ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ERNEST VESSIOT

Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre, à une fonction inconnue

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 32 (1915), p. 137-160

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1915_3_32__137_0>

SUR LA RÉDUCTIBILITÉ

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

NON LINÉAIRES

DU PREMIER ORDRE, A UNE FONCTION INCONNUE;

Par M. E. VESSIOT.

INTRODUCTION.

1. Ce travail a pour but de préciser la notion de réductibilité pour les équations aux dérivées partielles à une fonction inconnue et à un nombre quelconque de variables indépendantes.

A leur égard, M. Drach avait fait, dans sa Thèse (Paris, 1898, p. 11-12 et p. 138-139), la remarque que l'équation linéaire $[Z, \Phi] = 0$, qui définit les caractéristiques des équations

$$(1) \qquad Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a \qquad (a = \text{const. arbitr.}),$$

ne peut avoir pour groupe de rationalité qu'un groupe de transformations de contact en $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ n'altérant pas Z; parce que la recherche d'une intégrale complète de l'équation (1) revient à la résolution de l'équation de Pfaff

$$(2) \qquad dZ - \sum_{k=1}^{n} P_k \, dX_k = \rho \left(dz - \sum_{k=1}^{n} p_k \, dx_k \right),$$

et fournit les solutions $Z, X_1, \ldots, X_n, \frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1}$ de l'équation $[Z, \Phi] = 0$, dont les éléments $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ doivent, disait-il, être considérés comme *inséparables*.

Dans une Communication à la Société mathématique (22 février 1911), je rattachai plus tard l'étude de l'équation

$$(3) \qquad 0 = \mathrm{K}f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} - [\mathrm{W}, f] + \mathrm{W}\frac{\partial f}{\partial x_0},$$

qui définit les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles

$$(4) \qquad \frac{\partial x_0}{\partial t} = \mathrm{W}(t \mid x_0, x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) \qquad \left(p_k = \frac{\partial x_0}{\partial x_k}\right),$$

aux résultats, relatifs au cas plus général des équations de Lie généralisées, contenus dans mon Mémoire de 1902 (1). Je montrai ainsi que le groupe de rationalité de (3) est un groupe de transformations de contact de l'espace à $n+1$ dimensions : j'indiquai, avec des exemples, quels étaient, par suite, dans le cas de deux variables indépendantes ($n=1$), les types essentiels des simplifications possibles dans le problème de l'intégration de l'équation (4).

Dans sa Communication (2) au Congrès de Cambridge, en 1912, M. Drach a repris sa remarque de 1898; et, d'une manière analogue, a constaté de son côté, comme application de la méthode de Lagrange à l'équation (4), dans le cas $n=1$, que le groupe de rationalité de l'équation (3) correspondante est un groupe de transformations de contact du plan (le groupe général, si f est arbitraire).

J'ai indiqué plus récemment, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (3), comment les idées sur la réductibilité des systèmes d'équations différentielles ordinaires, exposées dans mes Notes du 8 novembre 1909 et du 20 juin 1910 et dans mon Mémoire (4) de 1912, permettent d'approfondir la notion de réductibilité pour les équations aux dérivées partielles. C'est le développement des indications de cette Note qui fait l'objet des deux premières parties de ce travail; la troisième partie reproduit les résultats de ma Communication de 1911 à la Société mathématique.

---

(1) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 84.

(2) J. Drach, *Sur l'intégration logique des équations différentielles ordinaires* (*International Congress of Mathematics*, p. 54-57, Cambridge, aug. 1912).

(3) *Comptes rendus Ac. des Sc.*, t. 157, 1913, p. 1053.

(4) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 209.

2. Une équation aux dérivées partielles, à une fonction inconnue x_0,

$$F\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, t \left| \frac{\partial x_0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_0}{\partial x_n}, \frac{\partial x_0}{\partial t}\right.\right) = 0, \tag{5}$$

peut évidemment être remplacée par le système

$$F\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, t \left| p_1, \ldots, p_n, \frac{\partial x_0}{\partial t}\right.\right) = 0, \quad p_k = \frac{\partial x_0}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

aux $n+1$ inconnues $x_0, p_1, \ldots, p_n$.

En supposant l'équation (5) résoluble par rapport à la dérivée $\frac{\partial x_0}{\partial t}$, le théorème de Cauchy sur l'existence des intégrales suffit à prouver qu'il existe des tranformations de la forme

$$\begin{cases} X_i = A_i(t \mid x_0, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) & (i = 0, 1, \ldots, n), \\ P_k = B_k(t \mid x_0, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) & (k = 1, 2, \ldots, n), \end{cases} \tag{7}$$

$$T = t, \tag{8}$$

qui ramènent ce système à la forme canonique

$$\frac{\partial X_0}{\partial T} = 0, \qquad P_k = \frac{\partial X_0}{\partial X_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Ces transformations, qui peuvent aussi se définir par l'identité

$$dx_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k - W\, dt = \rho\left(dX_0 - \sum_{k=1}^{n} P_k\, dX_k\right), \tag{10}$$

quand on introduit la forme résolue (4) de l'équation (5), jouent un rôle essentiel dans notre étude : nous les appelons *canonisantes*. Il y en a une qui est définie par cette propriété que les équations (7) se réduisent aux équations d'une transformation identique quand on y remplace t par la valeur constante t_0. C'est la *transformation canonisante principale* relative à cette valeur initiale t_0.

L'intégration de l'équation équivaut à la détermination d'une transformation canonisante (méthode de Pfaff); une intégrale complète fournit une transformation canonisante (méthode de Lagrange-Charpit); une transformation canonisante principale est fournie par l'intégration complète de l'équation des caractéristiques (3) (méthode des caractéristiques). Quant à la détermination de toutes les transformations canonisantes, elle dépend de l'intégration d'un système automorphe, dont le groupe associé est le groupe général des transformations de contact de l'espace à $n+1$ dimensions.

