

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Calcul de vitesses bien continues de régime uniforme par des polynômes, dans les tubes cylindriques de formes diverses avec application à une évaluation approximative du coefficient de débit, dans la filtration de l'eau à travers des sables à grains plus ou moins fins

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 32 (1915), p. 1-48

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1915_3_32__1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

CALCUL DES VITESSES BIEN CONTINUES
DE RÉGIME UNIFORME, PAR DES POLYNOMES,

DANS LES

TUBES CYLINDRIQUES DE FORMES DIVERSES,
AVEC APPLICATION A UNE ÉVALUATION APPROXIMATIVE
DU COEFFICIENT DE DÉBIT, DANS LA FILTRATION DE L'EAU
A TRAVERS DES SABLES A GRAINS PLUS OU MOINS FINS;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE. — I. Calcul ou exact, ou approché, des vitesses de régime uniforme, par le moyen de polynômes, dans les tubes cylindriques de diverses formes. — II. Calcul de plus en plus approché, dans le cas de la section carrée. — Solution résultant de la méthode de Ritz, pour le problème de la section ou carrée, ou même rectangulaire (Note). — III. Réflexions diverses, concernant principalement les vitesses de débit et les vitesses au centre, pour les tubes à sections polygonales régulières. — IV. Considérations générales sur la filtration des liquides par le sable, ou par d'autres milieux poreux analogues, et sur la transpiration des gaz à travers ces milieux. — Analogie des courants électriques avec ceux de filtration (Note). — V. Tentative pour évaluer approximativement le coefficient caractéristique de la vitesse moyenne de filtration, quand la masse filtrante est constituée par des grains sphériques d'un diamètre donné. — Place exigée par chaque sphère dans les modes simples d'arrangement (Note). — Calcul pratique du coefficient de filtration pour un sable hétérogène (Note).

I. — Calcul ou exact, ou approché, des vitesses de régime uniforme, par le moyen de polynômes, dans les tubes cylindriques de diverses formes.

1. Dans un écoulement permanent bien continu, par filets rectilignes et parallèles, du liquide remplissant un tube dont la section normale donnée σ contient un système d'axes coordonnés rectangulaires des x et des y , la vitesse V , fonction de x et de y , du filet fluide

qui perce cette section au point quelconque (x, y) , est régie par l'équation aux dérivées partielles très simple $\Delta_2 V = -K$, où Δ_2 désigne le symbole opératoire, $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$, du *paramètre différentiel du second ordre* de la fonction inscrite à la suite, et où K est une constante positive donnée, inverse du coefficient de viscosité du liquide, mais proportionnelle à son poids spécifique et à la *pente motrice* produisant l'écoulement. De plus, le long du contour χ de la section σ , l'adhérence ou le frottement de la paroi immobilisent le fluide; de sorte que l'on a, pour achever de déterminer V , la condition définie

$$V = 0 \quad (\text{au contour } \chi).$$

Il suffit donc de poser, par exemple,

$$V = -K \frac{x^2}{2} + \Phi,$$

pour que la fonction inconnue Φ soit, en x et y , la fonction *harmonique* (à paramètre différentiel Δ_2 nul) qui prend les valeurs $K \frac{x^2}{2}$ le long du contour χ de la section donnée.

A part le cas de la section rectangulaire $\sigma = 4ab$, limitée par les quatre droites $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$, où l'intégrale, due à Fourier, est une série infinie de termes transcendents contenant, chacun, le produit d'un cosinus hyperbolique par un cosinus circulaire, et les cas de certains rectangles à côtés courbes ou de certains espaces annulaires, auxquels l'emploi de coordonnées curvilignes permet d'étendre la solution transcendante de Fourier, la méthode la plus féconde pour traiter cette question est celle dont Barré de Saint-Venant a montré la richesse dans son célèbre Mémoire sur la *Torsion des prismes* (problème identique analytiquement à celui du régime uniforme dont il est ici question) et que j'ai exposée au n° 450* du Tome II de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (second fascicule, p. 419* à 426*). Elle consiste à exprimer Φ par un polynôme dont chaque partie, homogène, d'un degré quelconque n , doit, pour satisfaire à $\Delta_2 \Phi = 0$, être formée linéairement au moyen des deux intégrales homogènes évidentes $(x \pm y\sqrt{-1})^n$. En s'arrêtant aux termes du $n^{\text{ième}}$ degré, l'expression ainsi obtenue pour V est, avec les

$2n + 1$ constantes arbitraires $A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} V = & -K \frac{x^2}{2} + A_0 + A_1 x + B_1 y + A_2 (x^2 - y^2) \\ & + B_2 \cdot 2xy + A_3 (x^3 - 3xy^2) + B_3 (3x^2 y - y^3) + \dots \\ & + A_n \left(x^n - \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} x^{n-2} y^2 + \dots \right) \\ & + B_n \left(\frac{n}{1} x^{n-1} y - \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} x^{n-3} y^3 + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

2. On dispose de ces $2n + 1$ constantes, de manière que l'expression vérifie la relation définie $V = 0$ en $2n + 1$ points régulièrement distribués le long du contour χ . Or, celui-ci peut être assez simple pour que, dès lors, l'équation $V = 0$ représente toutes ses parties; et l'expression (1) de V constitue par conséquent la solution cherchée.

Dans le cas contraire, la même expression bien continue (1) se trouvant ainsi nulle aux $2n + 1$ points du contour choisis, c'est-à-dire en des points d'autant plus rapprochés les uns des autres qu'on aura pris n plus élevé, il lui arrivera de rester, dans les courts intervalles qui les relient, une fraction pratiquement insensible de ses valeurs (1) à l'intérieur de σ et, notamment, de celle, V' (ordinairement maximum), qui se produira au centre ou de figure, ou de gravité, de la section. On pourra donc admettre alors que le polynôme (1) est une expression approchée des vitesses, suffisante pour les besoins de la pratique.

On l'améliorera d'ailleurs en retranchant du second membre de (1), ou, ce qui revient au même, du terme constant A_0 , la valeur moyenne que donnera la formule (1) pour V le long du contour χ , de manière à annuler finalement cette valeur moyenne. L'action de la paroi se trouvera, ainsi, fictivement remplacée par une influence retardatrice capable d'y produire en certains endroits de petites vitesses *négatives*, compensant les petites vitesses positives qui y subsisteront ailleurs. Non seulement les plus grands écarts des vitesses ainsi tolérées ou supposées à la paroi, d'avec leurs vraies valeurs zéro, seront, de la sorte, atténués; mais, surtout, les effets *généraux* qu'auraient ces écarts en sens divers, ou le mode de résistance censé les produire, sur les vitesses à l'intérieur en résultant, par exemple sur la vitesse moyenne U à travers toute l'aire σ et sur la vitesse V' au centre, se trouveront neutralisés

ou compensés le mieux possible. Il y aura donc lieu de regarder comme pratiquement exactes les deux vitesses, maximum, V' , et *de débit*, U , auxquelles conduira la formule (1) corrigée de la sorte.

3. Les deux exemples les plus remarquables d'intégration exacte par la formule (1) sont ceux des sections, elliptique, $\sigma = \pi ab$, et triangulaire équilatérale de hauteur h , $\sigma = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$, que limitent les contours ayant respectivement comme équations

$$(2) \quad \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \\ y(h - y - x\sqrt{3})(h - y + x\sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad y[(h - y)^2 - 3x^2] = 0. \end{cases}$$

La première section étant symétrique par rapport aux deux axes des y et des x , le second membre de (1) n'y contiendra que les carrés x^2 et y^2 ; ce qui oblige à n'y garder que les coefficients A , et d'indice pair. On peut s'y borner aux deux premiers, A_0, A_2 , et en disposer de manière à annuler V aux quatre sommets, c'est-à-dire pour les deux systèmes de valeurs ($x^2 = a^2, y^2 = 0$), ($x^2 = 0, y^2 = b^2$). Alors l'équation $V = 0$ est visiblement celle de la conique ayant ces quatre sommets, ou qui se confond avec l'ellipse proposée.

Quant à la deuxième section, symétrique par rapport à l'axe des y ou astreinte à ne contenir x que par son carré x^2 , il n'y subsistera dans (1), jusqu'aux termes du troisième degré inclusivement, que les quatre coefficients A_0, B_1, A_2, B_3 , dont on disposera de manière à avoir $V = 0$ aux sommets du triangle et au milieu des trois côtés, c'est-à-dire, en tout, pour les quatre systèmes de valeurs ($x^2 = 0, y = 0$), ($x^2 = \frac{h^2}{3}, y = 0$), ($x^2 = \frac{h^2}{12}, y = \frac{h}{2}$), ($x^2 = 0, y = h$). Or, l'expression de V devient alors proportionnelle au premier membre de la dernière équation (2), en sorte que la solution est encore exacte.

On a ainsi respectivement, dans ces deux cas,

$$(3) \quad V = \frac{K}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad V = \frac{K}{4} \frac{y}{h} [(h - y)^2 - 3x^2].$$

Il en résulte pour la vitesse moyenne U une expression de la forme $U = kK\sigma$, où k désigne, pour chaque *figure* de la section, un

coefficient *purement numérique*, dont l'inverse a ici les deux valeurs respectives

$$(4) \quad \frac{1}{k} = 4\pi \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right), \quad \frac{1}{k} = 20\sqrt{3} = 34,64 \dots$$

Dans le cas particulier d'un tube circulaire (où $b = a$), l'inverse de k est donc $8\pi = 25,13 \dots$

Le rapport $\frac{V}{U}$, qui caractérise le mode de distribution des vitesses à travers la section σ , reçoit par suite, dans les deux mêmes cas, les valeurs simples

$$(5) \quad \frac{V}{U} = 2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad \frac{V}{U} = 15 \frac{y[(h-y)^2 - 3x^2]}{h^3}.$$

Aux centres de gravité, $(x=0, y=0)$ et $(x=0, y=\frac{1}{3}h)$, ces rapports atteignent leurs maximums, 2 dans l'ellipse et $\frac{20}{9} = 2 \left(1 + \frac{1}{9} \right)$ dans le triangle, où le produit des trois facteurs variables $2y$, $h-y-x\sqrt{3}$, $h-y+x\sqrt{3}$, dont la somme constante est $2h$, acquiert sa plus forte valeur quand ces facteurs sont égaux, c'est-à-dire au tiers de la hauteur h .

4. L'exemple le plus intéressant d'intégration approchée par la formule (1) est celui de la section carrée $\sigma = 4a^2$, compris dans le cas, un peu plus général, de la section rectangulaire $\sigma = 4ab$ à contour représenté par l'équation $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$, cas où nous savons que la solution exacte est constituée par la série infinie de termes transcendants due à Fourier.

Jetons un coup d'œil sur ce cas plus général.

Et, d'abord, la symétrie du rectangle par rapport aux deux axes des y et des x astreint l'expression de V à ne contenir x et y que par leurs carrés x^2, y^2 , en sorte que tous les coefficients B s'y annulent et, même, les coefficients A d'indice impair. Il n'y subsiste donc que $A_0, A_2, A_4, A_6, \dots$. Si l'on commence par s'y borner à A_0 , tout ce qu'on pourra faire pour vérifier la condition au contour, sera d'annuler V aux quatre sommets, savoir, pour l'unique système de valeurs $(x^2 = a^2, y^2 = b^2)$. Une première approximation exige donc que l'on prenne en

même temps les deux coefficients suivants A_2 , A_4 , afin de pouvoir aussi annuler V aux milieux des côtés, c'est-à-dire pour les deux systèmes de valeurs $(x^2 = a^2, y^2 = 0)$, $(x^2 = 0, y^2 = b^2)$.

Et chaque degré ultérieur d'approximation exigera de même deux coefficients pairs A de plus, pour qu'on puisse annuler V , en sus, soit aux milieux des demi-côtés, pour $(x^2 = \frac{1}{4}a^2, y^2 = 0)$, $(x^2 = 0, y^2 = \frac{1}{4}b^2)$, soit à leurs tiers, $(x^2 = \frac{1}{9}a^2, y^2 = 0)$, $(x^2 = 0, y^2 = \frac{1}{9}b^2)$, et à leurs deux tiers, $(x^2 = \frac{4}{9}a^2, y^2 = 0)$, $(x^2 = 0, y^2 = \frac{4}{9}b^2)$, soit à leurs quarts, deux quarts et trois quarts; etc.

II. — Calcul de plus en plus approché, dans le cas de la section carrée.

5. Mais arrêtons-nous seulement au cas du carré, où $b = a$ et où la figure admet comme axes de symétrie, en plus des deux médianes, axes des x et des y , les deux diagonales, bissectrices de leurs angles. L'expression de V y sera donc symétrique en x et en y ; de sorte qu'il suffira d'y vérifier explicitement la condition $V = 0$ sur un seul demi-côté, par exemple pour $y = a$ et x croissant de zéro à a . Or, la première approximation, obtenue au numéro cité 450* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, [p. 425*, formule (69)], donne, en observant que $a^2 = \frac{\sigma}{4}$,

$$(6) \quad V = \frac{K\sigma}{16} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{a^4 - x^4 + 6x^2y^2 - y^4}{5a^4} \right).$$

Il en résulte que, si on la complète par des termes pris à la série entière (1), les seuls susceptibles de figurer dans ce complément seront ceux où x^2 et y^2 se trouvent associés symétriquement, savoir ceux à coefficients A affectés d'un indice multiple de 4, A_0 , A_4 , A_8 , A_{12} , A_{16} , Pour simplifier l'écriture de ces termes, nous y remplacerons A_0 , A_4 , A_8 , A_{12} , ..., respectivement, par A , $\frac{B}{a^4}$, $\frac{C}{a^8}$, $\frac{D}{a^{12}}$, ...; et nous poserons, en outre,

$$(7) \quad \frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{a} = \eta.$$

de manière que, si l'expression cherchée de V , plus approchée que (6), est prise de la forme

$$(8) \quad V = \frac{K\sigma}{16} \left[1 - \xi^2 - \eta^2 + \frac{1}{5}(1 - \xi^4 + 6\xi^2\eta^2 - \eta^4) + \frac{1}{5}\Phi \right],$$

ou que Φ désigne (proportionnellement) sa partie encore inconnue, on ait

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = & A + B(\xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4) + C(\xi^8 - 28\xi^6\eta^2 + 70\xi^4\eta^4 - 28\xi^2\eta^6 + \eta^8) \\ & + D(\xi^{12} - 66\xi^{10}\eta^2 + 495\xi^8\eta^4 \\ & - 924\xi^6\eta^6 + 495\xi^4\eta^8 - 66\xi^2\eta^{10} + \eta^{12}) + \dots \end{aligned} \right.$$

Tout le long du côté $y = b$ ou $\eta = 1$, où nous voulons avoir $V = 0$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, c'est-à-dire entre les deux limites $\xi = 0$ et $\xi = 1$, cette expression devient

$$(10) \quad (\text{pour } \eta = 1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = & A + B(1 - 6\xi^2 + \xi^4) + C(1 - 28\xi^2 + 70\xi^4 - 28\xi^6 + \xi^8) \\ & + D(1 - 66\xi^2 + 495\xi^4 - 924\xi^6 + 495\xi^8 - 66\xi^{10} + \xi^{12}) + \dots, \end{aligned} \right.$$

tandis que le *quintuple* de la partie de (8), entre crochets, de première approximation, ou autre que $\frac{1}{5}\Phi$, s'y réduit à

$$(11) \quad \xi^2 - \xi^4.$$

Il faut donc écrire que la somme algébrique de cette expression (11) et de l'expression (10) de Φ s'annule pour les valeurs de ξ équidistantes, allant de $\xi = 0$ à $\xi = 1$, en nombre total pareil à celui des coefficients A, B, C, D, E, \dots que l'on veut garder.

