

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES LERY

Sur la fonction de Green pour un contour algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 32 (1915), p. 49-136

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1915_3_32__49_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LA FONCTION DE GREEN

POUR UN CONTOUR ALGÈBRIQUE ⁽¹⁾;

PAR M. GEORGES LERY.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS DES IMAGES.

I. — Propriétés élémentaires.

1. Considérons une courbe algébrique C , dont l'équation cartésienne, les axes étant rectangulaires, est

$$F(x, y) = 0;$$

nous supposons, dans tout ce qui suit, que les coefficients du polynôme F sont réels ; pour abréger, la courbe C sera dite *réelle*.

Avec les coordonnées isotropes $z = x + iy$, $z' = x - iy$, l'équation devient

$$(1) \quad F\left(\frac{z + z'}{2}, \frac{z - z'}{2i}\right) \equiv f(z, z') = 0.$$

(1) Le Mémoire qu'on va lire m'avait été remis, il y a quelque temps, par M. Georges Lery qui désirait le présenter comme Thèse pour le doctorat. Le distingué professeur du Lycée Carnot, avant de faire une rédaction définitive, avait l'intention de compléter quelques points de son travail. Mais, comme tant d'autres élèves de l'École Normale, il a été enlevé aux siens et à la science dans la guerre actuelle ; il a trouvé une mort glorieuse le 10 septembre 1914 dans la bataille de la Marne. C'est pour moi un pieux devoir de publier dans nos *Annales* le travail de ce jeune savant, quoiqu'il n'ait pu y mettre la dernière main. M. Lery avait d'ailleurs présenté à l'Académie des Sciences plusieurs Notes d'une grande

Les coefficients du polynome f sont en général complexes; je désignerai par f' le polynome obtenu en changeant chaque coefficient en son imaginaire conjugué.

Une valeur z_0 de la coordonnée z définit un point M_0 , dont les coordonnées cartésiennes sont données par l'égalité

$$x_0 + iy_0 = z_0.$$

L'équation en z' ,

$$f(z_0, z') = 0,$$

a un certain nombre de racines; à l'une d'elles, z'_k , correspond un point M_k dont les coordonnées cartésiennes sont données par l'égalité

$$x_k - iy_k = z'_k.$$

Les points M_k sont les images de M_0 par rapport à C .

Si M_1 est image de M_0 , inversement M_0 est image de M_1 ; en effet, on a par hypothèse

$$f(z_0, z'_1) \equiv F\left(\frac{z_0 + z'_1}{2}, \frac{z_0 - z'_1}{2i}\right) = 0;$$

élégance, qui sont développées dans les premiers Chapitres du Mémoire actuel; il avait aussi fait paraître quelques articles dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. On trouvera ci-dessous la liste complète de ces diverses publications.

Émile PICARD.

TRAVAUX DE M. GEORGES LERY

(Ancien élève de l'École Normale supérieure, professeur au Lycée Carnot).

Nouvelles Annales de Mathématiques (4^e série).

Tome II (1902). — Sur les mouvements pour lesquels il existe plusieurs centres des aires.

Tome IV (1904). — Sur les complexes en involution et sur la surface de Kummer.

Tome V (1905). — Sur les trajectoires orthogonales d'une file de cercles.

Tome V (1905). — Nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert.

Tome VIII (1908). — Sur l'équilibre du corps solide.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

Tome 142 (1^{er} semestre 1906, p. 951-953). — Sur l'équation de Laplace à deux variables.

Même Tome (p. 1406-1407). — Suite du même sujet.

Tome 152 (1^{er} semestre 1911, p. 843-844). — Sur la fonction de Green pour un contour algébrique.

changeons i en $-i$; $f(z_0, z'_1)$ devient $f'(z'_0, z_1)$:

$$\begin{aligned} f'(z'_0, z_1) &\equiv F\left(\frac{z'_0 + z_1}{2}, \frac{z_1 - z'_0}{2i}\right) \\ &\equiv f(z_1, z'_0) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la relation entre M_0 et M_1 est symétrique, ce qui n'aurait pas lieu si les coefficients de F n'étaient pas réels.

Pour qu'un point M_0 coïncide avec l'une de ses images M_1 , il faut qu'on ait

$$z'_1 = z'_0,$$

z'_0 étant l'imaginaire conjuguée de z_0 ; donc

$$f(z_0, z'_0) = 0,$$

le point M_0 est sur la courbe C .

2. Une droite isotrope issue de M_0 rencontre la courbe C en des points P_1, \dots, P_k, \dots ; la seconde isotrope passant par chacun de ces points contient un point réel, qui est une image de M_0 . En s'aidant de cette remarque, on démontre sans peine les propriétés suivantes :

1° Pour que deux images du point M_0 soient confondues, il faut que M_0 soit foyer ou point multiple de la courbe C . Si M_0 tourne autour d'un foyer, deux des images s'échangent entre elles; il en est de même autour d'un point de rebroussement, mais dans ce cas les deux images sont infiniment voisines du rebroussement en même temps que M_0 .

2° Lorsque M_0 est infiniment voisin d'un point simple A de la courbe C , une image est, au second ordre près, symétrique de M_0 par rapport à la tangente en A . Si A est un point double à tangentes réelles et distinctes, deux des images de M_0 sont symétriques de ce point par rapport aux tangentes en A .

3° Si le polynôme $f(z, z')$ est du degré n par rapport aux deux variables et possède les termes en z^n et z'^n , le point à l'infini du plan complexe a ses n images à l'infini; si le degré de f par rapport à z' est $n' < n$, un point quelconque du plan a n' images; le point à l'infini a des images à distance finie, en nombre $n - n'$ au plus; ce sont les foyers singuliers de la courbe C , qui est alors circulaire.

3. L'équation (1) définit z' comme une fonction algébrique de z ,

$$z' = \zeta'(z);$$

inversement, z est une fonction $\zeta(z')$, imaginaire conjuguée de la précédente.

Les pôles de $\zeta'(z)$ sont les points ayant une image à l'infini, c'est-à-dire les images du point à l'infini. Les points critiques ont deux images au moins qui s'échangent, ce sont les foyers, les points de rebroussement, et plus généralement les points multiples dont les tangentes ne sont pas toutes distinctes.

Supposons par exemple que C soit le cercle ayant pour équation

$$zz' - R^2 = 0;$$

un point z a une seule image, l'image du centre est à l'infini; les seuls points confondus avec leur image sont les points de C. Si z décrit la région A intérieure au cercle, z' reste à l'extérieur, car z' ne peut pénétrer dans A qu'en traversant C, et alors z traverse C au même point et sort de A.

II. — Images successives d'un point.

4. Soit M' l'une des images de M ; M' représente dans le plan complexe une des déterminations de la fonction $\zeta'(z)$.

Donnons à M une position initiale M_0 , et soit M_1 la position de M' ; on peut faire décrire à M un chemin L_0 allant de M_0 en M_1 , de manière que M' ne revienne pas en M_0 ; M' décrira un chemin L_1 , allant de M_1 à un point M_2 , image de M_1 . Si M décrit L_1 , M' décrira un chemin L_2 allant de M_2 à l'une de ses images M_3 ; et ainsi de suite. On définit de cette façon une suite de points, M_0, M_1, M_2, \dots , dont chacun est image du suivant; cette suite est bien déterminée si aucun des chemins L_0, L_1, \dots ne passe par un point critique de $\zeta'(z)$.

5. Prenons comme exemple une ellipse E, rapportée à ses axes; les coordonnées d'un de ses points s'écrivent

$$z = a \cos t + ib \sin t, \quad z' = a \cos t - ib \sin t;$$

ces expressions satisfont, quel que soit t , à l'équation de la courbe. Lorsque t est réel, z et z' sont des imaginaires conjuguées, les points correspondants sont confondus en un point de l'ellipse; lorsque t est complexe, les points z et z' sont images par rapport à E.

Posons pour abréger

$$a = c \cos i\alpha, \quad b = ic \sin i\alpha,$$

de sorte que l'on a

$$z = c \cos(t + i\alpha), \quad z' = c \cos(t - i\alpha);$$

z étant donné, la première de ces équations fournit deux valeurs de t , à des multiples près de 2π ; en portant ces valeurs dans la seconde équation, on a les deux points z' images de z . Je mets en évidence les parties réelle et imaginaire de t en posant

$$t = \mu - i\lambda - i\alpha.$$

D'où le point z et ses images successives

$$\begin{aligned} z &= c \cos(\mu - i\lambda) \\ \zeta_1 &= c \cos(\mu + i\lambda + 2i\alpha), & \zeta_{-1} &= c \cos(\mu + i\lambda - 2i\alpha), \\ \zeta_2 &= c \cos(\mu - i\lambda - 4i\alpha), & \zeta_{-2} &= c \cos(\mu - i\lambda + 4i\alpha), \\ &\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \zeta_n &= c \cos(\mu - \varepsilon i\lambda - 2\varepsilon n i\alpha), & \zeta_{-n} &= c \cos(\mu - \varepsilon i\lambda + 2\varepsilon n i\alpha), \\ &\varepsilon &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Ainsi le point z est l'origine de deux suites, ζ_1, ζ_2, \dots et $\zeta_{-1}, \zeta_{-2}, \dots$.

Toutes ces images successives sont sur une même branche H d'hyperbole, homofocale à E et passant par z ; la droite qui joint deux images consécutives est parallèle à la tangente à l'hyperbole H en l'un des points où elle rencontre E. Il suffit de faire la figure pour voir que, si z est intérieur à E, toutes ses images sont extérieures et s'éloignent à l'infini; d'ailleurs, pour n très grand, ζ_n et ζ_{-n} sont comparables à $e^{2n|\alpha|}$.

6, Un calcul analogue montre que les images d'un point z par rapport à une hyperbole sont distribuées sur l'ellipse homofocale qui passe par z ; elles sont en nombre fini si l'angle des asymptotes est

commensurable avec π , sinon, il y en a une infinité, et l'on en trouve sur tout arc, si petit qu'il soit, de l'ellipse.

On voit par ces exemples que les images successives peuvent présenter des dispositions diverses suivant la courbe C considérée. Cherchons si une suite d'images peut tendre vers un point A à distance finie.

En prenant n suffisamment grand, les images M_{n-1} , M_n , M_{n+1} sont aussi voisines que l'on veut de A ; M_n est aussi voisin que l'on veut de deux de ses images. Donc A est point multiple de la courbe C ; supposons le point double. En transportant en A l'origine des coordonnées et en donnant aux axes une direction convenable, l'équation de la courbe devient

$$z^2 - 2pzz' + z'^2 + \dots = 0,$$

p étant réel et les termes non écrits étant du troisième degré au moins; partons d'un point z très voisin de A et voyons si ses images successives tendent vers A . On a

$$\zeta'_1 = (p \pm \sqrt{p^2 - 1})z + \dots$$

Premier cas. — Le point double est isolé : $p^2 > 1$; je pose

$$p = \pm \operatorname{Ch} \alpha \quad (\alpha > 0),$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \zeta'_1 &= e^{\pm \alpha} z + \dots, \\ \zeta_n \text{ ou } \zeta'_n &= e^{\pm n\alpha} z + \dots \end{aligned}$$

La suite d'images correspondant au facteur $e^{n\alpha}$ ($n > 0$) s'éloigne de A , celle qui correspond à $e^{-n\alpha}$ tend vers A .

Deuxième cas. — Les tangentes en A sont réelles : $p^2 < 1$; je pose

$$p = \cos \alpha,$$

d'où

$$\begin{aligned} \zeta'_1 &= e^{\pm i\alpha} z + \dots, \\ \zeta_n \text{ ou } \zeta'_n &= e^{\pm in\alpha} z + \dots \end{aligned}$$

Ainsi ζ_n ne tend pas vers A en général.

Troisième cas. — On a $p^2 = 1$, le point A est un rebroussement. La fonction $\zeta'(z)$ n'est plus holomorphe; ce cas de l'itération n'a pas été

étudié comme les précédents et il est probable qu'on ne peut donner de propriété générale. On trouve dans certains cas que les images successives tendent vers A , mais arrivent en A suivant une direction indépendante du point initial z .

En résumé, si l'on se borne aux cas précédents, on voit qu'un point A vers lequel tend une suite d'images successives est un point double isolé, ou un point de rebroussement, ou bien le point à l'infini, A ce point de vue, on peut considérer le point à l'infini dans le plan d'une ellipse comme un point double isolé de la courbe, puisqu'il est confondu avec ses deux images; d'ailleurs la courbe transformée de l'ellipse par inversion a un point double isolé vers lequel tendent les images successives. De même, pour une hyperbole, le point à l'infini est point double à tangentes réelles et n'est pas limite pour les images successives.

III. — Régions successives.

7. Je considère une aire A simplement connexe, dont le contour C appartient à une courbe algébrique et ne présente pas de point singulier; A peut contenir le point à l'infini. Un point z situé sur C est confondu avec une de ses images, ζ' ; lorsque z quitte C et vient dans A , ζ' va à l'extérieur de A , tout au moins quand z reste voisin de C .

S'il n'y a dans A aucun point critique de $\zeta'(z)$, le point ζ' est bien déterminé quel que soit z dans A ; il parcourt une région A_1 , contiguë à A le long de C , mais qui peut revenir sur A ; nous verrons que A et A_1 recouvrent le plan une ou plusieurs fois.

Par exemple, si A est la partie du plan extérieure à une ellipse, la construction géométrique des images (n° 5) montre que A_1 recouvre deux fois l'intérieur de l'ellipse et une fois l'extérieur, de sorte que A et A_1 recouvrent deux fois le plan.

S'il y a dans A des points critiques de $\zeta'(z)$, je considère les différentes déterminations de cette fonction qui s'échangent avec celle qui prend sur C la valeur de z' ; elles définissent plusieurs images de z qui parcourent une région A_1 lorsque z décrit A ; A_1 est contiguë à A le long de C , mais a un double bord C_1 , qui est le lieu, lorsque z décrit C , des images considérées de z (sauf une, qui décrit C). Quand z traverse C et entre dans A_1 , cette dernière image entre dans A ; les autres

franchissent C_1 et entrent dans une région A_2 . On définit de même des régions successives A_3, A_4, \dots

Supposons, par exemple, que A soit la partie du plan intérieure à une ellipse E ; z a deux images qui s'échangent autour des foyers; lorsque z est sur E , l'une est confondue avec z , l'autre est sur une ellipse homofocale E_1 ; la région A_1 est l'anneau compris entre E et E_1 . Les régions A_2, A_3, \dots sont des anneaux analogues qui s'étendent à l'infini et recouvrent le plan une fois.

8. Lorsque le contour C est formé de plusieurs arcs d'une même courbe algébrique, se rejoignant en des points singuliers, il faut considérer les différentes déterminations de $\zeta'(z)$ qui prennent sur C la valeur z' , et les déterminations qui se déduisent des précédentes lorsque z tourne autour des points critiques situés dans A . Toutes les images correspondantes servent à définir A_1 , puis A_2, \dots

Ainsi, relativement à la lemniscate ayant pour équation

$$f(z, z') \equiv (z^2 - c^2)(z'^2 - c^2) - c^4 = 0,$$

un point z a deux images, ζ' et ζ'_1 , symétriques par rapport à l'origine. Les z des foyers sont déterminés par le système

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = 0;$$

on trouve ainsi $z = \pm c$. Soit A la partie du plan extérieure aux deux boucles; cherchons quelle est la région A_1 . Si z décrit la boucle de droite, ζ' par exemple est confondu avec z , ζ'_1 décrit la boucle de gauche; on en conclut que A_1 se compose de l'intérieur des deux boucles. Si z vient dans A_1 , par exemple entre dans la boucle de droite, ζ' et ζ'_1 viennent dans A . Ainsi A_2 se confond avec A , il y a un nombre limité de régions successives.

Il en est de même lorsque A est la région comprise entre les deux branches d'une hyperbole dont l'angle des asymptotes est commensurable avec π ; si cette dernière condition n'est pas remplie, il y a une infinité de régions successives qui recouvrent le plan une infinité de fois.

9. Enfin, si l'aire A est multiplement connexe, il faudra considérer toutes les déterminations $\zeta'(z)$ qui prennent la valeur z' lorsque z vient sur l'un des bords; elles serviront à définir A_1, A_2, \dots . Ainsi, en prenant pour A la région extérieure aux deux ovals d'une courbe de Cassini

$$(z^2 - c^2)(z'^2 - c^2) - a^4 = 0 \quad (a < c),$$

on voit que A_1 se compose de l'intérieur des ovals, que A_2 se confond avec A .

On étend sans peine les considérations précédentes au cas où l'aire A est limitée par des courbes algébriques différentes.

CHAPITRE II.

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE LA FONCTION DE GREEN.

I. — La fonction $g(z)$.

1. Étant donnée une aire A , limitée par un contour analytique C , soit G la fonction de Green, nulle sur C , harmonique dans A , sauf en un point $m_0(z_0, z'_0)$, où elle est infinie comme $\frac{1}{2} \log \frac{1}{(z - z_0)(z' - z'_0)}$. On peut poser

$$2G = g(z) + g'(z');$$

les fonctions $g(z)$ et $g'(z')$ sont imaginaires conjuguées; elles sont analytiques dans A , sauf en m_0 , où elles sont infinies respectivement comme $\log \frac{1}{z - z_0}$ et $\log \frac{1}{z' - z'_0}$; leurs parties réelles sont nulles sur C . La fonction $g(z)$ est déterminée à une constante près $i\hbar$, purement imaginaire.

Si A est simplement connexe, $e^{g(z)}$ est uniforme et analytique dans A , sauf en m_0 où elle est infinie comme $\frac{1}{z - z_0}$. La formule

$$Z = e^{-g(z)}$$

établit la représentation conforme de A sur un cercle de rayon un, dont le centre correspond à m_0 . La fonction $\frac{dg}{dz}$ est uniforme et analytique, sauf en m_0 où elle est infinie comme $\frac{1}{z-z_0}$; elle n'a pas de zéro à l'intérieur de A, sinon $\frac{dZ}{dz}$ s'annulerait aussi. Elle a des zéros sur le contour, aux points où se rejoignent deux courbes analytiques distinctes faisant partie de C.

Si A est multiplement connexe, $g(z)$ augmente de quantités constantes $i\alpha_1, i\alpha_2, \dots$ quand z décrit chacun des bords; en choisissant convenablement les sens de parcours, on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = 2\pi.$$

On voit que les quantités α ne sont pas toutes nulles, e^g n'est pas uniforme dans A. Mais $\frac{dg}{dz}$ est uniforme et analytique, avec le pôle z_0 et p zéros, si l'ordre de connexion de A est p .

Lorsque A contient le point à l'infini, on sait que G reste finie en ce point; donc $g(z)$ est de la forme

$$g(z) = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \dots,$$

lorsque $|z|$ est infiniment grand, et $\frac{dg}{dz}$ est nulle comme $\frac{-b}{z^2}$.

II. — Prolongement analytique.

2. Considérons deux fonctions imaginaires conjuguées,

$$z = f(t), \quad z' = f'(t),$$

analytiques dans un cercle γ défini par l'inégalité

$$|t| \leq 1.$$

Lorsque t varie en restant réel, z et z' sont les deux coordonnées d'un point qui décrit un arc d'une courbe analytique C. Lorsque t est complexe, z et z' ne sont plus imaginaires conjuguées, mais définissent deux points m et m_1 , images l'un de l'autre par rapport à C. Si t décrit

la moitié supérieure de γ , m décrit une région α et m_1 une région α_1 , séparées l'une de l'autre par un arc de C .

Ces propriétés bien connues étant rappelées, je considère une fonction

$$x' = \varphi(z')$$

analytique dans α_1 et sur C ; si z' décrit C , le point x' , figuré dans le plan complexe, parcourt une courbe analytique Γ ; si z' décrit α_1 , x' décrit une région attenante à Γ .

Soient ζ l'image de z' par rapport à C , ξ l'image de x' par rapport à Γ ; ξ est une fonction de ζ

$$\xi = \psi(\zeta),$$

analytique dans l'aire α ou dans une portion de cette aire; $\psi(\zeta)$ est le prolongement analytique de $\varphi'(z)$ au delà de C , car ces deux fonctions prennent une même valeur en chaque point de C , ainsi que leurs dérivées.

On peut écrire

$$\xi = \xi \{ x' [z'(\zeta)] \}.$$

3. Il est possible d'étendre le domaine α où $\varphi'(z)$ est prolongée, pourvu que z' reste fonction analytique de ζ et que ξ reste fonction analytique des valeurs x' que prend $\varphi(z')$.

En particulier, si les courbes C et Γ sont algébriques, on n'est arrêté dans l'extension de α que si α_1 vient à contenir un foyer de C ou si l'une des valeurs x' donne un foyer de Γ , en entendant ici par foyer tout point critique des images.

4. Appliquons ces remarques à la fonction $x = g(z)$, dont la partie réelle est nulle sur C ; la courbe Γ est l'axe imaginaire, qui a pour équation

$$\xi + x' = 0;$$

ainsi

$$\xi(x') = -x'.$$

Donc, au point ζ image de z par rapport à C , on a

$$(I) \quad \begin{cases} g(\zeta) = -g'[z'(\zeta)], \\ g'(\zeta') = -g[z(\zeta')]. \end{cases}$$

En dérivant les équations précédentes, on obtient

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{dg(\zeta)}{d\zeta} = -\frac{dg'(z')}{dz'} \frac{dz'}{d\zeta}, \\ \frac{dg'(\zeta')}{d\zeta'} = -\frac{dg(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta}. \end{cases}$$

La fonction de Green, $G(z, z')$ satisfait par suite à la condition

$$\begin{aligned} G(\zeta, \zeta') &= \frac{1}{2}[g(\zeta) + g'(\zeta')] \\ &= -\frac{1}{2}[g'(z') + g(z)] \\ &= -G(z, z'). \end{aligned}$$

5. Au voisinage du point z_0 où $g(z)$ est infini, on a

$$g(z) = \log \frac{1}{z - z_0} + \dots,$$

la partie non écrite étant une fonction analytique; soit z_1 une image de z_0 ; l'équation

$$z'(\zeta) - z_0 = 0$$

admet la racine $\zeta = z_1$, que je suppose simple; au voisinage de z_1 , on a

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= -g'(z') \\ &= -\log \frac{1}{z'(\zeta) - z_0} + \dots \\ &= -\log \frac{1}{\zeta - z_1} + \dots \end{aligned}$$

Ainsi, z_1 est aussi un infini logarithmique de la fonction g prolongée.