De plus, les propriétés évidentes du système canonique (9), relativement à la transformation des variables qui y figurent, conduisent à introduire le groupe (g_0) formé de toutes les transformations en t, $x_0, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$ qui laissent invariante chaque solution

$$(11) \qquad x_0 = \Phi(t \mid x_1, \ldots, x_n), \qquad p_k = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

de la proposée. Ce groupe est le plus général qui admette pour invariants toutes les solutions de l'équation aux caractéristiques (3), ce qui revient à dire que ses transformations infinitésimales sont de la forme $\mu \mathrm{K} f$, μ étant une fonction arbitraire des variables considérées.

Intégrer la proposée équivaut, dès lors, à trouver les équations de définition de ce groupe (g_0). Comme ce groupe (g_0) peut se définir par sa propriété d'être invariant dans le groupe (g), formé de toutes les transformations en t, $x_0, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$ qui laissent invariant le système (6); et que les équations de définition de ce groupe (g) se déduisent rationnellement de l'équation proposée, le problème de l'intégration de celle-ci se présente, dès lors, comme un problème de la théorie des groupes.

3. La notion de réductibilité s'offre ainsi sous la forme suivante : l'équation proposée sera considérée comme *réductible* ou *spéciale*, s'il existe quelque groupe, *intermédiaire* entre (g) et (g_0), c'est-à-dire contenu dans (g), contenant (g_0), et autre que (g) lui-même, dont les équations de définition soient rationnelles. Le plus petit de ces groupes intermédiaires rationnels sera contenu dans tous les autres et caractérisera le mode de *réductibilité* ou de *spécialité* de la proposée; nous l'appelons le *groupe spécifique*. Il échange les caractéristiques suivant une loi qui peut se traduire par une infinité de groupes, semblables entre eux : l'un quelconque d'entre eux sera le *groupe de rationalité;* on peut supposer que c'est un groupe de transformations de contact de l'espace à $n+1$ dimensions.

La réductibilité ainsi définie ne diffère pas de celle que peut fournir, pour l'équation linéaire aux caractéristiques, la théorie que j'ai exposée pour les systèmes complets dans mon Mémoire de 1912 (1); et elle entraîne les mêmes conséquences.

Mais elle conduit aussi aux suivantes, qui sont nouvelles, et qui la rattachent directement à la notion générale de la réductibilité des systèmes différentiels, telle qu'elle a servi de point de départ à M. Drach (2).

Sous ce point de vue, l'équation (5) est réductible s'il existe des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, définissant x_0 comme fonction de $t, x_1, \ldots, x_n$, qui soient compatibles avec (5) sans en être des conséquences, et qui soient rationnelles.

Cela équivaut à dire qu'il existe quelque système différentiel *rationnel* (S) définissant $x_0, p_1, \ldots, p_n$ comme fonctions de $t, x_1, \ldots, x_n$, qui entraîne les équations (6) comme conséquences, sans leur être simplement équivalent. Relativement à ces systèmes (S), le groupe spécifique possède la double propriété caractéristique suivante, qui constitue, sous une forme bien naturelle, l'extension du théorème de Galois : 1° tout système (S) admet le groupe spécifique; 2° tout système (S) dont la solution a le degré de généralité minimum est, en étendant la signification du mot *automorphe*, un système automorphe ayant le groupe spécifique pour groupe associé : ce qui veut dire que la solution la plus générale (11) d'un tel système se déduit d'une solution particulière arbitraire en y effectuant la transformation générale du groupe spécifique.

Il existe, de plus, en particulier, de tels systèmes (S) automorphes, ayant le groupe spécifique pour groupe associé, et admettant pour solution celle qui se réduit, pour $t = t_0$, à une multiplicité rationnelle

$$x_0 = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

arbitrairement choisie. Le groupe de rationalité est par suite, si l'on veut, le groupe de transformations de contact de l'espace $x_0, x_1, \ldots, x_n$ qui indique la loi d'échange des solutions d'un tel système (S) par les

(1) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 209.

(2) Thèse, Paris, 1898, p. 55.

transformations du groupe spécifique, en opérant sur les données initiales de ces solutions.

4. L'extension de cette théorie aux systèmes involutifs d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, à une seule fonction inconnue, ne nécessite que quelques complications de notations. La méthode elle-même a une portée beaucoup plus étendue.

Dans le cas actuel, elle pourrait être légèrement modifiée, de manière à faire disparaître la dissymétrie, qui y fait jouer un rôle particulier à l'une des variables indépendantes, mais qui donne aux démonstrations une forme plus facile. Aux notations près, il s'agit seulement, au fond, des transformations qui donnent la loi de l'échange des éléments $(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ que définit l'équation aux dérivées partielles donnée

$$(13) \quad \mathfrak{F}(z, x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0, \qquad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

par les transformations en $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ qui laissent invariante cette équation, et qui sont, *pour les éléments qu'elle définit*, des transformations de contact.

I. — Divers aspects du problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

1. Considérons une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à une fonction inconnue x_0, et à $n+1$ variables indépendantes. Nous la supposerons résolue par rapport à une des dérivées, de sorte que la variable correspondante t jouera, dans nos raisonnements, un rôle spécial : les autres variables seront désignées par $x_1, \ldots, x_n$, et l'on posera

$$(1) \qquad \frac{\partial x_0}{\partial x_k} = p_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'équation considérée s'écrira donc

$$(2) \qquad \frac{\partial x_0}{\partial t} = \mathrm{W}(t \mid x_0, x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n).$$

D'après le théorème de Cauchy, elle admet une solution

$$x_0 = \Phi(t \mid x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

satisfaisant à la condition initiale arbitraire

$$x_0 = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{pour} \quad t = t_0. \tag{4}$$

Si φ dépend essentiellement de $n+1$ constantes arbitraires $a_0, a_1, \ldots, a_n$, on peut supposer qu'il n'existe aucune relation, indépendante de ces constantes, entre $\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$. On le voit, par exemple, en prenant pour φ une fonction linéaire et homogène des constantes arbitraires, à coefficients arbitraires en $x_1, \ldots, x_n$. Alors $\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}$ seront elles-mêmes des fonctions de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ indépendantes; et les équations

$$x_0 = \Phi, \qquad p_k = \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

se résoudront sous la forme

$$a_i = A_i(t \mid x_0, x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n); \tag{6}$$

les fonctions A_i étant elles-mêmes, à cause de l'équivalence de (5) et de (6), indépendantes en $x_0, p_1, \ldots, p_n$.

