement sur le continuum défini par les deux équations

$$U_2 = 0, \qquad V_2 = 0.$$

6. Occupons-nous maintenant de la formation de fonctions restant invariables par les substitutions du groupe précédent.

Montrons d'abord que la série

$$\sum \frac{1}{|R_3|^3}, \tag{10}$$

où la sommation est étendue à toutes les substitutions du groupe, est convergente. Envisageons, à cet effet, un point réel (u_0, v_0) à l'intérieur du cercle Γ de rayon *un* ayant son centre à l'origine; nous pouvons prendre ce point de manière que la substitution unité soit la seule transformant le point en lui-même. Traçons autour de ce point une petite aire δ_0; les substitutions du groupe transformeront cette aire en une suite infinie d'aires $\delta_1, \delta_2, \ldots$. Si l'aire δ_0 est assez petite, les aires δ sont toutes extérieures les unes aux autres. Leur somme est finie puisqu'elle est moindre que l'aire du cercle Γ, et elle est représentée par l'intégrale

$$\int\!\!\int dU\, dV$$

étendue à toutes les aires δ. On transforme de suite cette intégrale en la suivante

$$\int\!\!\int \sum \frac{1}{|M_3 u + P_3 v + R_3|^3} du\, dv, \tag{11}$$

la sommation Σ étant étendue à toutes les substitutions du groupe, et l'intégrale double étant relative à l'aire δ_0. Mais, d'après ce que nous avons vu antérieurement, on peut poser

$$\frac{1}{|M_3 u + P_3 v + R_3|} = \frac{A}{|R_3|},$$

A étant une quantité positive, dépendant de u et v, mais restant, quand le point réel (u, v) est à l'intérieur d'une aire entièrement comprise dans le cercle Γ, entre deux limites fixes, positives et différentes de zéro. Il est donc évident, d'après la convergence de (11), que la série (10) est convergente.

7. Ce point établi, nous allons considérer les séries qui, dans la théorie des groupes hyperfuchsiens généraux, nous ont conduit aux fonctions hyperfuchsiennes

$$\text{(S)} \qquad \Sigma R(U, V) \frac{1}{(M_3 u + P_3 v + R_3)^{3m}},$$

U et V correspondant à la substitution générale, et la sommation étant étendue à toutes les substitutions du groupe; l'entier positif m peut ici être égal à l'unité. R représente une fonction rationnelle. Envisageons les points (u, v) pour lesquels

$$\text{(12)} \qquad u_2^2 + v_2^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \neq 0.$$

Je dis que pour ces points la série S est convergente (en laissant au besoin de côté un nombre fini de termes), si l'on prend pour $R(u, v)$ une fonction rationnelle de u et v, restant finie pour les points de la *courbe* (C) correspondant aux équations

$$\text{(C)} \qquad u_2 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad u_1^2 + v_1^2 = 1.$$

D'après ce que nous avons vu à la fin du paragraphe 3, on peut, pour (u, v) donné, trouver un nombre positif K non nul, tel que (sauf peut-être par un nombre limité de substitutions) on ait

$$|M_3 u + P_3 v + R_3| > K |R_3|.$$

De plus, sauf peut-être aussi pour un nombre limité de substitutions, le module de $R(U, V)$ est inférieur à un nombre assignable, puisque les points (U, V) se rapprochent indéfiniment de la courbe C. La convergence de la série (S) est alors immédiate, et dans une région où l'inégalité (3) est vérifiée, la fonction ainsi représentée a, à distance finie, le caractère d'une fonction rationnelle.

8. Les raisonnements précédents ne sont plus valables pour les

points de la *surface* représentée par l'équation

$$(13) \qquad (u_2 v_1 - u_1 v_2)^2 - (u_2^2 + v_2^2) = 0,$$

quoique pour ces points le groupe, comme nous l'avons vu, soit encore discontinu (sous la condition $u_2^2 + v_2^2 \neq 0$). Je ne puis rien affirmer dans ce cas, sauf, bien entendu, dans l'hypothèse où l'on aurait

$$u_2 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad u_1^2 + v_1^2 < 1,$$

pour laquelle la série converge.

La surface précédente partage en deux parties l'espace à quatre dimensions correspondant aux deux variables complexes u et v. On peut remarquer que le domaine D considéré au début de l'article précédent, pour lequel on a

$$u_1^2 + v_1^2 < 1,$$

est situé dans le demi-espace correspondant à l'inégalité

$$(u_2 v_1 - u_1 v_2)^2 - (u_2^2 + v_2^2) < 0.$$

Il serait intéressant *d'étudier sur la surface* (13) *la fonction représentée par la série* S.

Avec les séries S on forme immédiatement des fonctions restant invariables par les substitutions du groupe considéré; la même question se pose relativement à la nature de ces fonctions sur la surface (13).