Comme l'expression (11) s'annule aux deux limites $\xi = 0$, $\xi = 1$, la première approximation, obtenue en gardant les coefficients A, B , mais les déterminant de manière à avoir ainsi $\Phi = 0$ pour $\xi = 0$ et pour $\xi = 1$, donne

$$A + B = 0 \quad \text{et} \quad A - 4B = 0,$$

c'est-à-dire $B = 0$, $A = 0$, $\Phi = 0$; ce qu'on savait déjà.

6. Les approximations ultérieures, de plus en plus élevées, s'obtiennent donc en gardant, outre A et B , soit C , soit C et D , soit C, D et E , etc. Dans tous les cas, on devra y avoir d'abord Φ égal à (11)

changé de signe, aux deux limites $\xi = 0$, $\xi = 1$; ce qui donnera, pour déterminer A et B en fonction des constantes suivantes C, D, ..., les deux équations

$$(12) \quad \begin{cases} A + B + C + D + \dots = 0, \\ A - 4B + 16C - 64D + \dots = 0. \end{cases}$$

La seconde (12), retranchée de la première, fera connaître B; et l'on aura finalement

$$(13) \quad B = 3C - 13D + \dots, \quad A = 4(-C + 3D - \dots).$$

Si, en outre, on garde seulement C, il restera à évaluer, pour $\xi = \frac{1}{2}$, la valeur (10) de Φ , réduite aux termes en A, B, C, à (11) changé de signe, c'est-à-dire à $-\frac{3}{16}$; ce qui, en multipliant par 16, donnera

$$16A - 7B - \frac{527}{16}C = -3,$$

ou bien, finalement, après substitution à A et B de leurs valeurs (13),

$$(14) \quad C = \frac{16}{629}, \quad B = \frac{48}{629}, \quad A = -\frac{64}{629}.$$

7. Mais gardons encore D. Alors nous devons évaluer (10) à (11) changé de signe, pour $\xi = \frac{1}{3}$ et pour $\xi = \frac{2}{3}$, non plus pour $\xi = \frac{1}{2}$. Cela, avec $\xi = 0$ et $\xi = 1$, fera, le long de chaque demi-côté, 4 points équidistants où sera satisfaite la relation définie $V = 0$, soit 7 points sur chaque côté et 24 points sur tout le contour χ de la section.

Il vient ainsi, en multipliant par 81,

$$81A + 28B - \frac{8432}{81}C - \frac{752192}{81^2}D = -8,$$

$$81A - 119B - \frac{239}{81}C + \frac{3455641}{81^2}D = -20;$$

puis, en remplaçant A, B par leurs valeurs (13) et multipliant par 81^2 , enfin divisant par 10 la seconde équation,

$$-2257632C + 3236896D = -8.81^2,$$

$$-448740C + 1998280D = -2.81^2.$$

La première, divisée par 8, et la seconde, divisée par 2, deviennent

$$(15) \quad \begin{cases} -282204C + 404612D = -81^2 \\ -224370C + 999140D = -81^2. \end{cases}$$

D'où, par soustraction, résulte entre C et D la relation

$$(16) \quad C = -\frac{594528}{57834} D = -\frac{99088}{119.81} D.$$

Enfin, cette valeur de C, portée dans la première (15), donne D. Et l'on en déduit, par (16) et (13), C, B et A. On a ainsi les valeurs, malheureusement assez complexes,

$$(17) \quad \begin{cases} D = -\frac{119.81^2}{10.39337142}, & C = \frac{99088.81}{10.39337142}, \\ B = \frac{140857.81.3}{10.39337142}, & A = -\frac{128005.81.4}{10.39337142}. \end{cases}$$

8. Il y a lieu, comme on a vu au n° 2, de perfectionner chacune des approximations ainsi obtenues, en évaluant la moyenne des valeurs de V qui y subsistent le long du contour, ou simplement ici, sur le côté $\eta = 1$, depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = 1$, puis en retranchant cette moyenne de toutes les valeurs (8) de V. Comme, pour $\eta = 1$, l'expression (8) de V devient

$$(18) \quad V = \frac{K\sigma}{16.5} (\xi^2 - \xi^4 + \Phi),$$

avec Φ exprimé par (10), on trouve aisément, d'abord, pour la moyenne de Φ le long du contour,

$$A - \frac{4}{5}B + \frac{16}{9}C - \frac{64}{13}D,$$

et ensuite, pour la moyenne analogue de V,

$$(19) \quad \frac{K\sigma}{16.5} \left(\frac{2}{15} + A - \frac{4}{5}B + \frac{16}{9}C - \frac{64}{13}D \right).$$

C'est donc cette quantité (19) qu'il faudra retrancher de la valeur générale (8) de V, pour avoir, eu égard aux calculs effectués, l'approximation la meilleure possible.

Celle-ci sera

$$(20) \quad V = \frac{K\sigma}{16} \left[\frac{7^3}{5} - \xi^2 - \eta^2 + \frac{1}{5} (1 - \xi^4 + 6\xi^2\eta^2 - \eta^4) + \frac{1}{5} \Phi' \right],$$

si l'on appelle Φ' l'expression (9) diminuée de la moyenne de ses valeurs le long du contour, ou corrigée de manière à avoir cette moyenne égale à zéro, savoir

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi' = & B \left(\frac{4}{5} + \xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4 \right) \\ & + C \left(-\frac{16}{9} + \xi^8 - 28\xi^6\eta^2 + 70\xi^4\eta^4 - 28\xi^2\eta^6 + \eta^8 \right) \\ & + D \left(\frac{64}{13} + \xi^{12} - 66\xi^{10}\eta^2 + 495\xi^8\eta^4 \right. \\ & \quad \left. - 924\xi^6\eta^6 + 495\xi^4\eta^8 - 66\xi^2\eta^{10} + \eta^{12} \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

9. Comme moyen de contrôle du degré d'approximation obtenu, calculons par ces formules la vitesse moyenne de débit U (bien connue), en multipliant (20) par $d\xi d\eta$ et intégrant, par exemple, dans tout un quart α^2 de la section σ , c'est-à-dire de $\xi = 0$ à $\xi = 1$ et de $\eta = 0$ à $\eta = 1$. On trouve d'abord aisément, pour la moyenne de Φ' ,

$$\frac{8}{16}B - \frac{64}{45}C + \frac{384}{7 \cdot 13}D - \dots,$$

et ensuite, pour la vitesse U de débit,

$$(22) \quad U = \frac{K\sigma}{40} \left(\frac{7}{5} + \frac{4}{15}B - \frac{32}{45}C + \frac{192}{7 \cdot 13}D - \dots \right).$$

Le coefficient k caractéristique de chaque forme de section, dans l'expression générale $U = kK\sigma$ de la vitesse moyenne ou vitesse de débit, sera donc ici

$$(23) \quad (\text{dans le carré}) \quad k = \frac{1}{100} \left[\frac{7}{2} + 2 \left(\frac{B}{3} - \frac{8C}{9} \right) + \frac{480}{7 \cdot 13}D + \dots \right].$$

A la première approximation, où l'on néglige B, C, D, \dots , et que j'avais déjà donnée au n° 450*, cité plus haut, du Tome II de mon *Cours*

d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique (1), il vient

$$k = \frac{7}{200} = 0,035;$$

excellente valeur pratique, car, très simple et obtenue presque sans calculs, elle se trouve cependant approchée (pour le moins) au 240^e près, par défaut.

La deuxième approximation est celle où l'on ne garde que B et C, avec leurs valeurs (14). Il en résulte

$$(24) \quad k = \frac{1}{100} \left(\frac{7}{2} + \frac{32}{629.9} \right) = 0,0350565\dots;$$

ce qui ajoute, comme on voit, assez peu de chose à la première approximation et laisse pressentir combien était bonne celle-ci, malgré sa grande simplicité.

10. Passons à la troisième approximation, qui s'obtient en gardant encore D et après laquelle les calculs deviendraient d'une longueur rebutante. Substituons donc à B, C, D les valeurs déjà compliquées (17); et nous aurons successivement, en observant que $119 = 7.17$ et prenant partout la moitié du très fort dénominateur commun des valeurs de B, C, D,

$$(25) \quad k = \frac{1}{100} \left[\frac{7}{2} + \frac{9 \left(140857.9 - 99088.8 - \frac{80}{13} \cdot 17.27.81 \right)}{196685710} \right]$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{7}{2} + \frac{9.3200797}{13.196685710} \right)$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{7}{2} + 0,01137\dots \right) = 0,0351137\dots$$

Le troisième chiffre significatif 1 y est exact, la vraie valeur de k , donnée par la solution de Fourier, étant 0,03514....

On peut trouver bien laborieux le gain de cette troisième décimale. Mais il l'a été probablement autant par le calcul de cette solution

(1) Page 426*. — Je profite de l'occasion pour indiquer une faute d'impression qui s'est glissée, à cette page, dans les expressions de U figurant aux trois dernières lignes : ce n'est pas le facteur σ^2 , mais seulement le facteur σ , qui doit s'y trouver, comme on voit; σ^2 serait dans l'expression du débit.

transcendante de Fourier en série trigonométrique de cosinus et d'exponentielles, quoique M. de Saint-Venant et, plus tard, moi-même sous une forme un peu différente ⁽¹⁾, y eussions fait usage des logarithmes. Certes, au point de vue théorique et même, comme on voit, au point de vue, le plus pratique, d'une approximation restreinte, rien n'est simple, dans la question, comme une expression algébrique entière de V , évaluable directement quels que soient x et y ; et l'on ne saurait lui comparer, sous ces rapports, la solution de Fourier en série infinie d'exponentielles et de cosinus. Toutefois, celle-ci devient préférable pour les calculs très exacts, c'est-à-dire de grande approximation; et, cela, grâce justement à l'emploi qu'on devra y faire généralement des Tables des fonctions logarithmique et circulaires, Tables dont la construction déjà ancienne, qu'il a suffi d'effectuer une fois pour toutes, équivaut à un ensemble prodigieux de calculs ou a été, dans le passé, une œuvre gigantesque.

On voit combien deviendrait pénible la détermination, par les polynômes, des chiffres suivants. Mais, déjà, la valeur trouvée, $k = 0,035114$ environ, n'est en erreur que de moins d'un millième du résultat et se trouve plus que suffisante pour la pratique.

D'après (24), la première approximation ayant donné 0,035, la deuxième avait fait croître k de 0,0000565, tandis que la troisième, en portant k à 0,0351137, le fait croître de 0,0000572. Les approximations d'ordre impair donneraient-elles, relativement, de plus forts *appoints* que celles d'ordre pair, les différences s'atténuant d'ailleurs très vite, comme il le faut bien pour que k tende vers sa limite fixe ⁽²⁾?

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville; 2^e série*, t. XIII, 1868, p. 393.

⁽²⁾ *Solution résultant de la méthode de Ritz, pour le problème de la section ou carrée, ou même rectangulaire.* — M. l'ingénieur civil Maurice Paschoud, de Lausanne, élève et docteur ès sciences mathématiques de l'Université de Paris, vient de faire connaître, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 159, 13 juillet 1914, p. 158), une expression curieuse, en série double, du nombre k relatif au carré, savoir, la formule

$$(25) \quad k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum \sum \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 + n^2)},$$

où m, n désignent les impairs successifs 1, 3, 5, 7, ..., combinés deux à deux de toutes les manières possibles.

Il y est arrivé en appliquant à la question présente une méthode de Walther Ritz, qui

III. — Réflexions diverses, concernant principalement les vitesses de débit et les vitesses maxima, pour les tubes à sections polygonales régulières.

11. Les divers exemples traités ici tendent à montrer que, pour toutes les sections σ semblables, la vitesse moyenne U a l'expression $kK\sigma$, où k désigne un coefficient purement numérique, caracté-

paraît rendre accessibles, par réduction à la recherche de minimums d'intégrales, certains problèmes difficiles de Physique mathématique concernant les corps rectangulaires, celui, par exemple, de l'équilibre transversal de la plaque à contour encastré, au sujet duquel la Thèse de doctorat de M. Paschoud (Paris, Gauthier-Villars, 1914) avait montré déjà qu'il faudrait, cependant, pour obtenir réellement une approximation, pousser les calculs beaucoup plus loin que ne l'avait pensé Ritz.