Cela posé, remplaçons l'équation (2) par l'équation de Pfaff

$$dx_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k - W\, dt = 0. \tag{7}$$

Celle-ci est vérifiée par les formules (5), et, par conséquent, par les formules (6), quelles que soient les constantes a_i. Elle est donc une conséquence des équations

$$dA_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

et l'on a, par suite, une identité de la forme

$$dx_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k - W\, dt = \rho\left(dA_0 - \sum_{k=1}^{n} B_k\, dA_k\right). \tag{9}$$

Les fonctions $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ de $x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ sont indépendantes. On le voit en faisant $t = t_0 =$ const., et en constatant qu'elles sont déjà indépendantes dans cette hypothèse. L'identité (9) prend alors, en effet, la forme

$$dx_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k = \rho_0\left(dA_0^0 - \sum_{k=1}^{n} B_k^0\, dA_k^0\right). \tag{10}$$

Et si nous appliquons aux deux membres, suivant le procédé employé par M. Cartan dans son étude du problème de Pfaff [1], alternativement la différentiation symbolique et la multiplication symbolique par l'expression de Pfaff initiale, nous obtenons l'identité nouvelle

$$dx_0\, dp_1\, dx_1 \ldots dp_n\, dx_n = \rho_0^{n+1}\, dA_0^0\, dB_1^0\, dA_1^0 \ldots dB_n^0\, dA_n^0, \tag{11}$$

où les produits symboliques sont, comme on sait, des déterminants fonctionnels. Le second membre serait donc nul, sans que le premier le fût, si

$$A_0^0, \quad A_1^0, \quad \ldots, \quad A_n^0, \quad B_1^0, \quad \ldots, \quad B_n^0$$

n'étaient pas indépendants.

Nous arrivons donc à cette conséquence qu'il existe des transformations

$$\tag{12} \begin{cases} X_i = A_i(t \mid x_0, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) & (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ P_k = B_k(t \mid x_0, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) & (k = 1, 2, \ldots, n), \\ T = t. \end{cases}$$

donnant lieu à l'identité

$$dx_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k - W\, dt = \rho\left(dX_0 - \sum_{k=1}^{n} P_k\, dX_k\right). \tag{13}$$

Nous dirons qu'une telle transformation est une *transformation canonisante* [2].

---

[1] *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XVI, 1899, p. 239.

[2] Elle ramène l'équation de Pfaff (7) à la forme $dX_0 - \sum_{k=1}^{n} P_k dX_k = 0$, équivalente au système $\frac{\partial X_0}{\partial T} = 0$, $P_k = \frac{\partial X_0}{\partial X_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. On peut dire, en un certain sens, qu'elle ramène la proposée à la forme $\frac{\partial X_0}{\partial T} = 0$.

2. L'identité (10) montre, de plus, que, si l'on pose

$$(14)\quad \begin{cases} X_i = A_i(t_0 \mid x'_0, \ldots, x'_n \mid p'_1, \ldots, p'_n) & (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ P_k = B_k(t_0 \mid x'_0, \ldots, x'_n \mid p'_1, \ldots, p'_n) & (k = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

il en résulte l'identité

$$(15)\quad dx'_0 - \sum_{k=1}^{n} p'_k\, dx'_k = \rho(t_0 \mid x'_0, \ldots, x'_n \mid p'_1, \ldots, p'_n)\left(dX_0 - \sum_{k=1}^{n} P_k\, dX_k\right);$$

de sorte que la transformation définie par les formules

$$(16)\quad \begin{cases} A_i(t \mid x_0, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = A_i(t_0 \mid x'_0, \ldots, x'_n \mid p'_1, \ldots, p'_n) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ B_k(t \mid x_0, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = P_k(t_0 \mid x'_0, \ldots, x'_n \mid p'_1, \ldots, p'_n) & (k = 1, 2, \ldots, n), \\ t' = t \end{cases}$$

donne lieu à l'identité

$$(17)\quad dx_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k - W\, dt = \frac{\rho(t \mid x \mid p)}{\rho(t_0 \mid x' \mid p')}\left(dx'_0 - \sum_{k=1}^{n} p'_k\, dx'_k\right).$$

C'est donc encore une transformation canonisante; mais elle possède cette propriété particulière de se réduire à la transformation identique pour $t = t_0$. Nous dirons que c'est la *transformation canonisante principale relative à la valeur initiale $t = t_0$*.

3. Il résulte de l'identité (13), qui sert de définition aux transformations canonisantes, que deux d'entre elles sont liées par une identité

$$(18)\quad \rho\left(dX_0 - \sum_{k=1}^{n} P_k\, dX_k\right) = \bar{\rho}\left(d\bar{X}_0 - \sum_{k=1}^{n} \bar{P}_k\, d\bar{X}_k\right).$$

En raisonnant comme le fait S. Lie dans la recherche des équations finies des transformations de contact [1], on conclut de là que les X et les $\bar{X}$ sont liés par au moins une relation indépendante des P, des $\bar{P}$ *et de t*; et des relations de cette nature on déduit les expressions des $\bar{X}$ et des $\bar{P}$ en fonction des X et des P, *sans que t intervienne*.

---

[1] S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, p. 146.

Il résulte de là que $\frac{\varrho}{\rho}$ est indépendant de t, et que l'on passe d'une transformation canonisante aux autres par les transformations de contact de l'espace à $n+1$ dimensions

$$(19)\qquad \begin{cases} \overline{X}_i = \xi_i(X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n) & (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ \overline{P}_k = \varpi_k(X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n) & (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

De là résulte encore le fait, implicitement admis plus haut, qu'il n'y a qu'une transformation canonisante principale, pour une valeur initiale $t = t_0$ donnée. Car le passage de l'une à l'autre, pour deux telles transformations, se fait par des formules (19) qui doivent se réduire à la transformation identique pour $t = t_0$. Or, t ne figure pas dans les formules (19); donc elles doivent représenter, dans le cas considéré, la transformation identique.