Pour e^g , z_1 est un zéro; pour $\frac{dg}{d\zeta}$, un pôle simple.

Si le point z_1 est à l'infini, on trouve de même les développements

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= -\log \zeta + \dots, \\ e^g &= \frac{1}{\zeta} + \dots, \\ \frac{dg}{d\zeta} &= -\frac{1}{\zeta} + \dots \end{aligned}$$

Enfin, si le domaine A contient le point à l'infini et si $g(z)$ est analytique en ce point, on a, si (z) est infiniment grand,

$$g(z) = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \dots;$$

en une image du point à l'infini, $g(\zeta)$ est analytique.

6. Soit l'aire A simplement connexe, dans laquelle on étudie $g(z)$; nous avons défini l'aire A_1 , image de A par rapport à son contour C ; en un point m_1 de A_1 , image du point M de A , on peut calculer $g(z)$ par l'équation (I). Ainsi $g(z)$ est définie dans A_1 , en particulier uniforme si le point m_1 est l'image d'un seul point m de A ; $g(z)$ est infinie aux images de m_0 .

De A_1 on passera à A_2 , et ainsi de suite. Si le plan est recouvert une seule fois par les régions successives, e^g et $\frac{dg}{dz}$ sont uniformes; on connaît les pôles et les zéros de la première, les pôles de la seconde; ces points sont les images successives de z_0 . On saura donc former ces fonctions. Si le plan est recouvert k fois, les fonctions e^g et $\frac{dg}{dz}$ ont k déterminations.

Si l'aire A est multiplement connexe, $g(z)$ présente des périodes comme une intégrale abélienne; e^g n'est plus uniforme dans le plan, mais $\frac{dg}{dz}$ l'est encore si les régions successives couvrent le plan une seule fois.

On sera donc renseigné sur la nature et les singularités de ces fonctions si l'on a étudié les régions successives.

7. Passons d'un point z de A à l'image ζ_1 , située dans A_1 , puis à l'image ζ_2 dans A_2 ; nous avons

$$g(\zeta_2) = g(z), \quad e^{g(\zeta_2)} = e^{g(z)},$$

$$\frac{dg(\zeta_2)}{d\zeta_2} = \frac{dg(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta_2}.$$

On voit une analogie entre $e^{g(z)}$ et les fonctions fuchsiennes, entre $\frac{dg}{dz}$ et les fonctions θ fuchsiennes de degré un. Effectivement, si le bord de A est formé de cercles, la relation algébrique entre ζ_2 et z devient

une substitution linéaire, et si les régions successives couvrent le plan, ou une partie du plan, une seule fois, les fonctions considérées sont fuchsiennes ou kleinéennes.

Les fonctions $g(z)$ fournissent donc des exemples de fonctions qui restent inaltérées quand z subit certaines transformations algébriques, déterminées par la courbe qui limite A .

III. — Les images sur une surface de Riemann.

8. Avant d'appliquer les résultats précédents à la recherche de $g(z)$, il est utile de transporter le problème sur la surface de Riemann Σ attachée à la courbe C , en supposant le bord de A formé d'une seule courbe algébrique.

Si à chaque valeur de z correspondent k valeurs de ζ , Σ est composée de k feuillets; les points de ramification sont les foyers et les points de rebroussement de C ; les feuillets se raccordent le long de lignes qui joignent deux à deux ces points de ramification. Un point z du plan est la projection de k points de la surface; soient m l'un d'eux et ζ l'image correspondante; le point ζ est la projection de k points de la surface; l'un d'eux, μ , a pour image le point z ; je dirai que m et μ sont associés sur Σ ; si m vient en μ , μ vient en m .

Lorsque m et μ sont confondus sur Σ , leurs projections sur le plan sont confondues en un point situé sur la courbe C . Inversement, si un point z est sur C , c'est-à-dire est confondu avec une image ζ , les points m et μ correspondants coïncident sur Σ ; en effet, ils ont même projection sur Σ ; s'ils étaient sur deux feuillets différents, le point z aurait deux images confondues avec lui, suivant qu'on le regarde comme projection de m ou de μ , et serait un point double de C . Donc, tout point simple de C est la projection de deux points m et μ confondus, ce qui s'étend par continuité aux points multiples à tangentes réelles. On démontre facilement qu'un point double isolé est la projection de points m et μ situés sur des feuillets différents.

Tout arc de C est la projection d'un arc de courbe tracé sur Σ ; on peut regarder la courbe C comme dessinée sur Σ ; elle est formée d'ovales, qui sont fermés et ne se coupent pas mutuellement, puisqu'il n'y a pas de point double sur une surface de Riemann.

9. Supposons qu'il existe sur Σ une région B, d'un seul tenant, dont le bord se compose d'un ou plusieurs des ovals qui forment C; je considère une fonction $g(z, \zeta')$, régulière en chaque point de B, sauf au point analytique $m_0(z = z_0, \zeta' = \zeta'_1)$, où elle est infinie comme $\log \frac{1}{z - z_0}$, et dont la partie réelle est nulle sur le bord de B; j'admets pour le moment que cette fonction existe. On peut la prolonger au delà du bord de B et déduire sa valeur au point μ de celle qu'elle prend au point m .

Quand m décrit B, μ décrit une région B_1 ; μ ne peut entrer dans B sans traverser le bord; alors m sort de B au même point et entre dans B_1 . Donc, B et B_1 couvrent toute la surface une seule fois.

Par suite, la fonction g a une valeur en tout point de Σ , à des périodes près; elle possède deux infinis logarithmiques

$$\begin{aligned} m_0 : \quad z &= z_0 & \zeta' &= \zeta'_1, \\ \mu_0 : \quad z &= z_1 & \zeta' &= \zeta'_0; \end{aligned}$$

c'est une intégrale de troisième espèce, dont l'expression est

$$g = \int^{z, \zeta'} \frac{Q(z, \zeta') dz}{\Delta(z, \zeta') \frac{\partial f}{\partial \zeta'}},$$

en représentant par

$$\Delta(z, z') \equiv \begin{vmatrix} z & z' & 1 \\ z_0 & z'_0 & 1 \\ z_1 & z'_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

l'équation de la droite $m_0 \mu_0$, et par

$$Q(z, z') = 0$$

l'équation d'une courbe adjointe qui passe par les points communs à la courbe C et à la droite Δ , à l'exception de m_0 et μ_0 .

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

I. — Cas élémentaires.

1. *Cercle.* — A la région A intérieure au cercle correspond par image la région extérieure A_1 ; donc la fonction e^g est uniforme dans le plan. Elle a un pôle z_0 et un zéro z_1 , image de z_0 ; elle est régulière à l'infini comme elle l'est au centre du cercle; c'est donc une fonction rationnelle, connue à un facteur constant près :

$$e^g = K \frac{z - z_1}{z - z_0}.$$

On peut choisir arbitrairement un point du cercle où g s'annule, soit $P(z = \alpha)$; on a

$$e^g = \frac{z - z_1}{z - z_0} \frac{\alpha - z_0}{\alpha - z_1}.$$

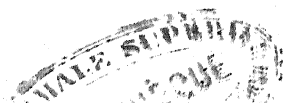
Soient M, M_0 et M_1 les points dont les premières coordonnées sont z, z_0 et z_1 ; nous avons

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} [g(z) + g'(z')] \\ &= \log \frac{MM_1 \cdot PM_0}{MM_0 \cdot PM_1}. \end{aligned}$$

En particulier, si le cercle a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, on peut prendre $\alpha = 1$ et l'on a $z'_0 z_1 = 1$; on en conclut

$$e^g = \frac{z'_0 z - 1}{z - z_0}.$$

Demi-cercle. — Soit l'aire A limitée par un cercle C et un diamètre D de ce cercle. Les régions successives, obtenues par réflexion sur C et D, couvrent le plan une seule fois; donc e^g est uniforme dans le plan; cette fonction a un pôle z_0 , deux zéros qui sont les images z_1 et z_2 de z_0 par rapport à C et D, et enfin un pôle z_3 , image de z_1 par



rapport à D et de z_2 par rapport à C. On a donc

$$e^g = K \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - z_0)(z - z_3)}.$$

On détermine k pour que g s'annule en un point du contour.

La même méthode s'applique à un secteur circulaire dont l'angle est sous-multiple de 2π .

2. *Aire comprise entre deux droites parallèles.* — L'aire A est comprise entre les droites D_1 et D_2 représentées par les équations

$$z + z' = 0, \quad z + z' = 2l.$$

L'aire A_1 est obtenue par réflexion sur D_1 , l'aire A_2 par réflexion sur D_2 ; on peut passer de A_1 à A_2 par la translation $2l$. Donc $e^{g(z)}$ est uniforme dans le plan et admet la période $2l$; en outre, cette fonction tend vers zéro lorsque z s'éloigne à l'infini dans A; c'est donc une fonction rationnelle de $e^{\frac{i\pi z}{l}}$:

$$e^g = k \frac{e^{\frac{i\pi z}{l}} - e^{\frac{i\pi z_1}{l}}}{e^{\frac{i\pi z}{l}} - e^{\frac{i\pi z_0}{l}}};$$

on désigne par z_0 et z_1 le pôle situé dans A et le zéro situé dans A_1 ; ils sont images l'un de l'autre par rapport à D_1 :

$$z'_0 + z_1 = 0;$$

enfin k est une constante que l'on détermine en écrivant que g s'annule en un point du bord de A, par exemple à l'origine. On obtient ainsi

$$e^g = \frac{1 - e^{\frac{i\pi z_0}{l}}}{1 - e^{-\frac{i\pi z'_0}{l}}} \frac{e^{\frac{i\pi z}{l}} - e^{-\frac{i\pi z'_0}{l}}}{e^{\frac{i\pi z}{l}} - e^{\frac{i\pi z_0}{l}}}.$$

Rectangle. — L'aire A est un rectangle, limité par les droites

$$\begin{aligned} \Delta_1 : z + z' &= 0; & \Delta_2 : z + z' &= 2l; \\ \Delta_3 : z - z' &= 0; & \Delta_4 : z - z' &= 2im. \end{aligned}$$

On voit, comme dans l'exemple précédent, que e^g admet les périodes $2l$

et $2im$; il suffit de considérer cette fonction dans un rectangle dont A est un quart et qui a pour centre l'origine; e^g y est méromorphe; elle admet un pôle z_0 , deux zéros z_1 et $z_2 = -z_1$, images de z_0 par rapport à Δ_1 et Δ_3 , et enfin un pôle $z_3 = -z_0$, image de z_1 par rapport à Δ_3 et de z_2 par rapport à Δ_1 . On a donc

$$e^g = k \frac{p z - p z_1}{p z - p z_0},$$

p étant la fonction de Weierstrass construite sur les périodes $2l$ et $2im$, et k une constante, qu'on peut prendre égale à un, si l'on veut que g s'annule à l'origine. Comme z_1 est image de z_0 par rapport à Δ_1 , on a

$$z_1 = -z'_0.$$

La représentation conforme de A sur un cercle est donnée par la formule

$$Z = e^{-g(z)},$$

le centre du cercle correspondant au point z_0 .

II. — Aire dans laquelle ζ est uniforme.

3. Je suppose que le contour de l'aire A appartient à une seule courbe algébrique C et ne présente pas de point singulier, et que $\zeta(z')$ est uniforme dans A . Alors A est la projection sur le plan d'une aire B située sur un seul feuillet de la surface de Riemann Σ ; la fonction g est la même pour A et B , c'est une intégrale abélienne.

Si l'aire A est simplement connexe, elle a un seul bord, le long duquel g acquiert la période $2\pi i$; e^g est uniforme dans B et par suite sur toute la surface Σ ; elle n'a qu'un pôle z_0 et un zéro z_1 ; c'est une fonction rationnelle; comme elle n'a qu'un pôle, lequel est arbitraire, la courbe C est unicursale.

Soit t le paramètre dont z et ζ' sont des fonctions rationnelles; on peut supposer que t est réel sur la courbe, c'est-à-dire quand z et ζ' sont des imaginaires conjuguées. Appelons t_0 et t_1 les valeurs de t qui donnent les égalités

$$\begin{aligned} z(t_0) &= z_0, & \zeta'(t_0) &= z'_1, \\ z(t_1) &= z_1, & \zeta'(t_1) &= z'_0; \end{aligned}$$

t_0 et t_1 sont imaginaires conjuguées; et l'on a

$$e^g = k \frac{t - t_1}{t - t_0},$$

d'où la fonction de Green

$$G = \log k k' \frac{(t - t'_0)(t' - t_0)}{(t - t_0)(t' - t'_0)}.$$

On détermine la constante k en écrivant que G est nulle sur la courbe C , c'est-à-dire lorsque t est réel :

$$k k' = 1;$$

on peut prendre $k = 1$.

4. *Extérieur de l'ellipse.* — L'ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

on a les expressions de z et ζ'

$$z = \frac{2at + ib(1 - t^2)}{1 + t^2}, \quad \zeta' = \frac{2at - ib(1 - t^2)}{1 + t^2};$$

on tire de ces égalités

$$t = \frac{ib(z + \zeta')}{a(z - \zeta' + 2ib)},$$

$$t_0 = \frac{ib(z_0 + z'_1)}{a(z_0 - z'_1 + 2ib)}, \quad t_1 = \frac{ib(z_1 + z'_0)}{a(z_1 - z'_0 + 2ib)}.$$

La fonction e^g a pour valeur

$$e^g = \frac{(z + \zeta')(z_1 - z'_0 + 2ib) - (z_1 + z'_0)(z - \zeta' + 2ib)}{(z + \zeta')(z_0 - z'_1 + 2ib) - (z_0 + z'_1)(z - \zeta' + 2ib)}.$$

La formule

$$Z = e^{-g(z)}$$

fait correspondre à l'aire A un cercle, dont le centre est homologue de z_0 . En particulier, si z_0 est à l'infini, on a

$$t_0 = i, \quad t_1 = -i,$$

$$Z = \frac{t - i}{t + i},$$

d'où l'on tire

$$t = i \frac{1+Z}{1-Z},$$

$$z = \frac{a+b}{iZ} + i(a-b)Z;$$

remplaçons $i(a-b)Z$ par Z_1 ; nous retrouvons la formule connue

$$z = Z_1 + \frac{c^2}{Z_1}.$$

5. *Une cubique à point double isolé*, non circulaire, a deux foyers; elle divise le plan en deux régions; si l'une d'elles contient les foyers, on sait former e^s pour l'autre. Il en est ainsi pour la cubique

$$y = ax^3 - \frac{1}{3}x^2 \quad (a > 0),$$

relativement à la région qui ne contient pas l'origine. De même pour l'intérieur d'un limaçon de Pascal à point double isolé, parce que la courbe a un seul foyer, qui est à l'extérieur.

Épicycloïdes. — Si un cercle γ roule extérieurement sur un cercle fixe γ_1 , un point entraîné par γ décrit une épicycloïde C , qui est algébrique et unicursale, lorsque le rapport des rayons est un nombre entier ou fractionnaire. Si le point mobile est intérieur à γ , les points doubles de C sont isolés; démontrons que les foyers sont situés à l'extérieur de C .

En appelant R et R' les rayons de γ_1 et de γ , a la distance du point considéré au centre de γ , les coordonnées de ce point ont pour expressions

$$z = (R + R') e^{i\varphi} + a e^{i \frac{R+R'}{R'} \varphi},$$

$$z' = (R + R') e^{-i\varphi} + a e^{-i \frac{R+R'}{R'} \varphi}.$$

Les foyers sont les points z qui satisfont à la condition

$$\frac{dz}{dz'} = 0$$

ou

$$(R + R') e^{i\varphi} + a \frac{R + R'}{R'} e^{i \frac{R+R'}{R'} \varphi} = 0.$$

On trouve ainsi

$$\varphi = -i \frac{R'}{R} \left[\log \frac{R'}{a} + (2h+1)\pi i \right],$$

$$z = R \left(\frac{R'}{a} \right)^{\frac{R'}{R}} e^{(2h+1)\frac{R'}{R}\pi i},$$

h étant un entier arbitraire. Or, sur le rayon vecteur défini par l'angle $\varphi = (2h+1)\frac{R'}{R}\pi$, il y a un point de C

$$z_1 = (R + R' - a) e^{(2h+1)\frac{R'}{R}\pi i};$$

on constate sans peine que l'inégalité $a < R'$ entraîne $|z_1| < |z|$; le foyer est bien extérieur à C et l'on peut écrire l'expression de e^g pour la région intérieure à l'épicycloïde

$$e^g = \frac{t - t'_0}{t - t_0} \quad \left(t = \tan \frac{\varphi}{2} \right).$$

III. — Aire dans laquelle ζ n'est pas uniforme.

6. *Intérieur de l'ellipse.* — Soit A la région intérieure à une ellipse E, dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Les régions successives couvrent le plan une seule fois; e^g est uniforme, a pour pôles simples z_0 et les images $z_{\pm 2n}$, et pour zéros les images $z_{\pm 2n+1}$. Les produits infinis

$$\prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{2n}} \right), \quad \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{2n+1}} \right)$$

sont convergents quel que soit z , car $|z_p|$ est de l'ordre de grandeur de $e^{2|p|^\alpha}$ pour p infini. On a donc

$$e^{g(z)} = \frac{\prod \left(1 - \frac{z}{z_{2n+1}} \right)}{\prod \left(1 - \frac{z}{z_{2n}} \right)} H(z);$$

$H(z)$ est une fonction entière, qu'il est ici facile de déterminer, parce que nous avons une suite de contours E, E_1, \dots qui s'enveloppent mutuellement et s'éloignent à l'infini.

Soit x un point intérieur à l'ellipse; on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{dg}{dz} \frac{dz}{z-x} = \left(\frac{dg}{dz} \right)_x + \frac{1}{x-z_0},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{E_1} \frac{dg}{dz} \frac{dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{dg}{dz} \frac{dz}{z-z} - \frac{1}{x-z_1} - \frac{1}{x-z_{-1}},$$

et une suite d'équations analogues en intégrant chaque fois entre un contour et le suivant. Or, lorsque p augmente indéfiniment,

$$\lim \int_{E_p} \frac{dg}{dz} \frac{dz}{z-x} = 0,$$

car $\frac{1}{z-x}$ tend vers zéro et l'on a

$$\int_{E_p} |dg| = \int_E |dg|,$$

qui est une quantité finie. On en conclut l'égalité

$$\left(\frac{dg}{dz} \right)_x = -\frac{1}{x-z_0} + \left(\frac{1}{x-z_1} + \frac{1}{x-z_{-1}} \right) - \left(\frac{1}{x-z_2} + \frac{1}{x-z_{-2}} \right) + \dots,$$

ou, en intégrant de l'origine au point z ,

$$g(z) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \log \left(1 - \frac{z}{z_{2n}} \right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \log \left(1 - \frac{z}{z_{2n+1}} \right).$$

La fonction $H(z)$ est égale à un .

La fonction de Green a pour valeur

$$G = \frac{1}{2} \log \frac{\prod \left(1 - \frac{z}{z_{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{z'}{z'_{2n+1}} \right)}{\prod \left(1 - \frac{z}{z_{2n}} \right) \left(1 - \frac{z'}{z'_{2n}} \right)};$$

on peut la mettre sous une forme semblable à celle que l'on connaît pour le cercle; soient O, M, A_0, A_p les points dont les premières coor-

données sont o, z, z_0, z_p ; on a

$$G = \log \frac{\prod \frac{MA_{2n+1}}{OA_{2n+1}}}{\prod \frac{MA_n}{OA_n}}.$$

7. Pour calculer effectivement $g(z)$, nous pouvons nous servir des valeurs de z et z_p déjà employées :

$$z = c \cos(\mu - i\lambda), \quad z_p = c \cos(\mu_0 - \varepsilon i\lambda_0 - 2\varepsilon p i\alpha), \\ \varepsilon = (-1)^p;$$

on voit ainsi que e^g est une fonction uniforme de $\mu - i\lambda$, qui admet les périodes

$$2\omega_1 = 2\pi, \quad 2\omega_2 = 4\alpha i;$$

elle devient nulle ou infinie pour les valeurs

$$\mu - i\lambda = \pm [\mu_0 + i\lambda_0 + 2(2n+1)\alpha i + 2k\pi], \\ \mu - i\lambda = \pm (\mu_0 - i\lambda_0 + 4n\alpha i + 2k'\pi);$$

c'est une fonction elliptique dont on connaît l'expression au moyen de $p(\mu - i\lambda; 2\omega_1, 2\omega_2)$:

$$e^g = \frac{p(\mu - i\lambda) - p(\mu_0 + i\lambda_0 + \omega_2)}{p(\mu - i\lambda) - p(\mu_0 - i\lambda_0)}.$$

La représentation conforme de l'aire A sur un cercle est donnée par la formule

$$Z = \frac{p(\mu - i\lambda) - p\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{p(\mu - i\lambda) - p\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right)},$$

dans laquelle on a supposé

$$z_0 = o, \quad \mu_0 - i\lambda_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{\omega_1}{2},$$

pour que les centres des deux courbes se correspondent. On sait que Schwarz a donné, pour la même représentation, la formule

$$Z = \operatorname{sn} \frac{2K}{\pi} \operatorname{arc} \sin z;$$

il est facile de passer d'une de ces deux formules à l'autre.

Intérieur de la parabole. — On trouve par la même méthode la fonction g et la formule

$$Z = \tan^2 \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2z}{p}},$$

dans laquelle p est le paramètre de la parabole; l'origine est foyer et correspond au centre du cercle.