Mais, ici, la méthode de Ritz se simplifie au plus haut point. Et il se trouve qu'elle revient, si l'on prend, par exemple, $K = 1$ et $\alpha = 1$, à regarder l'équation du problème, $\Delta_2 V = -1$, comme résultant, par addition ou superposition, d'équations partielles de la forme

$$(\beta) \quad \Delta_2 v = -C \cos px \cos qy,$$

où p, q auraient les valeurs respectives $\pm \frac{m\pi}{2}$, $\pm \frac{n\pi}{2}$ qui annulent les seconds membres tout le long du contour $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$. Alors ces équations partielles (β) ont, évidemment, comme intégrales respectives bien continues *annulant les fonctions v sur le contour*, ou y satisfaisant à la condition définie donnée,

$$(\beta') \quad v = \frac{C}{p^2 + q^2} \cos px \cos qy.$$

On pourra, par suite, poser

$$(\beta'') \quad V = \sum \sum \frac{C}{p^2 + q^2} \cos px \cos qy,$$

à la condition nécessaire et suffisante que, pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre -1 et $+1$, l'expression de $\Delta_2 V$, savoir

$$\sum \sum \Delta_2 v = -\sum \sum C \cos px \cos qy,$$

vaille -1 , c'est-à-dire à la condition qu'on ait

$$(\gamma) \quad (\text{pour } x^2 < 1 \text{ et } y^2 < 1) \sum \sum C \cos\left(\pm \frac{m\pi x}{2}\right) \cos\left(\pm \frac{n\pi y}{2}\right) = 1.$$

Or, parmi les séries trigonométriques usuelles, se trouvent les développements de l'unité par des cosinus, entre les valeurs ∓ 1 de x ou de y ,

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{2} - \dots \right), \quad 1 = \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi y}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi y}{2} + \dots \right),$$

ristique de leur forme. Et, en effet, si l'on adopte, au lieu des coordonnées x, y , deux variables indépendantes

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\sigma}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\sigma}},$$

analogues (mais non identiques) à (7), et communes aux points homologues de toutes ces sections, il en résulte immédiatement, pour transformer les deux dérivées secondes dont la somme constitue le

que nous écrirons plus brièvement

$$(\gamma') \quad 1 = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{m} \cos \frac{m\pi x}{2}, \quad 1 = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi y}{2},$$

en convenant, *ici*, de choisir pour m et n la suite des nombres impairs affectés alternativement des signes + et -, ou de poser

$$(\gamma'') \quad m = (1, -3, 5, -7, \dots), \quad n = (1, -3, 5, -7, \dots),$$

et en nous arrêtant d'ailleurs, dans ces deux séries toutes pareilles (γ'), à deux impairs d'autant plus forts que nous voudrions avoir une approximation plus grande. On peut voir, en effet, pour la seconde (par exemple) de ces séries (γ'), dans la XXXII^e leçon de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, second fascicule, p. 171*), la formule (49), où il suffira de remplacer par $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2}$ un certain arc x qui y varie de zéro à π .

Le produit des deux formules (γ') donne

$$(\gamma''') \quad 1 = \frac{16}{\pi^2} \sum \sum \frac{1}{mn} \cos \frac{m\pi x}{2} \cos \frac{n\pi y}{2},$$

série double où il conviendra, comme on voit, *pour bien en fixer le sens et la somme limite*, de prendre précisément les termes où chaque valeur à considérer de m se trouve associée, une fois et une seule, à toutes les valeurs de n qui sont également à considérer.

Finalement, la comparaison de (γ''') à (γ) montre que la vérification de (γ) se fera si l'on pose, outre (γ''),

$$C = \frac{16}{\pi^2 mn}.$$

Et l'on aura, par suite, comme expression cherchée de V , la série, beaucoup plus convergente que (γ'''),

$$(\delta) \quad V = \frac{16}{\pi^2} \sum \sum \frac{\cos p x \cos q y}{mn(p^2 + q^2)} = \frac{64}{\pi^2} \sum \sum \frac{1}{mn(m^2 + n^2)} \cos \frac{m\pi x}{2} \cos \frac{n\pi y}{2}.$$

La valeur moyenne U de V s'obtiendra en multipliant par $dx dy$ et intégrant sur tout le quart, par exemple, de σ qui est compris entre les limites $x = 0$ et $x = 1, y = 0$

paramètre différentiel Δ_2 de chaque fonction de point, les formules symboliques

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\sigma} \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad \frac{d^2}{dy^2} = \frac{1}{\sigma} \frac{d^2}{d\eta^2};$$

de sorte que l'équation indéfinie $\Delta_2 V = -K$ du problème devient, en la divisant par K ,

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\eta^2} \right) \frac{V}{K\sigma} = -1.$$

et $\gamma = 1$. Il vient ainsi

$$(\delta') \quad U = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^6 \sum \sum \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 + n^2)} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Or chaque facteur sinus y vaut l'unité; car, lorsque l'arc en est négatif, le sinus de sa valeur absolue est -1 et devient 1 par le rétablissement du signe de l'arc. D'ailleurs, U n'étant autre chose que $kK\sigma$, c'est-à-dire, ici, $4k$, k sera le quart de U ou recevra bien l'expression (α) , dans laquelle m, n ne figurent que par leurs carrés et peuvent se prendre simplement en valeur absolue.

La série, dans (α) , est très convergente, en tant que série double. Aussi M. Paschoud, en y prenant seulement 5 termes (avec chaque paire de termes égaux comptée pour un seul), a-t-il eu déjà notre première valeur approchée, $k = 0,0350$. Avec 11 termes, il a obtenu $k = 0,035116$, c'est-à-dire une approximation un peu supérieure à notre troisième. Enfin, avec 46 termes, il a eu la valeur très approchée $k = 0,03514\dots$, obtenue ainsi assez facilement et sans l'emploi des Tables de logarithmes qu'exige (mais avec beaucoup moins de termes) le calcul des exponentielles entrant dans l'expression transcendante usuelle de k .

En résumé, la méthode de Ritz fait, *automatiquement* (pour ainsi dire), décomposer l'équation $\Delta_2 V = -K$ du problème en une infinité d'équations de la forme

$$\Delta_2 v = -C \cos p x \cos q y,$$

admettant immédiatement des intégrales partielles v de cette forme, exprimées par

$$v = \frac{C}{p^2 + q^2} \cos p x \cos q y,$$

et dont la somme $\sum \sum v = V$ constitue ensuite l'intégrale complète.

Celle-ci est transcendante, comme celle de Fourier, mais seulement avec des fonctions circulaires, *sans mélange d'exponentielles réelles*; et elle est *conformée pareillement* en x et en y : avantages compensés, il est vrai, par le grand inconvénient d'avoir une série *double* à la place d'une série *simple*.

Il est clair qu'on procéderait de même dans le cas de la section rectangulaire $\sigma = 4ab$, à contour exprimé par l'équation $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$, en remplaçant alors les deux séries (γ') par celles-ci, qui s'en déduisent,

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{m} \cos \frac{m\pi x}{2a}, \quad 1 = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi y}{2b},$$

C'est donc, à proprement parler, la fonction $\frac{V}{K\sigma}$ que cette équation, complétée par la condition *définie* au contour, laquelle est de la forme

$$\frac{V}{K\sigma} = 0 \quad \text{pour} \quad f(\xi, \eta) = 0.$$

déterminera en ξ et η . Par conséquent, aux points homologues (ξ, η) de toutes les sections considérées, on aura, comme solution du problème, l'égalité de $\frac{V}{K\sigma}$ à une certaine fonction commune $F(\xi, \eta)$,

ou en prenant

$$(\xi) \quad p = \frac{m\pi}{2a}, \quad q = \frac{n\pi}{2b}$$

dans la formule

$$(\xi') \quad V = \frac{16}{\pi^2} \sum \sum \frac{\cos px \cos qy}{mn(p^2 + q^2)}.$$

Et l'on trouverait finalement

$$(\xi'') \quad (\text{section rectangulaire}) \quad k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum \sum \frac{1}{m^2 n^2 \left(\frac{b}{a} m^2 + \frac{a}{b} n^2\right)}.$$

Si, la condition au contour (rectangulaire) étant toujours $V = 0$, l'équation indéfinie du problème devenait $\Delta_2 V = -f(x, y)$, avec f fonction continue quelconque dans l'intérieur de σ , on transporterait l'origine à un sommet, de manière à avoir x et y variables de zéro à $2a$ et à $2b$ (qu'on appellerait, de préférence, A et B); puis on décomposerait la fonction f en série trigonométrique double, par la formule de Lagrange qui procède suivant les sinus de *tous* les multiples d'un arc; et les équations régissant les fonctions partielles v seraient alors de la forme

$$\Delta_2 v = -C \sin px \sin qy,$$

avec *tous* les multiples px, qy , de deux mêmes arcs, proportionnels, l'un, à x , l'autre, à y . Enfin, on aurait évidemment

$$V = \sum \sum \frac{C}{p^2 + q^2} \sin px \sin qy.$$

C'est seulement dans le cas d'une fonction f prenant même valeur aux points symétriques par rapport à l'une quelconque des deux médianes, qu'il est avantageux de choisir le centre comme origine et de remplacer les sinus par des cosinus, savoir, par ceux des multiples impairs de $\frac{\pi x}{2a}$ et de $\frac{\pi y}{2b}$.

c'est-à-dire une relation pouvant s'écrire

$$(26) \quad V = K\sigma F(\xi, \eta) = K\sigma F\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma}}, \frac{y}{\sqrt{\sigma}}\right);$$

et, si l'on appelle k la valeur moyenne de F en tous les points de σ , c'est-à-dire l'intégrale $\iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta$, prise dans toute l'aire $\iint d\xi d\eta = 1$ qu'entoure la courbe $f(\xi, \eta) = 0$, il vient

$$(27) \quad U = kK\sigma.$$

De même, en appelant V' la valeur maxima de V , qui est $K\sigma F(\xi', \eta')$, si ξ', η' désignent les valeurs de ξ, η au point où elle se produit, savoir, généralement, au centre de gravité de la section, on aura aussi

$$(28) \quad V' = k'K\sigma,$$

à la condition de poser $F(\xi', \eta') = k'$.

12. Comparons, en particulier, les trois valeurs que nous avons trouvées pour k , ou plutôt pour l'inverse de k , dans les trois formes *régulières* que nous avons considérées et qui sont les plus simples, triangle équilatéral, carré et cercle. Évaluons aussi, pour les comparer de même, les valeurs correspondantes de k' .

Avant tout calcul, il est assez naturel de penser que, à égalité d'aire, comme, par exemple, pour $\sigma = 1$, les deux vitesses, *moyenne*, U , et *maxima*, V' , varient, dans les *sections régulières* ayant des nombres différents m de côtés, en sens inverse de la longueur χ du contour; mesure de l'étendue relative des parois qui, immobilisant le fluide contigu, y ralentissent l'écoulement. Donc $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k'}$ et $\frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$ doivent croître ensemble, quand le nombre m des côtés de la figure régulière supposée diminue, c'est-à-dire quand on passe du cercle, où ce nombre est infini, à un polygone régulier se rapprochant du carré, puis du carré même au triangle. Et il y a lieu de chercher si ces trois quantités ne seraient pas sensiblement proportionnelles, ou jusqu'à quel point les deux produits $k \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$, $k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$ pourraient être censés indépendants du nombre m des côtés de la section.

Or les valeurs de k pour le cercle, le carré et le triangle équilatéral, sont, d'après (4) et (25),

$$(29) \quad k = \frac{1}{8\pi}, \quad k = 0,0351\dots, \quad k = \frac{1}{20\sqrt{3}}.$$

Quant à celles de k' , on les évaluera, dans les deux cas extrêmes, par les formules (3), où il faudra faire ($b = a$, $x = 0$, $y = 0$) pour le cercle, ($x = 0$, $y = \frac{h}{3}$, $\sigma = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$) pour le triangle. Le cas intermédiaire du carré se traitera en annulant ξ , η dans les formules (21) et (20). Il viendra d'abord, vu les expressions (17) de B, C, D, en réduisant leur dénominateur commun à son quart et mettant 9 en facteur dans B, C, D,

$$(29 \text{ bis}) \quad \Phi' = \frac{4}{5} \left(B - \frac{20}{9} C + \frac{80}{13} D \right) = \frac{9}{25} \frac{16737847}{13.19668571} = 0,02357.$$

Après quoi, la formule (20), divisée par $K\sigma$, donnera

$$(30) \quad k' = \frac{22}{300} + \frac{\Phi'}{80} = 0,07333 + 0,000295 = 0,07363.$$

On aura donc respectivement, pour le cercle, le carré et le triangle,

$$(31) \quad k' = 2k = \frac{1}{4\pi}, \quad k' = 0,07363, \quad k' = \frac{20}{9} k = \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Or on trouve aisément que, dans les trois mêmes cas respectifs,

$$(32) \quad \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = 2\sqrt{\pi}, \quad \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = 4, \quad \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = 2\sqrt{3\sqrt{3}}.$$

Par suite, les deux produits $k \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$, $k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$ y deviennent respectivement : le premier,

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} k \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} = 0,1410, \\ k \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = 4(0,0351\dots) = 0,1405, \\ k \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{10} = 0,1316; \end{array} \right.$$

le second,

$$(34) \quad k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0,2821, \quad k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = 0,2945, \quad k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = \frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt{3}} = 0,2925.$$

13. On voit que, le nombre m des côtés de la section décroissant de l'infini à 3, la vitesse maxima V' , exprimée proportionnellement par k' , décroît un peu moins vite que ne grandit le contour χ ; car leur produit croît environ de 0,28 à 0,29.

Au contraire, la vitesse moyenne ou de débit U , exprimée proportionnellement par k , diminue un peu plus vite que ne grandit le contour, surtout lorsqu'on passe de $m = 4$ à $m = 3$, c'est-à-dire du carré au triangle, où leur produit varie de 0,1405 à 0,1316. Cet abaissement sensible du débit de l'unité d'aire, entre $m = 4$ et $m = 3$, s'explique par les angles *aigus* du triangle, à l'intérieur desquels la vitesse V , près du sommet, est fort réduite par le voisinage simultané de deux parois.

Mais, entre le cercle et le carré, de $m = \infty$ à $m = 4$, ce produit $k \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$ paraît, si l'on s'y laisse guider par le sentiment de la continuité, se maintenir presque constant (voisin de 0,1408), ou ne décroître que de 0,1410 à 0,1405.

La vitesse maxima V' , produite plus loin des sommets (et des côtés) que la vitesse moyenne U , est donc moins ralentie qu'elle par leur influence, surtout dans le triangle, où le rapport $\frac{V'}{U}$ grandit jusqu'à $\frac{20}{9}$ et excède du *neuvième* sa valeur simple 2 dans le cercle, alors qu'il avait crû à *peine*, jusque-là (c'est-à-dire pour m décroissant de ∞ à 4), du *vingtième* de cette valeur 2 (¹).