4. La détermination d'une transformation canonisante entraîne donc celle de toutes les autres, et aussi (n° 2) celle des transformations canonisantes principales. Elle équivaut, comme il est bien connu par la méthode de Pfaff, à l'intégration de l'équation proposée (2); car l'identité (13) ramène la recherche des intégrales (3) de (2) à celle des multiplicités, à n dimensions, de l'espace $X_0, X_1, \ldots, X_n$. La forme générale de ces intégrales est donc donnée par les formules

$$(20)\qquad X_0 = \varphi(X_1, \ldots, X_n), \qquad P_k = \frac{\partial\varphi}{\partial X_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

et si la transformation canonisante (12) employée est la transformation principale relative à $t = t_0$, cette intégrale (20) sera précisément la solution de (2) définie par la condition initiale (4). Le problème de Cauchy sera donc ainsi résolu.

Au point de vue analytique, d'après l'identité de définition (13), la recherche des transformations canonisantes se confond avec l'intégration du système

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_0}{\partial x_k} - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k \dfrac{\partial X_k}{\partial x_k} + p_k\left(\dfrac{\partial X_0}{\partial x_0} - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k \dfrac{\partial X_k}{\partial x_0}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial X_0}{\partial t} - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k \dfrac{\partial X_k}{\partial t} + W\left(\dfrac{\partial X_0}{\partial x_0} - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k \dfrac{\partial X_k}{\partial x_0}\right) = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui, d'après ce qui précède (n° 3), est un système automorphe, dont le groupe associé est le groupe des transformations du contact de l'espace à $n+1$ dimensions.

5. L'emploi des transformations canonisantes conduit à d'autres conséquences; elles ramènent, en effet, l'équation de Pfaff (7) à la forme canonique

$$dX_0 - \sum_{k=1}^{n} P_k\, dX_k = 0. \tag{22}$$

Relativement aux variables $X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n, T$, celle-ci est invariante par le groupe (G) formé de toutes les transformations obtenues en adjoignant, aux équations d'une transformation de contact (19) quelconque, l'équation

$$\overline{T} = \theta(X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n, T), \tag{23}$$

où la fonction θ est arbitraire.

Dans ce groupe (G), nous distinguerons le sous-groupe (G_0), qui laisse invariante chacune des variables $X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$: pour les transformations (19), (23) correspondantes, les équations (19) se réduisent donc à une transformation identique.

Ce groupe (G_0) est caractérisé par ses invariants $X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$. On peut dire aussi que c'est le plus grand sous-groupe de (G) qui laisse invariante chaque multiplicité (20).

Les deux groupes (G) et (G_0) proviennent, respectivement, par la transformation canonisante (12), de deux groupes (g) et (g_0) en $x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, t$. A savoir : le groupe le plus général (g) qui laisse invariante l'équation (2), ou mieux l'équation de Pfaff équivalente (7); et le plus grand sous-groupe (g_0) de (g) qui laisse invariante chaque solution, $n+1$ fois étendue, de cette équation de Pfaff.

Les équations de définition de (g) sont évidemment connues explicitement, puisqu'elles sont définies par l'identité

$$\begin{aligned} &d\overline{x}_0 - \sum_{k=1}^{n} \overline{p}_k\, d\overline{x}_k - \mathrm{W}(\overline{t} \mid \overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \mid \overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n)\, d\overline{t} \\ &\quad = \frac{1}{\rho}\left[dx_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k\, dx_k - \mathrm{W}(t \mid x_0, x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n)\, dt\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Il n'en est pas de même de celles de (g_0), qui s'obtiendraient en adjoignant à celles de (g) les formules qui expriment l'invariance de $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$.

L'intégration de (2) qui, d'après ce qui précède, équivaut à la détermination d'une transformation canonisante (12), fournirait donc précisément les invariants de (g_0).

Inversement, dès que l'on connaîtra $2n+1$ invariants indépendants de (g_0), soient $J_1, \ldots, J_{2n+1}$, les équations

$$(25)\quad \begin{cases} J_s(t \mid x_0, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = J_s(t_0 \mid x'_0, \ldots, x'_n \mid p'_1, \ldots, p'_n) \\ \qquad [s = 1, 2, \ldots, (2n+1)], \\ t' = t, \end{cases}$$

étant équivalentes aux équations (16), fourniront les transformations canonisantes principales, et l'intégration de la proposée en résultera aussitôt.

Le problème de l'intégration de (2) équivaut donc à la recherche des invariants de (g_0), ou, ce qui revient au même, à celle de ses équations de définition.

6. Si les équations de définition de (g_0) ne sont pas connues, la forme générale de ses transformations infinitésimales peut s'obtenir explicitement. Avec les variables canoniques, elle est $\mu \frac{\partial f}{\partial T}$, μ étant une fonction arbitraire de toutes les variables. Tout revient donc à trouver la transformation infinitésimale qui devient $\frac{\partial f}{\partial T}$ par le changement de variables canonisant (12). Or, f étant une fonction de $T, X_0, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$, on a, symboliquement,

$$(26)\qquad \frac{\partial f}{\partial T} dT\, dX_0\, dP_1\, dX_1 \ldots dP_n\, dX_n = df\, dX_0\, dP_1\, dX_1 \ldots dP_n\, dX_n.$$

Un calcul analogue à celui qui a fourni l'identité (11) à partir de l'identité (10) permet de déduire de (13) une identité analogue, qui, au moyen de la multiplication symbolique par le facteur df, donne [1]

[1] *Cf.* E. CARTAN, *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XVI, 1899, p. 313.

la formule

$$(27)\qquad \begin{aligned}\rho^{n+1}\, df\, dX_0\, dP_1\, dX_1 \ldots dP_n\, dX_n \\ = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} - [Wf]_{x_0 x p} + W\frac{\partial f}{\partial x_0}\right\} dt\, dx_0\, dp_1 \ldots dx_n,\end{aligned}$$

où $[Wf]_{x_0 x p}$ est le crochet de Poisson.

