ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI VILLAT

Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 31 (1914), p. 455-493
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__455_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA DÉTERMINATION

DES

PROBLÈMES D'HYDRODYNAMIQUE

RELATIFS

A LA RÉSISTANCE DES FLUIDES,

PAR M. HENRI VILLAT.

On sait que, lorsqu'on étudie le mouvement d'un fluide parfait en présence d'obstacles solides, les équations de l'Hydrodynamique pour l'état permanent donnent, si l'on impose partout dans le fluide la continuité des vitesses et des pressions, des solutions inacceptables : la pression obtenue devient généralement infinie négative en quelque endroit, et reste négative dans des régions étendues; on est conduit d'autre part à des paradoxes tels que celui de d'Alembert; et par suite on doit renoncer à la continuité, tant que l'on s'en tient aux fluides parfaits.

L'introduction des surfaces de glissement de Helmholtz a permis de trouver, dans des cas nombreux, des solutions des équations de l'Hydrodynamique échappant à ces difficultés. Je ne ferai pas ici l'énumération des multiples et importants travaux consacrés à ces questions; on trouvera cette énumération dans *l'Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française, *Développements concernant l'Hydrodynamique*, IV, 18, p. 113 et suiv.).

Il était permis d'espérer que cette nouvelle manière d'aborder le problème n'apporterait aucune indétermination; autrement dit, on

pouvait croire que les équations du mouvement permanent d'un fluide irrotationnel en présence d'un obstacle donné avaient une solutiou bien déterminée, pour laquelle les vitesses étaient continues (à l'exception de certaines surfaces de discontinuité) et pour laquelle la pression était partout continue et partout positive. La vitesse du courant fluide à l'infini, et sa pression en un point particulier donné par exemple à l'infini, sont supposées bien entendu connues.

Or il se trouve que la réalité est beaucoup plus complexe. Les équations de l'Hydrodynamique peuvent avoir plus d'une solution de cette nature, et il y a une infinité de cas où il en existe au moins deux, lesquelles sont également acceptables l'une et l'autre, du point de vue physique. Le présent travail a pour but de mettre en évidence un de ces cas, relatif au problème le plus typique de la résistance des fluides : celui d'un courant fluide indéfini rencontrant un obstacle donné.

Dans le Chapitre I nous formons, en utilisant la théorie de M. T. Levi-Cività, une première solution du problème considéré. Les Chapitres suivants sont consacrés à la formation et l'étude d'une seconde solution d'un caractère essentiellement distinct, étude qui permet de conclure à l'existence annoncée d'une seconde solution, aussi valable *a priori* que la première, et relative exactement au même obstacle placé dans le courant fluide.

Ainsi se trouve confirmée une importante prévision de M. J. Boussinesq, qui, dans un Mémoire récent, énonçait comme vraisemblable l'hypothèse que les équations de l'Hydrodynamique relatives au mouvement des fluides, en présence d'obstacles solides, avaient sans doute plus d'une solution satisfaisant à toutes les conditions aux limites imposées par la nature physique de la question.

Des solutions ainsi mises en évidence, rien ne permet, momentanément, de dire laquelle fournit, pour le mouvement véritable qui se produit en réalité, l'approximation la meilleure. Seules sans doute, des considérations de stabilité, ou de viscosité, pourraient permettre de conclure. Cette recherche nécessiterait des progrès importants concernant l'étude du mouvement varié d'un fluide en présence de solides. Et l'existence de plusieurs mouvements permanents, pour une même configuration d'obstacle, n'est pas de nature à simplifier cette étude, sur laquelle je me propose de revenir dans un travail ultérieur.

I.

1. Le cas particulier que nous allons étudier en détail, en vue d'établir le théorème qui a été énoncé plus haut, sera relatif à un courant fluide indéfini, de vitesse horizontale et égale à *un* à l'infini (à gauche) venant rencontrer un obstacle formé de deux lames AB et AC, lesquelles nous supposerons former un angle ouvert, comme l'indique le dessin, l'ouverture regardant le courant. Une fois établi le régime permanent irrotationnel, une ligne de courant venue de l'infini, en amont, vient se diviser en un point O de l'obstacle, pour ensuite entourer celui-ci, et se terminer par les deux lignes de glissement λ_1 et λ_2 qui séparent à l'arrière le sillage du fluide en mouvement. Si l'on

Fig. 1.

suppose que le point O coïncide avec le point A où les deux lames se rejoignent, le problème a déjà été traité, par M. T. Levi-Cività, dans son Mémoire fondamental [*Scie e leggi di resistenza* (*Rendiconti di Palermo*, 1907, I, p. 1)]. Mais, si l'on suppose données les inclinaisons des deux lames sur l'horizontale, les longueurs de ces lames se trouvent déterminées d'une façon unique (à un facteur de proportionnalité près); de sorte que, pour obtenir une solution correspondant à des lames dont le rapport des longueurs soit arbitraire, il faut nécessairement supposer le point O distinct du point A.