(¹) Un fait assez important de l'Hydraulique trouve son explication dans une raison analogue. La vitesse maxima V' , à la surface libre d'un canal rectiligne découvert, se produisant au milieu de la largeur, sur le filet fluide qui coule *le plus loin possible des bords*, est moins réduite par le frottement de ces bords que celle des autres filets fluides, et, par suite, que la vitesse moyenne U . D'où il résulte que le rapport $\frac{V'}{U}$ grandit, quand on considère des sections (rectangulaires ou autres) *de plus en plus rétrécies*.

Aussi l'ébauche que j'ai donnée de la théorie du régime uniforme *turbulent* (tourbillonnant et tumultueux) dans les lits à grande section, attribue-t-elle au rapport $\frac{V' - U}{U\sqrt{b}}$

Toutefois, quand on passe du carré au triangle même, la vitesse V' , au centre de gravité de la section, se trouve un peu plus réduite que n'est accru le contour, en raison sans doute du trop grand rapprochement du centre, où se place alors une partie notable des côtés (ou des parois). Cet excédent de décroissance est, comme on voit, dans le rapport de 0,2945 à 0,2925, soit environ du $\frac{1}{180}$ de ces fractions.

Il ne faudrait pas, d'ailleurs, comme on pourrait être tenté de le faire, attribuer l'excédent en question, sur la valeur 0,2925 relative au triangle, du produit $k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$ pour le carré, à un défaut d'exactitude de ce produit. Car il y existe, déjà, dès la première approximation, obtenue en prenant

$$\Phi' = 0, \quad k' = \frac{22}{300}, \quad k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = \frac{88}{300} = 0,2933 \dots;$$

et il s'accroît d'une approximation à l'autre. A la deuxième, où D serait nul et B, C donnés par (14), il viendrait, en effet, vu (29 *bis*) et (30),

$$\Phi' = \frac{4}{5} \left(B - \frac{20}{9} C \right) = \frac{4 \cdot 16 \cdot 7}{5 \cdot 9 \cdot 629} = \frac{448}{28305} = 0,01583, \quad k' = 0,07353;$$

d'où

$$k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}} = 0,2941.$$

(où b est le coefficient de la formule des hydrauliciens $\frac{\sigma}{\chi} I = b U^2$, χ y désignant le *contour mouillé* de Du Buat) la valeur $\frac{k}{6} = 8,1$ environ pour un canal rectangulaire très large, et une autre valeur, *notablement plus forte*, $\frac{8}{5} \frac{k}{6} = 12,96$, pour un canal demi-circulaire coulant à pleins bords. Dans ces formules, le coefficient k , indépendant du degré de rugosité des parois, n'a rien de commun avec celui de la relation (27) ci-dessus.

Dans les circonstances, assez ordinaires, où l'on peut prendre $b = 0,0004$ pour le canal très large (avec le mètre et la seconde comme unités), et, par suite, $b = 0,00034$ ou $0,00035$ dans le canal demi-circulaire, il vient ainsi $\frac{U}{V'} = 0,8$ environ pour un canal

médiocrement large (comme est le canal demi-circulaire) et $\frac{U}{V'} = 0,86$ environ pour le canal de profondeur constante et de largeur *indéfinie*, où n'agit que le frottement du *fond*.

Voir, à ce sujet, les pages 33 à 36 et 44 à 47 de mon Mémoire sur le régime uniforme intitulé « *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section* (Paris, Gauthier-Villars; 1897) ».

L'augmentation, à partir de la première valeur approchée 0,2933, est donc de 8 unités du quatrième ordre décimal, alors qu'il n'est plus que de 4 quand on passe de cette deuxième approximation 0,2941 à la troisième 0,2945.

13 *bis*. Grâce aux analogies plausibles signalées ici, ou au sentiment de la continuité qui nous fait interpoler les cas de m plus grand que 4 entre ceux du cercle et du carré, on voit que des valeurs de U et de V' , ou de k et de k' , assez approchées pour le besoin de la pratique, seraient données aux physiciens par les deux formules, résultant *comme moyennes* de (33) et (34),

$$(34 \text{ bis}) \quad (\text{pour } m > 4) \quad k = (0,1408) \frac{\sqrt{\sigma}}{\chi}, \quad k' = (0,288) \frac{\sqrt{\sigma}}{\chi}.$$

Celles-ci permettraient donc de ramener les calculs des vitesses moyenne et maxima à celui du périmètre χ limitant le polygone régulier d'aire 1 et du nombre considéré m de côtés, quoique l'intégration des équations du problème n'ait été effectuée que dans les trois cas $m = \infty$, $m = 4$, $m = 3$.

Or, si r désigne le rayon du cercle inscrit dans la section σ , le demi-côté de cette section égale visiblement $r \tan \frac{\pi}{m}$; et l'on a

$$\chi = \left(2m \tan \frac{\pi}{m}\right) r, \quad \sigma = \frac{\chi}{2} r = \left(m \tan \frac{\pi}{m}\right) r^2;$$

d'où

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\chi} = \frac{1}{2 \sqrt{m \tan \frac{\pi}{m}}}.$$

Les deux formules approchées (34 *bis*) donneront donc, pour calculer les deux vitesses moyenne U et maxima V' , les coefficients numériques approchés

$$(\text{pour } m > 4) \quad k = \frac{0,0704}{\sqrt{m \tan \frac{\pi}{m}}}, \quad k' = \frac{0,144}{\sqrt{m \tan \frac{\pi}{m}}}.$$

Mais peut-on entendre les formules (34 *bis*), où les coefficients 0,1408,

0,288 ne sont que des moyennes, dans le sens d'une proportionnalité approchée de k et de k' à $\frac{\sqrt{\sigma}}{\chi}$ quand m varie? Il y a lieu, sous ce rapport, de distinguer la première formule (34 bis) de la seconde qui est beaucoup moins précise.

Entre les limites $m = 5$ et $m = \infty$, le rapport $\frac{\sqrt{\sigma}}{\chi}$ est assez variable : il vaut, pour le pentagone, $\frac{1}{2\sqrt{5} \tan 36^\circ} = 0,2623$ et, pour le cercle, $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0,2821$, soit le $\frac{1}{13}$ en plus, tandis que le produit $k \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$, atteignant au moins 0,1406 dans le pentagone, pour devenir seulement 0,1410 dans le cercle, n'y croît pas même des $\frac{2}{100}$, ou presque une trentaine de fois moins. Il y a donc bien proportionnalité approchée de k à $\frac{\sqrt{\sigma}}{\chi}$.

Quant au produit $k' \frac{\chi}{\sqrt{\sigma}}$, il décroît environ, dans le même intervalle, de 0,29 à 0,28, soit d'une fraction sensiblement inférieure sans doute à $\frac{1}{13}$, mais toutefois du même ordre que celle-ci. La proportionnalité à $\frac{\sqrt{\sigma}}{\chi}$ est donc loin d'être aussi admissible pour k' que pour k .

14. Remarquons enfin que la convergence des approximations successives, dans le cas du carré, paraît plus rapide sur k' que sur k , eu égard à ce que les valeurs de k' sont plus que doubles de celles de k . Car, entre les trois approximations

$$\begin{array}{lll} k = 0,03500, & k = 0,03506, & k = 0,03511, \\ \text{et} & & \\ k' = 0,07333, & k' = 0,07353, & k' = 0,07363, \end{array}$$

les deux différences successives sont respectivement, pour k , 0,00006 et 0,00005, ou presque égales, tandis qu'elles sont, pour k' , 0,00020 et 0,00010, ou décroissantes de moitié, de l'une à l'autre.

Il est naturel, en effet, que notre mode de correction, indiqué au n° 2, des erreurs sur V qu'entraînent partout les petites vitesses de sens contraires tolérées le long du contour χ , produise une compensation d'autant meilleure de ces erreurs, les unes par les autres, qu'on est plus loin du contour, c'est-à-dire plus loin des régions de leurs

influences *locales* et prépondérantes dans un sens ou dans l'autre. C'est donc au centre, où V est la vitesse maxima V' , que cette neutralisation mutuelle doit se faire le mieux.

IV. — Considérations générales sur la filtration des liquides par le sable, ou par d'autres milieux poreux analogues, et sur la transpiration des gaz à travers ces milieux.

15. On sait que la filtration d'un liquide à travers un sable homogène est régie par la même loi élémentaire, de proportionnalité du débit à la *pente motrice* ou au coefficient K dont il a été question ci-dessus, que son écoulement uniforme le long d'un tube capillaire poli. Mais, comme les voies ouvertes au liquide, dans une masse sablonneuse ou dans tout autre milieu poreux présentant des espaces libres analogues entre ses petits fragments, sont extrêmement irrégulières et sinueuses, il est difficile de donner, de cette assimilation, une explication précise, de tout point satisfaisante. On voit seulement, au premier coup d'œil, que la petitesse extrême des vitesses absolues doit permettre d'y négliger, sinon les accélérations, du moins les *inerties* en jeu, qui, rapidement changeantes de sens d'un point à l'autre, s'annihilent *en moyenne* dans des étendues presque comparables à de simples éléments de volume ; et qu'elle doit aussi permettre, par suite, d'y supposer la pente motrice neutralisée, dans chaque petite région, par les frottements, de la même manière qu'elle l'est, dans un tube cylindrique poli, sur des filets fluides rectilignes et parallèles, animés de vitesses inégales, mais constantes.

16. L'ébauche de théorie de ce phénomène qui m'a paru la plus commode pour l'enseignement, bien qu'on puisse la trouver un peu trop fictive ou simplificatrice au point de vue de la réalité, consiste à y admettre, dans chaque petit espace comprenant un grand nombre de grains sablonneux et durant des laps de temps modérés, une *direction générale ou commune* de l'écoulement, c'est-à-dire du *mouvement translatore*, en raison de laquelle les pores ou vides *alignés à peu près suivant cette direction* se comportent comme des tubes cylindriques que parcourraient, rectilignement et uniformément, suivant leur axe,

les filets du liquide les remplissant, tandis que les pores ou interstices orientés autrement et même, dans ceux qui sont bien alignés, les parties ou concavités non utilisables par des filets approximativement rectilignes et parallèles, seraient l'emplacement d'un liquide *immobilisé entre les grains sablonneux*. Ce dernier, *liquide mort* en quelque sorte, compléterait ainsi, par son adjonction aux particules solides censées le retenir, les parois fictivement cylindriques des *tubes de filtration*, tout en maintenant sans cesse, par le fait même de son équilibre entre tubes contigus, une variation *hydrostatique* de la pression moyenne p , le long des courts chemins qui traversent dans du liquide toute paroi de ces tubes.

Comme on sait que, dans chaque tube en particulier, la *hauteur φ de charge*, somme de la pression $\frac{p}{\rho g}$ (évaluée en hauteur de fluide) et de l'*altitude effective* z du point où l'on se trouve (au-dessus d'un plan horizontal fixe de *repère*), *est constante le long de tout chemin normal aux filets fluides*, non moins qu'à l'état de repos dans le liquide immobilisé entre deux tubes, la *charge φ* aura une même valeur sur tout le parcours, quelque étendu qu'il soit, d'un tel chemin normal aux tubes, tracé à travers la masse fluide qu'entrecoupent les particules sablonneuses, mais qui forme *un tout communiquant*. En d'autres termes, la famille, $\varphi = \text{constante}$, des *surfaces d'égale charge* sur lesquelles la hauteur φ du *niveau dynamique* est constante, surfaces sensiblement continues malgré leurs innombrables mais imperceptibles inégalités (dont il sera fait abstraction), donnera, dans toute petite région (x, y, z) , la direction des tubes de filtration, par sa normale très petite dn menée, à partir de (x, y, z) , suivant le sens où *s'abaisse* ce niveau φ ; et c'est justement la dérivée $-\frac{d\varphi}{dn}$, mesurant la rapidité actuelle de l'abaissement du niveau dynamique le long de dn , qui constituera, par définition, la *pente motrice I*, régulatrice de l'écoulement.

Rappelons enfin que notre coefficient K est le produit, $\frac{\rho g I}{\varepsilon}$, du poids spécifique ρg du liquide par l'inverse de son coefficient ε de frottement intérieur et par la pente motrice I .

Cela posé, la vitesse de débit d'un tube de filtration (de section *vive* σ) étant $k K \sigma$, le volume liquide que celui-ci fournira dans l'unité

de temps aura l'expression $kK\sigma^2$ ou $\frac{\rho g^1}{\varepsilon} k\sigma^2$. Et le débit, par unité d'aire, de la surface considérée d'égale charge φ , dans une petite étendue sensible ΔS entourant le point (x, y, z) , sera $\frac{\rho g^1}{\varepsilon} \Sigma k\sigma^2$, où le symbole de sommation Σ désigne une somme s'étendant à tous les tubes qui percent normalement cet élément d'aire ΔS , divisée par ΔS ou évaluée dans l'hypothèse $\Delta S = 1$. Il est clair que, si le sable se trouve moyennement homogène, le quotient ainsi obtenu s'écartera peu d'une *certaine moyenne*, indépendante de la situation (x, y, z) et de l'orientation des surfaces d'égale charge (1).

(1) Pour un milieu poreux qui ne serait plus moyennement *isotrope* comme du sable, mais qui offrirait, par exemple, une structure plus ou moins *stratifiée*, ou des tubes de filtration de formes et de dimensions différentes suivant les divers sens, il y aurait lieu, pour serrer de plus près la réalité, de compliquer un peu l'hypothèse d'une direction générale du mouvement dans chaque région. Tout en continuant à admettre l'existence de surfaces d'égale charge φ , à direction générale déterminée malgré d'innombrables inégalités locales, on considérerait les tubes de filtration non plus comme normaux à ces surfaces, mais comme se croisant dans toutes les directions, à la manière d'un réseau serré, et débitant du fluide en raison inverse de leur plus ou moins d'obliquité sur ces mêmes surfaces $\varphi = \text{const.}$ Celles-ci, déterminées surtout, dans leur ensemble, par la conformation des parois pour chaque mode de répartition des pressions, seraient affectées, comme d'une *encoche* presque imperceptible, à la traversée de chaque tube, dont la section normale σ n'aurait plus leur direction générale par suite de l'hétérotropie du milieu.

Les tubes de filtration cesseraient donc de présenter, en chaque endroit et à chaque instant, une direction *unique*, quoiqu'ils continuassent à y offrir une direction *moyenne* ou générale. Attribuer à tous cette direction moyenne, les y réduire fictivement, serait, sans doute, permis, mais n'est utile que dans le cas d'*isotropie* où l'on aperçoit, *a priori*, sa normalité aux surfaces d'égale charge; ce qui permet de la construire. La normalité en question est d'ailleurs nécessaire (comme on a vu vers le milieu de la page 24) pour que le plan tangent aux surfaces $\varphi = \text{const.}$ garde sa direction générale à la traversée des filets fluides de *chaque* tube de filtration, c'est-à-dire pour qu'il n'y ait pas les *encoches* dont on vient de parler.