La transformation infinitésimale générale de (g_0) est, par suite,

$$(28)\qquad \mu\left\{\frac{\partial f}{\partial t} - [Wf] + W\frac{\partial f}{\partial x_0}\right\} \equiv \mu\, Kf.$$

Si on l'égale à zéro on obtient donc, pour déterminer les invariants de (g_0), l'équation qui équivaut au système différentiel des caractéristiques.

La transformation canonisante principale (16), abstraction faite de l'équation $t' = t$, résulte donc de l'intégration du système des caractéristiques. Et la manière dont elle fournit (n° 4) l'intégrale générale de l'équation (2) proposée ne diffère pas de la méthode d'intégration classique fondée sur l'emploi de ces caractéristiques.

7. On voit immédiatement que (G_0) est invariant dans (G). Cela résulte de ce que chaque transformation de (G) s'obtient en multipliant une transformation (19), laissant invariante la variable T, par une transformation de (G_0); cette multiplication pouvant être faite à droite ou à gauche. C'est-à-dire que, en désignant par la lettre S les transformations de (G), par la lettre S_0 celles de (G_0) et par la lettre Σ les transformations de contact (19), on peut écrire

$$(29)\qquad S = \Sigma S_0 = S'_0 \Sigma,$$

d'où l'on conclut

$$(30)\qquad \Sigma S_0 . S''_0 = \Sigma\, S'''_0 = S^{\text{iv}}_0 \Sigma = S^{\text{v}}_0 . S'_0 \Sigma = S^{\text{v}}_0 . \Sigma S_0;$$

ce qui exprime bien l'invariance de (G_0) par (G).

On voit, de plus, par la même remarque, qu'il y a isomorphisme entre le groupe (G) et le groupe de contact général Σ : cela exprime ce fait que Σ indique la manière dont S permute les caractéristiques, qui sont définies par les valeurs des invariants X_i et P_k.

Donc, pour tout sous-groupe invariant de (G), l'ensemble des transformations Σ qui interviennent dans les formules (29) des transformations S de ce sous-groupe se réduit à la transformation identique ou forme le groupe de contact général.

On peut montrer que, dans le premier cas, ce sous-groupe invariant est (G_0); et que, dans le second cas, c'est (G) lui-même.

En d'autres termes, (G_0) est le seul sous-groupe invariant de (G); de sorte que le problème de l'intégration de l'équation (2) équivaut à la détermination des équations de définition du seul sous-groupe invariant de (g), autre que (g) lui-même et le groupe identique : à savoir le groupe (g_0).

Au point de vue de la rationalité, qui sera celui du paragraphe suivant, il faudra tenir compte de ce fait que la proposée pourra n'être pas donnée sous la forme résolue en $\frac{\partial x_0}{\partial t}$. On pourra toujours déterminer rationnellement les équations de définition du plus grand groupe ($\bar{g}$) des transformations en $t, x_0, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ laissant invariante la proposée

$$F\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, t \mid p_1, \ldots, p_n, \frac{\partial x_0}{\partial t}\right) = 0;$$

l'adjonction d'une irrationalité algébrique permettrait de passer de ($\bar{g}$) à (g).

II. — Théorie de la réductibilité.

8. Appelons *groupe intermédiaire* tout groupe autre que ($\bar{g}$) contenu dans ($\bar{g}$) et contenant (g_0). Une équation (2) sera considérée comme spéciale si un au moins de ces groupes intermédiaires a des équations de définition rationnelles, et le plus petit de ces groupes intermédiaires à équations de définition rationnelles sera contenu dans tous les autres, puisque tous contiennent (g_0), et que l'ensemble des équations de définition de deux tels groupes en définit un autre contenu dans les deux premiers.

Ce plus petit groupe intermédiaire rationnel (σ) sera dit le *groupe spécifique* de l'équation.

Comme (g_0) est invariant dans (σ), (σ) permute les invariants de (g_0), c'est-à-dire les caractéristiques : le groupe (ρ), qui donne la loi de cette transformation des caractéristiques entre elles, sera dit *groupe de rationalité*.

Si les invariants de (g_0) que l'on considère sont ceux qui figurent dans les équations (12) d'une transformation canonisante, ils seront échangés par les transformations d'un groupe de transformations de contact de l'espace $X_0, X_1, \ldots, X_n$. On pourra donc, parmi toutes les formes, semblables entre elles, du groupe de rationalité (ρ), choisir un tel groupe de transformations de contact.

9. L'introduction de ces groupes est une conséquence immédiate de cette idée qu'il s'agit, pour l'intégration, de passer des équations de définition de $(\bar{g})$, rationnellement connues, aux équations de définition du sous-groupe invariant (g_0).

Elle est également une application de la théorie de la réductibilité que nous avons développée pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires dans un précédent travail [1].

La détermination des invariants de (g_0) équivaut, en effet (n° 6), à l'intégration de l'équation

$$(31) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial t} - [Wf] + W\frac{\partial f}{\partial x_0} \equiv Kf.$$

Celle-ci appartient à la classe des *équations de Lie généralisées*, à groupe infini : c'est-à-dire que son premier membre est de la forme $\frac{\partial f}{\partial t} + \mathfrak{X}f$, où $\mathfrak{X}f$ est une transformation infinitésimale, dépendant du paramètre t, d'un groupe infini relatif aux autres variables. Ici ces autres variables sont $x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, et ce groupe infini est le groupe des transformations de contact de l'espace $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Dès mes premières recherches sur la théorie de la réductibilité, j'avais observé que le groupe de rationalité de telles équations est un sous-groupe du groupe infini qui sert à les définir [2].

---

(1) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 209.

(2) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 84. Nous supposons ici qu'on ait réduit $(\bar{g})$ à (g) par l'adjonction de l'irrationalité nécessaire à cet effet.