Supposons par exemple le point O situé sur la lame AB; prenons ce

point comme origine des coordonnées dans le plan du mouvement, et appliquons intégralement la méthode indiquée par M. T. Levi-Cività.

Désignons par $\alpha - \delta$ et $-\alpha - \delta$ les angles (le premier positif, le second négatif, tous deux de module inférieur à π) que font avec l'horizontale Ox les deux segments AC et AB respectivement. L'ouverture de l'angle étant dirigée du côté du courant, il en résulte qu'on a

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \tag{1}$$

Ceci posé, nous savons que la solution du problème est obtenue par la construction d'une fonction analytique $\omega(\zeta) = \Im + i\tau$ régulière dans le cercle de rayon 1, $|\zeta| \leqq 1$, et dont la partie réelle (qui doit prendre les mêmes valeurs aux points conjugués) soit égale sur la demi-circonférence supérieure $|\zeta| = 1$, à l'angle que fait avec Ox la vitesse du fluide le long des lames aux points correspondants. Si nous désignons par s_0 et s_1 les angles polaires (entre 0 et π) des deux points correspondants sur la circonférence à O et A, on voit tout de suite que la partie réelle en question doit prendre les valeurs suivantes :

$$\Im = \begin{cases} -\alpha - \delta & \text{pour} \quad 0 < s < s_0, \\ -\alpha - \delta + \pi & \text{»} \quad s_0 < s < s_1, \\ \alpha - \delta & \text{»} \quad s_1 < s < \pi. \end{cases}$$

La fonction $\omega(\zeta)$ est dans ces conditions facile à déterminer, sachant de plus qu'elle doit être nulle pour $\zeta = 0$ (*cf.* T. Levi-Civita, *loc. cit.*). On peut la calculer en appliquant la formule que j'ai démontrée (H. Villat, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 256), à savoir

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s)\,\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos s+\zeta^2}\,ds, \tag{2}$$

où $g(s)$ représente une fonction égale aux valeurs constantes qu'on vient d'écrire dans les différents intervalles $0, s_0$; s_0, s_1; s_1, π. Un calcul, que je crois inutile de transcrire ici, nous conduit pour ω à l'expression

suivante

$$(3') \qquad \omega(\zeta) = \frac{i}{\pi}(\delta+\alpha)\left[\log\frac{\zeta - e^{is_0}}{1-\zeta e^{is_0}} + i\pi\right]$$
$$+ \frac{i}{\pi}(\delta+\alpha-\pi)\left[\log\frac{\zeta - e^{is_1}}{1-\zeta e^{is_1}} - \log\frac{\zeta - e^{is_0}}{1-\zeta e^{is_0}}\right]$$
$$+ \frac{i}{\pi}(\alpha-\delta)\log\frac{\zeta - e^{is_1}}{1-\zeta e^{is_1}},$$

dans laquelle la détermination à choisir pour les logarithmes est définie comme il suit : en désignant par p et q les points e^{is} et e^{-is}, et par M le point ζ (*voir* la figure) on a

$$\log\frac{\zeta - e^{is}}{1-\xi e^{is}} = \log\frac{\mathrm{M}p}{\mathrm{M}q} + i(\pi - s - \lambda),$$

λ représente l'angle $p\mathrm{M}q$, supposé égal à π quand M est sur la droite pq dans le cercle.