IV. — Contours présentant des points singuliers.

8. *Hyperbole équilatère.* — La courbe divise le plan en trois régions, A_1 et A_2 , qui contiennent chacune un foyer, et A_3 , qui contient le centre. L'équation de la courbe étant

$$z^2 + z'^2 = c^2,$$

un point z a deux images

$$\zeta_1 = \sqrt{c^2 - z'^2}, \quad \zeta_2 = -\sqrt{c^2 - z'^2};$$

ζ_1 et ζ_2 ont les mêmes images, z et $-z$; le nombre des images successives est donc limité. Si le point z est sur la branche H_1 qui limite la région A_1 , il coïncide avec ζ_1 par exemple; les points ζ_2 et $-z$ sont confondus sur l'autre branche H_2 .

Région focale A_1 . — Lorsque z parcourt A_1 , ζ_1 et ζ_2 parcourent la région A_2 et $-z$ la région A_3 ; un point de A_2 ou de A_3 est ainsi l'image d'un seul point z de A_1 ; donc, e^g est uniforme dans le plan; cette fonction a un pôle z_0 , deux zéros, $\pm \sqrt{c^2 - z_0'^2}$, et un pôle $-z_0$; c'est une fraction rationnelle

$$e^g = \frac{z^2 - (c^2 - z_0'^2)}{z^2 - z_0^2}.$$

On peut représenter l'aire A_1 sur un cercle de manière que le foyer corresponde au centre du cercle :

$$z_0 = c, \\ Z = \frac{z^2 - c^2}{z^2}.$$

Région centrale A_3 . — Si le point z est dans l'aire A_3 , l'une de ses

images, $-z$, s'y trouve également; on a donc pour g deux valeurs en tout point de A_3 . Au point ζ_1 de l'aire A_1 , image de z , on a aussi deux valeurs, $-g'(z')$ et $-g'(-z')$; la fonction e^g a deux valeurs en tout point du plan; il est à prévoir qu'elle est uniforme sur la surface de Riemann Σ .

Celle-ci se compose de deux feuillets, raccordés le long des coupures allant du foyer $F_1(z=c>0)$ à $+\infty$ et du foyer $F_2(z=-c)$ à $-\infty$, sur l'axe réel. Regardons la branche de droite H_1 comme dessinée sur le feuillet supérieur; en partant d'un point z situé sur H_1 et en lui faisant décrire une ellipse homofocale, on voit que ζ_1 , d'abord confondu avec z , décrit l'ellipse en sens contraire; les deux points passent l'un après l'autre sur le feuillet inférieur et viennent coïncider sur H_2 . La région A_3 est donc la projection d'une aire B située sur Σ et limitée d'une part par H_1 , d'autre part par une courbe H'_2 , qui est la projection de H_2 sur le feuillet supérieur.

La fonction e^g est uniforme dans B ; on peut la prolonger au delà des deux bords; comme les images successives de la région B recouvrent une seule fois Σ , e^g est uniforme sur Σ . Elle a deux pôles, qui sont les points analytiques (z_0, z'_1) et $(-z_0, -z'_1)$, et deux zéros, (z_1, z'_0) et $(-z_1, -z'_0)$; c'est une fonction rationnelle

$$e^g = \frac{\begin{vmatrix} z & \zeta' & 1 \\ z_1 & z'_0 & 1 \\ -z_1 & -z'_0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z & \zeta' & 1 \\ z_0 & z'_1 & 1 \\ z_1 & z'_0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z'_0 z - z_1 \zeta'}{z'_1 z - z_0 \zeta'}$$

ou

$$e^g = \frac{z'_0 z - \sqrt{c^2 - z_0'^2} \sqrt{c^2 - z^2}}{z \sqrt{c^2 - z_0'^2} - z_0 \sqrt{c^2 - z^2}};$$

les deux radicaux ont la détermination qui prend la valeur c au centre de l'hyperbole.

Représentons l'aire A_3 sur un cercle, les deux centres se correspondant :

$$z_0 = 0, \\ Z = -\frac{z}{\sqrt{c^2 - z^2}}.$$

On a pour e^g une forme plus commode dans les applications en posant

$$z = c \sin t, \quad z_0 = c \sin t_0, \\ e^g = \frac{\cos(t + t'_0)}{\sin(t - t_0)}.$$

9. On trouve de la même façon la fonction g pour les régions du plan limitées par une strophoïde ou une lemniscate; d'ailleurs, ces courbes sont des transformées par inversion d'une hyperbole équilatère.

Or une transformation par inversion est une réflexion sur un cercle; plus généralement, prenons l'image d'une aire A par rapport à une courbe algébrique n'ayant pas de foyer dans A ; on a une aire A_1 pour laquelle on connaît g si cette fonction est connue pour A , car $g(z)$ a même valeur en deux points homologues. Ainsi, l'image d'un cercle par rapport à une ellipse est une courbe du huitième ordre composée de deux ovales si les foyers de l'ellipse ne sont pas de part et d'autre du cercle; g est connue pour l'intérieur de chacun des ovales.

V. — Aire à connexion multiple.

10. La fonction e^g n'est pas uniforme dans l'aire; il vaut mieux étudier $\frac{dg}{dz}$. Pour avoir un exemple simple, il est naturel de considérer une courbe de genre *un* composée de deux ovales.

Courbe de Cassini. — La courbe C représentée par l'équation

$$f(z, z') \equiv (z^2 - c^2)(z'^2 - c^2) - a^4 = 0 \quad (a < c)$$

est composée de deux ovales C_1 et C_2 ; soit A la région qui leur est extérieure.

Un point z a, par rapport à C , deux images ζ_1 et $\zeta_2 = -\zeta_1$; ces deux points ont pour images z et $-z$; les régions successives sont donc en nombre limité.

Comme pour la région centrale de l'hyperbole équilatère, on voit que $\frac{dg}{dz}$ a deux valeurs en tout point du plan; la surface de Riemann Σ est composée de deux feuillets qui se raccordent le long des segments $F_1 F'_1$ et $F_2 F'_2$, joignant les deux foyers situés dans chaque ovale. En

suivant sur Σ le déplacement de l'image d'un point, on trouve que $\frac{dg}{dz}$ est uniforme, a deux pôles simples, (z_0, z'_1) et $(-z_0, -z'_1)$, avec le résidu -1 , et deux autres, (z_1, z'_0) et $(-z_1, -z'_0)$, avec le résidu $+1$; $\frac{dg}{dz}$ est une fonction rationnelle, qu'on saurait former comme quotient de deux polynômes adjoints; g est une intégrale de troisième espèce.

Mais z et ζ_1 sont fonctions elliptiques d'un paramètre u , qui est égal à l'intégrale de première espèce

$$u = \int^{z, \zeta'} \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial \zeta'}};$$

soient $2\omega_1$ et $2\omega_2$ ses périodes. On voit que $\frac{dg}{dz}$ est une fonction elliptique de u , infinie pour les valeurs u_0, v_0, u_1, v_1 qui correspondent aux pôles trouvés. Lorsque le point analytique (z, ζ') décrit un contour fermé sur Σ , u augmente d'une période, e^g est multipliée par un facteur constant; donc e^g est fonction périodique de seconde espèce. En appelant k et k_1 des constantes, et $\sigma(u; 2\omega_1, 2\omega_2)$ la fonction de Weierstrass, on a

$$e^g = \frac{\sigma(u - u_1) \sigma(u - v_1)}{\sigma(u - u_0) \sigma(u + v_0)} e^{ku + k_1}.$$

On détermine facilement les foyers de la courbe C , et par suite les périodes $2\omega_1, 2\omega_2$, et ensuite les quantités u_0, v_0, u_1, v_1, k et k_1 .

Si l'on prend pour région A l'intérieur de l'ovale C_1 , ses images successives dans le plan sont en nombre limité; la fonction e^g est rationnelle dans le plan; elle est infinie pour $z = \pm z_0$, nulle pour

$$z = \pm \zeta_1 = \pm \sqrt{c^2 + \frac{a^4}{z_0^2 - c^2}};$$

on a donc

$$e^g = \frac{z^2 - \zeta_1^2}{z^2 - z_0^2}.$$

11. *Cycliques.* — L'équation d'une cyclique est de la forme

$$\begin{aligned} f(z, z') &\equiv z^2 z'^2 + 2a z^2 z' + 2a' z z'^2 + b z^2 + 2c z z' + b' z'^2 + 2dz + 2d' z' + e = 0 \\ &\equiv A z'^2 + 2B z' + C = 0. \end{aligned}$$

Les z des foyers sont les racines c_1, c_2, c_3, c_4 de l'équation

$$B^2 - AC = 0;$$

l'intégrale de première espèce est

$$u = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z'}} = \frac{1}{\sqrt{4a^2 - b}} \int \frac{dz}{\sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)}}.$$

Un point z a deux images ζ_1 et ζ_2 ; cherchons les cycliques pour lesquelles ζ_1 et ζ_2 ont les mêmes images (dont l'une est z); un calcul algébrique donne la condition

$$2(ab'd + a'bd' - aa'e - dd') + c(e - bb') = 0;$$

lorsqu'elle est remplie, les régions successives recouvrent une fois le plan ou la surface de Riemann; on peut raisonner comme pour la courbe de Cassini et former la fonction g .

Or on peut, par une inversion, transformer la cyclique en une autre qui soit symétrique par rapport à chacun des axes de coordonnées; on a alors

$$a = a' = d = d' = 0;$$

la condition devient

$$c(e - bb') = 0,$$

d'où les deux courbes

$$(z^2 + b')(z'^2 + b) + e - bb' = 0,$$

$$(z^2 + b')(z'^2 + b) + 2czz' = 0;$$

la première est une courbe de Cassini; la seconde a été étudiée par M. Darboux (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 66, 82); l'une et l'autre sont lieu d'un point M satisfaisant à une condition

$$\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD} = k,$$

A, B, C, D étant des points fixes. Par inversion, cette condition se transforme en une autre de même forme; pour l'aire A limitée par une courbure ainsi définie, on sait former la fonction g , qui est le logarithme d'une fonction rationnelle ou une intégrale de troisième espèce.

Les cycliques les plus générales échappent à la méthode précédente, parce que les régions successives ne sont pas en nombre limité et que e^g ou $\frac{dg}{dz}$ ne sont pas uniformes dans le plan ou sur la surface de Riemann en général. Nous verrons qu'on peut trouver la fonction g en utilisant les propriétés des familles isothermes; de même pour une hyperbole non équilatère; de sorte que g sera connue pour toute aire plane dont le bord appartient à une conique ou une cyclique.

Il est facile de trouver des courbes de genre supérieur à *un* auxquelles les raisonnements précédents s'appliquent; ainsi l'équation

$$(z^4 - c^2)(z'^4 - c^2) - a^4 = 0 \quad (a < c)$$

représente une courbe de genre trois composée de quatre ovales. On peut montrer que la fonction $\frac{dg}{dz}$ relative à la partie du plan extérieure aux ovales est uniforme sur la surface de Riemann; g est une intégrale de troisième espèce.

CHAPITRE IV.

FAMILLES ISOTHERMES ALGÈBRIQUES ⁽¹⁾.

I. — Les intégrales J et J' .

1. Je considère une famille de courbes algébriques C_λ , définie par l'équation

$$(1) \quad f(z, z', \lambda) = 0;$$

les coefficients du polynôme f sont des fonctions du paramètre λ sur lesquels nous ferons les hypothèses suivantes : ils sont holomorphes en λ pour $|\lambda - \lambda_0| < r$, et, quand on revient aux coordonnées carté-

⁽¹⁾ Quand M. Lery a rédigé ce Chapitre, il ne connaissait pas le Mémoire de M. Schwarz sur les isothermes algébriques [*Ueber ebene algebraische Isothermen* (*Œuvres complètes*, t. II, p. 260)].
[Note de M. Émile Picard.]

siennes, on trouve une équation algébrique en x et y dont les coefficients sont réels lorsque λ est réel. En supposant λ_0 réel, l'équation

$$(1') \quad f(z, z', \lambda_0) = 0$$

représente une courbe de la famille, C_{λ_0} .

La famille est isotherme si la fonction $\lambda(z, z')$, déterminée par l'équation (1), satisfait à la condition

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial z'} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_{12} = 0,$$

en désignant respectivement par les indices 1 et 2 les opérations $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial z'}$. La condition (2) montre que λ est la somme d'une fonction de z et d'une fonction de z' ; ces fonctions sont des intégrales abéliennes attachées à l'une quelconque des courbes de la famille.

En effet, en posant $f_3 = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$, on a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = - \frac{f_1(z, z', \lambda)}{f_3(z, z', \lambda)};$$

le second membre devient une fonction de z seul lorsqu'on y remplace λ par l'une de ses déterminations tirées de l'équation (1); il revient au même de dire que λ disparaît lorsqu'on substitue à z' une détermination de la fonction $z' = \zeta'(z, \lambda)$ définie par l'équation (1); dans ce calcul, je puis donc donner à λ une valeur particulière λ_0 . J'ai alors l'équation (1)', qui détermine la fonction algébrique $z' = \zeta'(z, \lambda_0)$; d'où l'on tire

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = - \frac{f_1(z, \zeta', \lambda_0)}{f_3(z, \zeta', \lambda_0)} = \frac{dJ}{dz},$$

$$J = - \int^{z, \zeta'} \frac{f_1(z, \zeta', \lambda_0)}{f_3(z, \zeta', \lambda_0)} dz,$$

J étant une intégrale abélienne attachée à C_{λ_0} . On a de même

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z'} = - \frac{f_2(\zeta, z', \lambda_0)}{f_3(\zeta, z', \lambda_0)} = \frac{dJ'}{dz'},$$

$$J' = - \int^{\zeta, z'} \frac{f_2(\zeta, z', \lambda_0)}{f_3(\zeta, z', \lambda_0)} dz',$$

où $\zeta(z', \lambda_0)$ est la fonction z définie par l'équation (1)'. On en conclut

$$\lambda(z, z') = J + J' + \text{const.} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Il peut y avoir dans la famille des courbes exceptionnelles pour lesquelles la propriété précédente n'est pas exacte; ce sont celles qui sont décomposées ou telles que f_3 soit identique à zéro. Ainsi, pour une famille d'ellipses homofocales, C_{λ_0} peut être l'une quelconque des coniques, sauf celle qui est aplatie suivant l'axe focal.

2. Pour définir avec précision les deux intégrales, il faut introduire la surface de Riemann Σ qui correspond à la courbe C_{λ_0} . L'intégrale J est prise d'un point $m_0(z_0, \zeta_0)$ à un point $m(z, \zeta)$; je la désignerai par $J(m)$; on suppose que m_0 est un point régulier pour J . On aura de même le point m' , dont la seconde coordonnée est z' , la première du point image étant ζ ; l'intégrale $J'(m')$ est prise d'un point régulier m'_0 au point m' . Le point μ , image de m sur Σ , a pour seconde coordonnée ζ' ; c'est le point analytique (ζ', z) ; dans le cas particulier où ζ et z' sont les imaginaires conjuguées de ζ' et z , m' est confondu avec m sur Σ ; si $z' = \zeta'$, $\zeta = z$, m' coïncide avec μ .

Si m et m' décrivent un même chemin d'intégration, les valeurs que prennent J et J' sont imaginaires conjuguées; en effet, l'équation cartésienne de C_{λ_0} étant

$$F(x, y, \lambda_0) = 0,$$

on a

$$f_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad f_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right);$$

donc les quantités $\frac{f_1}{f_3}$ et $\frac{f_2}{f_3}$ sont imaginaires conjuguées lorsque z et z' sont imaginaires conjuguées et que λ_0 est réel.

Si m et m' décrivent deux chemins associés, on a

$$J + J' = 0;$$

en effet, on a

$$\begin{aligned} z' &= \zeta', & \zeta &= z, \\ \frac{f_1(z, z', \lambda_0)}{f_3(z, z', \lambda_0)} dz + \frac{f_2(z, z', \lambda_0)}{f_3(z, z', \lambda_0)} dz' &= \frac{df(z, z', \lambda_0)}{f_3(z, z', \lambda_0)} = 0, \\ dJ + dJ' &= 0. \end{aligned}$$

II. — Périodes de J et J' .

3. La courbe C_{λ_0} est composée d'ovales C', C'', \dots tracés sur Σ . Quand m décrit l'un d'eux, J augmente d'une quantité $\alpha + i\beta$, qui est une période, à moins qu'elle ne soit nulle. Le long du même chemin, on a à la fois

$$\begin{aligned} J' &= \alpha - i\beta, \\ J' &= -J = -\alpha - i\beta; \end{aligned}$$

donc $\alpha = 0$. Un ovale de C_{λ_0} donne pour J et J' une période $i\beta$.

Le long d'un chemin D , allant d'un point de C' à un point de C'' , J prend une valeur $\alpha_1 + i\beta_1$; le chemin associé D' a même origine et même extrémité que D ; le long de D' , on a $J' = -(\alpha_1 + i\beta_1)$. Quand m parcourt le circuit formé de D et de $-D'$, J prend la valeur

$$(\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_1 - i\beta_1) = 2\alpha_1.$$

On a ainsi une période réelle.

Soit Γ un autre circuit qu'on ne puisse réduire par déformation à un point ou à une combinaison des circuits précédents. Le long de Γ , J acquiert une période $\alpha_2 + i\beta_2$; le long du circuit associé Γ' , J' prend la valeur $-\alpha_2 - i\beta_2$, donc J prendrait la valeur $-\alpha_2 + i\beta_2$. Ainsi J admet les périodes $\alpha_2 + i\beta_2$ et $-\alpha_2 + i\beta_2$, donc les périodes $2\alpha_2$ et $2i\beta_2$.

En résumé, les périodes de J et J' sont réelles ou purement imaginaires.

III. — Les courbes $J + J' = \text{const.}$

4. Supposons, pour simplifier, que les origines d'intégration m_0 et m'_0 soient confondues en un point de l'ovale C' . Si m et m' décrivent en même temps cet ovale, on a

$$J(m) + J'(m') = 0, \quad 2J(m) = i\rho,$$

ρ étant une variable réelle; si m et m' décrivent un chemin D , allant de m_0 à l'ovale C'' , puis décrivent C'' , on a

$$J(m) + J'(m') = 2\alpha_1, \quad 2J(m) = 2\alpha_1 + i\rho.$$

Faisons varier λ à partir de la valeur λ_0 ; les ovals C' et C'' se déforment dans le plan et deviennent des ovals de la courbe C_λ ; on peut suivre leur déplacement sur Σ si $|\lambda - \lambda_0|$ reste suffisamment petit, et l'on a sur le premier de ces ovals

$$J(m) + J'(m') = \lambda - \lambda_0, \quad {}_2J(m) = \lambda - \lambda_0 + i\rho,$$

sur le second

$$J(m) + J'(m') = \lambda - \lambda_0 + 2\alpha_1, \quad {}_2J(m) = \lambda - \lambda_0 + 2\alpha_1 + i\rho.$$

On voit qu'en appelant λ et ρ des variables réelles, et en posant

$${}_2J(m) = \lambda - \lambda_0 + i\rho,$$

les courbes $\lambda = \text{const.}$ forment sur Σ une famille dont la projection sur le plan est la famille C_λ , si λ est suffisamment voisin de λ_0 ou de $\lambda_0 + 2\alpha_1$. Les courbes $\rho = \text{const.}$ forment la famille orthogonale.

Si m et m' sont confondus sur un oval de la courbe C_λ , on a

$$\begin{aligned} {}_2J(m) &= \lambda - \lambda_0 + i\rho, \\ {}_2J'(m') &= \lambda - \lambda_0 - i\rho, \end{aligned}$$

si les chemins d'intégration sont confondus et si le paramètre ρ est réel; supposons que ρ varie et devienne complexe; les points m et m' dont on peut suivre le déplacement sur Σ , au moins pour une petite variation de ρ , deviennent images par rapport à C_λ .

Les deux familles orthogonales ont les propriétés suivantes :

I. *Par un point arbitraire a de la surface Σ passe une seule courbe de chaque famille.* — En effet, le point $m(z, \zeta')$ étant voisin de a , z et ζ' sont des fonctions holomorphes d'une variable t voisine de zéro; si $J(m)$ est holomorphe en t , soit

$$J(m) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots,$$

t est fonction holomorphe de $\lambda + i\rho$, définie par l'équation

$${}_2(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots) = \lambda + i\rho;$$

d'où z analytique soit en λ , soit en ρ . Il y a exception lorsque A_1 est nul ou que $J(m)$ est infinie au point a .

II. Si le point m décrit une courbe C_λ , le point associé μ décrit la courbe $C_{2\lambda_0-\lambda}$. — En effet, on a

$${}_2J(m) = \lambda - \lambda_0 + i\rho,$$

$$J(m) + J'(\mu') = 0;$$

d'où l'on tire

$${}_2J'(\mu') = -(\lambda - \lambda_0) - i\rho,$$

$$\begin{aligned} {}_2J(\mu) &= -(\lambda - \lambda_0) + i\rho \\ &= (2\lambda_0 - \lambda) - \lambda_0 + i\rho; \end{aligned}$$

le point μ décrit $C_{2\lambda_0-\lambda}$.

III. Si m décrit une courbe C_ρ , μ décrit la même courbe. — En effet, on vient de voir que l'on a

$${}_2J(m) = \lambda - \lambda_0 + i\rho,$$

$${}_2J(\mu) = \lambda_0 - \lambda + i\rho;$$

ρ , étant constant pour le point m , a la même valeur fixe pour μ .

IV. Le lieu des images d'un point fixe m par rapport à la courbe variable C_λ est une courbe C_ρ . — En effet, soit

$${}_2J(m) = \lambda_1 + i\rho_1.$$

Si m' est image de m par rapport à la courbe C_λ , on a

$$J(m) + J'(m') = \lambda - \lambda_0,$$

$${}_2J'(m') = 2\lambda - 2\lambda_0 - \lambda_1 - i\rho_1;$$

m' décrit la courbe C_{ρ_1} , qui passe en m .