En fait, le groupe (G) (n° 3) peut être défini de la manière suivante : c'est un groupe qui, abstraction faite de la variable T, transforme les autres variables $X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ suivant des transformations de contact; et c'est le plus grand groupe de cette nature qui laisse invariante l'équation $\frac{\partial f}{\partial T} = 0$, puisque cette dernière condition signifie que le groupe transforme entre elles les variables autres que T.

Or, la transformation canonisante (12) est elle-même une transformation de contact, relativement aux variables autres que t, T, comme cela résulte de l'identité (10). Elle fait donc passer du groupe (G) à un groupe, le groupe (g), qui, lui aussi, échange les variables x_0, $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, abstraction faite de t, suivant des transformations de contact. Comme elle transforme d'autre part (n° 6) l'équation $\frac{\partial f}{\partial T} = 0$ en l'équation (31), on conclut que (g) est le plus grand groupe en $t, x_0, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ laissant invariante l'équation (31), parmi les équations de définition duquel figurent celles du groupe général des transformations de contact en $x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$.

Au point de vue de la théorie de la réductibilité des équations linéaires aux dérivées partielles, (g) est donc déjà, *en un certain sens*, ce que nous avons appelé un *groupe intermédiaire* (1), et ses équations de définition sont rationnellement connues. Dans cette théorie, le groupe spécifique pourra donc être remplacé, comme nous l'avons fait ici (n° 8), par le plus grand groupe, à équations de définition rationnelles, contenant (g_0) et contenu dans (g).

10. Suivant la même théorie, le groupe (g) donne naissance à un système automorphe admettant comme solution le système des intégrales $X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$, de l'équation (31) qui se réduisent respectivement à $x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ pour $t = t_0$ [*solution principale* de (31)]. Et ce système automorphe se déduit des équations de définition de (g) en y remplaçant la variable $\bar{t}$ par la constante t_0 (2).

Les équations de définition de (g) traduisant l'identité (24), ce

(1) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 241, n° 16

(2) *Ibid.*, p. 233.

système automorphe exprime l'identité qui s'en déduit en y supposant $\bar{t} = t_0$, c'est-à-dire, avec le changement convenable de notations, il résulte de l'identité (13). En fait, le système obtenu ne dépend pas de t_0, et c'est, comme on devait s'y attendre, le système (21) qui définit l'ensemble des transformations canonisantes : la solution principale de (31) considérée fournit, en effet, les équations (12) de la transformation canonisante principale qui correspond à la même valeur $t = t_0$ de la variable t.

On voit donc que, de toutes manières, on est conduit à remplacer l'équation (2) proposée, ou l'équation des caractéristiques (31), par le système automorphe (21) des transformations canonisantes.

11. La même théorie fournit encore les propriétés suivantes du groupe spécifique (σ) et du groupe de rationalité (ρ) (¹). Le groupe spécifique (σ) est le plus grand groupe de transformations en x_0, $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, t$ qui laisse invariant tout système différentiel rationnel en $X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ dont toutes les solutions propres (c'est-à-dire constituées par des fonctions de $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n, t$ indépendantes par rapport aux $2n+1$ premières variables) définissent des transformations canonisantes. Ceux de ces systèmes dont l'ordre de généralité est minimum sont des systèmes automorphes, dont la solution générale se déduit d'une solution propre quelconque en y effectuant : soit, sur les variables indépendantes, la transformation générale du groupe spécifique; soit, sur les fonctions inconnues, la transformation générale des groupes de rationalité (ρ).

A un autre point de vue (²), le mode de réductibilité de l'équation proposée est entièrement caractérisé par ceux des invariants différentiels de la transformation infinitésimale Kf (n° 6), qui se trouvent être rationnels : ces invariants différentiels correspondant au mode de prolongement dans lequel on traite $x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ comme des fonctions de $2n+1$ variables auxiliaires invariantes. C'est ce qu'on pourrait appeler les *invariants différentiels des caractéristiques*.

(¹) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXIX, 1912, p. 233-234; p. 249-252.
(²) *Ibid.*, p. 262.

12. Le procédé direct par lequel nous avons été conduit au groupe spécifique nous en fournit d'autres propriétés, plus immédiatement liées à l'équation aux dérivées partielles elle-même.

Il est, en effet, naturel de se préoccuper de la réductibilité, au sens de M. Drach, de l'équation aux dérivées partielles (2) elle-même; c'est-à-dire de l'existence possible de systèmes différentiels rationnels, compatibles avec l'équation (2). On considère donc ici $x_0, p_1, \ldots, p_n$ comme des fonctions inconnues des variables $t, x_1, \ldots, x_n$, satisfaisant au système (1) (2).

Tout système différentiel définissant de telles fonctions est invariant par toute transformation qui laisse invariante chaque solution du système (1) (2). Il admet donc le groupe (g_0), d'après la propriété de ce groupe de laisser invariante toute multiplicité à $n+1$ dimensions, qui satisfait à l'équation de Pfaff (7). S'il admet le groupe $(\bar{g})$ lui-même, il se confond avec le système (1) (2); puisque le groupe (G) permute entre elles toutes les solutions de l'équation de Pfaff

$$dX_0 - \sum_{k=1}^{n} P_k \, dX_k = 0, \tag{32}$$

qui résulte de l'équation (7) par la transformation canonisante qui change (g) en (G), et que le passage de $(\bar{g})$ à (g) correspond à la résolution de la proposée par rapport à $\frac{\partial x_0}{\partial t}$.

Donc tout système différentiel de l'espèce considérée, moins général que le système donné, admet un groupe intermédiaire et, si le système est rationnel, ce groupe intermédiaire a ses équations de définition rationnelles.

En d'autres termes, la réductibilité de l'équation aux dérivées partielles, au sens de M. Drach, entraîne l'existence d'un groupe spécifique, tel que nous l'avons défini au n° 8; ou, si l'on veut, d'un groupe de rationalité (ρ), qui est un groupe, non général, de transformations de contact de l'espace à $n+1$ dimensions.