Il existe, pour tout milieu poreux, trois axes rectangulaires *principaux* de filtration et, suivant chacun de ces axes, un coefficient spécifique *distinct*, analogue à l'inverse $\frac{1}{\mu}$ des formules (37) ci-après.

Voir, à ce sujet, la XX^e de mes leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière* (t. I^{er}, p. 324 à 328. Paris, Gauthier-Villars).

17. L'hydraulicien Dupuit, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, à qui l'on doit, ce semble, la première étude théorique de la filtration ⁽¹⁾, considère la capacité totale m occupée par le liquide dans l'unité de volume apparent du milieu poreux, capacité qu'il déduit du poids du liquide (obtenue par l'excédent d'une pesée du sable tout imbibé sur le même sable une fois sec); et il imagine que la capacité proportionnelle $m \Delta S \, dn$, dans la couche mince sablonneuse de section ΔS et d'épaisseur dn comprise entre deux surfaces consécutives d'égale charge, y soit répartie de manière que toute section qu'on y fait par un plan parallèle aux bases ait la valeur $m \Delta S$, comme si tous les pores sensibles étaient disposés en tubes de filtration ou, du moins, ne contenaient point de liquide *mort*. Divisant alors le débit total de l'élément ΔS de surface d'égale charge, par la section totale *ainsi uniformisée*, $m \Delta S$, des cavités correspondantes, il obtient ce qu'il appelle la *vitesse moyenne* du liquide filtré. Désignons-la par U ; et ce sera, avec nos notations et formules,

$$(35) \quad U = K \frac{\Sigma k \sigma^2}{m} = \frac{\rho g I}{\varepsilon} \frac{\Sigma k \sigma^2}{m} = \left(\frac{\rho g}{\varepsilon} \frac{\Sigma k \sigma^2}{m} \right) \left(- \frac{d\varphi}{dn} \right).$$

Dupuit appelle μ la *constante spécifique*, caractéristique du sable expérimenté, par laquelle il faut diviser la pente motrice I , ou $-\frac{d\varphi}{dn}$, pour avoir cette vitesse moyenne U . Nous poserons donc

$$(36) \quad \mu = \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{m}{\Sigma k \sigma^2};$$

et, si q désigne le volume fluide que débite par unité de temps l'unité d'aire apparente ou totale d'une surface filtrante d'égale charge φ , nous aurons, en résumé, comme formules fondamentales de la filtration,

$$(37) \quad U = \frac{I}{\mu}, \quad q = \frac{m}{\mu} I, \quad \text{où} \quad I = - \frac{d\varphi}{dn}.$$

Dupuit a reconnu, par confrontation avec les résultats d'expérience,

(1) Un an ou deux après les expériences de Darcy et Ritter faites à Dijon vers 1855.

que le nombre μ , évidemment d'autant plus grand que le sable a ses grains plus ténus, se trouve compris, pour l'eau circulant (aux températures ordinaires) à travers des sables plus ou moins fins, entre deux nombres comme 1000 et, peut-être, 10 000, quand on adopte le mètre et la seconde pour unités de longueur et de temps (¹).

18. La formule (35) s'applique, avec une assez grande approximation, au phénomène analogue de la *transpiration des gaz* à travers les milieux poreux. Alors la présence d'un tel milieu, d'une capacité

(¹) *Analogie des courants électriques avec ceux de filtration.* — Chaque fois que j'ai exposé, dans mon Cours de la Sorbonne, cette théorie de la filtration, je n'ai pas manqué de l'appliquer au cas d'un tuyau de conduite rempli de sable, fournissant par unité de temps un certain débit liquide Q sous l'action d'un abaissement donné H de la charge φ d'un bout à l'autre, suivant sa longueur totale L , afin de montrer l'étroite analogie de ce phénomène, avec le courant électrique créé le long du conducteur reliant les deux pôles d'une pile, dont la force électromotrice E produit entre eux l'abaissement $H = E$ du niveau électrique ou *potentiel*.

Si l'on adopte, dans un tel tuyau de conduite, une abscisse courbe n comptée le long de son axe, de $n = 0$ à $n = L$, pour définir les divers points de cet axe et, par suite, en fonction de n , les sections normales correspondantes σ du tuyau, ainsi que les diverses valeurs du coefficient $\frac{m}{\mu} = c$ qui caractérise la *facilité* du sable à laisser filtrer le liquide, ou, en quelque sorte, sa *conductibilité*, inverse de sa *résistance* à l'écoulement, la seconde formule (37), étendue à toute une section σ , donnera

$$Q = -c\sigma \frac{d\varphi}{dn} \quad \text{ou} \quad -d\varphi = Q \frac{dn}{c\sigma},$$

et, en intégrant de $n = 0$ à $n = L$,

$$H = Q \int_0^L \frac{dn}{c\sigma}.$$

L'intégrale $\int_0^L \frac{dn}{c\sigma}$, proportionnelle à la longueur, mais inverse de la conductibilité et de l'aire des sections, exprime la *résistance totale* \mathcal{R} à l'écoulement. Or, remplaçons H par E ; et il viendra la formule fondamentale de la théorie du courant électrique (d'intensité Q),

$$Q = \frac{E}{\mathcal{R}}.$$

D'ailleurs, dans ces deux phénomènes de régime *uniforme* ou *quasi-uniforme*, la *pente motrice* est partout neutralisée par les frottements. En d'autres termes, le travail résistant y est converti en chaleur. Donc la *chaleur créée* y égale, par unité de temps, le *travail moteur*, qu'expriment, d'une part, le produit du poids ρQ de fluide débité par l'abaissement H de son niveau statique ou dynamique, d'autre part, le produit de l'intensité du courant électrique par la chute analogue E du potentiel.

calorifique (par unité de volume) très grande par rapport à celle du gaz disséminé dans ses étroits interstices, y assure la conservation de la température générale, malgré la détente graduelle que le gaz éprouve en passant de sa pression primitive à une pression moindre, le long des *tubes de transpiration*; et la pression moyenne p , sensiblement égale à la pression *élastique* de l'état de repos pour la densité actuelle ρ de la particule, est partout proportionnelle à ρ , conformément à la loi de Mariotte. D'ailleurs, les changements de l'altitude z s'y trouvant négligeables, vu la petitesse de ρ dans les gaz, à côté de ceux de la hauteur $\int \frac{dp}{\rho g}$ représentative de la pression, ce sont ceux-ci, à eux seuls, qui exprimeront sensiblement les variations de la charge φ d'un point à l'autre; et, par suite, la *pente motrice* I , pour un tube élémentaire σdn de transpiration, de longueur dn , pourra être censée se réduire à $-\frac{I}{\rho g} \frac{dp}{dn}$.

Mais comme, dans un écoulement permanent ou quasi permanent, la masse débitée est constante d'un bout à l'autre du tube, alors que la densité ρ y décroîtra comme p , le mouvement s'y accélérera; et, si V désigne, sur la surface où la pression est p , la vitesse d'un filet fluide quelconque, rectiligne et parallèle à l'axe du tube qui le contient, ce filet éprouvera, sur la longueur dn , une certaine accélération

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dn} \frac{dn}{dt} = V \frac{dV}{dn}.$$

Pour un élément $d\sigma$ de la section σ du tube et, par conséquent, pour la masse élémentaire $\rho d\sigma dn$ du filet fluide, la différence, $-\frac{dp}{dn} d\sigma dn$, des pressions normales exercées aux deux bouts de cette masse, et qui n'est autre, comme on voit, que $\rho g l d\sigma dn$, aura donc à neutraliser, outre les mêmes frottements des filets contigus que dans le cas d'un liquide, l'inertie, $-V \frac{dV}{dn} \rho d\sigma dn$, du filet lui-même.

19. Il importe de voir si celle-ci en est une fraction insensible; car, si cela a lieu, les inerties se trouvant négligeables et, d'ailleurs, le coefficient ϵ des frottements entre filets étant, à peu près, aussi cons-

tant dans un gaz, malgré les changements de densité, que dans un liquide, tandis que, d'autre part, la couche gazeuse contiguë à la paroi n'y est pas moins immobilisée que l'était la couche liquide analogue, une même analyse conviendra aux deux cas et donnera aussi, par suite, pour le gaz, les équations (35) à (37).

Or c'est précisément ce qui arrive. Prenons, en effet, le rapport du terme des inerties changées de signe, $\rho V \frac{dV}{dn} d\sigma dn$, à la différence, $-\frac{dp}{dn} d\sigma dn$, des pressions s'exerçant aux deux bases de l'élément. Mais observons que la masse ρV débitée par l'unité d'aire de $d\sigma$ et, par suite, le produit proportionnel pV , sont constants d'un bout à l'autre; ce qui donne $p \frac{dV}{dn} = -V \frac{dp}{dn}$ et permettra de substituer au quotient de $\frac{dV}{dn}$ par $-\frac{dp}{dn}$ la fraction $\frac{V}{p}$. Le rapport considéré, dont il s'agit de reconnaître la petitesse, sera, dès lors, $\frac{\rho V^2}{p}$, ou $\frac{V^2}{gH}$ si l'on appelle H la hauteur, $\frac{p}{\rho g}$, d'une colonne fluide fictive, de densité ρ , qui, par son poids, exercerait statiquement la pression p . Le rapport à apprécier peut donc encore s'écrire $\left(\frac{V}{\sqrt{gH}}\right)^2$. Et l'on s'assure aisément qu'il sera très faible.

Si, par exemple, le gaz est de l'air à la température de zéro degré centigrade et à la pression ordinaire de 0^m,76 de mercure, il viendra pour H le produit de 0^m,76 par le rapport, $\frac{13600}{1,3}$ environ, des deux densités du mercure et de l'air, soit 7951^m. D'où, en faisant $g=9^m,81$, \sqrt{gH} serait une vitesse de 279^m,3 ou, en nombre rond, de 280^m par seconde. Donc, même en prenant pour le filet gazeux une vitesse V de *transpiration* égale à 28^m, vitesse énorme, le rapport cherché n'excéderait pas 0,01; et l'inertie du fluide n'absorberait que le centième de la pente motrice.

20. Ainsi, la formule (35) de la vitesse moyenne U de filtration s'appliquera très sensiblement à la transpiration des gaz et donnera *en volume*, à travers l'unité d'aire d'une surface d'égale charge ou

d'égale pression p , le débit

$$m U = \frac{\rho g I}{\varepsilon} \Sigma k \sigma^2 = \frac{\Sigma k \sigma^2}{\varepsilon} \left(- \frac{dp}{dn} \right),$$

vu la valeur actuelle, $-\frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dn}$, de la pente motrice I .

Pour un *faisceau donné* de tubes de transpiration, occupant ou perçant une aire variable A des diverses surfaces d'égale pression, la masse constante débitée par le faisceau sera donc, en multipliant par ρA et observant que $\Sigma k \sigma^2$ est ici, pour le milieu poreux supposé, une somme constante se rapportant partout à l'unité d'aire; que, d'autre part, ρ est le produit du rapport constant $\frac{\rho}{p}$ par la pression p ,

$$(38) \quad - \left(\frac{\Sigma k \sigma^2}{2\varepsilon} \frac{\rho}{p} \right) A \frac{d.p^2}{dn},$$

expression où la quantité entre parenthèses sera donnée, invariable même d'un bout du faisceau à l'autre bout, si le milieu poreux est partout pareil.

21. Bornons-nous à ce cas de l'homogénéité du milieu; et, pour fixer les idées, supposons que la transpiration se fasse le long d'un tuyau de conduite plein de sable, ayant sa section normale A fonction lentement variable d'une abscisse n comptée le long de son axe L , droit ou courbe. La pression p à l'entrée, p_e (pour $n = 0$), et la pression p à la sortie, p_s (pour $n = L$), seront connues.

La *translation* se faisant partout, à très peu près, parallèlement à l'axe, les surfaces d'égale pression p se confondront avec les sections normales A , qui seront en même temps celles du faisceau de tubes à considérer.

Comme l'expression (38) est constante, ainsi que son facteur entre parenthèses, on aura donc, pour déterminer le mode de variation de p^2 entre $n = 0$ et $n = L$, l'équation différentielle

$$- A \frac{d.p^2}{dn} = \text{const.};$$

d'où il résultera, en isolant $d(-p^2)$ et intégrant à partir de $n = 0$,

$$(39) \quad p_e^2 - p^2 = (\text{const.}) \int_0^n \frac{dn}{A}.$$

La constante s'obtiendra en exprimant que $p = p_s$ pour $n = L$. Si, par exemple, le tuyau est cylindrique, ou que toutes les sections A soient égales, sa valeur sera ainsi

$$\frac{A}{L} (p_e^2 - p_s^2).$$

Par conséquent, le débit en masse (38), divisé par A pour le rapporter à l'unité d'aire, deviendra

$$(40) \quad \frac{\Sigma k \sigma^2}{2\varepsilon} \frac{\rho}{p} \frac{p_e^2}{L} \left(1 - \frac{p_s^2}{p_e^2}\right).$$

Le volume débité par le réservoir (à la pression p_e) qui fournit le gaz, s'évaluera en divisant par la densité *initiale* ρ_e ou $\frac{\rho}{p} p_e$ de ce gaz; ce qui donne enfin, toujours par unité d'aire de la couche poreuse,

$$(41) \quad \frac{\Sigma k \sigma^2}{2\varepsilon} \frac{p_e}{L} \left(1 - \frac{p_s^2}{p_e^2}\right).$$

Et l'on aura la vitesse moyenne correspondante U_e de transpiration, en divisant encore ce débit par la partie *vive*, m , de l'unité d'aire de section, que suppose Dupuit,

$$(42) \quad U_e = \frac{\Sigma k \sigma^2}{2m\varepsilon} \frac{p_e}{L} \left(1 - \frac{p_s^2}{p_e^2}\right).$$

Pour même détente relative du gaz, ou même valeur du rapport $\frac{p_s}{p_e}$, cette vitesse moyenne à l'entrée est donc en raison directe de la pression p_e du gazomètre qui fournit le fluide et en raison inverse de l'épaisseur L de la couche filtrante, comme il arrivait, par exemple, dans les expériences de Graham sur la transpiration le long de tubes fins, où le réservoir d'aval était le récipient d'une machine pneumatique. Alors la détente pouvait être supposée complète; car le carré du rapport $\frac{p_s}{p_e}$ restait insensible.