Il est facile de constater que cette fonction $\omega(\zeta)$ conduit à une solution pour laquelle ne se présente aucune des difficultés signalées

Fig. 2.

par M. M. Brillouin (*Annales de Chimie et de Physique*, 1911). Le long des parois solides, la vitesse, dont nous allons avoir besoin dans un instant, est égale, comme on sait, à e^{τ}, τ désignant le coëfficient de i dans $\omega(e^{is})$, et e^{is} étant le point qui correspond dans le plan ζ au point considéré sur la paroi BAC. Or on trouve sans peine

$$(4) \qquad \pi\tau = -\pi\log\left|\frac{\zeta - e^{-is_0}}{\zeta - e^{is_0}}\right| + (\pi - 2\alpha)\log\left|\frac{\zeta - e^{-is_1}}{\zeta - e^{is_1}}\right|,$$

c'est-à-dire

$$\tau = -\log\frac{\mathrm{M}q_0}{\mathrm{M}p_0} - \frac{2\alpha-\pi}{\pi}\log\frac{\mathrm{M}q_1}{\mathrm{M}p_1}. \tag{5}$$

A cause de l'hypothèse (1) on constate immédiatement que τ est toujours négatif, et par suite que la vitesse sur les parois (et en conséquence dans tout le fluide) est inférieure à sa valeur à l'infini.

2. Déterminons maintenant les longueurs des deux lames AB et AC. En appliquant les formules connues de M. T. Levi-Cività, nous trouvons

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AO} + \mathrm{OA} = 2a^2\int_0^{s_1} e^{-\tau}|\cos s - \cos s_0|\sin s\,ds$$

et de même

$$\mathrm{AC} = 2a^2\int_{s_1}^{\pi} e^{-\tau}(\cos s_0 - \cos s)\sin s\,ds.$$

Or on a évidemment

$$\frac{\mathrm{M}q_0}{\mathrm{M}p_0} = \frac{\sin\dfrac{s+s_0}{2}}{\sin\left|\dfrac{s-s_0}{2}\right|}, \qquad \frac{\mathrm{M}q_1}{\mathrm{M}p_1} = \frac{\sin\dfrac{s+s_1}{2}}{\sin\left|\dfrac{s-s_1}{2}\right|};$$

De là, après quelques simplifications, le résultat que voici :

$$\mathrm{AB} = 4a^2\int_0^{s_1}\sin^2\frac{s_0+s}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{s_1+s}{2}}{\sin\dfrac{s_1-s}{2}}\right)^{\frac{2\alpha-\pi}{\pi}}\sin s\,ds, \tag{6}$$

$$\mathrm{AC} = 4a^2\int_{s_1}^{\pi}\sin^2\frac{s_0+s}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{s_1+s}{2}}{\sin\dfrac{s-s_1}{2}}\right)^{\frac{2\alpha-\pi}{\pi}}\sin s\,ds, \tag{7}$$

et il est bien manifeste que les deux intégrales écrites ont un sens, puisqu'on a

$$0 < \frac{2\alpha-\pi}{\pi} < 1.$$

Ceci posé, nous allons faire voir que, si l'on suppose donnés les

angles α et δ, c'est-à-dire les inclinaisons des deux lames, [avec la condition (1) d'ailleurs] on peut choisir les constantes a, s_0, s_1, de manière que les longueurs AB et AC soient égales à des longueurs données absolument quelconques. Comme a est un simple facteur de proportionnalité, il suffira évidemment de montrer qu'on peut s'arranger pour que le rapport des longueurs $\frac{AB}{AC}$ soit égal à un nombre donné quelconque.

A cet effet, observons d'abord que les trois constantes ci-dessus sont assujetties à diverses conditions : en premier lieu, la condition $\omega(0) = 0$ (qui est impliquée par le fait que la vitesse du fluide est horizontale et égale à 1 à l'infini) impose la relation

$$s_0(-\delta-\alpha)+(s_1-s_0)(-\delta-\alpha+\pi)+(-\delta+\alpha)(\pi-s_1)=0,$$

qu'on peut écrire

$$s_0=\alpha-\delta-\frac{2\alpha-\pi}{\pi}s_1. \tag{8}$$

En second lieu, on doit avoir

$$0<s_0<s_1<\pi.$$

A cause de (8), on peut ne conserver que s_1 qui sera assujetti aux trois inégalités suivantes :

$$s_1>\frac{\pi(\alpha-\delta)}{2\alpha},$$
$$s_1<\frac{\pi(\alpha-\delta)}{2\alpha-\pi},$$
$$s_1<\pi.$$

Et comme on constate de suite que $\frac{\pi(\alpha-\delta)}{2\alpha-\pi}$ est supérieur à π, ceci se réduit aux deux inégalités compatibles

$$\pi>s_1>\frac{\pi(\alpha-\delta)}{2\alpha}. \tag{9}$$

Voyons à quoi correspondent les cas limites.

Pour $s_1=\pi$, on a $s_0=\pi-\alpha-\delta$, et l'on constate immédiatement

que la lame AB a une longueur finie, tandis que le segment AC est de longueur nulle.