13. Mais on peut aller plus loin. Supposons, en effet, l'existence d'un groupe intermédiaire (g_1) dont les équations de définition soient rationnelles. L'équivalence de deux multiplicités de l'espace t, x_0,

$x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, relativement à ce groupe, doit se traduire par des équations invariantes (e), de forme déterminée, et par des relations entre certains invariants différentiels (j) : ces équations (e) et ces invariants (j) sont rationnels, car ils se déduisent, par des calculs rationnels, des équations de définition du groupe (g_1). Au contraire, la nature des relations $F(j) = 0$ liant les invariants (j) dépend de la multiplicité dont on se propose de définir les homologues; et ces relations sont déterminées par cette multiplicité (m) particulière.

Ceci rappelé, appliquons à (g_1) et à (m) la transformation canonisante principale relative à la valeur initiale $t = t_0$ (n° 2). Le groupe (g_1) devient un groupe (G_1) par rapport aux nouvelles variables $T, X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$, qui transforme entre elles les variables $X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$. La multiplicité (m) devient une multiplicité (M); les équations (e) et les invariants (j) deviennent des équations invariantes (E) et des invariants différentiels (J); et les relations $F(J) = 0$, de même forme que les relations $F(j) = 0$, servent maintenant à définir les homologues de (M).

Introduisons maintenant l'hypothèse que (m) soit définie par les équations (5) d'une solution arbitraire du système (1) (2) donné. Ce système étant, par la définition même des groupes intermédiaires, invariant par (g_1), va jouer le rôle des équations (e). Par la transformation canonisante, il deviendra le système

$$(33) \qquad \frac{\partial X_0}{\partial T} = 0, \qquad \frac{\partial X_0}{\partial X_k} = P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

dont la solution générale est donnée par les formules (20); et ces équations (20) peuvent être considérées comme définissant la multiplicité (M), si l'on y particularise la fonction φ.

Comme T n'y figure pas, et que (G_1) transforme entre elles les variables $X_0, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ suivant un groupe de transformations de contact (ρ_1), les homologues de (M) seront définies par le système (33) et par des relations entre les invariants différentiels $(\bar{J})$ de (ρ_1), qui sont aussi des invariants différentiels de (G_1); et ces relations $\mathfrak{F}(\bar{J}) = 0$ pourront être écrites si l'on connaît les invariants $(\bar{J})$ et si l'on se donne la multiplicité (20) [1].

[1] La fonction φ étant arbitraire, (M) ne peut satisfaire à aucune équation, invariante par (G_1), de forme indépendante de φ, qui ne soit une conséquence des équations (33).

Or ces invariants $(\bar{J})$ sont liés à des invariants correspondants $(\bar{j})$ de (g_1) par l'intermédiaire de la transformation canonisante; et l'on peut supposer, pour fixer les idées, que ces invariants $(\bar{J})$ sont formés avec des dérivées prises uniquement par rapport à $X_1, \ldots, X_n$, puisque ce sont ces variables qui figurent comme variables indépendantes dans les équations (20) de (M). Comme la transformation canonisante contient l'équation $T = t$, les invariants $(\bar{j})$ ne contiendront eux-mêmes que les dérivées de $x_0, p_1, \ldots, p_n$ par rapport à $x_1, \ldots, x_n$; t y interviendra seulement sous forme finie.

Inversement, un invariant différentiel j de (g_1), ne contenant aucun signe de dérivation par rapport à t, devient par la transformation canonisante un invariant J de (G_1) ne contenant aucun signe de dérivation par rapport à T. Comme (G_1) contient (G_0), cet invariant ne doit pas changer par une translation relative à la seule variable T; c'est-à-dire qu'il ne contient pas T : c'est donc un des invariants $(\bar{J})$, et, par conséquent, j était l'un des invariants $(\bar{j})$.

Comme, de plus, la transformation canonisante principale considérée se réduit à la transformation identique quand on y néglige la formule $T = t$, et qu'on y remplace t par t_0 (n° 2), on passe de $\bar{j}$ à $\bar{J}$ par cette simple particularisation de la variable t en la constante t_0 [1].

Enfin, la transformation canonisante principale changeant la multiplicité (m), définie par les équations (5), en la multiplicité (M), définie par les équations (20), on peut se donner arbitrairement celle-ci, sous forme rationnelle, et en déduire les relations $\mathcal{F}(\bar{J}) = 0$ qui caractérisent les multiplicités homologues : puis passer de là aux relations $\mathcal{F}(\bar{j}) = 0$ cherchées.

On voit par là que, à tout groupe intermédiaire (g_1) dont les équations de définition sont rationnelles, correspond un système différentiel rationnel, définissant des intégrales $x_0 = \Phi(t \mid x_1, \ldots, x_n)$ de l'équation donnée (2); et tel que la solution générale de ce système, supposée écrite sous la forme (5), se déduit d'une solution particulière

(1) Il résulte déjà de notre précédent travail qu'on passe du groupe intermédiaire $(\bar{g}_0)$ au groupe (ρ_1) correspondant, qui exprime la loi d'échange des caractéristiques par les transformations de (g_1), en faisant abstraction de celles des équations de définition où figurent des dérivées par rapport à t, et en faisant $t = t_0$. (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 229.)

quelconque au moyen des transformations du groupe intermédiaire considéré (g_1). Ce système est donc, en étendant un peu la signification du mot, un système automorphe relatif au groupe (g_1). De plus, ce système différentiel admet la solution qui se réduit, pour $t = t_0$, à une fonction rationnelle de $x_1, \ldots, x_n$ arbitrairement choisie.

14. Le groupe spécifique possède donc, relativement à l'équation aux dérivées partielles (2) elle-même, et indépendamment de toute méthode d'intégration de cette équation, la double propriété suivante : 1° tout système différentiel rationnel, définissant x_0 en fonction de $t, x_1, \ldots, x_n$, qui n'admet comme solutions que des solutions de la proposée, est invariant par le groupe spécifique (1); 2° tout système différentiel, de la nature précédente, dont la solution générale possède le degré minimum de généralité, est un système automorphe relatif au groupe spécifique : c'est-à-dire que sa solution générale (2) se déduit d'une solution particulière quelconque par la transformation générale du groupe spécifique.