5. On peut remarquer que ces propriétés ne supposent pas les courbes C_λ algébriques, quoique l'étude des images soit alors moins facile; considérons la famille définie par l'équation

$$I(m) + I'(m') = \lambda,$$

dans laquelle $I(m)$ représente une intégrale abélienne attachée à une courbe réelle donnée C_0 , ayant pour équation

$$f(z, z') = 0;$$

écrivons cette intégrale et l'imaginaire conjuguée $I'(m')$ sous la forme

$$I(m) = \int^m \frac{f_1(z, \zeta') dz}{R(z, \zeta')}, \quad I'(m') = \int^{m'} \frac{f_2(\zeta, z')}{R'(z', \zeta)} dz';$$

supposons que les fonctions rationnelles R et R' satisfassent à l'identité

$$(3) \quad R(z, z') = R'(z', z);$$

on voit que l'on a

$$dI + dI' = 0$$

lorsque m et m' décrivent deux chemins associés. On en conclut que la famille de courbes possède les propriétés précédentes, au moins quand λ varie dans un certain intervalle; en général, cette famille n'est pas algébrique.

On forme les fonctions rationnelles R en prenant une fonction rationnelle $R_1(x, y)$, à coefficients réels, et en posant

$$R(z, z') = R_1\left(\frac{z + z'}{2}, \frac{z - z'}{2i}\right),$$

si l'on veut que l'identité (3) soit satisfaite, quelles que soient les variables z et z' ; il peut y avoir d'autres solutions si l'identité doit avoir lieu quelles que soient z et z' reliées par l'équation $f(z, z') = 0$.

6. Revenons aux courbes C_λ , définies par l'équation algébrique

$$(1) \quad f(z, z', \lambda) = 0;$$

la condition $\lambda_{1,2} = 0$ entraîne la suivante :

$$(2) \quad f_3^2 f_{12} - f_2 f_3 f_{13} - f_1 f_3 f_{23} + f_1 f_2 f_{33} = 0,$$

qui doit être satisfaite lorsque z, z' et λ vérifient l'équation (1); le premier membre de (2) est un polynôme en z et z' qui est identiquement nul ou divisible par $f(z, z', \lambda)$,

Le z d'un foyer d'une courbe C_λ et le z' de son image double sont solutions du système

$$f = 0, \quad f_2 = 0;$$

la condition (2) devient pour ces points

$$f_3(f_3 f_{12} - f_1 f_{23}) = 0;$$

dz et dz' vérifient l'équation

$$f_1 dz + f_2 dz' + f_3 d\lambda = 0.$$

Si le facteur f_3 est nul, on a $dz = 0$; le foyer est fixe, quel que soit λ .

Si le facteur $f_3 f_{12} - f_1 f_{23}$ est nul, on a

$$dz = -\frac{f_3}{f_1} d\lambda;$$

d'autre part, dz' est donné par l'équation

$$f_{12} dz + f_{22} dz' + f_{23} d\lambda = 0,$$

$$dz' = \frac{f_3 f_{12} - f_1 f_{23}}{f_{22}} d\lambda = 0;$$

l'image double est fixe.

Ainsi, pour une famille isotherme, ou bien un foyer est fixe et son image double décrit une courbe orthogonale, ou bien on a la propriété contraire. On a un exemple de ces deux cas avec les courbes de Cassini,

$$(z^2 - c^2)(z'^2 - c^2) = e^\lambda.$$

Lorsque tous les points z qui sont critiques pour $\zeta'(z, \lambda)$ sont fixes, les surfaces de Riemann des courbes C_λ ont mêmes points de ramification; on peut dire que les courbes de la famille ont la même surface Σ .

IV. — Nature de l'intégrale J.

7. L'intégrale J n'est pas quelconque, puisque l'équation

$$J(m) + J'(m') = \lambda - \lambda_0$$

entraîne une relation algébrique entre z et z' ,

$$(1) \quad f(z, z', \lambda) = 0;$$

démontrons que J a au plus deux périodes; ce serait évident si les coefficients du polynôme f étaient des fonctions uniformes et méromorphes de λ ; supposons seulement qu'ils sont holomorphes au voisinage de λ_0 , par exemple lorsqu'on a

$$|\lambda - \lambda_0| < r.$$

LEMME. — *Les coefficients du polynome f sont uniformes et méromorphes, quel que soit λ fini.*

Prenons en effet des nombres λ_1 et λ_2 satisfaisant aux conditions

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 - \lambda_0$$

$$(\beta) \quad |\lambda_1 - \lambda_0| < \frac{r}{2}, \quad |\lambda_2 - \lambda_0| < r.$$

Si un point (z_1, z'_1) décrit C_{λ_0} , son image (z_2, z'_2) par rapport à C_{λ_1} décrit la courbe C_{λ_2} (propriété II, n° 4); on a l'équation de C_{λ_2} en éliminant z_1 et z'_1 entre les équations

$$f(z_1, z'_1, \lambda_0) = 0, \quad f(z_1, z'_2, \lambda_1) = 0, \quad f(z_2, z'_1, \lambda_1) = 0;$$

on trouve ainsi une équation algébrique

$$F(z_2, z'_2, \lambda_1) = 0;$$

les coefficients du polynome F sont holomorphes en $\lambda_1 - \lambda_0$, donc en $\lambda_2 - \lambda_0$, tant que les inégalités (β) sont satisfaites; F n'est pas identique à $f(z_2, z'_2, \lambda_2)$, mais seulement divisible par ce dernier polynome, en général.

Nous pouvons refaire le même calcul en supposant

$$|\lambda_1 - \lambda_0| < r, \quad |\lambda_2 - \lambda_0| < 2r;$$

les coefficients de F sont encore holomorphes en $\lambda_1 - \lambda_0$, ou en $\lambda_2 - \lambda_0$. La condition qui exprime que F est décomposable en plusieurs facteurs dont l'un est du degré n (si n est le degré d'une courbe C_λ arbitraire) est rationnelle par rapport aux coefficients, donc holomorphe en $\lambda_2 - \lambda_0$; elle est encore satisfaite. Nous aurons un facteur $f(z_2, z'_2, \lambda_2)$ qui sera le prolongement analytique de $f(z_2, z'_2, \lambda_2)$ dans le domaine $|\lambda_2 - \lambda_0| < 2r$.

Pour calculer les coefficients de ce facteur, nous avons à résoudre des équations algébriques, à coefficients holomorphes en $\lambda_2 - \lambda_0$; les coefficients cherchés pourraient être algébroides en $\lambda_2 - \lambda_0$; il s'agit de prouver qu'ils sont méromorphes. Je prends un point simple (a_0, a'_0) de la courbe C_{λ_0} , et un point (z_1, z'_1) au voisinage :

$$z_1 = a_0 + \varepsilon, \quad z'_1 = a'_0 + \varepsilon',$$

$$f(a_0 + \varepsilon, a'_0 + \varepsilon', \lambda_0) = 0.$$

Cette dernière équation définit ε' comme fonction holomorphe de ε au voisinage de zéro, puisque (a_0, a'_0) est point simple de C_{λ_0} . Choisissons pour z_2 une solution de l'équation

$$f(z_2, a'_0 + \varepsilon', \lambda_1) = 0;$$

z_2 est holomorphe en ε' , donc en ε , *en supposant que a_0 ne soit pas foyer de C_{λ_1}* ; soit

$$z_2 = \varphi(\varepsilon, \lambda_1);$$

nous prendrons

$$z'_2 = \varphi'(\varepsilon', \lambda_1) = \psi(\varepsilon, \lambda_1);$$

les coefficients de ces différents développements en ε et ε' sont holomorphes en $\lambda_1 - \lambda_0$ ou $\lambda_2 - \lambda_0$. Ceci posé, dans l'équation de C_{λ_2} , écrite avec des coefficients indéterminés

$$A z_2^n + B z_2^{n-1} z'_2 + \dots = 0,$$

substituons les développements de z_2 et z'_2 en fonction de ε et identifions. On trouve des équations linéaires en A, B, \dots , à coefficients holomorphes en $\lambda_2 - \lambda_0$; donc A, B, \dots sont méromorphes en $\lambda_2 - \lambda_0$, tant que l'on a $|\lambda_2 - \lambda_0| < 2r$.

Les équations qui donnent ainsi A, B, \dots ne peuvent dépendre qu'en apparence du point (a_0, a'_0) choisi; en déplaçant ce point, on ne peut changer la relation algébrique entre z_2 et z'_2 . D'après cette remarque, *si a_0 est foyer de C_{λ_1}* , nous le déplacerons pour appliquer le mode de raisonnement précédent.

En résumé, les coefficients de $f(z, z', \lambda)$ sont uniformes et méromorphes en $\lambda - \lambda_0$ dans le domaine $|\lambda - \lambda_0| < 2r$, s'ils le sont dans le domaine $|\lambda - \lambda_0| < r$; ils le sont donc, quel que soit λ fini.

C. Q. F. D.

8. Quel que soit λ , donc quels que soient les points m et m' sur la surface Σ , nous avons

$$f[z, z', \lambda_0 + J(m) + J'(m')] = 0.$$

Donnons à m' une position fixe et faisons parcourir à m un circuit fermé; J augmente d'une période. Si cette intégrale avait trois périodes, on pourrait choisir le circuit pour avoir une période aussi

petite que l'on voudrait, et les zéros de f , considérée comme fonction de J , ne seraient pas isolés, ce qui est impossible puisque f est méromorphe en J . De même J ne peut avoir deux périodes, dont le rapport soit réel.

V. — Sur un théorème de Weierstrass et sur la classification des familles isothermes.

9. Weierstrass a donné dans son cours le théorème suivant :

Si une fonction $\varphi(u)$ admet un théorème d'addition, elle est uniforme ou racine d'une équation algébrique à coefficients uniformes et méromorphes.

Des démonstrations ont été publiées par M. Phragmen et M. Hancock. On peut considérer ce théorème comme une conséquence de l'étude des familles isothermes. Par hypothèse, $\varphi(u)$ satisfait à l'équation algébrique

$$f[\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)] = 0.$$

Remarquons que le polynôme f doit être symétrique en $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$. Sur la fonction $\varphi(u)$, on suppose seulement qu'elle est holomorphe lorsqu'on a $|u| < r$.

Posons

$$\varphi(u) = z, \quad \varphi(v) = z', \quad u+v = \lambda,$$

d'où l'équation

$$f[z, z', \varphi(\lambda)] = 0,$$

qui représente une famille de courbes C_λ . Or

$$\begin{aligned} \lambda &= u+v \\ &= \text{fonction de } z + \text{fonction de } z'; \end{aligned}$$

la famille est isotherme. On a donc

$$\lambda = J(z) + J(z'),$$

$J(z)$ et $J(z')$ étant deux intégrales abéliennes attachées à la courbe C_{λ_0} qui correspond à la valeur $\lambda_0 = \varphi(0)$; ces intégrales sont les mêmes, à cause de la symétrie de f en z et z' . On démontre, comme nous

l'avons vu, la propriété II et le lemme; il suffit de remplacer les imaginaires conjuguées α_0, α'_0 par deux quantités égales. On en conclut que les coefficients A, B, \dots du polynome f en z et z' , considérés comme fonction de λ , sont méromorphes. Ces coefficients sont rationnels en $\varphi(\lambda)$.

Si deux d'entre eux contiennent $\varphi(\lambda)$, on a deux équations :

$$A[\varphi(\lambda)] = \text{fonction méromorphe de } \lambda,$$

$$B[\varphi(\lambda)] = \text{fonction méromorphe de } \lambda,$$

d'où l'on tire en général $\varphi(\lambda)$ uniforme et méromorphe en λ . Si un seul contient $\varphi(\lambda)$, φ est racine d'une équation algébrique à coefficients uniformes et méromorphes, et qui est d'une forme particulière :

$$A[\varphi(\lambda)] = \text{fonction méromorphe de } \lambda.$$

10. L'intégrale $J(m)$ a zéro, une ou deux périodes.

I. *Pas de période.* — J ne peut être de troisième espèce; elle est uniforme sur Σ , n'a comme singularités que des pôles en nombre fini; c'est une fonction rationnelle :

$$J = R(z, \zeta').$$

II. *Une période ω .* — La fonction $e^{\frac{2\pi i J}{\omega}}$ est uniforme sur Σ ; elle n'a comme singularités que des pôles; en effet, si elle avait un point singulier essentiel $z = \alpha$, on aurait au voisinage de ce point une infinité de solutions de l'équation $J(m) = k$, où k est un nombre donné arbitraire. Ces solutions devraient satisfaire à l'équation

$$f[z, z'_0, \lambda_0 + k + J'(z'_0)] = 0,$$

dans laquelle on donne à z' une valeur fixe; ce qui est impossible. On a donc

$$e^{\frac{2\pi i J}{\omega}} = R(z, \zeta').$$

III. *Deux périodes ω_1, ω_2 .* — La fonction $p(J; \omega_1, \omega_2)$ est uniforme sur Σ ; on voit comme précédemment qu'elle n'a comme singularités que des pôles en nombre fini; c'est une fonction rationnelle

$$pJ = R(z, \zeta').$$

Dans ce troisième cas, l'intégrale J est de première espèce; sinon elle deviendrait infinie pour une certaine valeur z_1 ; près de z_1 pJ pourrait prendre toute valeur donnée; or pJ est une fonction rationnelle de z et ζ' qui a un nombre fini de valeurs bien déterminées pour $z = z_1$.

En raisonnant de la même façon que le théorème de Weierstrass, on retrouve le résultat suivant, qui est bien connu :

Toute fonction $\varphi(u)$ ayant un théorème d'addition est solution d'une équation algébrique dont les coefficients sont rationnels en u , ou en $e^{\frac{2\pi i u}{\omega}}$, ou en pu .

VI. — Sur les courbes algébriques dont une intégrale abélienne a seulement deux périodes.

11. L'équation algébrique

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

définit y comme une fonction algébrique $\eta(x)$ et x comme une fonction $\xi(y)$. En désignant par $Q(x, y)$ une fonction rationnelle, les deux intégrales

$$J(x) = \int^{x, \eta} \frac{Q(x, \eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)} dx, \quad K(y) = \int^{y, \xi} \frac{Q(\xi, y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)} dy$$

sont de même espèce et ont les mêmes périodes. En effet, prenons $y = \eta(x)$, $\xi = x$; nous avons

$$\begin{aligned} K(y) &= \int^{\eta, x} \frac{Q(x, \eta)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta)} d\eta = - \int^{x, \eta} \frac{Q(x, \eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)} dx \\ &= -J(x) + \text{const.}; \end{aligned}$$

donc l'intégrale $K(y)$ prise le long d'un chemin quelconque du plan y n'est autre que l'intégrale $J(x)$ prise le long d'un chemin correspondant dans le plan x .

Supposons que J et K soient de première espèce et aient seulement

deux périodes $2\omega, 2\omega'$; établissons entre x et y l'équation

$$(2) \quad J(x) + K(y) = \lambda.$$

Soit p la fonction de Weierstrass aux périodes $2\omega, 2\omega'$; l'équation précédente entraîne l'équation

$$(3) \quad p(J + K) = p\lambda,$$

qu'on peut développer par la formule d'addition. Or pJ et pK sont respectivement des fonctions rationnelles de x, η et de y, ξ respectivement; de même $\frac{dp}{dJ}$ et $\frac{dp}{dK}$. L'équation (3) s'écrit

$$R(x, \eta, y, \xi) = p\lambda,$$

ou, par l'élimination algébrique de η et ξ ,

$$(4) \quad F(x, y, \lambda) = 0,$$

F étant un polynome en x et y , à coefficients uniformes en λ .

L'équation (2) entraîne encore une équation algébrique en x et y lorsque J est une intégrale de troisième espèce ayant une seule période ou une intégrale de deuxième espèce sans période.

12. Réciproquement, je considère deux fonctions $\varphi(x)$ et $\chi(y)$, analytiques au voisinage de certaines valeurs x_0 et y_0 , et telles que l'équation

$$(2) \quad \varphi(x) + \chi(y) = \lambda$$

entraîne une relation algébrique entre x et y

$$(4) \quad F(x, y, \lambda) = 0.$$

Je puis supposer que les coefficients du polynome F sont holomorphes et que $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ n'est pas identique à 0 pour la valeur λ_0 , ou méromorphes en λ au voisinage de la valeur $\lambda_0 = \varphi(x_0) + \chi(y_0)$. Les fonctions φ, χ et F possèdent les propriétés suivantes :

1° *Les fonctions φ et χ sont des intégrales abéliennes attachées à une même courbe algébrique.*

D'après l'équation (2), $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ est fonction de x seulement; d'après

l'équation (4) on a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial \lambda} = h(x, y, \lambda),$$

h étant une fonction rationnelle de x et y ; cette fonction ne doit plus dépendre que de x quand on y remplace λ par la fonction $\lambda(x, y)$ définie par l'équation (4); il revient au même de dire que h est indépendant de λ quand on y remplace y par une fonction $y(x, \lambda)$ définie par (4); on peut donc donner à λ une valeur quelconque, λ_0 par exemple, et l'on a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = h(x, \eta, \lambda_0),$$

η étant la fonction algébrique de x définie par l'équation

$$F(x, \eta, \lambda_0) = 0,$$

ou plutôt la branche de cette fonction qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0 .

On trouve de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= k(\xi, y, \lambda_0), \\ F(\xi, y, \lambda_0) &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut pour λ la valeur

$$\begin{aligned} \lambda &= \int h dx + \int k dy \\ &= J(x) + K(y). \end{aligned}$$

2° *Les coefficients du polynôme F sont uniformes et méromorphes en λ , quel que soit λ fini.*

Vérifions d'abord que si ces coefficients sont uniformes et méromorphes au voisinage d'une valeur λ_1 , c'est-à-dire sous la condition $|\lambda - \lambda_1| < \rho$, ils le sont encore dans un cercle de centre λ_1 et dont le rayon r est indépendant de λ_1 ; de sorte qu'on pourra faire le prolongement analytique de ces coefficients au moyen des cercles de rayon invariable.

Soit n le degré du polynôme F; nous supposons donc que l'équation

$$J(x) + K(y) = \lambda,$$

où les déterminations des intégrales sont convenablement choisies, entraîne une équation algébrique de degré n

$$\varphi(x, y) \equiv Ax^n + Bx^{n-1}y + \dots + C = 0,$$

sous la condition $|\lambda - \lambda_1| < \rho$. Pour calculer les coefficients A , B , ..., C , que je regarde comme indéterminés et dont le nombre est $m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, j'écris que les équations

$$(E) \quad \begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \varphi'_x + \varphi'_y \frac{dy}{dx} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

sont satisfaites par des nombres $x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}, \dots$, vérifiant le système

$$\begin{aligned} J(x_1) + K(y_1) &= \lambda, \\ \frac{dJ}{dx_1} + \frac{dK}{dy_1} dy_1 &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une infinité d'équations linéaires et homogènes auxquelles satisfont A, B, \dots . Étudions les coefficients de ces équations considérés comme fonctions de λ .

Je choisis un point (x_0, y_0) , satisfaisant à la condition

$$F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0,$$

au voisinage duquel l'intégrale $J(x)$ soit holomorphe en $x - x_0$, et sa dérivée $\frac{dJ}{dx}$ non nulle; on a

$$J(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \dots \quad (\alpha_1 \neq 0);$$

il existe un nombre r tel que ce développement converge et $\frac{dJ}{dx}$ reste différente de zéro lorsqu'on a $|x - x_0| < r$; prenons pour x_1 un nombre satisfaisant à cette condition, et pour y_1 une solution de l'équation en y

$$F(x_0, y_1, \lambda_1) = 0,$$

de sorte que l'on a

$$J(x_0) + K(y_1) = \lambda_1.$$

Ceci posé, écrivons l'équation

$$J(x_1) + K(y_1) = \lambda,$$

ou bien

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) + \dots + K(y_1) &= \lambda, \\ \alpha_1(x_1 - x_0) + \dots &= \lambda - \lambda_1; \end{aligned}$$

résolue en $x_1 - x_0$, elle donne un développement

$$x_1 - x_0 = \beta_1(\lambda - \lambda_1) + \dots,$$

dont le rayon de convergence est au moins égal à r . En portant ce développement dans les équations (E), où l'on fait $x = x_1$, $y = y_1$, on trouve des équations en A, B, \dots , dont les coefficients sont holomorphes ou méromorphes en λ tant que l'on a $|\lambda - \lambda_1| < r$.

Supposons $\rho < r$; ces équations ont des solutions lorsque $|\lambda - \lambda_1|$ est inférieur à ρ ; elles se réduisent donc à $m - 1$ équations indépendantes; les conditions pour qu'il en soit ainsi sont rationnelles par rapport aux coefficients, donc méromorphes en $\lambda - \lambda_1$ dans le cercle γ de centre λ_1 et de rayon r ; elles sont satisfaites dans ce cercle γ puisqu'elles le sont dans le cercle concentrique de rayon ρ . Les rapports des inconnues A, B, \dots , à l'une d'elles sont donc méromorphes en λ dans le cercle γ . Ceci suppose que les $m - 1$ équations restent indépendantes; il peut y avoir des valeurs de λ pour lesquelles elles sont reliées linéairement, mais ces valeurs sont isolées et les rapports des A, B, \dots restent méromorphes pour ces valeurs.

Enfin, toute région finie du plan, comprenant le point λ_0 , peut être recouverte par un nombre fini de cercles de rayon r , dont les centres sont les sommets de triangles équilatéraux juxtaposés dont le côté a une longueur $r_1 < r$, le centre de l'un d'eux étant λ_0 ; dans ce dernier cercle, les coefficients de F sont méromorphes, puisqu'ils le sont par hypothèse au voisinage de λ_0 ; ils le sont encore dans les cercles dont les centres sont intérieurs au précédent; et ainsi de suite.