22. En appelant, dans ce cas limite d'une détente complète, I' le quotient $\frac{P_e}{L}$, qui y figure une sorte de *pente motrice*, et μ' la constante, caractéristique à la fois du gaz et du milieu poreux,

$$(43) \quad \mu' = \frac{2m\varepsilon}{\sum k\sigma^2},$$

il viendra, pour la vitesse moyenne U_e de transpiration à l'entrée et pour le débit correspondant, q_e (en volume), par unité d'aire, du fluide que fournit le gazomètre, les formules, analogues à celles de Dupuit (37) pour les liquides,

$$(44) \quad U_e = \frac{I'}{\mu'}, \quad q_e = \frac{m}{\mu'} I', \quad \text{avec} \quad I' = \frac{P_e}{L} \quad (1).$$

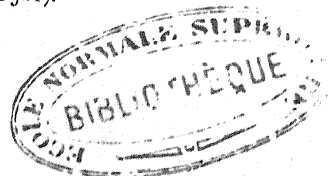
V. — Tentative pour évaluer approximativement le coefficient caractéristique de la vitesse moyenne de filtration, quand la masse filtrante est constituée par des grains sphériques d'un diamètre donné.

23. L'essai précédent de théorie touchant la filtration et la transpiration ne nous a fourni encore aucune donnée sur l'ordre de grandeur de la constante μ (de Dupuit) figurant dans les formules, ou par laquelle il faut diviser la pente motrice pour avoir la vitesse moyenne

(1) J'ai donné plusieurs fois dans mon Cours de la Sorbonne, à la suite des considérations précédentes, une théorie de la *diffusion* (purement *physique*) des *solutions* salines étendues et même des gaz, en l'assimilant à une transpiration de ces corps à travers des pores sensibles et *pénétrables* que leur *dissolvant* liquide comprendrait entre ses groupes moléculaires, censés beaucoup moins mobiles que la matière dissoute. On peut voir les principales formules de cette théorie aux pages 404 à 406 d'une longue étude de 1881-1883, publiée dans un volume (4^e série, t. XIII; 1885) des *Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille*, sous le titre « *Application des potentiels à l'équilibre et au mouvement des solides élastiques, avec des Notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse* ».

J'y assimilais déjà (en 1883), mais d'une manière purement hypothétique, le corps dissous à un gaz ayant sa tension régie par la loi de Mariotte, comme on le fait maintenant, depuis que la découverte des membranes *semi-perméables* laissant traverser le dissolvant, mais retenant la matière dissoute, a permis de mesurer cette tension.

On peut voir un peu plus de détails, sur ce sujet de la diffusion, à la fin du Tome I^{er} de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière* (Paris, Gauthier-Villars, 1901).



de filtration, à travers un sable homogène dont les grains sont, par exemple, supposés sphériques et d'un rayon R donné.

Abordons maintenant cette dernière question, en y partant de l'hypothèse, assez naturelle (semble-t-il), que l'ordre de grandeur dont il s'agit reste le même quand, sans cesser de composer le milieu poreux de sphères solides égales et mutuellement tangentes, on les dispose de manière à y faciliter la construction, entre elles, de tubes rectilignes de filtration et le calcul de leurs débits, en n'y accroissant que le moins possible la proportion des vides. Il est clair toutefois que le débit q sera ainsi augmenté, tant par le fait de l'alignement des vides (qui facilitera l'écoulement suivant la direction analogue) que par celui de leur accroissement inévitable.

24. Sous ces rapports, la disposition qui paraît, à première vue, la plus simple et la plus satisfaisante, consiste à diviser, par trois systèmes de droites parallèles (inclinées à 60°), une des surfaces d'égale charge, supposée, par exemple, horizontale, en triangles équilatéraux de côté $2R$, y pavant tout le plan, et dont l'un sera $CC'C''$ (*fig. 1*), puis à placer, sur la verticale menée par chaque sommet ou point d'intersection, comme C, C', C'', \dots , les centres d'une file de sphères de rayon R tangentes les unes aux autres, la première couche horizontale de ces sphères ayant ses centres en C, C', C'', \dots sur la surface même considérée d'égale charge, la seconde ayant ses centres à une distance $2R$ au-dessus ou au-dessous; et ainsi de suite.

Chaque triangle équilatéral sera donc, dans ses trois angles, la projection horizontale de trois files verticales de *coins* ou *onglets* sphériques superposés, valant chacun un sixième de sphère et tangents mutuellement, aux points vus en A, A', A'' , ainsi qu'aux points vus en C, C', C'' . Entre ces ongles se trouvera un tube de filtration, dont la partie *vive* (ou prismatique et libre sur toute la hauteur) aura comme section normale, dessinée sur la surface considérée d'égale charge, le triangle curviligne $AA'A''$, qui a pour côtés les trois arcs $A'A'', A''A, AA'$, contours apparents de la surface sphérique des trois files d'onglets. Et comme les vitesses d'écoulement, dans les angles infiniment aigus A, A', A'' , compris entre les ongles, seraient évidemment très réduites par le frottement des deux parois contiguës, on n'abaissera le débit

que dans une proportion modérée, en remplaçant fictivement cette section vive par le triangle rectiligne $tt't''$ qui a ses trois côtés, $t't''$, $t''t$, tt' , tangents respectivement aux milieux, B, B', B'', des trois arcs.

Toutefois, le débit sera diminué sensiblement par le fait de cette substitution, moins peut-être à raison du déchet ainsi accepté sur l'aire de la section vive que par la réduction qu'éprouveront, à l'intérieur

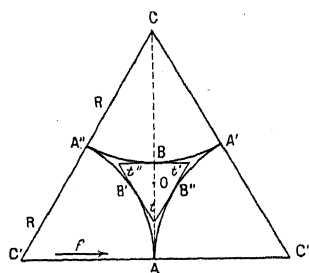


Fig. 1.

du nouveau contour $tt't''$, les vitesses qu'on y fera continues à partir de valeurs *nulles sur ce contour*.

Mais, d'autre part et en compensation, il est clair que ce débit se trouvait fort augmenté par la substitution fictive, à la réelle et stable répartition des grains sablonneux en couches engagées les unes dans les autres, d'une disposition de ces grains en files comprenant entre elles des vides *alignés sans discontinuité dans la direction même de l'écoulement*. Car, d'ordinaire, les sphères de chaque couche se placent dans les creux laissés entre celles de la couche précédente, de manière que les couches *empiètent*, suivant leur épaisseur, les unes sur les autres, réduisant à moins d'un diamètre $2R$ l'espacement entre les plans des centres des sphères ⁽¹⁾. Au contraire, cet espacement est

(¹) *Place exigée par chaque sphère, dans les modes simples d'arrangement.* — Dans notre mode d'arrangement des sphères, par couches parallèles et files continues perpendiculaires à ces couches, les centres des sphères forment, suivant le sens $C'C''$ (ou de la flèche f), des lignes parallèles, dans chacune desquelles l'espacement de deux centres consécutifs est $2R$, tandis que l'espacement de deux lignes d'une même couche voisines égale la hauteur H , ou $R\sqrt{3}$, du triangle $CC'C''$, et l'espacement des plans contenant les centres de deux couches consécutives, $2R$. On peut dire que ces sphères accaparent *individuellement* (chacune pour son compte exclusif), autour de leur centre, un espace

ici $2R$, dans la disposition fictive des centres en files rectilignes continues, normales aux couches; et il y a alors, outre le dégagement des tubes, plus de vide dans la masse sablonneuse. Aussi semble-t-il que le débit doit avoir gagné fictivement, par ces deux circonstances, plus qu'il ne perd maintenant par la réduction de la section vive au triangle $tt't''$.

25. Pour l'aire $CC'C'' = R^2\sqrt{3}$ de surface d'égale charge, le débit sera donc *censé* être celui, $kK\sigma^2$ ou $k\frac{\rho g}{\varepsilon}\sigma^2 I$, d'un tube prismatique à section $tt't'' = \sigma$ triangulaire équilatérale, auquel conviendra, d'après la seconde formule (4), la valeur numérique $\frac{1}{20\sqrt{3}}$ de k . En divisant ce

rectangulaire ayant la longueur $2R$, la largeur H et la hauteur $2R$, ou la capacité $4R^2H = 4R^3\sqrt{3}$, dont leur volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ est la fraction $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,6046$. On comptera, en effet, à l'intérieur de toute étendue *de très grandes dimensions*, autant de ces parallélépipèdes *juxtaposés* qu'il y aura de centres de sphères et, par suite, *sensiblement*, de sphères mêmes.

Au contraire, dans le mode d'arrangement *stable*, par couches parallèles dont chacune engage ses sphères dans des creux laissés entre trois sphères de la couche précédente, le centre d'une sphère de la seconde couche sera, par exemple, au-dessus du point O, au sommet du tétraèdre régulier ayant pour base $CC'C''$; et ceux des sphères de la seconde couche tangentes à celle-là se trouveront au-dessus des centres des triangles orientés comme $CC'C''$ et ayant avec lui, en commun, un sommet, mais non un côté (car les trois triangles contigus suivant un côté à $CC'C''$ affectent l'orientation ou disposition inverse et auraient leurs milieux occupés par la projection des tronçons de *tubes de filtration* correspondant à la seconde couche); et ainsi de suite. Les centres des sphères de cette seconde couche seront donc encore rangés en alignements parallèles à $C'C''$ et présenteront toujours dans chaque ligne l'intervalle $2R$ entre deux centres, avec l'espacement $H = R\sqrt{3}$ entre deux lignes; mais les plans parallèles contenant les centres des couches ne seront plus qu'à la distance, chacun du suivant, $H' = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}$, hauteur du tétraèdre régulier ayant la base $CC'C''$. Chaque sphère n'exigera donc que la place rectangulaire $2RHH' = 4R^3\sqrt{2}$ dont son volume est la fraction $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,7405$. Le rapport $1 - \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ du

vide au volume apparent total sera seulement $0,2595$, au lieu de $1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,3954$, dans notre mode par couches parallèles avec files continues, et tandis qu'il s'élève à $1 - \frac{\pi}{6} = 0,4764$, presque au double, dans le mode le plus régulier, par files rectangulaires suivant les trois dimensions avec l'espacement uniforme $2R$, cas où chaque sphère prend tout l'espace $8R^3$ du cube qui lui est circonscrit.

débit par $R^2\sqrt{3}$ pour le rapporter à l'unité d'aire de la surface d'égale charge, on aura donc

$$(45) \quad q = \frac{\rho g I}{60\varepsilon} \frac{\sigma^2}{R^2}.$$

Évaluons-y l'aire σ du triangle évidemment équilatéral tt'' , dont, par raison de symétrie, le centre de gravité coïncide avec celui, O, du triangle $CC'C''$. La distance OB du point O au milieu B de la base $t't''$ est donc le tiers, $\frac{1}{3}h$, de sa hauteur h . Or, on voit qu'elle constitue la différence entre les deux tiers, OC, de la hauteur $R\sqrt{3}$ du grand triangle $CC'C''$, et le rayon $CB = R$ des grains sablonneux. Il vient donc

$$(46) \quad \frac{h}{3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)R; \quad \text{d'où} \quad \sigma = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = R^2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^2 = R^2\sqrt{3}(7 - 4\sqrt{3}).$$

Et la formule (45) du débit, par unité d'aire de la couche filtrante, prend la forme

$$(47) \quad q = \frac{97 - 56\sqrt{3}}{20} \frac{\rho g IR^2}{\varepsilon} \quad (1).$$

Calculons, en passant, l'aire comprise entre le triangle curviligne $AA'A''$ et le triangle rectiligne $tt't''$, c'est-à-dire la perte que nous avons acceptée sur la section vive du tube de filtration. Les trois secteurs circulaires $CA'A''$, $C'A''A$, $C''AA'$ valant ensemble un demi-cercle $\frac{\pi}{2}R^2$, le triangle curviligne est l'excédent du triangle total $R^2\sqrt{3}$ sur ce demi-cercle, soit $R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$; et, d'après la dernière formule (46), le triangle $tt't''$ ou σ en est la fraction $\frac{2\sqrt{3}(7 - 4\sqrt{3})}{2\sqrt{3} - \pi}$, inférieure à l'unité, tous calculs faits, de

$$(48) \quad \frac{12(2 - \sqrt{3}) - \pi}{2\sqrt{3} - \pi} = \frac{3,216 - \pi}{3,468 - \pi} = \frac{0,0744}{0,3264} = \frac{1}{4,521\dots}$$

(1) J'ai exposé deux fois, dans mon cours de la Sorbonne (les 20 février 1894 et 9 février 1901), ce mode approximatif d'évaluation des débits filtrés par des sables d'une grosseur définie.

La réduction effectuée sur la section vive a donc presque atteint les $\frac{2}{9}$ de sa valeur totale.

26. Cherchons enfin le rapport m du vide au volume apparent total, résultant de notre mode régulier de disposition des grains de sable. Pour une couche horizontale de sphères, haute de $2R$, et avec la base $CC'C'' = R^2 \sqrt{3}$, le volume total est $2R^3 \sqrt{3}$, tandis qu'il n'y a de pleins que les trois coins sphériques de 60° , valant ensemble une demi-sphère ou $\frac{2}{3} \pi R^3$. Le rapport $1 - m$ du *plein* au volume apparent total est donc

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi = (0,19244) \pi = 0,6046;$$

et

$$m = 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,3954 \quad (1).$$

Enfin, si l'on divise par m le débit (47) de l'unité d'aire, il vient pour la *vitesse moyenne U de filtration*, évaluée à la manière de Dupuit,

$$(49) \quad U = \frac{97 - 56\sqrt{3}}{20 \left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)} \frac{\rho g R^2}{\varepsilon} I;$$

et la constante μ de Dupuit, inverse du coefficient cherché ou du rapport $\frac{U}{I}$, est finalement, en multipliant *haut et bas* par $97 + 56\sqrt{3}$,

$$(50) \quad \mu = 20 \left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) (97 + 56\sqrt{3}) \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{1}{R^2} = \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{1534,1}{R^2}.$$

Pour l'eau à la température de 10°C. , les expériences de Poiseuille ont donné

$$\frac{\varepsilon}{\rho g} = 0,0000001336.$$

(1) Une autre méthode nous a déjà fait connaître ce résultat, dans la note du n° 24 (p. 35).