Remarquons enfin que, d'après le mode de construction indiqué, pour de tels systèmes automorphes, au numéro précédent, les solutions d'un tel système pourront être caractérisées séparément par les multiplicités (20) auxquelles elles se réduisent, respectivement, pour $t = t_0$. Or le groupe spécifique se réduit, pour $t = t_0$, au groupe de rationalité. Celui-ci est donc le groupe de transformations de contact de l'espace à $n+1$ dimensions qui exprime la loi d'échange des *données initiales* des solutions du système automorphe considéré (d'ordre de généralité minimum) par les transformations du groupe spécifique. On peut dire, en d'autres termes, que le groupe de rationalité donne la loi d'échange des solutions des systèmes automorphes rationnels considérés (d'ordre de généralité minimum) par les transformations du groupe spécifique.

Quant à la méthode employée, fondée sur le fait que le groupe spécifique contient le groupe (g_0) qui laisse invariante chaque solution

(1) Effectuer dans un tel système une transformation des variables $t, x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ suppose, bien entendu, qu'on le considère, ce qui est toujours possible, comme contenant les équations (2).

(2) Supposée écrite sous la forme (5).

de la proposée, il est clair qu'elle permettrait de tirer parti, de même, de toute autre propriété spéciale de la proposée, s'exprimant par des formules rationnelles : par exemple de la rationalité de n'importe quels invariants, différentiels ou intégraux, des caractéristiques.

III. — Étude sommaire du cas $n = 1$.

15. Dans le cas de l'équation à deux variables indépendantes

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = \mathrm{W}(t \mid x_0, x_1 \mid p_1), \qquad p_1 = \frac{\partial x_0}{\partial x_1}, \tag{34}$$

le groupe de rationalité étant un sous-groupe du groupe de transformations de contact du plan, et ces sous-groupes ayant tous été déterminés par S. Lie, on peut analyser sans peine les cas de réduction possibles, et en donner des exemples ([1]).

Si le groupe de rationalité (ρ) est un *groupe de transformations de contact infini et irréductible*, il y a deux cas possibles :

1° Le groupe (ρ) est le *groupe de transformations de contact transformant x_1, p_1 entre eux. Exemple :*

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = x_0\,\theta(t) + \mathrm{H}(t \mid x_1, p_1). \tag{35}$$

Une quadrature réduit le groupe de rationalité à celui du cas suivant, qui est un sous-groupe invariant du groupe considéré. Dans notre exemple, c'est la quadrature

$$\theta(t)\,dt = \frac{du}{u},$$

qui fournit le changement de variable $x_0 = u\overline{x_0}$.

2° Le groupe (ρ) est le *groupe qui laisse invariant $p\,dx$ à une différentielle totale additive près. Exemple :*

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = \mathrm{H}(t \mid x_1, p_1). \tag{36}$$

([1]) Les exemples que nous donnons sont tirés de la théorie des équations de Lie généralisées. (*Comptes rendus Ac. des Sc.*, t. CXXV, 1897, p. 1019.)

L'intégration se fera en calculant une intégrale particulière d'un système différentiel ordinaire du deuxième ordre, et en effectuant ensuite deux quadratures. Le système du deuxième ordre qui s'introduit a, en fait, un multiplicateur rationnel; si on l'intègre complètement, une quadrature suffit pour achever.

Sur l'exemple (36), on constate que l'équation des caractéristiques admet les solutions de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \tag{37}$$

qui ne contient pas x_0; et qui admet 1 pour multiplicateur. Une quadrature donne ensuite x_0.

16. Si le groupe (ρ) est un *groupe infini réductible*, c'est le groupe prolongé du groupe ponctuel général en x_0, x_1. On a donc des intégrations équivalentes à celle d'un système différentiel ordinaire du deuxième ordre général.

Un exemple est fourni effectivement par l'équation linéaire générale aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = \mathrm{G}(t \mid x_0, x_1) + p_1 \mathrm{H}(t \mid x_0, x_1). \tag{38}$$

Dans le *cas d'un groupe* (ρ) *fini réductible*, on a des réductions de la même nature que celles qui peuvent se présenter pour cette équation linéaire (38).

17. Si le groupe de rationalité (ρ) est un *groupe de transformations de contact fini irréductible*, trois cas sont possibles :

1° *Le groupe a dix paramètres :* ce groupe ayant la structure du groupe projectif d'un complexe linéaire de l'espace ordinaire, l'intégration peut se ramener à celle d'une équation linéaire homogène ordinaire du quatrième ordre, ayant pour groupe de rationalité le groupe projectif en question ;

2° *Le groupe a sept paramètres :* il a pour sous-groupe invariant le suivant; on passe donc par une quadrature de ce cas au suivant;

3° *Le groupe a six paramètres :* il a un sous-groupe invariant à trois paramètres, qui est intégrable. L'intégration équivaudra donc à celle d'une équation de Riccati et à des quadratures.

Comme exemple du premier cas, on peut prendre :

$$(39)\quad \begin{aligned}\frac{\partial x_0}{\partial t} = {} & \theta_1(t) + \theta_2(t)x_1 + \theta_3(t)p_1 + \theta_4(t)x_1^2 + \theta_5(t)x_1p_1 + \theta_6(t)p_1^2 \\ & + \zeta[\theta_7(t) + \theta_8(t)x_1 + \theta_9(t)p_1 + \theta_{10}(t)\zeta],\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(40)\qquad \zeta = x_0 - \frac{1}{2}x_1p_1.$$

Il suffit de garder, dans le second membre, les sept, puis les six premiers termes seulement, pour avoir des exemples des deux autres cas.

Le système des caractéristiques étant un système de Lie, les méthodes que nous avons données autrefois, pour l'intégration de tels systèmes [1], permettraient de faire effectivement, pour de tels exemples, l'intégration dans les conditions indiquées.

---

[1] *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, t. VIII, 1894, Mémoire H; t. X, 1896, Mémoire C. — *Cf.* aussi *Comptes rendus Ac. des Sc.*, t. 148, p. 332, n° 3.