C. Q. F. D.

13. Des propriétés précédentes on déduit que *les intégrales J et K sont de même espèce, ont les mêmes périodes, qui sont au nombre de deux au plus.*

En effet, donnons à λ la valeur fixe λ_0 ; soient $y = \eta(x)$, $x = \xi(y)$ les fonctions algébriques définies par l'équation

$$F(x, y, \lambda_0) = 0.$$

Si le point analytique (x, η) décrit un chemin le long duquel J varie d'une quantité α , le point $(y = \eta, \xi = x)$ décrit un chemin correspondant le long duquel K varie de $-\alpha$, puisqu'on a

$$J + K = \lambda_0.$$

Donc J et K sont de même espèce et ont les mêmes périodes.

Si ces intégrales avaient trois périodes, on pourrait trouver des circuits fermés le long desquels $J + K$ varieraient d'une quantité ε aussi petite qu'on veut, et l'on aurait

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= 0, \\ F(x, y, \lambda + \varepsilon) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est impossible, puisque F est uniforme et méromorphe en λ et que ses zéros sont isolés.

14. On a, quels que soient x et y ,

$$F(x, y, J + K) = 0;$$

donnons à y une valeur fixe; l'équation précédente devient une relation entre x et $J(x)$,

$$\Phi(x, J) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme en x , à coefficients uniformes en J . Si l'on donne à J une valeur finie, on a pour x un nombre fini de solutions; les points où J est infinie sont parmi les pôles de $\frac{dJ}{dx}$, ils sont aussi en nombre fini.

Il y a trois types à distinguer :

1° J n'a pas de période; c'est une fonction rationnelle $R(x, \eta)$, car elle est uniforme en x et η et n'a comme singularités que des pôles en nombre fini.

2° J a une période 2ω ; on voit de même que $e^{\frac{\pi i J}{\omega}}$ est une fonction rationnelle; J est de troisième espèce.

3° J a deux périodes $2\omega, 2\omega'$; $p(J | 2\omega, 2\omega')$ est une fonction rationnelle et J est de première espèce.

VII. — Étude des familles isothermes.

15. Je considère par exemple une famille du troisième type; l'une des courbes, C_0 , possède l'intégrale $J(z)$ considérée précédemment; posons

$${}_2J(z) = \lambda + i\rho;$$

les courbes C_λ et C_ρ sont représentées par les équations

$$\begin{aligned} R(z, \zeta') &= p \frac{\lambda + i\rho}{2}, \\ R'(\zeta, z') &= p \frac{\lambda - i\rho}{2}. \end{aligned}$$

Ce sont des transformées algébriques des courbes $\Gamma_\lambda, \Gamma_\rho$ représentées par les équations

$$\begin{aligned} Z &= p \frac{\lambda + i\rho}{2}, \\ Z' &= p \frac{\lambda - i\rho}{2}; \end{aligned}$$

les formules de transformation sont

$$(T) \quad Z = R(z, \zeta'), \quad Z' = R'(\zeta, z').$$

L'équation de la famille Γ_λ est, comme nous l'avons vu,

$$\begin{aligned} Z^2 Z'^2 - 2lZZ'(Z + Z') + l^2(Z + Z')^2 + \left(\frac{1}{2}g_2 - 4l^2\right)ZZ' \\ + \left(\frac{1}{2}g_2 l + g_3\right)(Z + Z') + g_3 l + \frac{1}{16}g_2^2 = 0 \quad (l = p\lambda). \end{aligned}$$

C'est une famille de cycliques dont les quatre foyers sont fixes; l'un est à l'infini, les autres sont déterminés par l'équation

$$(1) \quad 4Z^2 - g_2 Z - g_3 = 0.$$

Pour l infini, on obtient une courbe double de la famille

$$(Z - Z')^2 = 0;$$

il y en a d'autres : en écrivant que le premier membre de l'équation est un carré, on trouve la condition

$$4l^3 - g_2l - g_3 = 0;$$

ainsi quatre des cycliques sont aplaties suivant un cercle ou une droite; ce sont les courbes exceptionnelles de la famille.

16. Comme les cycliques sont homofocales, elles ont la même surface de Riemann Σ ; elles peuvent présenter deux aspects différents.

Premier cas. — Les racines de l'équation (1), qui donne les foyers, sont réelles, soit $c_1 > c_2 > c_3$; représentons par 2ω et $2i\omega'$ les périodes. Lorsque λ varie de 0 à 2ω , on a un ovale de la courbe C_λ , d'abord aplati suivant la droite $(-\infty, c_3)$, qui balaye le feuillet supérieur de Σ , puis vient s'aplatir suivant le segment (c_1, c_2) ; de 2ω à 4ω , l'ovale balaye le feuillet inférieur. Pour λ et $\lambda + 2\omega$, $l = p\lambda$ a la même valeur, on a deux ovales de la même courbe algébrique. Enfin aux valeurs $\lambda = \omega$ et $\lambda = 3\omega$ correspondent deux cercles dont les projections sur le plan sont superposées et forment l'une des courbes exceptionnelles, qui est un cercle de centre c_1 , par rapport auquel les foyers c_2 et c_3 sont conjugués.

Second cas. — Les racines c_1 et c_3 sont imaginaires conjuguées; écrivons les périodes $2\omega \pm 2i\omega'$. Pour $\lambda = 0$, la courbe C_λ se réduit au segment $(-\infty, c_2)$ de l'axe réel; lorsque λ croît, on a un ovale qui balaye le feuillet supérieur de Σ ; pour $\lambda = \omega$, il s'aplatit suivant un arc de cercle de centre c_2 , joignant c_1 et c_3 et ne rencontrant pas le segment $(-\infty, c_2)$. De ω à 2ω , l'ovale balaye le feuillet inférieur.

En général, les coupures suivant lesquelles se raccordent les feuillets d'une surface de Riemann sont arbitraires; ici nous avons des coupures pour ainsi dire naturelles, ce sont les courbes aplaties de la famille.

La transformation algébrique (T) fait correspondre à un point Z k points analytiques (z, ζ') , à l'une des cycliques une courbe composée de $2k$ ovales dans le premier cas, de k ovales dans le second. Si λ varie, chacun des ovales balaye la surface de Riemann correspondante en s'aplatissant $2k$ fois; les $2k$ courbes aplaties peuvent être

regardées comme des coupures de la surface; d'ailleurs, l'une des courbes de la famille peut avoir d'autres foyers que ceux qui limitent les coupures précédentes.

17. Les courbes Γ_ρ , orthogonales aux cycliques, forment aussi une famille de cycliques homofocales; on peut suivre la déformation d'un de leurs ovales lorsque ρ varie; il balaye la surface Σ et s'aplatit deux fois, suivant les segments (c_3, c_2) et $(c_1, +\infty)$ dans le premier cas, suivant le segment $(c_2, +\infty)$ et l'arc qui complète le cercle (c_1, c_3) dans le second.

On voit sans peine que les images successives d'un point du plan par rapport à l'une des cycliques sont sur une même cyclique de la famille orthogonale.

Par la transformation (T), on obtient la famille orthogonale C_ρ , qui est algébrique. Une courbe C_λ et une courbe C_ρ aplaties s'associent pour former des arcs d'une même courbe algébrique. Enfin un point du plan donne naissance à plusieurs suites d'images situées sur des courbes algébriques, qui sont les courbes C_ρ issues du point.

Une courbe C ne peut avoir deux intégrales de première espèce distinctes n'ayant chacune que deux périodes, à moins que les images successives d'un point ne soient en nombre limité; car une des suites d'images successives doit se trouver sur deux courbes algébriques distinctes.

18. On peut faire une étude analogue des familles isothermes du premier et du deuxième type; ce sont des transformées algébriques de la famille des droites parallèles

$$Z + Z' = \lambda,$$

ou de celle des cercles concentriques

$$ZZ' = e^\lambda.$$

VIII. — Application des propriétés des familles isothermes à la recherche de la fonction de Green. Anneau.

19. L'équation $f(z, z', \lambda) = 0$ représentant une famille isotherme, supposons qu'un ovale C' de la courbe C_λ balaye un anneau A , en

passant de C'_1 à C'_2 lorsque λ varie de λ_1 à λ_2 ; A est la projection d'un anneau B situé sur un feuillet de la surface Σ correspondant à l'une des courbes de la famille; soit $J(z) = \frac{1}{2}(\lambda + i\rho)$ l'intégrale que nous avons étudiée. Je suppose que C' dans sa déformation reste sans point singulier et que $J(z)$ soit une fonction analytique en tout point de A .

En un point z_1 de l'ovale C'_1 , $J(z)$ prend une valeur

$$J(z_1) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\rho_1);$$

si z parcourt C'_1 , λ reste fixe, ρ varie de ρ_1 à ρ_2 . Par z_1 passe une trajectoire orthogonale de la famille, C_{ρ_1} ; considérons-la comme une coupure qui rend l'anneau simplement connexe; dans l'aire A coupée, λ varie de λ_1 à λ_2 , ρ de ρ_1 à ρ_2 . La formule

$$u + iv = J(z) - J(z_1)$$

donne la représentation conforme de cette aire sur un rectangle limité par les droites

$$\begin{aligned} u = 0, & \quad u = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}, \\ v = 0, & \quad v = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}. \end{aligned}$$

Soit une seconde famille isotherme au moyen de laquelle on définit une intégrale $K(Z)$ et un anneau analogue à A ; si Z_1 est un point de l'un des bords, la formule

$$U + iV = K(Z) - K(Z_1)$$

représente l'anneau sur un rectangle limité par des droites

$$\begin{aligned} U = 0, & \quad U = \frac{l_2 - l_1}{2}, \\ V = 0, & \quad V = \frac{r_2 - r_1}{2}. \end{aligned}$$

Les deux rectangles sont semblables si l'on a

$$\frac{r_2 - r_1}{l_2 - l_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

on les représente l'un sur l'autre par l'équation

$$U + iV = \frac{l_2 - l_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (u + iv),$$

d'où, pour les deux anneaux,

$$\frac{K(Z) - K(Z_1)}{l_2 - l_1} = \frac{J(z) - J(z_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Il est clair qu'on peut supprimer les coupures.

Supposons par exemple la seconde famille composée de cercles concentriques, dont l'équation est

$$ZZ' = e^l;$$

on peut prendre

$$Z_1 = R_1, \quad l_1 = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 4\pi,$$

$$K(Z) = \log \frac{Z}{R_1}.$$

On détermine R_2 par la condition

$$\frac{\log R_2 - \log R_1}{2\pi} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

L'anneau A est représenté sur un anneau circulaire par l'équation

$$J(z) - J(z_1) = \frac{2\pi}{\rho_2 - \rho_1} \log \frac{Z}{R_1}.$$

Comme la fonction g est connue pour l'anneau circulaire (Chap. III, n° 1), on sait la former pour A.

20. Pour appliquer ce qui précède, il faut connaître la fonction $\lambda(z, z')$ qui satisfait à la condition $\lambda_{1,2} = 0$. Il peut arriver que l'équation de la famille isotherme soit donnée sous la forme

$$(1)' \quad F(z, z', l) = 0,$$

le paramètre l étant une fonction inconnue de λ , qu'il s'agit de déterminer. Posons

$$F[z, z', l(\lambda)] = f(z, z', \lambda);$$

on sait que $\frac{f_1(z, z', \lambda)}{f_3(z, z', \lambda)}$ devient une fonction $\rho(z)$ lorsqu'on y remplace

z' par sa valeur tirée de l'équation $f(z, z', \lambda) = 0$. On a donc

$$\frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \rho(z) \frac{dl}{d\lambda}$$

lorsqu'on remplace dans le premier membre z' par sa valeur tirée de l'équation (1)'.

D'où la méthode suivante : on élimine z' entre l'équation (1)' et l'équation

$$X = \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial F}{\partial l};$$

on trouve une équation en X dont une solution est le produit d'une fonction de z par une fonction de l ,

$$X = \rho(z) h(l),$$

et l'on a

$$\frac{dl}{d\lambda} = h(l),$$

$$J(z) = - \int \rho(z) dz.$$

Partons par exemple des ellipses homofocales dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2 + l} + \frac{y^2}{b^2 + l} - 1 = 0$$

ou bien

$$F(z, z', l) \equiv c^2 z^2 - 2(a^2 + b^2 + 2l)zz' + c^2 z'^2 + 4(a^2 + l)(b^2 + l) = 0;$$

on trouve

$$X = \frac{\sqrt{(a^2 + l)(b^2 + l)}}{2\sqrt{z^2 - c^2}},$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + l)(b^2 + l)}, \quad J(z) = - \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}} = i \arccos \frac{z}{c}.$$

L'anneau compris entre deux ellipses homofocales est représenté sur un anneau circulaire par la formule

$$i \arccos \frac{z}{c} = \log \frac{Z}{c},$$

$$2z = Z + \frac{c^2}{Z}.$$

21. *Anneau compris entre deux cycliques homofocales.* — Une cyclique a quatre foyers, c_1, c_2, c_3, c_4 , qui sont sur un même cercle ou dont deux sont conjugués par rapport à un cercle passant par les deux autres; si, par une inversion, l'un des foyers passe à l'infini, on se trouve dans le cas étudié au n° 16.

L'intégrale de première espèce est

$$J(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)(z-c_4)}}.$$

D'après ce qui précède, nous savons former la fonction g pour l'anneau compris entre deux ovales de la famille. Dans la solution donnée au Chapitre III, n° 11, il a fallu supposer que les deux ovales appartiennent à la même courbe et que les images successives par rapport à cette courbe sont en nombre fini; la méthode actuelle est donc plus générale.

Comme cas particulier, on peut réduire les deux ovales aux segments de cercle ou de droite $c_1 c_2$ et $c_3 c_4$ qui appartiennent aux courbes exceptionnelles; g est donc connue pour le plan tout entier dans lequel sont tracées ces deux coupures.

IX. — Intérieur d'un ovale.

22. Soient c_1 et c_2 les foyers contenus à l'intérieur de l'ovale C d'une cyclique; en considérant comme une coupure l'arc de cercle ou de droite suivant lequel C' peut s'aplatir en balayant l'intérieur A de l'ovale, on transforme A en un anneau. D'autre part, une ellipse et la droite qui joint les foyers $+c$ et $-c$ limitent un anneau A' ; les deux anneaux sont représentés l'un sur l'autre par la formule

$$\int_{c_1}^z \frac{dz}{\sqrt{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)(z-c_4)}} = \alpha \int_c^Z \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 - c^2}},$$

pourvu que la constante réelle α satisfasse à la condition

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{dz}{\sqrt{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)(z-c_4)}} = \alpha \int_c^{-c} \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 - c^2}}.$$

Les deux coupures se correspondent point par point; en un point $\frac{dZ}{dz}$ est le même des deux côtés de la coupure; on peut donc supprimer celle-ci; l'ovale A est représenté sur l'intérieur d'une ellipse, la fonction g est connue pour A.

La même méthode s'applique à l'ovale C' d'une courbe appartenant à une famille isotherme, si l'un des ovales de la famille, intérieur à C', est aplati suivant une ligne $c_1 c_2$ et si les deux déterminations de $J(z)$ en un point de cette ligne ont une somme nulle. Ces conditions sont réalisées pour les familles du troisième type.

X. — Rectangle curviligne.

23. Deux courbes $C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}$ d'une famille isotherme et deux trajectoires orthogonales C_{ρ_1}, C_{ρ_2} , limitent un rectangle curviligne A dans lequel je suppose qu'il n'y a aucun point singulier de la famille. On représente A sur l'aire analogue, limitée par les courbes $C_{l_1}, C_{l_2}, C_{r_1}, C_{r_2}$ d'une autre famille, au moyen de l'équation

$$\frac{J(z) - J(z_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{K(Z) - K(Z_1)}{l_2 - l_1};$$

z_1 et Z_1 sont des sommets tels que l'on ait

$$2J(z_1) = \lambda_1 + i\rho_1, \quad 2K(Z_1) = l_1 + ir_1,$$

et l'on suppose remplie la condition

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{r_2 - r_1}{l_2 - l_1}.$$

Prenons par exemple pour C_{λ_1} et C_{λ_2} deux cercles concentriques de rayons R_1 et R_2 , pour C_{ρ_1} et C_{ρ_2} deux rayons faisant l'angle α ; pour C_{l_1} et C_{l_2} deux cercles concentriques de rayons R'_1 et R'_2 , pour C_{r_1} et C_{r_2} deux rayons dont l'angle est π ; on trouve la condition

$$\log \frac{R'_1}{R'_2} = \frac{\pi}{\alpha} \log \frac{R_1}{R_2}$$

et l'équation

$$\log \frac{z}{R_1} = \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{Z}{R'_1}$$

ou bien

$$\frac{z}{R_1} = \left(\frac{Z}{R'_1} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Si R_2 et R'_2 sont infiniment petits, on obtient à la limite un secteur d'angle α représenté sur un demi-cercle par l'équation précédente, R'_1 et R'_2 étant déterminés par les conditions

$$R'_1 = R_1^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad R'_2 = R_2^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

24. *Régions limitées par une hyperbole.* — Une hyperbole H limite dans le plan trois régions; l'une, A , contient le centre; les autres, A_1 et A_2 , contiennent chacune un foyer, $+c$ et $-c$. L'hyperbole équilatère homofocale H' limite de même des régions A' , A'_1 , A'_2 .

Prenons la partie de A intérieure à une ellipse homofocale E et la partie de A' intérieure à une ellipse analogue E' . On peut faire la représentation conforme de ces régions l'une sur l'autre si E et E' sont convenablement associées. On a

$${}_2J(z) = \lambda + i\rho = \arcsin \frac{z}{c};$$

sur les deux branches de H , λ prend des valeurs $\pm \lambda_1$, sur celles de H' les valeurs $\pm \frac{\pi}{4}$; d'où la formule

$$\frac{1}{2\lambda_1} \arcsin \frac{z}{c} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{Z}{c}.$$

Il est facile de calculer λ_1 en fonction de l'angle α que font les asymptotes de H ; le sommet de la branche de droite a pour coordonnée z

$$z = c \cos \frac{\alpha}{2},$$

on a donc

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

$$z = c \sin \frac{2(\pi - \alpha)}{\pi} \arcsin \frac{Z}{c}.$$

Si l'ellipse E devient infiniment grande, il en est de même de E' , et

l'équation précédente représente l'une sur l'autre les régions A et A'.

Pour les régions focales A₁ et A'₁, je les coupe par l'hyperbole aplatie H'' qui va du foyer c à l'infini, et je les limite respectivement par des ellipses homofocales E et E'. Sur H, H' et H'', λ prend respectivement les valeurs $\frac{\pi - \alpha}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$; d'où la formule

$$\frac{1}{\frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\pi}{2}} \left[\arcsin \frac{z}{c} - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}} \left[\arcsin \frac{Z}{c} - \frac{\pi}{2} \right],$$

$$z = c \sin \frac{2\alpha}{\pi} \arccos \frac{Z}{c}.$$

Il est évident qu'on peut supprimer les coupures et supposer E et E' infiniment éloignées.

Dans les deux exemples précédents, z est fonction algébrique de Z si l'angle α des asymptotes est commensurable avec π; or g, que nous avons formée pour les régions A' et A'₁, est fonction algébrique de Z; donc la fonction g, pour une aire limitée par une hyperbole, est fonction algébrique ou transcendante de z suivant que le nombre $\frac{\alpha}{\pi}$ est rationnel ou irrationnel. Cela concorde bien avec ce fait que, dans le premier cas, les images successives sont en nombre limité, et qu'il y en a une infinité dans le second.

Nous connaissons maintenant la fonction de Green pour toute aire plane dont le bord appartient à une conique ou à une cyclique.

CHAPITRE V.

AIRES LIMITÉES PAR DES CERCLES.

I. — Deux cercles extérieurs.

1. Soit A l'aire extérieure à deux cercles C₁ et C₂, qui sont extérieurs l'un à l'autre; il existe deux points, a₁ intérieur à C₁ et a₂ intérieur à C₂, qui sont images par rapport aux deux cercles. Appelons ζ₁ l'image

d'un point z par rapport à C_1 et $\zeta_{1,2}$ l'image de ζ_1 par rapport à C_2 ; on passe de z à $\zeta_{1,2}$ par une substitution hyperbolique dont les points doubles sont a_1 et a_2 . Les images successives du point z sont sur le cercle $z a_1 a_2$ et tendent vers les points doubles; les régions successives sont des anneaux limités par des cercles par rapport auxquels a_1 et a_2 sont conjugués; elles couvrent une seule fois le plan.

Les équations des cercles C_1 et C_2 sont

$$\frac{z - a_1}{z - a_2} \frac{z' - a'_1}{z' - a'_2} = e^{\lambda_1},$$

$$\frac{z - a_1}{z - a_2} \frac{z' - a'_1}{z' - a'_2} = e^{\lambda_2},$$

en désignant par λ_1 et λ_2 des constantes réelles. Posons $\xi = \log \frac{z - a_1}{z - a_2}$; les équations précédentes s'écrivent

$$\xi + \xi' = \lambda_1, \quad \xi + \xi' = \lambda_2.$$

Soient $\xi_1, \xi_{1,2}$ les valeurs de ξ correspondant à ζ_1 et $\zeta_{1,2}$; on a

$$\xi + \xi'_1 = \lambda_1, \quad \xi_{1,2} + \xi'_1 = \lambda_2,$$

$$\xi_{1,2} = \lambda_2 - \lambda_1 + \xi.$$

On peut considérer $g(z)$ comme une fonction $f(\xi)$; elle possède les propriétés suivantes :

1° Quand z décrit C_1 , $g(z)$ augmente d'une certaine période 2Ω ; on a donc

$$f(\xi + 2\pi i) = f(\xi) + 2\Omega;$$

2° D'après les propriétés d'images, on a

$$f(\xi + \lambda_2 - \lambda_1) = f(\xi), \quad f'(\lambda_1 - \xi'_1) = -f'(\xi);$$

3° e^g admet comme pôle simple le point donné z_0 et comme zéro son image z_1 ; e^f aura pour pôle et zéro les valeurs

$$\xi_0 = \log \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}, \quad \xi_1 = \lambda_1 - \xi'_0;$$

4° A l'aire A du plan z , coupée par le segment $a_1 a_2$, correspond dans le plan ξ un rectangle dans lequel $e^{f(\xi)}$ est uniforme et méromorphe.