Il en résulte, le mètre et la seconde étant toujours les unités,

$$(51) \quad \mu = \frac{0,0002050}{R^2} = \frac{0,00082}{(2R)^2}.$$

Les valeurs extrêmes de μ , 1000 environ et (peut-être) 10000 que paraît indiquer pour le sable l'expérience, correspondent alors aux diamètres $2R = 0^{\text{mm}},9$ et $2R = 0^{\text{mm}},29$ ⁽¹⁾.

Il n'y aurait pas lieu d'être surpris que ces diamètres dussent être, en réalité, un peu moins petits pour fournir les débits admis; car nous avons remarqué déjà que la disposition régulière supposée des grains, en alignant les vides dans le sens du courant, accroît inévitablement le débit dans une proportion notable, ou équivalent, pour un débit donné, à prendre des grains moins gros.

27. Cependant, la réduction compensatrice que nous avons effectuée sur la section vive des tubes de filtration a bien pu, aussi, être suffisante pour rectifier à peu près les résultats, d'autant plus que, déjà, *l'exclusion absolue que nous faisons des parties non prismatiques ou non cylindriques des vides, dans le calcul des débits, nous conduit à évaluer trop bas ceux-ci*. En effet, des accélérations locales, à la traversée des sections rétrécies, permettent au fluide (non sans compliquer beau-

(¹) Je viens d'apprendre l'existence d'une Thèse de doctorat physique (*Sur le passage des liquides à travers les substances perméables et les couches filtrantes*) soutenue en juillet 1881, devant la Faculté des Sciences de Toulouse, par M. J. Brunhes, professeur au Lycée et à l'École normale de cette ville. Elle contient, entre autres résultats intéressants, une vérification approchée (p. 140) de cette formule (51), en tant que celle-ci indique, pour les sables homogènes, des valeurs de $\frac{1}{\mu}$ (ou des vitesses moyennes de filtration à égalité de pente motrice) proportionnelles aux carrés des dimensions homologues des grains, du moins quand il s'agit de sables à grains de formes moyennement pareilles. L'auteur conclut d'ailleurs une telle parité, de l'observation microscopique des grains et aussi de l'égalité des rapports m du vide au volume apparent total, dans les sables que l'on compare.

Pour deux variétés à grains un peu arrondis (ou ayant leurs pointes et arêtes émoussées), dans lesquelles on avait $2R = 0^{\text{mm}},466$ chez l'une et $0^{\text{mm}},345$ chez l'autre, le rapport des vitesses moyennes trouvées (I étant commun) fut 1,782, tandis que le carré de celui des diamètres était 1,824, nombre assez voisin, comme on voit.

coup son mouvement) d'utiliser, dans une certaine mesure, pour hâter son passage, les élargissements intermédiaires (1).

Dupuit, au Chapitre VIII, concernant justement la filtration, de ses *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les*

(1) La Thèse de M. Brunhes me paraît fournir des exemples pouvant confirmer ces prévisions, ou de nature à montrer, ce qui revient à peu près au même, que notre formule théorique (47) serait susceptible de donner des débits q de filtration, $\frac{m}{\mu} I$, avec

$$\frac{m}{\mu} = \frac{97 - 56\sqrt{3}}{20} \frac{\rho g R^2}{\varepsilon},$$

approximativement justes, *bien plus approchés même qu'on n'aurait pu le croire.*

Prenons, par exemple, dans le Tableau de la page 135, la première observation concernant le sable appelé (4-6), savoir, celui de la note ci-contre (p. 38) où l'on avait $2R = 0^{\text{mm}}, 466$, pris, ainsi que l'eau qui y filtrait, à la température (réduite) de 20°C . Je suis porté à penser, pour une raison donnée plus loin, que cette observation serait, non pas de celles que décrit le n° 63 de la Thèse (p. 54) où toute la colonne liquide en mouvement est contenue dans un tube unique, mais de celles dont le dispositif est indiqué au n° 64 (p. 53), c'est-à-dire analogues aux expériences décrites dans les n°s 68 à 70 et figure 6 (p. 57 à 60 et 78).

La couche de sable, haute ou épaisse de $0^{\text{cm}}, 971 \times 59,5 = 57^{\text{cm}}, 77$, y aurait occupé la majeure partie du manchon vertical en verre représenté à la page 52 (*fig. 5*) et dont les sections droites circulaires σ , surfaces d'égale charge, étaient de $2^{\text{cm}}, 95$ de diamètre, ou avaient l'aire $\sigma = (1^{\text{cm}}, 475)^2 \pi = 6^{\text{cm}^2}, 835$. Ce manchon, fermé à sa base inférieure par un grillage maintenant le sable, aurait été raccordé supérieurement (p. 51, *fig. 4*) avec un tube cylindrique vertical en verre, divisé de bas en haut, par une graduation, en tronçons de 1^{cm^3} de capacité et de $0^{\text{cm}}, 971$ de longueur, tout l'appareil étant plein d'eau jusqu'aux divisions respectives 97, au commencement des observations, 94, à la fin, et se trouvant immergé dans un réservoir d'eau à 20° , dont le niveau *fixe* atteignait la division (ou fraction de division) 55,3. L'écoulement se produisait donc (en $51,45$ secondes) sous la charge moyenne $95,5 - 55,3 = 40,2$ divisions.

L'épaisseur de la colonne de sable étant de $59,5$ divisions, la pente motrice I était ainsi $\frac{40,2}{59,5}$ et, le débit total par seconde, $\frac{3^{\text{cm}^3}}{51,45}$, valeur de $\frac{m}{\mu} I \sigma$. Il en résultait donc, en prenant le centimètre pour unité provisoire,

$$\frac{m}{\mu} = \frac{3}{51,45} \times \frac{59,5}{40,2} \times \frac{1}{6,835} = 0,01263.$$

Introduisons le mètre comme unité, en divisant par 100^3 pour évaluer le débit en mètres cubes, mais en multipliant par 100^2 pour avoir sa valeur à travers 1^{m^2} et non à travers 1^{cm^2} . Nous aurons ainsi pour ce sable, pris à 20° et où $2R = 0,000466$, la valeur

canaux découverts et à travers les terrains perméables (2^e édition; Paris, 1863), cite en premier lieu (p. 232) les expériences de Darcy sur un sable grossier, surtout peu homogène, où l'observation avait donné : d'une part, $m = 0,38$, ce qui revient sensiblement à la valeur

expérimentale définitive du coefficient cherché,

$$\frac{m}{\mu} = 0,0001263,$$

en admettant, bien entendu, que les conditions de l'expérience aient été celles supposées ci-dessus.

D'autre part, l'expression théorique (47) de q revient à poser

$$\frac{m}{\mu} = \frac{97 - 56\sqrt{3}}{20} \frac{\rho g}{\varepsilon} R^2 = \frac{1}{20(97 + 56\sqrt{3})} \frac{\rho g}{\varepsilon} R^2,$$

où il reste à faire $R = 0,000233$ et $\frac{\rho g}{\varepsilon} = \frac{1,2966}{0,000001336}$, vu que la formule empirique de Poiseuille exprimant les résultats de ses observations à diverses températures, fournit pour l'eau le rapport 1,2966, entre les deux valeurs de ε à 10° et à 20°. Il vient alors, tous calculs faits,

$$\frac{m}{\mu} = 0,0001358,$$

valeur théorique excédant seulement de sa fraction $\frac{1}{14,3}$ la valeur expérimentale supposée 0,0001263.

Si, au lieu de considérer le coefficient $\frac{m}{\mu}$ des débits, on calculait par la formule (51) le coefficient $\frac{1}{\mu}$ de la vitesse moyenne, sa valeur théorique, qui est $\frac{(2R)^2}{0,00082}$ à 10°, serait encore moins en excès sur la vraie que celle de $\frac{m}{\mu}$, parce qu'elle a été déduite de cette dernière en supposant $m = 0,3954$ dans la division de $\frac{m}{\mu}$ par m , tandis que l'observation donne des valeurs effectives de m sensiblement moindres, comme, par exemple, d'après Darcy et Dupuit (*voir* ci-après la suite du n° 27), 0,38 pour un gros sable, et bien moins, jusqu'à 0,30, pour un sable fin assez tassé. Donc, grâce au diviseur trop fort $m = 0,3954$, la valeur théorique de $\frac{1}{\mu}$ se trouve rapetissée par rapport à celle de $\frac{m}{\mu}$; et l'on obtiendrait évidemment, ici, sa valeur expérimentale exacte 0,0001263 (calculée dans l'hypothèse du n° 64 de la Thèse), si l'on prenait

$$m = (0,3954) \left(1 - \frac{1}{14,3} \right) = 0,3677 \text{ ou environ } 0,37.$$

Ainsi, pour un sable de grosseur médiocre, la valeur théorique de $\frac{1}{\mu}$ devrait se confondre

admise ici 0,3954; et, d'autre part,

$$q = (0,0003)I.$$

Or, pour définir, quant à la grosseur ou à la finesse des grains, la composition de ce sable, Darcy constata que, passé successivement à travers trois cribles dont les orifices avaient les diamètres respectifs

$$0^{\text{mm}},77, \quad 1^{\text{mm}},10, \quad 2^{\text{mm}},$$

il les traversait dans les proportions suivantes :

$$0,58, \quad 0,13, \quad 0,12$$

sensiblement avec sa valeur effective. Voilà, *peut-être*, pourquoi notre formule (51) paraîtra presque exacte, dans l'application que nous en ferons ci-après à un sable, d'ailleurs hétérogène, de Darcy.

Mais, revenant à notre exemple tiré de la Thèse de M. Brunhes, examinons maintenant l'hypothèse, que nous avons écartée, du dispositif indiqué au n° 63 (p. 54), consistant à admettre que le manchon de verre n'y figurait pas et que le sable occupait simplement les 59,5 divisions inférieures du tube gradué. Alors la section droite σ du cylindre de sable aurait valu $\frac{1^{\text{cm}^3}}{0^{\text{cm}},971}$, ou se serait réduite à la fraction

$$\frac{1}{0,971 \times 6,835} = \frac{1}{6,637}$$

de celle du manchon; et le coefficient $\frac{m}{\mu}$ du débit aurait été 6,637 fois plus fort ou aurait eu la valeur

$$0,0001263 \times 6,637 = 0,0008380.$$

Or celle-ci est 6,17 fois plus forte que la valeur théorique 0,0001358, alors que les résultats des expériences de Darcy, cités ci-après, indiqueraient qu'elle doit lui être tout au plus égale.

Il semble donc, à première vue, préférable de rejeter, comme nous l'avons fait, cette seconde hypothèse. M. Brunhes l'a, il est vrai, adoptée (n° 144, p. 137). Mais n'est-il pas possible qu'il y ait eu quelque confusion dans ses Notes, concernant des observations peut-être anciennes déjà au moment où il fit ses calculs? Car il dit (p. 57 et 10) avoir *bien des fois* abandonné, pour des occupations plus urgentes, puis repris (et, sans doute, après des intervalles parfois longs entre les années 1869 et 1881), tant les expériences que les calculs et la rédaction de son travail.

Toutefois, comme l'admission, dont il a été parlé au commencement du n° 27 (p. 38),

dont la somme est les 83 centièmes de la masse totale, et que le reste (0,17) consistait en menu gravier.

Dans ces conditions, il semble évident que le gravier devait se comporter, par rapport au sable qui constituait la matière vraiment filtrante, comme un ensemble d'obstacles ou de parois ayant pour effet de réduire, des 17 centièmes environ, la section utile du milieu ou l'aire des surfaces d'égale charge, les 83 centièmes de celles-ci, qui restaient employés pour la filtration, étant alors censés occupés par des grains sablonneux d'un diamètre à peu près moyen entre ceux des trois variétés de sable (1).

Admettons, faute de données précises, que chaque variété eût, en moyenne, un diamètre inférieur de $0^{\text{mm}},12$ à celui des trous indiqués, les moins grands qui la laissaient passer; ce qui implique aussi, bien entendu, que l'on attribue aux grains la forme *sphérique*, dont ils sont, cependant, assez loin en réalité, du moins individuellement, sinon *en moyenne*.

Le sable, fictivement ramené ainsi à l'homogénéité, aurait donc eu

d'étranglements successifs dans les tubes de filtration, avec accélérations locales correspondantes, rendrait explicables de forts débits dans le genre de ceux auxquels conduit ici la seconde hypothèse, comme, d'autre part, ainsi qu'on le verra ci-après (n° 28), un changement de la disposition des grains revenant à faire croître de 0,3954 à 0,4764, soit environ d'un cinquième, le rapport m du vide au volume apparent total, multiplierait par plus de 13 la vitesse moyenne U calculée à notre manière, vitesse qu'on reconnaît ainsi pouvoir varier dans des limites très larges avec les particularités de structure du milieu filtrant, il ne paraît nullement inadmissible que les conditions des expériences de M. Brunhes aient bien été celles qu'il adopte dans ses calculs et qui y donnent *six* fois plus de vitesse moyenne que ne sembleraient en indiquer, toutes choses égales d'ailleurs, les observations de Darcy.

Concluons en exprimant le vœu qu'un jeune physicien reprenne quelque jour les expériences de M. Brunhes et réussisse à y lever tous les doutes.

(1) Un sable entre les grains duquel des eaux troubles en déposeraient *un autre beaucoup plus fin* y obstruant les interspices, devrait évidemment être traité comme l'est ici le gravier, c'est-à-dire assimilé à un ensemble de parois; et le débit ne serait finalement, dans le sable plus fin resté seul *filtrant*, que ce qui correspondrait au diamètre de ses grains. Peut-être le sable expérimenté par Darcy offrait-il déjà cette circonstance, non seulement pour le petit gravier qui s'y trouvait disséminé, mais encore dans sa partie la plus grossière. C'est ce qu'il faudrait penser, si les nouvelles expériences demandées à la fin de la précédente note confirmaient ce que j'y appelle la *seconde* hypothèse ou faisaient définitivement regarder comme trop petits les débits (47) (p. 36).

le diamètre moyen

$$\frac{0^{\text{mm}},65 \times 58 + 0^{\text{mm}},98 \times 13 + 1^{\text{mm}},88 \times 12}{83} = 0^{\text{mm}},88.$$

Alors la formule (51) ci-dessus donne, pour μ ,

$$\mu = \frac{820}{(0,88)^2} = 1059.$$

D'ailleurs, m étant 0,38 et, la fraction *utilisée* des surfaces d'égale charge, 0,83, il viendra, comme débit théorique par unité d'aire (brute) de la couche sablonneuse,

$$q = (0,83) \frac{m}{\mu} I = (0,83) \frac{0,38}{1059} I = (0,0002979) I,$$

ou, à très peu près, la valeur constatée (0,0003) I (').