Par suite, $e^{f(\xi)}$ est une fonction doublement période de seconde espèce, qu'on peut exprimer au moyen de la fonction σ de Weierstrass admettant pour périodes $2\omega_1 = \lambda_2 - \lambda_1$, $2\omega_2 = 2\pi i$; on a

$$e^{f(\xi)} = \frac{\sigma(\xi - \xi_1)}{\sigma(\xi - \xi_0)} e^{\alpha\xi + \beta};$$

α et β sont des constantes qu'on calcule en exprimant que les propriétés d'images sont vérifiées; en utilisant la formule

$$\sigma(u - 2\omega_1) = -e^{-2\eta_1(u - \omega_1)} \sigma u,$$

on obtient

$$\alpha = -\frac{\eta_1}{\omega_1} (\xi_0 + \xi'_0 - \lambda_1),$$

$$\beta = -\frac{\alpha\lambda_1}{2},$$

$$g(z) = \log \frac{\sigma(\xi + \xi'_0 - \lambda_1)}{\sigma(\xi - \xi_0)} - \frac{\eta_1}{\omega_1} (\xi_0 + \xi'_0 - \lambda_1) \left(\xi - \frac{\lambda_1}{2} \right).$$

En particulier, si A est l'anneau compris entre deux cercles concentriques de rayons r_1 et r_2 , on posera

$$\xi = \log z, \quad \lambda_1 = \log r_1^2, \quad \lambda_2 = \log r_2^2,$$

$$g(z) = \log \frac{\sigma \log \frac{z z'_0}{r_1^2}}{\sigma \log \frac{z}{z_0}} - \frac{r_1}{\omega_1} \log \frac{z_0 z'_0}{r_1^2} \log \frac{r}{z_1}.$$

M. H. Villat a formé, par une méthode toute différente, l'expression d'une fonction harmonique prenant des valeurs données sur les deux cercles; on retrouve cette expression en appliquant la formule de Green à la fonction harmonique cherchée et à la fonction $g(z')$ dont nous venons d'obtenir la valeur.

Considérons les courbes ayant pour équation

$$\alpha(x, y) = \text{une constante } k;$$

pour k infiniment grand positif, la courbe est analogue à un cercle infiniment petit entourant le point z_0 ; lorsque k décroît, la courbe grandit en balayant A; elle se rejoint elle-même en acquérant un point double et se divise en deux ovales qui, pour la valeur $k = 0$, s'appli-

quent sur C_1 et C_2 . La valeur de z qui correspond au point double est celle des deux racines de l'équation

$$\frac{dg}{dz} = \zeta(\xi + \xi_0 - \lambda_1) - \zeta(\xi - \xi_0) - \frac{\eta_1}{\omega_1}(\xi_0 + \xi_0' - \lambda_1) = 0$$

donnant un point intérieur à A ; ζ_u désigne ici la fonction $\frac{d}{du} \log \sigma u$.

II. — Deux cercles tangents.

2. Si C_1 et C_2 sont tangents extérieurement, les points doubles a_1 et a_2 sont confondus avec le point de contact a ; la substitution $[z, \zeta_{12}]$ est parabolique et l'on doit s'attendre à trouver pour e^s une dégénérescence des fonctions doublement périodiques.

Prenons comme origine des coordonnées le point a , l'axe réel étant dirigé vers le centre de C_2 ; désignons par r_1 et r_2 les deux rayons; les équations des cercles sont

$$(C_1) \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = \frac{-1}{r_1} = \lambda_1 \quad \text{ou} \quad \xi + \xi' = \lambda_1,$$

$$(C_2) \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{r_2} = \lambda_2 \quad \text{ou} \quad \xi + \xi' = \lambda_2,$$

en posant

$$\xi = \frac{1}{z}.$$

On a la relation

$$\xi_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 + \xi;$$

$g(z)$ est une fonction $f(\xi)$ dont on forme l'expression comme dans le cas précédent :

$$g(z) = \log \frac{e^{\frac{2\pi i}{\lambda_2 - \lambda_1} \xi} - e^{\frac{2\pi i}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 - \xi_0')}}{e^{\frac{2\pi i}{\lambda_2 - \lambda_1} \xi} - e^{\frac{2\pi i}{\lambda_2 - \lambda_1} \xi_0}}.$$

III. — Deux cercles sécants.

3. Si les cercles C_1 et C_2 se coupent aux points a_1 et a_2 sous l'angle $\frac{\pi}{n}$, n étant entier, la substitution $[z, \zeta_{12}]$ est elliptique. Les

équations des cercles s'écrivent

$$\xi - \xi' = i\lambda_1, \quad \xi - \xi' = i\lambda_2,$$

en posant

$$\xi = \log \frac{z - a_1}{z - a_2}$$

et en désignant par λ_1 et λ_2 des constantes réelles, qui satisfont à la condition $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\pi}{n}$. On a

$$\begin{aligned} g(z) &= \log \frac{e^{n\xi} - e^{n\xi_1}}{e^{n\xi} - e^{n\xi_0}} \\ &\equiv \log \frac{\left(\frac{z - a_1}{z - a_2}\right)^n - \left(\frac{z_1 - a_1}{z_1 - a_2}\right)^n}{\left(\frac{z - a_1}{z - a_2}\right)^n - \left(\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}\right)^n}; \end{aligned}$$

z_1 est l'image de z_0 par rapport au cercle C_1 et ξ_1 est la valeur correspondante de ξ .

On peut former la fonction g pour l'aire A en utilisant les propriétés des familles isothermes; il n'est pas indispensable que l'angle α des deux cercles soit sous-multiple de π . La formule

$$Z = \left(\frac{z - a_1}{z - a_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

donne la représentation conforme de A sur un demi-plan, et l'on trouve

$$g = \log \frac{\left(\frac{z - a_1}{z - a_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} - \left(\frac{z_1 - a_1}{z_1 - a_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\left(\frac{z - a_1}{z - a_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} - \left(\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}.$$

IV. — Aire limitée par $p + 1$ cercles.

4. Étant donnés des cercles C_i, C_j, C_k , appelons ζ_i l'image d'un point z par rapport à C_i , ζ_{ij} l'image de ζ_i par rapport à C_j , ζ_{ijk} l'image de ζ_{ij} par rapport à C_k .

Soit l'aire A , d'un seul tenant, limitée par des cercles C_1, C_2, \dots, C_{p+1} .

ou des arcs de ces cercles, et contenant le point à l'infini. Je supposerai que les substitutions $[z, \zeta_{ij}]$, où i et j sont deux nombres distincts de la suite $1, 2, \dots, p+1$, engendrent un groupe discontinu, groupe fuchsien si les cercles sont orthogonaux à un cercle Γ , sinon groupe kleinéen. Le polygone générateur est formé de A et de l'une de ses images par rapport aux cercles donnés; il est symétrique. La fonction $\frac{dg}{dz}$ possède les propriétés d'images :

$$\frac{dg}{d\zeta_i} = -\frac{dg'}{dz'} \frac{dz'}{d\zeta_i}, \quad \frac{dg}{d\zeta_{ik}} = \frac{dg}{dz} \frac{dz}{d\zeta_{ik}};$$

d'après la seconde égalité, $\frac{dg}{dz}$ est une fonction θ de degré $m=1$; ses pôles sont les images successives de z_0 , il y en a deux dans le polygone générateur; enfin elle admet comme points singuliers ceux au voisinage desquels se trouvent des images d'un point quelconque z de A : ce sont les points doubles des substitutions hyperboliques et paraboliques du groupe et les points limites de ces points doubles.

Il y a, comme on sait, deux cas importants à distinguer :

1° Les images successives du polygone A recouvrent tout le plan; la fonction $\frac{dg}{dz}$ est alors définie et uniforme dans le plan; il en est ainsi, par exemple, si, le groupe étant fuchsien, A contient un arc non nul du cercle orthogonal Γ .

2° Les régions successives ne recouvrent qu'une partie du plan; par exemple, le polygone A est fuchsien et a au plus des sommets sur Γ .

Si A est un polygone fuchsien du premier cas, on sait, par les travaux de MM. Schottky, Burnside, Ritter, que les séries θ du degré $m=1$ sont convergentes et peuvent servir à former une fonction θ -fuchsienne dont on connaît les pôles, en particulier $\frac{dg}{dz}$. On peut le démontrer de la façon suivante :

V. — Polygone fuchsien. Premier cas.

5. Un point z a $p+1$ images ζ_i par rapport aux cercles donnés; je dirai qu'elles forment un premier groupe, ou groupe de rang un;

chacune d'elles a p images ζ_{ij} , différentes de z , formant un deuxième groupe; et ainsi de suite. Cherchons à exprimer $\frac{dg}{dz}$ par une série analogue aux séries θ :

$$\theta(z) = H(z) - \sum_1 H'(\zeta'_1) \frac{d\zeta'_1}{dz} + \sum_2 H(\zeta_2) \frac{d\zeta_2}{dz} - \sum_3 H'(\zeta'_3) \frac{d\zeta'_3}{dz} + \dots,$$

où $H(z)$ désigne une fonction rationnelle et \sum_n une somme étendue aux images du $n^{\text{ième}}$ groupe; ainsi

$$\sum_1 H'(\zeta'_1) \frac{d\zeta'_1}{dz} = H'(\zeta'_1) \frac{d\zeta'_1}{dz} + H'(\zeta'_2) \frac{d\zeta'_2}{dz} + \dots + H'(\zeta'_{p+1}) \frac{d\zeta'_{p+1}}{dz}.$$

Il faudra d'abord démontrer que la série θ est absolument convergente et ensuite choisir $H(z)$ en tenant compte de ce que $\frac{dg}{dz}$ a un pôle simple au point donné z_0 de l'aire A et en toutes ses images.

La série θ est absolument convergente si le point z et ses images sont distincts du point à l'infini et des pôles de $H(z)$ et si aucun pôle de $H(z)$ n'est un point singulier du groupe. Il suffit, pour le démontrer, de vérifier que la série

$$(1) \quad \sum_1 \left| \frac{d\zeta_1}{dz} \right| + \sum_2 \left| \frac{d\zeta_2}{dz} \right| + \dots$$

est convergente, car les valeurs absolues des quantités $H(\zeta)$ et $H'(\zeta')$ sont limitées supérieurement. L'une des démonstrations données par M. Poincaré pour le cas $m = 2$ s'applique presque sans modification.

LEMME. — Il existe un nombre K , indépendant du rang n , tel que l'on ait

$$\frac{M_n}{m_n} = \frac{\text{maximum de } \left| \frac{d\zeta_n}{dz} \right|}{\text{minimum de } \left| \frac{d\zeta_n}{dz} \right|} < K,$$

ζ_n désignant pour abréger l'une des images du $n^{\text{ième}}$ groupe, et cela lorsque z parcourt une petite aire c contenue à l'intérieur de A .

En effet, suivant que le rang n est pair ou impair, on a

$$\zeta_n \text{ ou } \zeta'_n = \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n} \quad (\alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = 1),$$

d'où l'on tire

$$\left| \frac{d\zeta_n}{dz} \right| = \frac{1}{|\gamma_n z + \delta_n|^2} = \frac{1}{|\gamma_n|^2} \frac{1}{|z - \mu_n|^2};$$

le point $\mu_n = -\frac{\delta_n}{\gamma_n}$ est celui dont l'image ζ_n est à l'infini, il est extérieur à A quel que soit n , de sorte que $|z - \mu_n|$ a un minimum d et un maximum D lorsque z est dans c . On voit que K a pour valeur $\frac{D^2}{d^2}$.

C. Q. F. D.

On peut compléter ce lemme. Si les $p + 1$ cercles qui limitent A sont extérieurs, les points singuliers du groupe sont à une distance du bord de A qui a un minimum d_1 non nul; supprimons de A le voisinage du point à l'infini; nous obtenons une aire B telle que, pour chacun de ses points z , $|z - \mu_n|$ a un maximum D_1 . Dans l'aire B, nous avons

$$\frac{M_n}{m_n} < \frac{D_1^2}{d_1^2},$$

on peut donc remplacer c par B, K ayant pour valeur $\frac{D_1^2}{d_1^2}$. Il en est encore ainsi lorsque deux ou plusieurs des cercles donnés sont sécants.

Si un sommet a du polygone A est point double parabolique, c'est un point limite de points μ_n et, si l'on prenait z confondu avec a , $|z - \mu_n|$ n'aurait pas un minimum $d_1 \neq 0$. Nous supprimerons alors de A le voisinage de a pour obtenir la région B dans laquelle le lemme est applicable.

Le lemme est exact, que A soit un polygone fuchsien ou kleinéen, symétrique ou non.

6. Ceci posé, soit L_0 la longueur totale des arcs du cercle Γ contenus dans A; comme on peut supposer que Γ n'est pas une droite, ces arcs sont aussi dans B. Soit L_n la longueur des arcs de Γ contenus dans les images du rang n de A; ces arcs sont dans les images de rang n de B.

On a

$$m_n \leq \frac{L_n}{L_0} \leq M_n,$$

$$\left| \frac{d\zeta_n}{dr} \right| \leq M_n < K m_n$$

$$< \frac{K L_n}{L_0};$$

la série (1) est convergente comme la série $L_0 + L_1 + \dots$, qui a pour somme la longueur du cercle Γ .

La série θ est donc absolument convergente dans l'aire B, donc dans A, à l'exception du point à l'infini, des sommets paraboliques et des pôles de $H(z)$. Or elle possède la propriété d'images

$$\theta(\zeta_i) = -\theta'(z') \frac{dz'}{d\zeta_i};$$

elle est donc absolument convergente dans tout le plan, à l'exception du point à l'infini, de ses images, des pôles de $H(z)$, de leurs images, des points singuliers du groupe et de leurs points limites.

En un pôle de $H(z)$ ou en l'une de ses images, un terme de la série θ devient infini; les autres termes forment une série convergente, $\theta(z)$ a donc un pôle.

Voyons ce qui arrive au point à l'infini. Supposons que ce soit un point régulier pour $H(z)$; en mettant à part le premier terme, on peut considérer la série θ comme somme de $p+1$ séries ayant comme point initial, au lieu de z , l'une de ses $p+1$ premières images; on peut appliquer à ces séries les raisonnements précédents, elles sont absolument convergentes, donc $\theta(z)$ est une fonction régulière au point à l'infini,

$$\theta(z) = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \dots;$$

je dis que les images du point à l'infini sont des pôles; l'une des images de rang un, par exemple, est le centre ω_1 du cercle C_1 , dont je désigne le rayon par R_1 . On a

$$\zeta_1 = \omega_1 + \frac{R_1^2}{z' - \omega_1}$$

et

$$\begin{aligned}\theta(\zeta_1) &= -\theta'(z') \frac{dz'}{d\zeta_1} \\ &= \left(A' + \frac{B'}{z'} + \frac{C'}{z'^2} + \dots \right) \frac{R_1^2}{(\zeta_1 - \omega_1)^2} \\ &= \frac{A' R_1^2}{(\zeta_1 - \omega_1)^2} + \frac{B'}{\zeta_1 - \omega_1} + C_1 + \dots;\end{aligned}$$

ω_1 est donc pôle double en général; pôle simple si A' est nul, c'est-à-dire si le point à l'infini est zéro de $H(z)$; point régulier s'il est zéro double.

En supposant maintenant que $H(z)$ soit infinie au point à l'infini, on voit que ses images sont des pôles de θ .

7. Nous allons vérifier qu'il existe une série $\theta(z)$ possédant les propriétés qui définissent $\frac{d\mathcal{G}}{dz}$; l'existence de cette fonction sera démontrée et nous en aurons une expression analytique valable dans tout son domaine d'existence.

Je prends pour $H(z)$ la fonction $\frac{-1}{z - z_0}$; la fonction

$$\theta(z) = \frac{-1}{z - z_0} + \sum_1 \frac{1}{\zeta' - z_0'} \frac{d\zeta'}{dz} - \sum_2 \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{d\zeta}{dz} + \dots$$

est infinie comme $\frac{d\mathcal{G}}{dz}$ en z_0 et en chacune de ses images, mais elle est nulle à l'infini comme $\frac{1}{z}$, tandis que $\frac{d\mathcal{G}}{dz}$ doit être nulle comme $\frac{1}{z^2}$. Soit alors ω_i le centre du cercle C_i ($i = 1, 2, \dots, p + 1$); la fonction

$$\theta_i(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z - \omega_i} - \sum_1 \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta' - \omega_i'} \frac{d\zeta'}{dz} + \sum_2 \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta - \omega_i} \frac{d\zeta}{dz} - \dots$$

est régulière en tout point de A , nulle à l'infini comme $\frac{1}{z}$; elle n'est pas identique à zéro. Désignons par h_1, h_2, \dots, h_{p+1} , des constantes réelles; la fonction

$$\varphi(z) = \theta(z) + h_1 \theta_1(z) + \dots + h_{p+1} \theta_{p+1}(z)$$

admet le point à l'infini comme zéro double si les constantes vérifient

l'équation

$$(2) \quad h_1 + h_2 + \dots + h_{p+1} = 1.$$

Elle possède les propriétés d'images,

$$\varphi(\zeta_i) d\zeta_i + \varphi'(z') dz' = 0;$$

donc la fonction $\psi(z) = \int^z \varphi(z) dz$ satisfait sur les $p+1$ cercles donnés à la condition

$$\psi(\zeta_i) + \psi'(z') = \text{const.},$$

c'est-à-dire que la partie réelle de $\psi(z)$ est constante sur ces cercles; il en est ainsi pour g , mais les constantes doivent avoir pour valeur 0. Écrivons donc les équations

$$\text{partie réelle de } \int [\theta(z) + h_1 \theta_1(z) + \dots + h_{p+1} \theta_{p+1}(z)] dz = 0,$$

en prenant successivement l'intégrale d'un point du cercle C_{p+1} à un point de chacun des cercles C_1, C_2, \dots, C_p . On forme ainsi p équations du premier degré à coefficients réels pour déterminer, avec l'équation (2), les paramètres h . Ces équations sont indépendantes des chemins d'intégration parce que les périodes de la fonction $\psi(z)$ dans l'aire A sont purement imaginaires.

Si le déterminant des $p+1$ équations linéaires était nul, il existerait une fonction analytique

$$\int^z [h_1 \theta_1(z) + \dots + h_{p+1} \theta_{p+1}(z)] dz,$$

régulière dans A , dont la partie réelle serait nulle sur le bord de A et dont la partie imaginaire ne serait pas constante dans A (car elle a des périodes, $2\pi i h_i$ autour du cercle C_i); ce qui est impossible. Donc le déterminant n'est pas nul, on trouve pour les paramètres h un système unique de valeurs, la fonction g a pour expression

$$g = \int^z [\theta(z) + h_1 \theta_1(z) + \dots + h_{p+1} \theta_{p+1}(z)] dz,$$

l'origine d'intégration étant un point du cercle C_{p+1} . Si l'on remplace

les fonctions θ par leurs développements, on voit que e^g est exprimée par un produit enfin convergent.

M. Burnside a étudié les propriétés des fonctions $\int (\theta_i - \theta_j) dz$, dont l'analogie avec les intégrales de première espèce est évidente (*Proceedings of the London mathematical Society*, vol. 23, 1892).

VI. — Polygone kleinéen. Premier cas.

8. L'aire A est limitée par des cercles C_1, C_2, \dots, C_{p+1} , qui ne sont pas orthogonaux à un même cercle Γ ; je me bornerai pour abrégier au cas où ces cercles sont extérieurs deux à deux. Si l'on démontre que les séries θ du degré $m = 1$ sont absolument convergentes, on pourra former $\frac{dg}{dz}$ comme pour un polygone fuchsien.

Supposons cette convergence démontrée lorsque l'aire est limitée par p cercles. Je trace un cercle entourant C_{p+1} et laissant à son extérieur les cercles C_1, \dots, C_p ; par une inversion, je transforme ce cercle en une droite Δ , qui sépare ainsi C_{p+1} des autres cercles donnés. L'usage de Δ par rapport à C_{p+1} est un cercle Δ' .

Première remarque. — Marquons sur Δ un segment AB de longueur L , ayant pour milieu le point O , projection orthogonale sur Δ du centre de C_{p+1} ; l'image de AB par rapport à C_{p+1} est un arc du cercle Δ' , dont je désigne la longueur par L' .

Si des arcs de courbes sont tracés à l'intérieur des cercles C_1, \dots, C_p , et si leur longueur totale l est assez petite, la somme des longueurs de leurs images par rapport à C_{p+1} est inférieure à L' ; il suffit par exemple que l soit inférieure à la longueur CD découpée sur Δ par le plus grand cercle concentrique à C_{p+1} , laissant à son extérieur les cercles C_1, \dots, C_p , et que L soit supérieure à CD ; car si l'on étale sur CD les arcs de courbes, on les rapproche de C_{p+1} , on augmente la longueur de leurs images, et celle-ci reste inférieure à L' .

Si la longueur totale l est égale à fL ($f < 1$), la longueur des images sera une fraction de L' , $f'L'$; f' est en général supérieur à f , mais $\frac{f'}{f}$ a, quel que soit f entre 0 et 1, une limite supérieure α ; de sorte que la longueur des images par rapport à C_{p+1} est inférieure à $\alpha fL'$.

Seconde remarque. — Prenons sur Δ' ou à l'intérieur de ce cercle un point z ; soit ζ l'une quelconque de ses images successives par rapport aux cercles C_1, \dots, C_p ; d'après l'hypothèse, la série $\sum \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ est convergente; sa somme a un maximum M dans Δ' ; si z décrit dans Δ' des arcs dont la longueur est l_1 , ses images ζ décrivent des arcs dont la longueur totale est inférieure à $L_1 M$.

Ceci posé, partons d'une longueur λ prise sur Δ au voisinage du point O ; la somme λ_1 des longueurs de ses images ζ est finie; elle tend vers zéro avec λ ; en prenant λ suffisamment petit, on aura

$$\lambda + \lambda_1 < CD < L.$$

Les images de toutes ces longueurs relativement à C_{p+1} ont une longueur totale λ_2 qui, d'après la première remarque, satisfait à l'inégalité

$$\lambda_2 < L'.$$

Les images ζ de ces longueurs λ_2 ont une longueur totale $\lambda_3 < L'M$; nous prendrons la longueur L , jusqu'à présent assujettie à être supérieure à CD , telle que l'on ait $\frac{1}{2}L > aL'M$; c'est possible parce que $\frac{L}{L'}$ augmente indéfiniment avec L . Nous avons donc

$$\lambda_3 < \frac{1}{2a} L < \frac{1}{2} L.$$

En diminuant au besoin λ , on peut supposer en outre $\lambda_3 < CD$. Les images des longueurs λ_3 par rapport à C_{p+1} ont une longueur λ_4

$$\lambda_4 < \frac{1}{2} a L'.$$

En continuant le même raisonnement, on arrive aux longueurs

$$\lambda_{2n+2} < \frac{1}{2^n} a L',$$

$$\lambda_{2n+1} < \frac{1}{2^n} L;$$

comme λ_{2n+1} tend vers zéro, il existe une valeur de n à partir de laquelle il n'y a plus besoin de diminuer λ pour avoir $\lambda_{2n+1} < CD$.

Les séries

$$L + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2^2}L + \dots,$$

$$\alpha L' + \frac{1}{2}\alpha L' + \frac{1}{2^2}\alpha L' + \dots$$

sont convergentes; la série $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ l'est donc aussi; or on a obtenu par le procédé utilisé une image quelconque de la longueur λ par rapport aux $p + 1$ cercles donnés; donc la série $\sum \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ étendue à toutes ces images est convergente en O et, d'après le lemme, en un point quelconque de l'aire A .

VII. — Polygone fuchsien ou kleinéen. Second cas.

9. L'aire A , d'un seul tenant et simplement connexe, est limitée par des arcs de cercles; les angles de ce polygone sont nuls ou ont pour valeur $\frac{\pi}{m}$, m étant entier; les régions successives couvrent une seule fois une partie du plan; A est la moitié d'un polygone fuchsien ou kleinéen symétrique. Je me bornerai au cas où A est un triangle dont aucun des angles n'est nul.

Si la fonction $g(z)$ est connue, l'équation

$$Z = e^{-g(z)}$$

établit la représentation conforme de A sur un cercle, le point z_0 où $g(z)$ est infinie correspondant au centre du cercle; la relation

$$Z_1 = i \frac{1-Z}{1+Z} = i \frac{e^{g(z)} - 1}{e^{g(z)} + 1}$$

fait correspondre à A la partie du plan complexe Z , située au-dessus de l'axe réel. On connaît la fonction $z(Z)$, dont on a différentes expressions, soit comme quotient de deux intégrales d'une équation de Gauss, soit comme intégrale d'une fonction algébrique (intégrale de Schwartz et de Christoffel). Il peut être intéressant d'obtenir l'expression de Z_1 en fonction de z ; c'est une fonction fuchsienne $f(z)$.

Le polygone générateur du groupe est de genre zéro; toutes les fonctions fuchiennes sont des fonctions rationnelles de $f(z)$; on sait

former la fonction g sur la surface de Riemann correspondante (Chap. III, n° 3) :

$$g = \log \frac{f(z) - f(z_1)}{f(z) - f(z_0)},$$

z_1 étant l'image de z_0 qui se trouve dans la seconde moitié du polygone générateur.

Désignons par a_1, a_2, a_3 les sommets du triangle A, par $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$ les angles. Je considère la série thêta-fuchsienne

$$\theta(z) = \frac{1}{(z - a_1)^{p_1}} + \sum_1 \frac{1}{(\zeta' - a'_1)^{p_1}} \left(\frac{d\zeta'}{dz} \right)^2 + \sum_2 \frac{1}{(\zeta - a_1)^{p_1}} \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 + \dots;$$

p_1 est un entier positif; les différentes sommes sont étendues aux groupes d'images de rang 1, 2, etc. La fonction $\theta(z)$ admet évidemment a_1 comme pôle d'ordre p_1 et n'a pas d'autre pôle que a_1 et ses images; on sait qu'elle est nulle en a_2 et a_3 ; soient p_2 et p_3 les ordres respectifs de ces zéros. En se reportant à une formule démontrée par M. Poincaré (*Acta math.*, t. I, p. 219), on trouve que le nombre des zéros de θ , intérieurs à A, est

$$p_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{p_1 - 2}{m_1} + 2 - \frac{p_2 + 2}{m_2} - \frac{p_3 + 2}{m_3} \right];$$

prenons $p_1 = 2$; $\frac{p_2 + 2}{m_2}$ et $\frac{p_3 + 2}{m_3}$ sont des entiers positifs; p_0 est positif ou nul; on a donc

$$\frac{p_2 + 2}{m_2} = \frac{p_3 + 2}{m_3} = 1, \\ p_0 = 0;$$

$\theta(z)$ n'a pas de zéro à l'intérieur de A.

Considérons de même la fonction

$$\theta_1(z) = \frac{1}{(z - a_3)^2} + \sum_1 \frac{1}{(\zeta' - a'_3)^2} \left(\frac{d\zeta'}{dz} \right)^2 + \dots;$$

elle est infinie en a_3 , nulle en a_1 et a_2 , avec les ordres $m_1 - 2$ et $m_2 - 2$; elle n'a pas de zéro dans A.

La fonction fuchsienne

$$f(z) = \frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}$$

n'a ni pôle, ni zéro dans A; elle est nulle en a_1 , finie en a_2 , infinie en a_3 ; on vérifie sans peine que la formule

$$Z_1 = i f(z)$$

donne la représentation conforme de A sur la partie du plan complexe Z_1 située au-dessus ou au-dessous de l'axe réel; $f(z)$ est la fonction cherchée.

On formera de la même façon $f(z)$, quel que soit le nombre des sommets du polygone A; si certains des angles sont nuls, il faut modifier la formule qui donne p_0 (*loc. cit.*, p. 224); on trouve encore $p_0 = 0$.

CHAPITRE VI.

APPLICATION DES IMAGES A QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES ALGÈBRIQUES.

I. — Sur les points imaginaires en géométrie plane.

1. La représentation géométrique des points imaginaires des courbes a préoccupé plusieurs savants : il suffit de rappeler les travaux de Poncelet et de von Staudt. Considérons une courbe algébrique C, ayant pour équation

$$F(x, y) \equiv f(z, z') = 0;$$

dire qu'un point imaginaire, $x = a + bi$, $y = c + di$, appartient à la courbe, c'est dire que l'on a

$$F(a + bi, c + di) = f[a - d + i(b + c), a + d + i(b - c)] = 0;$$

donc les deux points qui ont respectivement pour première et seconde

coordonnées

$$z = a - d + i(b + c), \quad \zeta' = a + d + i(b - c)$$

sont images par rapport à C ; on peut les figurer géométriquement. Inversement, à un couple d'images, $z = \alpha + \beta i$, $\zeta' = \gamma + \delta i$, correspond un point imaginaire de la courbe

$$x = \frac{\alpha + \gamma}{2} + i \frac{\beta + \delta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \gamma}{2i} + \frac{\beta - \delta}{2}.$$

Au même couple pris dans l'ordre inverse, $z = \gamma - i\delta$, $\zeta' = \alpha - i\beta$, correspond le point imaginaire conjugué. Enfin, deux images confondues donnent un point réel de C .

Deux courbes C et C_1 , d'ordres respectifs m et m_1 , ont mm_1 points communs, c'est-à-dire qu'il y a mm_1 couples de points (p, q) qui sont associés à la fois par rapport à C et C_1 . Si p et q coïncident, on a un point réel d'intersection; si p et q sont distincts, ils représentent un point imaginaire; comme les courbes C et C_1 sont supposées réelles, au point imaginaire représenté par (p, q) répond le point imaginaire conjugué (q, p) .

Cette représentation des points imaginaires des courbes est due à M. Darboux (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*); elle montre d'une façon lumineuse les relations qui existent entre des propriétés, en apparence fort différentes, des cycliques et des cyclides. Nous avons vu combien cette représentation est utile pour l'étude de la fonction de Green; elle va nous permettre de démontrer simplement plusieurs propositions relatives aux courbes algébriques.

II. — Nombre des ovals d'une courbe de genre p .

2. La courbe algébrique C est tracée sur la surface de Riemann Σ qui lui correspond; tout point m de Σ a un associé μ ; m n'est confondu avec μ que s'il est sur un arc de C .

Harnack a démontré qu'une courbe de genre p est composée de $p + 1$ ovals au plus. Pour vérifier cette propriété, nous supposons que les foyers de C sont distincts, que les points multiples sont des points doubles à tangentes non confondues et qu'il n'y a pas de singu-

larité à l'infini; si ces conditions ne sont pas réalisées, on fera une transformation birationnelle convenablement choisie, ce qui ne modifie ni le genre, ni le nombre des ovals. On peut ensuite transformer Σ en un disque plan à p trous.

Sur Σ , la courbe C n'a pas de points doubles et se compose donc d'ovales qui ne se coupent pas mutuellement.

Si k de ces ovals isolent sur Σ une région Σ_i , ils constituent toute la courbe C ; en effet, le point m ne peut sortir de Σ_i sans que μ y entre, en traversant le bord de Σ_i au même point que m ; l'un des deux points est donc dans Σ_i , l'autre à l'extérieur, et ils ne peuvent coïncider que sur le bord de Σ_i . Donc C n'a pas de point en dehors de ce bord.

Comme $p + 1$ contours fermés, tracés sur la surface et *ne se coupant pas mutuellement*, détruisent la connexité, C comprend $p + 1$ ovals au plus.

C. Q. F. D.

3. La méthode suivie dans la démonstration précédente permet d'obtenir bien des renseignements sur la disposition des ovals; voici un exemple : si un oval de C divise le plan en deux régions dont l'une ne contient pas de foyer, C se compose de ce seul oval; car ce trait, supposé tracé sur les feuillets de la surface de Riemann, est sur l'un des feuillets qu'il divise en deux parties, dont l'une, ne contenant pas de point de ramification, ne touche pas aux autres feuillets; elle constitue Σ_i , et Σ est bien divisée en deux. On peut ajouter que la courbe C est unicursale; car, si la surface Σ avait un trou, on pourrait tracer un contour non réductible à un point par déformation continue; le contour associé serait situé sur Σ_i et serait réductible à un point, ce qui est impossible; donc p est nul. On en conclut que la fonction $\zeta'(z)$ ne peut être uniforme dans une aire A limitée par un oval de C que si cette courbe est unicursale (*cf.* Chap. III, n° 3).

III. — Ovals virtuels.

4. Deux circonstances peuvent se présenter : Σ est divisée par les ovals de la courbe C , ou ne l'est pas. Dans le second cas, considérons un point a et son image α ; je trace un chemin λ , ayant pour extrémités a et α , ne rencontrant pas les ovals et ne se coupant pas lui-

même; le chemin associé λ' a les mêmes propriétés; λ et λ' forment un circuit tel que, si un point m le parcourt, l'associé μ le décrit aussi, mais sans coïncider constamment avec m ; je dirai que ce circuit est un ovale virtuel de C .

Par exemple, l'équation

$$zs' + 1 = 0$$

représente un cercle C n'ayant pas d'ovale réel; je trace le cercle Γ qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité; si un point m le décrit, son image μ par rapport à C le décrit également, dans le même sens; Γ est un ovale virtuel de C . D'après sa définition, un ovale virtuel est déformable; dans cet exemple, tout cercle coupant diamétralement Γ est un ovale virtuel de C .

De même l'équation

$$(z^2 - c^2)(z'^2 - c^2) - a^2 = 0 \quad (a > c)$$

représente une courbe de Cassini, de genre un, qui a un seul ovale réel; la surface de Riemann se compose de deux feuilletts sur l'un desquels est tracé l'ovale; la projection de celui-ci sur l'autre feuillet est un ovale virtuel de la courbe.

Revenons au cas général. On peut tracer le chemin λ de manière que l'ovale virtuel Γ ne se coupe pas lui-même; car si λ et λ' se rencontrent en un point, il est visible que ce point coïncide avec son associé : or, par hypothèse, λ ne rencontre pas les ovales de C ; si λ et λ' se rencontrent en un nombre impair de points, le point du milieu doit être aussi sur C ; si le nombre des points de rencontre est pair, on réduit λ et λ' aux segments du milieu.

Comme un ovale réel, Γ a les propriétés suivantes : 1° si m le décrit, μ le parcourt également (mais sans rencontrer m); 2° si m le traverse, μ le traverse aussi (mais en un point différent); 3° si m quitte Γ d'un côté, μ le quitte du côté opposé, car la surface Σ est bilatère et la correspondance entre m et μ change le sens des angles. On en conclut qu'un ovale virtuel n'est pas réductible à un point, sinon un point m de la région balayée aurait son image μ en dehors de cette région, Σ serait divisée en deux parties dont l'une, et par suite l'autre, n'aurait pas de trou; C serait de genre nul.

5. Si Σ n'est pas divisée par les ovales réels et l'ovale virtuel Γ , on tracera un nouvel ovale virtuel, et l'on continuera jusqu'à ce que Σ soit divisée; on a alors sur Σ des ovales qui ne se coupent pas mutuellement, en nombre $p + 1$ au plus.

On doit se demander si Σ ne peut être divisée par ces ovales en plus de deux régions. Soit l'une, Σ_1 , d'un seul tenant; lorsque m sort de Σ_1 , μ y entre; donc la région associée Σ_2 est contiguë à Σ_1 le long du bord de celle-ci et n'a pas d'autre bord; Σ_1 et Σ_2 couvrent toute la surface Σ .

Je me propose d'étudier la disposition des ovales sur Σ .

IV. — Les ovales réels et virtuels sont des circuits C_h .

6. Sur la surface Σ , transformée en disque plan percé de p trous, on a l'habitude de tracer deux sortes de circuits; les uns, C_h , forment les bords intérieurs ($h = 1, 2, \dots, p$) et le bord extérieur ($h = p + 1$) du disque; les autres, D_h , coupent chacun deux des circuits C_h . Tout circuit tracé sur Σ peut être ramené par déformation continue à se composer de circuits C_h et D_h , qui se raccordent directement ou au moyen de doubles traits; mais, si ce circuit est un ovale de C , nous allons voir qu'en construisant convenablement la surface Σ , on le rend réductible à des doubles traits et des circuits C_h , sans circuits D_h ; autrement dit, un ovale qui passe de la face supérieure du disque à la face inférieure en coupant un circuit C_h revient en traversant le même circuit.

La surface de Riemann, sous son premier aspect, est composée de k feuillets, F_1, F_2, \dots, F_k ; F_1 et F_2 sont raccordés le long d'une coupure qui joint deux foyers convenablement choisis; de même F_2 et F_3, \dots, F_{k-2} et F_{k-1} ; les derniers feuillets, F_{k-1} et F_k , se raccordent le long de $p + 1$ coupures, qui joignent deux à deux $2(p + 1)$ foyers; mais il faut remarquer qu'on peut modifier comme on veut ces coupures en accouplant comme on veut les foyers qui les limitent. Ceci posé, un ovale C' de la courbe C n'est pas tracé tout entier sur F_1 , sinon il est réductible à un point et p est nul; il passe donc de F_1 sur F_2 en rencontrant la première ligne de croisement en un nombre pair de points; une déformation continue (en passant au besoin par le point à l'infini)

amène C' à glisser de F_1 sur F_2 ; et ainsi de suite, jusqu'au feuillet F_{k-2} . On peut donc négliger ces feuillets et regarder C' et les autres ovales comme tracés sur F_{k-1} et F_k . Marquons par des chevilles les foyers qui intéressent ces deux feuillets et tendons les ovales comme s'ils étaient des fils, de manière à former des doubles traits et des boucles qui entourent chacune deux chevilles. Il n'y a pas deux boucles qui aient une seule cheville commune, sinon elles se rencontreraient sur la surface de Riemann; ni de trait simple qui soit à l'intérieur d'un double trait, sinon la surface Σ ne serait pas divisée par les ovales. Nous pouvons donc prendre comme ligne de croisement le tracé de chaque boucle; de sorte que les ovales se composent de circuits C_h et de doubles traits.

C. Q. F. D.

V. — Disposition des ovales.

7. Prenons d'abord une courbe de genre deux composée de trois ovales; ils divisent Σ en deux régions Σ' et Σ'' ; aucun d'eux ne peut être réduit par déformation à un point, sinon la région balayée serait Σ' par exemple, et C ne peut avoir de traits en dehors du bord de Σ' ; il n'y a pas non plus deux ovales entourant un même trou, sinon l'anneau compris entre eux serait Σ' et le troisième ovale n'existerait pas; une seule disposition est donc possible : les ovales forment les trois bords du disque.

Il en est de même en général : *la courbe C comprend $p + 1$ ovales, qui sont les circuits C_h . Démontrons-le.*

8. Les contours C_h divisent le disque en deux parties, la face supérieure Σ_1 et la face inférieure Σ_2 ; soit C'_h l'image de C_h ; les circuits C'_h forment les bords de deux régions Σ'_1 et Σ'_2 , respectivement homéomorphes à Σ_1 et Σ_2 .

On voit sans peine que, si un circuit C'_h est un D_h , tous le sont; or prenons un ovale C' , qui est une combinaison de C_h ; il est sa propre image, donc est une combinaison de C'_h , qui par suite ne peuvent être des D_h .

La région Σ'_1 est bordée par des C_h , elle recouvre dans son ensemble soit Σ_1 , soit Σ_2 , les bords pouvant ne pas coïncider exactement.

Choisissons sur les bords de Σ_1 un sens tel que l'aire Σ_1 soit à gauche; le sens correspondant sur les bords de Σ'_1 sera tel que Σ'_1 soit à droite. Si Σ'_1 coïncide dans son ensemble avec Σ_1 , il est impossible qu'il existe un ovale réel ou virtuel C' , puisqu'il est parcouru par m et μ dans le même sens et est équivalent soit à des bords de Σ_1 , parcourus dans un certain sens, soit à des bords de Σ'_1 , parcourus dans le sens contraire. Comme il existe des ovales C' , Σ'_1 recouvre Σ_2 .

Deux hypothèses sont alors possibles :

1° Un circuit C_1 et son associé C'_1 entourent le même trou; ils forment les bords d'une sorte d'anneau sur lequel se trouve un ovale réel ou virtuel;

2° C'_1 entoure le même trou que C_2 ; prenons C_2 confondu avec C'_1 , C'_2 est confondu avec C_1 ; il ne peut exister un ovale C' entourant C_1 sans entourer son image C_2 , puisque C' est son propre associé; donc C_1 et C_2 ne sont pas séparés par un trait de C et l'on peut aller d'un point de C_1 à son image sur C_2 par un chemin λ ne rencontrant pas la courbe C ; donc Σ n'est pas divisée, ce qui est contraire à ce que nous avons supposé.

La seconde hypothèse doit être rejetée, un circuit C_h et son image C'_h entourent le même trou, C comporte $p + 1$ ovales réels et virtuels qui sont chacun un C_h .

9. En coordonnées cartésiennes ou isotropes, les équations de la courbe C sont

$$F(x, y) \equiv f(x + iy, x - iy) = 0;$$

soit $r(x, y)$ une fonction rationnelle à coefficients réels; je considère l'intégrale

$$I = \frac{2}{i} \int^{x,y} \frac{r(x, y) dx}{F'_y(x, y)}.$$

Si nous passons aux coordonnées isotropes, nous avons

$$r(x, y) \equiv r\left(\frac{z + z'}{2}, \frac{z - z'}{2i}\right) \equiv R(z, z'),$$

$$dx = \frac{1}{2}(dz + dz') = \frac{1}{2f_2}(f_2 - f_1) dz,$$

$$F'_y = i(f_1 - f_2);$$

d'où finalement

$$I = \int^{z, z'} \frac{R(z, z') dz}{f_2(z, z')}.$$

Il n'est pas nécessaire que z et z' soient imaginaires conjuguées; on doit remplacer z' par la fonction $\zeta'(z)$ que définit l'équation $f(z, \zeta') = 0$; mais si z et z' sont imaginaires conjuguées sur le chemin d'intégration, la valeur de I est purement imaginaire. La fonction rationnelle $R(z, z')$ vérifie l'identité

$$(1) \quad R(z, z') - R'(z', z) \equiv 0.$$

Si le chemin d'intégration est l'un des ovals de C réel ou virtuel, on voit de suite que la valeur I est purement imaginaire, donc les périodes c_h correspondantes sont purement imaginaires. Un circuit D_h qui rencontre deux ovals réels donne une période réelle; un circuit D_h qui rencontre un oval réel et un oval virtuel, ou deux ovals virtuels, donne une période imaginaire.

Intégrales de première espèce. — Un polynôme adjoint d'ordre $m - 3$ est de la forme

$$r(x, y) \equiv \lambda_1 r_1(x, y) + \dots + \lambda_p r_p(x, y);$$

les coefficients des polynômes r_h sont réels; on en déduit

$$R(z, z') \equiv \lambda_1 R_1(z, z') + \dots + \lambda_p R_p(z, z');$$

les polynômes R_h satisfont à l'identité (1), et R également, si les paramètres λ_h sont réels. On a ainsi l'intégrale

$$I = \lambda_1 I_1 + \dots + \lambda_p I_p.$$

On peut choisir les polynômes r_h de façon que l'intégrale I_h ait pour période $2\pi i$ le long des contours C_h et C_{p+1} , et zéro autour de chacun des circuits analogues.