(¹) *Calcul pratique du coefficient de filtration pour un sable hétérogène.* — La donnée 0^{mm},12 exprimant ici, dans chacune des trois variétés de sable déterminées par leur passage à travers les divers cribles, l'excédent moyen *supposé* du diamètre des orifices du crible correspondant sur celui des grains, a été visiblement choisie de manière à faire concorder la théorie avec l'expérience; et cette sorte de donnée, bien que n'ayant rien de contradictoire ou d'impossible, est jusqu'à un certain point arbitraire, dépourvue même de probabilité, en ce sens que l'excédent moyen en question ne doit pas être pareil pour les trois variétés de sable. Il serait donc préférable d'éviter la considération d'un tel excédent, purement fictif. Or voici une manière assez plausible de le faire et, en même temps, d'asseoir sur la base la plus large possible le calcul pratique du coefficient de filtration, dans ce cas d'un sable hétérogène impossible à traiter autrement que par analogie, avec appel au sentiment de la continuité.

Observons que, par unité de pente motrice I, la vitesse moyenne de filtration à *travers un sable homogène* est l'inverse $\frac{1}{\mu}$, proportionnel, d'après (51), à $(2R)^2$. Il est, dès lors, naturel de faire ici, dans l'évaluation de la vitesse moyenne générale U à *travers notre sable hétérogène*, entrer ou figurer les grains de chaque grosseur, en proportion non seulement de leur abondance, c'est-à-dire de leur poids relatif dans le milieu, mais aussi du carré de leur diamètre 2R. Quant au mode de répartition des grains suivant leur grosseur, dans chacune des trois variétés, et à la valeur qui en résulte pour le carré moyen du diamètre, l'hypothèse la plus simple à adopter sera que ce carré moyen y soit approximativement la moyenne arithmétique des carrés des deux diamètres extrêmes propres à la variété considérée.

Si donc R₀ désigne le rayon des grains les plus petits qui se trouvent (en poids sensible ou un peu notable) dans le milieu, nous aurons comme carrés moyens approchés

Dupuit prend ensuite (p. 233) un autre exemple, savoir les couches de sable fin, et plus homogène, habituellement employées comme

des diamètres chez les trois variétés respectives, en prenant le millimètre pour unité dans la mesure de ces diamètres,

$$\frac{(2R_0)^2 + 0,77^2}{2}, \quad \frac{0,77^2 + 1,1^2}{2}, \quad \frac{1,1^2 + 2^2}{2}.$$

La formule (51) propre à un sable homogène s'écrira dès lors

$$(\alpha) \quad \frac{1}{\mu} = \frac{(2R)^2}{820};$$

et il viendra (en mètres) pour notre sable hétérogène, comme valeur définitive ou moyenne générale de la vitesse de filtration par unité de pente motrice,

$$(\beta) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{820} \left[\frac{58}{83} \left(2R_0^2 + \frac{0,77^2}{2} \right) + \frac{13}{83} \frac{0,77^2 + 1,1^2}{2} + \frac{12}{83} \frac{1,1^2 + 2^2}{2} \right] \\ = \frac{1}{820} \frac{1}{166} (0,77^2 \times 71 + 1,1^2 \times 25 + 2^2 \times 12 + 232R_0^2) \\ = \frac{1}{820} (0,7250 + 1,398R_0^2) = (0,0008841)(1 + 1,928R_0^2). \end{cases}$$

Enfin, le débit q par unité d'aire (brute) d'une surface d'égale charge, calculé comme dans le texte, sera

$$(\gamma) \quad q = (0,83)(0,38)(0,0008841)(1 + 1,928R_0^2)I = (0,0002789)(1 + 1,928R_0^2)I.$$

Estimons *au sentiment*, en raison de sa faible importance, le diamètre minimum $2R_0$ à introduire ici, et qui doit être celui des grains d'un poids assez notable de sable : prenons-le égal environ au diamètre ordinaire des grains d'un sable un peu fin, soit la moitié du diamètre maximum 0,77 de la première variété, ou 0,4 en nombre rond; ce qui y réduit, en volume, les petits grains au huitième seulement des gros. Faisons donc simplement $R_0 = 0,2$. La formule (γ) sera dès lors

$$q = (0,0002789)(1,07712)I = (0,0003004)I,$$

valeur revenant bien à celle de l'observation, (0,0003)I.

Si l'on négligeait R_0^2 , il viendrait, par (γ), $q = (0,00028)I$ environ, résultat encore approché.

Le quatrième membre de la formule (β), comparé au second membre de (α), montre que le sable hétérogène expérimenté équivaut, pour la vitesse moyenne de filtration, à un sable homogène où le diamètre uniforme des grains serait

$$(\delta) \quad \begin{cases} 2R = \sqrt{0,7250 + 1,398R_0^2} = (0,8515)\sqrt{1 + 1,928R_0^2} \\ = (\text{environ})(0,8515)(1 + 0,964R_0^2), \end{cases}$$

ou, en faisant $R_0 = 0,2$,

$$2R = (0,8515)(1,038) = 0,884.$$

C'est bien la valeur moyenne 0^{mm},88 obtenue dans le texte.

filtres, et pour lesquelles il emprunte à l'observation, d'une part, la valeur $m = 0,30$, assez peu supérieure à celle ($0,2595$) que nous avons obtenue ⁽¹⁾ pour un ensemble de sphères égales le mieux tassées possible, d'autre part, des débits par unité d'aire qui le conduisent à poser

$$\mu = 5760.$$

Or, alors, notre formule (51) donne comme diamètre $2R$ des grains, en y prenant pour unité le millimètre,

$$2R = \sqrt{\frac{820}{5760}} = 0,3773,$$

ou environ $0^{\text{mm}},38$, valeur qui n'a peut-être rien d'in vraisemblable quand il s'agit de sable un peu fin ⁽²⁾.

⁽¹⁾ A la note de la page 35.

⁽²⁾ Si cependant ce diamètre paraissait exagéré pour les sables dont il s'agit, il y aurait lieu d'observer que les menus grains doivent avoir été, en général, plus soulevés par les eaux ou moins *roulés* sur le sol que les gros et être restés, par conséquent, plus anguleux que ceux-ci. Or, certaines expériences relatées dans la Thèse de M. Brunhes, par exemple, à la page 135, sur le sable reconnu ainsi anguleux qu'il appelle (8-10) et où l'on avait $2R = 0^{\text{mm}},27$ (à en juger par les tamis que traversaient ces grains), tendent à montrer que les débits y étaient, comparativement au sable (4-6) à grains mieux arrondis et où $2R = 0^{\text{mm}},466$, plus forts d'environ *un cinquième*, à égalité de pente motrice et de diamètre $2R$; ce qui conduirait, pour obtenir des débits pareils, à réduire ces diamètres d'un dixième à peu près.

On a vu d'ailleurs, au commencement du n° 27 (p. 38), que nos débits théoriques peuvent très bien se trouver inférieurs aux débits réels. Mais n'est-il pas possible aussi que des grains plus éloignés de la forme sphérique traversent plus facilement, à volume égal, les orifices d'un tamis donné, en présentant à ceux-ci leur section diamétrale *minima*, et soient ainsi *notés* comme étant d'un volume ou d'une dimension moyenne moindres que les vrais? Alors les débits de filtration pourraient encore y être sensiblement proportionnels aux *carrés* de ces dimensions *moyennes*, ou aux aires de leur section diamétrale *moyenne*, tout en décroissant cependant moins vite que leur section diamétrale *minima*, de plus en plus différente (relativement) de la section moyenne à mesure que la forme des grains s'éloigne de la figure sphérique.

Les débits n'y varieraient donc pas dans d'aussi grands rapports que les sections minima ou que les carrés des dimensions de celles-ci.

Il est évident que l'hypothèse de grains non sphériques complique infiniment la question et y introduit une multitude d'inconnues, à moins qu'on ne se borne à des résultats *moyens* pour lesquels on admettra, *en gros*, une neutralisation mutuelle des écarts individuels d'avec la forme sphérique.

Revenons à la réduction d'un dixième, réelle ou apparente, à effectuer comme il vient

28. Reconnaissons, en terminant, combien plus grandes seraient les vitesses moyennes obtenues U de filtration, si l'on supposait réalisée, dans chaque couche plane de nos grains sphériques normale au courant et pour les files continues de grains qui la composent, la disposition la plus simple, celle qui y ferait chaque grain tangent à quatre autres disposés *en croix* (et non plus tangent à six), c'est-à-dire qui les y alignerait en files suivant deux sens rectangulaires, avec espacement uniforme $2R$ des grains dans chaque sens.

Alors, le carré $CC'C''C''' = 4R^2$ (fig. 2) ayant pour sommets les

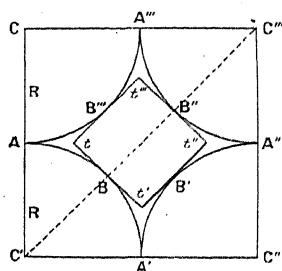


Fig. 2.

centres de quatre sphères de la couche, contiendrait les projections de quatre quarts de ces sphères et de celles d'autres couches, plus le carré curviligne évidé $AA'A''A'''$, d'aire dès lors égale à $(4 - \pi)R^2$, section vive d'un tube de filtration.

On réduirait celle-ci, par analogie avec la manière dont on a opéré dans le cas de la figure 1 (p. 34) et en compensation de l'alignement fictif des creux, au carré rectiligne $tt't''t'''$ compris entre les tangentes respectives menées aux milieux B, B', B'', B''' des quatre arcs $AA', A'A'',$

d'être dit sur notre résultat théorique $2R = 0,3773$. A elle seule, cette réduction serait peut-être insuffisante. Mais il en sera autrement, si elle ne fait qu'en compléter une autre tout aussi grande. Or c'est ce qui aura lieu en introduisant dans la question, pour le rapport m des vides au volume apparent total, une détermination *très précise*, $m = 0,370$, faite par M. Brunhes (p. 139 de la thèse) sur son sable (8-10) *réellement fin*, où $2R$ était $0^{\text{mm}},27$ seulement. Car, avec $m = 0,37$ au lieu de $0,3$, Dupuit aurait (eu égard aux débits constatés des filtres) multiplié par le rapport de $0,37$ à $0,3$ sa valeur 5760 de μ , ou pris $\mu = 7104$. Et la formule (51) aurait donné alors $2R = 0,3397$, valeur que la réduction d'un dixième, ou de $0,0340$, aurait abaissée à $0,3057$, c'est-à-dire, sensiblement, à $0^{\text{mm}},3$.

$A''A'''$, $A'''A$. La médiane BB'' de ce carré valant dès lors $C'C''' = 2R$, ou $2R(\sqrt{2} - 1)$, son aire σ serait $4R^2(3 - 2\sqrt{2})$ ⁽¹⁾; et le débit du tube, $kK\sigma^2$ ou $k\frac{\rho g I}{\varepsilon}\sigma^2$, divisé par $4R^2$ pour le rapporter à l'unité d'aire de la surface d'égale charge, donnerait, avec la valeur de $4k$,

$$4k = 4(0,03514) = 0,1406 \text{ environ,}$$

qui convient au carré,

$$(52) \quad q = (0,1406)(17 - 12\sqrt{2})\frac{\rho g I}{\varepsilon}R^2.$$

Or, ici, dans le cube de hauteur $2R$ ayant pour base $CC'C''C'''$, le rapport, $1 - m$, des quatre quarts de sphère qui l'occupent, et qui valent en tout $\frac{4}{3}\pi R^3$, à la capacité totale $8R^3$, est

$$\frac{\pi}{6} = 0,5236;$$

et il vient, par suite, comme rapport, m , de la capacité creuse au volume apparent total,

$$(53) \quad m = 1 - \frac{\pi}{6} = 0,4764.$$

D'où il résulte, en divisant (52) par m , comme vitesse moyenne correspondante, U , du courant de filtration,

$$(54) \quad U = (0,1406) \frac{17 - 12\sqrt{2}}{1 - \frac{\pi}{6}} \frac{\rho g R^2}{\varepsilon} I.$$

(1) Ou la fraction

$$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{0,1716}{0,2146} = 0,7976, \text{ ou environ } \frac{4}{5},$$

de la section vive totale $AA'A''A'''$. La réduction relative, d'environ un cinquième, qu'éprouve la section droite du tube de filtration par le fait de la substitution, au carré curviligne $AA'A''A'''$, du carré rectiligne inscrit, est donc un peu plus faible que la réduction analogue précédente, $\frac{1}{4,521}$, du cas (n° 23, p. 36) où ces figures étaient des triangles équilatéraux.

Quant à la constante de Dupuit μ , inverse du quotient $\frac{U}{I}$, elle serait, en multipliant *haut et bas* par $17 + 12\sqrt{2}$,

$$(55) \quad \mu = \frac{1}{0,1406} \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) (17 + 12\sqrt{2}) \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{1}{R^2} = \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{115,10}{R^2},$$

c'est-à-dire pas même *le treizième* de celle, (50) (p. 37), que nous a donnée l'hypothèse moins simple, mais bien plus voisine de la réalité, de couches *aussi compactes que possible*, dans chacune desquelles toute sphère en touche latéralement *six* autres et non pas seulement *quatre*.

Vu la proportionnalité des vitesses moyennes, dans les tubes, à l'aire σ des sections vives, il était naturel qu'un groupement beaucoup plus *lâche* des grains de sable produisît des courants de filtration bien moins lents. On voit que la vitesse moyenne U de ces courants se trouve multipliée par $\frac{1534,1}{115,1} = 13,33$. Le débit q l'est, en outre, par le rapport des deux valeurs respectives, 0,4764, 0,3954, de m : il devient ainsi 16,06 fois plus grand ⁽¹⁾.

(1) Le présent Mémoire a été résumé dans six Notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris (t. 158, 15 et 22 juin 1914, p. 1743 et 1846; t. 159, 3 et 10 août, 28 septembre et 5 octobre 1914, p. 349, 390, 519 et 534).