Intégrales de troisième espèce. — Il y a une infinité d'intégrales de troisième espèce, infinies en deux points associés z_0 et z_1 , comme $\log \frac{1}{z - z_0}$ et $-\log \frac{1}{z - z_1}$; si l'une d'elles est

$$K = \int^{z, \zeta'} \frac{R(z, \zeta') dz}{\Delta(z, \zeta') f_2(z, \zeta')},$$

où Δ représente le polynome

$$\Delta = \begin{vmatrix} z & \zeta' & 1 \\ z_0 & z'_1 & 1 \\ z_1 & z'_0 & 1 \end{vmatrix},$$

les autres sont comprises dans la formule

$$J = K + \lambda_1 I_1 + \dots + \lambda_p I_p.$$

Les deux infinis logarithmiques étant des points associés, on peut supposer que le polynome adjoint R vérifie l'identité (1).

VI. — La fonction g .

10. Si les coefficients λ qui figurent dans l'intégrale J sont réels, les périodes c_h sont purement imaginaires; la partie réelle de J , soit U , est uniforme sur chacune des faces du disque. Pour qu'elle soit uniforme sur le disque entier, il faut que les parties réelles des périodes d_h soient nulles; on a ainsi p équations linéaires à coefficients réels pour déterminer les paramètres λ ; le déterminant du système n'est pas nul, sinon il existerait une fonction harmonique uniforme sur Σ , régulière en tout point, ce qui n'est pas. Il y a donc pour les λ une solution unique, ce qui démontre l'existence de la fonction de Green U et de la fonction g , infinies aux points associés m_0 et μ_0 .

Le long de deux chemins associés, les variations de U sont opposées; on peut choisir la constante d'intégration qui entre dans g de manière qu'en deux points associés quelconques les valeurs de U soient opposées; alors U est nulle sur tout ovale réel de C ; en deux points associés sur un ovale virtuel, U a des signes contraires.

Le lieu des points où U a une valeur constante λ est une courbe analytique Γ_λ , composée de un ou plusieurs ovales. La courbe $\Gamma_{+\infty}$ est un ovale infiniment petit entourant le point m_0 ; si λ décroît, cet ovale grandit en balayant Σ ; il peut se rejoindre lui-même en entourant un trou; il acquiert alors un point double, puis se décompose en deux ovales qui continuent à balayer Σ ; le point double est un zéro de $\frac{dg}{dz}$. Le même fait se produit plusieurs fois, et, pour $\lambda = 0$, on a une courbe Γ_0 ,

dont font partie les ovales réels; soit Σ' la région balayée, dans laquelle U est positive et qui est d'un seul tenant. Lorsque λ décroît de 0 à $-\infty$, la courbe Γ_λ subit les déformations contraires et se réduit au point μ_0 , en balayant une région Σ'' .

La courbe Γ_0 sépare ainsi Σ en deux régions images. Si elle ne présente pas de points doubles, on peut reconstruire Σ , comme on l'a vu au n° 6, de façon que les ovales de Γ_0 soient réductibles à des circuits C_h , et l'on voit sans peine que Γ_0 se compose de $p + 1$ ovales, qui sont chacun un circuit C_h et forment des ovales réels ou virtuels de C . Si Γ_0 présentait des points doubles, on raisonnerait de la même façon sur la courbe Γ_ε , infiniment voisine de Γ_0 ; comme le nombre des points doubles est fini, il y a une infinité de valeurs de ε tendant vers zéro pour lesquelles Γ_ε se compose d'ovales distincts. On arriverait à la même conclusion pour Γ_0 .

Les deux régions Σ' et Σ'' sont donc la face supérieure et la face inférieure du disque. On peut fixer les ovales virtuels en convenant de les confondre avec les ovales de Γ_0 ; ils sont déterminés sur Σ lorsqu'on a choisi le point m_0 .

VII. — Groupe de Poincaré correspondant à la surface Σ .

11. On peut représenter la surface de Riemann correspondant à une courbe algébrique sur un polygone fuchsien ou kleinéen de la troisième famille, limitée par $2p$ cercles extérieurs deux à deux; H. Poincaré a énoncé cette propriété [*Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. IV, Conclusion)]; M. Osgood et M. Kœbe ont représenté des surfaces de Riemann à connexion multiple sur des aires de Schottky; l'étude détaillée que nous avons faite de la surface Σ permet de démontrer simplement la propriété en question, lorsque la courbe algébrique C est réelle.

Surface de Riemann indéfiniment prolongée. — Prenons dans un plan un cercle c_{p+1} et des cercles c_1, c_2, \dots, c_p , deux à deux extérieurs et contenus dans c_{p+1} ; ils limitent une aire σ' qu'on peut faire correspondre à Σ' au point de vue de l'*Analysis situs*, de manière qu'à l'ovale C_h corresponde le cercle c_h . Si C_1 est un ovale réel, prenons

l'image de σ' par rapport à c_1 ; c'est une aire σ'_1 que nous pouvons faire correspondre à une portion de surface Σ'_1 , recouvrant Σ'' et raccordée à Σ' le long de C_1 ; elle est limitée par des bords qui recouvrent C_2, \dots, C_{p+1} . Si C_1 est un ovale virtuel, nous prendrons l'image de σ' par rapport à c_1 et la symétrique de cette image par rapport au centre de c_1 pour avoir σ'_1 ; grâce à cette précaution, on peut faire correspondre à deux points associés sur Σ' et Σ'_1 deux points associés de σ' et σ'_1 . On définit ainsi Σ'_i et σ'_i ($i = 1, 2, \dots, p$), Σ'_{ij} et σ'_{ij} ($j = 1, 2, \dots, p, p+1; j \neq i$), et ainsi de suite; les portions de surface Σ , dont chacune est raccordée à la précédente le long d'un ovale de C , forment une surface de Riemann S' , recouvrant indéfiniment Σ et qui a un bord C_{p+1} ; les régions σ se correspondent les unes aux autres par les substitutions d'un groupe fuchsien ou kleinéen symétrique, dont σ' est le demi-polygone générateur; elles finissent par atteindre tout point de l'aire s' intérieure au cercle c_{p+1} , à l'exception des points singuliers du groupe; S' est représentée sur s' .

Il s'agit de prouver qu'on peut choisir les cercles c_1, \dots, c_p de manière que la correspondance entre S' et s' soit une représentation conforme.

12. *La fonction de Green pour S' .* — Le domaine S' peut être recouvert par une infinité dénombrable de cercles, tout point de S' étant intérieur à l'un des cercles au moins; on sait faire le balayage d'un cercle, même quand c'est un élément polaire ou algébrique de S' .

Partons d'une fonction égale à U sur Σ' à zéro sur le reste de S' ; le balayage donne une suite de fonction u_1, u_2, \dots, u_k , dont les propriétés sont connues; si cette suite a une limite u en un point de S' , elle en a une en tout point.

La courbe C_{p+1} est analytique; on peut la faire correspondre point par point à un cercle D_0 de manière qu'une région A , en forme d'anneau sur Σ' et bordée par C_{p+1} , soit représentée conformément sur un anneau analogue B ayant pour bord intérieur D_0 ; on peut supposer que D_0 a pour rayon l'unité; traçons dans B un cercle concentrique D_1 , de rayon $r_1 > 1$.

La fonction u_k , considérée sur B , est harmonique, sauf sur des lignes qui sont lignes de discontinuité pour les dérivées; c'est un potentiel, engendré par des masses affectées du signe moins, réparties

sur les lignes de discontinuité. Sur deux éléments correspondants de A et de B, les masses sont égales; la somme de toutes ces masses est inférieure à 1.

Prenons dans l'anneau B des coordonnées polaires r et ω ; soit

$$J = \frac{1}{2\pi} \int u_k d\omega$$

la valeur moyenne de u_k sur un cercle de rayon r ($1 < r < r_1$), concentrique à D_0 . On a

$$r \frac{dJ}{dr} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{du_k}{dr} r d\omega;$$

d'après la formule de Green, le second membre est la somme des masses intérieures au cercle; donc

$$r \frac{dJ}{dr} < 1, \quad \frac{dJ}{dr} < \frac{1}{r}.$$

Intégrons de $r = 1$ à $r = r_1$, en appelant J_1 la valeur de J sur D_1 et en remarquant que la valeur de J sur D_0 est nulle :

$$J_1 < \log r_1.$$

Il y a donc sur D_1 un ensemble de points E_k pour lesquels on a

$$u_k < \log r_1;$$

l'inégalité $u_{k+1} > u_k$ montre que l'ensemble E_{k+1} , qui ne se réduit pas à rien, est contenu dans E_k ; il existe au moins un point commun à tous ces ensembles; en ce point la suite des fonctions u_k a une limite.

13. *Propriétés de la fonction de Green.* — La fonction u est harmonique en chaque point intérieur à S' , sauf en m_0 où elle est infinie comme $\log \frac{1}{r}$, et positive. Elle est nulle sur le bord C_{p+1} , car elle est au plus égale dans l'anneau A à une fonction harmonique prenant la valeur zéro sur C_{p+1} et les mêmes valeurs que u sur le second bord; la dérivée normale $\frac{du}{dn}$ est limitée et continue sur C_{p+1} .

Soit λ une constante arbitraire positive; les courbes Γ_λ , définies par l'équation $u = \lambda$, sont analytiques sur S' ; elles sont représentées sur s'

par des courbes continues; λ variant de $+\infty$ à 0, elles balaient s' en partant du point m_0 , peuvent acquérir des points doubles et se décomposer en plusieurs ovales; l'un d'eux vient s'appliquer sur c_{p+1} ; on ne sait pas comment ces courbes se comportent au voisinage des points singuliers du groupe.

Si l'on démontre qu'elles n'acquièrent pas de point double, qu'il n'en passe qu'une par chaque point limite, que l'intégrale $v = \int \frac{du}{dn} ds$, prise le long de chacune d'elles, a un sens même quand la courbe passe par un point limite et a pour valeur 2π , on aura prouvé que l'équation $Z = e^{-(u+iv)}$ donne la représentation conforme de S' sur l'intérieur d'un cercle.

Pour démontrer ce qui précède, on va étudier la fonction u sur le domaine S' rendu simplement connexe.

14. *Surface de Riemann simplement connexe.* — Pour fixer les idées, on peut supposer que les cercles c_1, \dots, c_{p+1} , qui bordent s' , sont orthogonaux à un même cercle γ ; les points singuliers du groupe, qui est alors fuchsien, sont alignés sur γ ; les points de γ qui ne sont pas singuliers sont les points intérieurs à une infinité dénombrable d'arcs de γ ; les extrémités de ces arcs et leurs points limites sont les points singuliers du groupe.

On rend le domaine s' simplement connexe en le coupant par un arc de γ , depuis l'un des points de rencontre de c_{p+1} et de γ , soit α , jusqu'au dernier point singulier que l'on trouve. La coupure contient, comme nous avons vu, une infinité d'arcs réguliers; soit $\alpha\beta$ le premier de ces arcs, et soit θ_1 le domaine s' coupé.

Suivons c_{p+1} dans un certain sens; adjoignons à θ_1 un domaine géométriquement identique θ_2 , raccordé à θ_1 le long de l'arc $\alpha\beta$, puis à θ_2 un domaine θ_3 , raccordé à θ_2 le long de $\alpha\beta$, et ainsi de suite; en tournant dans l'autre sens, nous ajouterons de même $\theta_{-1}, \theta_{-2}, \dots$. On forme ainsi un domaine infiniment prolongé ι_1 , bordé d'une part par le cercle c_{p+1} répété une infinité de fois, d'autre part par des lignes superposées à la coupure (moins l'arc $\alpha\beta$). Prenons un arc régulier de la coupure $\alpha'\beta'$, et ses homologues sur le bord de $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{-1}, \dots$; adjoignons à chacun de ces domaines un domaine identique à θ_1 et qui

lui soit raccordé le long de $\alpha'\beta'$ ou de l'arc homologue; ces nouveaux domaines forment un ensemble t_2 . Il y a une infinité dénombrable d'arcs réguliers sur les coupures qui bordent t_1 et t_2 ; on peut continuer les opérations précédentes et définir un domaine T , contenant t_1 , t_2 et les domaines analogues, simplement connexe, régulièrement multiple de s' , ou plutôt de S' .

La fonction u est définie en chaque point de T . La fonction de Green existe pour le domaine T , car le balayage fournit une suite croissante de fonctions, toutes inférieures à u . Le domaine T est représentable sur un cercle Ω . Deux hypothèses sont possibles : en deux points de t_1 et de t_2 , géométriquement superposés, la fonction de Green prend deux valeurs égales, ainsi que la fonction conjuguée, ou non. Dans le premier cas, on peut dire que T se réduit à t_1 , θ_1 et θ_2 se raccordent par tous les arcs réguliers de la coupure. Nous allons voir que c'est le seul cas possible.

15. Examinons la seconde hypothèse. A l'arc C_{p+1} , considéré comme bord de θ_1 , θ_2 , ..., correspondent des arcs α_1 , α_2 , ..., consécutifs sur le cercle Ω et dont les extrémités ont pour limites deux points a et b du cercle. Mais C_{p+1} est bord d'autres domaines faisant partie de T , t_2 par exemple; les arcs correspondants de Ω ont une longueur non nulle, car on peut trouver une limite inférieure non nulle de la dérivée normale de la fonction de Green, le long d'un arc fini de C_{p+1} , considéré comme appartenant à un domaine bien déterminé; ces arcs sont répartis sur l'arc ab du cercle Ω qui ne contient pas α_1 , α_2 , ...

A chaque point de θ_1 correspond un point de θ_2 qui lui est superposé; il existe donc une substitution linéaire $[S]$ qui transforme la représentation de θ_1 sur Ω en celle de θ_2 ; elle change de même θ_2 en θ_3 , θ_i en θ_{i+1} , α_i en α_{i+1} : c'est une substitution hyperbolique ayant pour points doubles a et b . La fonction u , considérée sur le cercle Ω , reste inaltérée par $[S]$; le centre de Ω , qui correspond au point m_0 , est transformé, par l'application répétée de $[S]$, en un ensemble de points répartis sur un arc de cercle passant par a et b et qui tendent vers a et b : ce sont des infinies de u .

On passe de l'un des domaine θ_i au domaine adjacent qui fait partie de t_1 par une substitution $[S_i]$; cette substitution transforme l'ensemble

précédent en un autre dont les points sont encore congruents pour la substitution $[S]$; ils sont distribués sur un arc de cercle ab . Les deux arcs de cercle ab se correspondant par $[S_1]$, cette substitution est elliptique, avec a et b comme points doubles. Or l'application répétée de $[S_1]$ transforme les infinis déjà obtenus en d'autres infinis de U qui représentent des points de T , donc doivent être intérieurs au cercle Ω_1 : ce qui est contraire aux propriétés des substitutions elliptiques; il faut rejeter la seconde hypothèse.

16. Le domaine t_1 est donc représenté sur Ω : les points de t_2 , par exemple, sont représentés sur les points correspondants de t_1 . Considérons encore les arcs α_i et la substitution $[S]$, dont les points doubles a et b peuvent être maintenant confondus. L'aire σ' coupée est représentée sur une région du cercle attenante à l'arc α_i ; la substitution $[S]$ répétée la transforme en une sorte de croissant ayant pour pointes a et b . Au lieu de σ' , prenons l'aire $\sigma'_{1,p+1}$, obtenue par image de la précédente, d'abord par rapport au cercle c_1 (qu'on suppose contenir l'extrémité de la coupure), puis par rapport à l'image de c_{p+1} par rapport à c_1 . Il est clair qu'on pourrait partir du domaine $\Sigma'_{1,p+1}$, comme on est parti de Σ' , pour reconstruire le domaine S' ; on retrouverait un domaine superposable à S' . On passe donc de la représentation de σ' à celle de $\sigma'_{1,p+1}$ par une substitution $[S_1]$, qui transforme le premier croissant en un autre ayant pour pointes a et b . Donc $[S_1]$ est une substitution elliptique, si a et b sont distincts; c'est impossible, parce que l'application répétée de $[S_1]$ devrait transformer le premier croissant en un domaine toujours intérieur à Ω . Par suite, a et b sont confondus; $[S]$ est une substitution parabolique; les infinis de la fonction u sont, dans Ω , le centre et les points congruents par $[S]$.

17. Il est facile de déterminer une fonction u_1 , uniforme dans Ω , inaltérée par la substitution $[S]$, harmonique en tout point intérieur, infinie comme $\log \frac{1}{r}$ aux mêmes points que u , et nulle sur le bord, sauf peut-être en a . En effet, une inversion transforme le cercle Ω en droite, le centre en un point z_0 de l'axe réel, la substitution $[S]$ en une translation $2\pi i$; u_1 est la partie réelle de la fonction $g(z)$ définie

par l'équation

$$e^{g(z)} = \frac{e^{z_0} e^z - 1}{e^z - e^{z_0}}.$$

Il n'y a pas de point de distance finie où $\frac{dg}{dz}$ est nul; donc les courbes $u_1 = \lambda$ n'ont pas de point double; l'intégrale $\int \frac{du_1}{dn} ds$ a un sens sur chacune de ces courbes et ne dépend pas du chemin suivi entre deux points donnés, à condition que ce chemin se déforme sans passer par un infini.

La fonction u_1 est uniforme sur S' , répond à toutes les conditions demandées pour u ; S' est représentable sur l'intérieur d'un cercle c_{p+1} .

Toutes les opérations faites sur le domaine Σ' , parcouru par un point m , peuvent être effectuées sur le domaine Σ'' , parcouru par le point associé μ ; nous partirons de la partie réelle de $g(z)$, infinie en μ_0 comme $-\log \frac{1}{r}$. On obtient une fonction u_1 , prolongement analytique de la fonction u_1 au delà de C_{p+1} ; u_1 est définie dans un domaine S'' analogue à S' ; l'ensemble de S' et S'' est représenté sur le plan tout entier; m et μ correspondent à deux points images par rapport à c_{p+1} , considéré comme cercle réel ou virtuel suivant que C_{p+1} est ovale réel ou virtuel.

18. On pourrait remplacer le bord initial C_{p+1} par l'un des autres ovales, C_i par exemple. On aurait une seconde représentation du domaine total ($S' + S''$) sur un plan; on passe d'une représentation à l'autre par une substitution linéaire; donc à l'ovale C_i correspond dans la première un cercle c_i ; l'aire Σ' est représentée sur une aire plane bordée par $p + 1$ cercles, c'est-à-dire sur demi-polygone fuchsien ou kleinéen, qui est de la troisième famille puisque les cercles ne sont pas sécants.

Cette représentation est avantageuse pour deux raisons : 1° on n'introduit pas de coupures artificielles sur la surface de Riemann Σ ; 2° comme les séries θ du degré $m = 2$ sont convergentes pour un polygone de la troisième famille, on peut représenter par des intégrales de ces séries les intégrales abéliennes, ce qui donne une correspondance parfaite entre les deux théories.

On étend sans peine ce qui précède à une courbe algébrique non réelle; la surface de Riemann est représentable sur un polygone de la troisième famille non symétrique.

La même méthode permet de montrer qu'il est possible de représenter une aire de Schottky, dont les bords sont des courbes analytiques, sur un demi-polygone de la troisième famille. Il est facile de résoudre pour ce polygone, au moyen des séries θ , différents problèmes relatifs à la distribution de l'électricité; de trouver, par exemple, un potentiel nul sur certains des bords et dont la dérivée normale soit nulle sur les autres; les mêmes problèmes sont donc résolus pour une aire de Schottky.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Propriétés des images.

| | Pages. |
|--|--------|
| I. — Propriétés élémentaires..... | 49 |
| II. — Images successives d'un point..... | 52 |
| III. — Régions successives..... | 55 |

CHAPITRE II.

Prolongement analytique de la fonction de Green.

| | |
|---|----|
| I. — La fonction $g(z)$ | 57 |
| II. — Prolongement analytique..... | 58 |
| III. — Les images sur une surface de Riemann..... | 62 |

CHAPITRE III.

Applications.

| | |
|--|----|
| I. — Cas élémentaires..... | 64 |
| II. — Aire dans laquelle ζ est uniforme..... | 66 |

| | Pages. |
|--|--------|
| III. — Aire dans laquelle ζ n'est pas uniforme | 69 |
| IV. — Contours présentant des points singuliers..... | 72 |
| V. — Aire à connexion multiple..... | 74 |

CHAPITRE IV.

Familles isothermes algébriques.

| | |
|--|-----|
| I. — Les intégrales de J et J' | 77 |
| II. — Périodes de J et J' | 80 |
| III. — Les courbes $J + J' = \text{const.}$ | 80 |
| IV. — Nature de l'intégrale J | 84 |
| V. — Sur un théorème de Weierstrass et sur la classification des familles isothermes..... | 87 |
| VI. — Sur les courbes algébriques dont une intégrale abélienne a seulement deux périodes..... | 89 |
| VII. — Étude des familles isothermes | 95 |
| VIII. — Application des propriétés des familles isothermes à la recherche de la fonction de Green. Anneau..... | 97 |
| IX. — Intérieur d'un ovale | 101 |
| X. — Rectangle curviligne..... | 102 |

CHAPITRE V.

Aires limitées par des cercles.

| | |
|--|-----|
| I. — Deux cercles extérieurs..... | 104 |
| II. — Deux cercles tangents..... | 107 |
| III. — Deux cercles sécants..... | 107 |
| IV. — Aire limitée par $p + 1$ cercles..... | 108 |
| V. — Polygone fuchsien : Premier cas..... | 109 |
| VI. — Polygone kleinéen : Premier cas..... | 115 |
| VII. — Polygone fuchsien ou kleinéen : Second cas..... | 117 |

CHAPITRE VI.

Application des images à quelques propriétés des courbes algébriques.

| | |
|--|-----|
| I. — Sur les points imaginaires en Géométrie plane..... | 119 |
| II. — Nombre des ovales d'une courbe de genre p | 120 |
| III. — Ovales virtuels..... | 121 |
| IV. — Les ovales réels et virtuels sont des circuits C_h | 123 |
| V. — Disposition des ovales..... | 124 |
| VI. — La fonction g | 127 |
| VII. — Groupes de Poincaré correspondant à la surface Σ | 128 |