Pour $s_1 = \frac{\pi(\alpha - \delta)}{2\alpha}$, on trouve que la valeur correspondante de s_0 est aussi $s_0 = \frac{\pi(\alpha - \delta)}{2\alpha}$, et en transportant ces valeurs dans les expressions ci-dessus de AB et AC, on obtient pour le rapport $\frac{AB}{AC}$ la valeur

$$(10) \qquad \left(\frac{AB}{AC}\right)_1 = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi(\alpha-\delta)}{2\alpha}} \frac{\left(\sin\frac{s_0+s}{2}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}+1}}{\left(\sin\frac{s_0-s}{2}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}} \sin s\, ds}{\displaystyle\int_{\frac{\pi(\alpha-\delta)}{2\alpha}}^{\pi} \frac{\left(\sin\frac{s_0+s}{2}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}+1}}{\left(\sin\frac{s-s_0}{2}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}} \sin s\, ds}.$$

Supposons maintenant que, α et δ restant fixes, nous fassions varier d'une façon continue s_1 depuis $\frac{\pi(\alpha-\delta)}{2\alpha}$ jusqu'à π; s_0, donné par (8), variera aussi d'une façon continue. Il en sera de même des deux longueurs AB et AC données par (6) et (7), ou plutôt des deux termes du rapport $\left(\frac{AB}{AC}\right)$. En effet, on peut écrire

$$\mathcal{F}(s_1) = \int_0^{s_1} \sin^2\frac{s_0+s}{2}\left(\frac{\sin\frac{s_1+s}{2}}{\sin\frac{s_1-s}{2}}\right)^{\frac{2\alpha-\pi}{\pi}} \sin s\, ds = \int_0^{s_1} \frac{\Phi(s, s_1)}{(s_1-s)^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}}\, ds,$$

en désignant par $\Phi(s, s_1)$ une fonction de s et s_1 qui reste finie pour $s = s_1$, et reste en module inférieure à un nombre N dans l'intervalle $s_1 - k$, s_1, dès que k est inférieur à un nombre fixe k_1 choisi une fois pour toutes. Dans ces conditions la contribution de l'intervalle $s_1 - k$, s_1, à l'intégrale $\mathcal{F}(s_1)$ sera inférieure à

$$\frac{M}{2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)} k^{2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)},$$

c'est-à-dire à tout nombre η arbitrairement petit, en choisissant k suffisamment petit. k étant ainsi fixé, envisageons l'expression

$$\mathcal{F}(s_1 + h) - \mathcal{F}(s_1)$$

en y supposant $|h| < \frac{1}{2}k$; et dans la différence, négligeons tout ce qui pourrait provenir de l'intervalle $s_1 - \frac{1}{2}k$, $s_1 + \frac{1}{2}k$; il résulte immédiatement de ce qui précède que les parties négligées ont une somme inférieure en module à 2η; de sorte qu'avec une erreur inférieure à ce maximum, on a

$$\mathcal{F}(s_1 + h) - \mathcal{F}(s_1) = \int_0^{s_1 - \frac{1}{2}k} \left[\frac{\Phi(s, s_1 + h)}{(s_1 + h - s)^{\frac{2\alpha}{\pi} - 1}} - \frac{\Phi(s, s_1)}{(s_1 - s)^{\frac{2\alpha}{\pi} - 1}} \right] ds + 2\rho\eta$$

$$(\text{avec } |\rho| \leqq 1).$$

Mais, k étant fixe, il est clair qu'on peut choisir maintenant $|h|$ suffisamment petit pour que l'intégrale

$$\int_0^{s_1 - \frac{1}{2}k} \left[\frac{\Phi(s, s_1 + h)}{(s_1 + h - s)^{\frac{2\alpha}{\pi} - 1}} - \frac{\Phi(s, s_1)}{(s_1 - s)^{\frac{2\alpha}{\pi} - 1}} \right] ds$$

soit elle-même plus petite que η en valeur absolue; par suite, on aura dans ces conditions

$$|\mathcal{F}(s_1 + h) - \mathcal{F}(s_1)| < 3\eta,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{F}(s_1)$ est une fonction continue de s_1.

Il en résulte immédiatement que, lorsque s_1 varie entre les limites qu'on a dites plus haut, le rapport $\frac{AB}{AC}$ prend toutes les valeurs comprises entre $\left(\frac{AB}{AC}\right)_1$ et $+\infty$.

En répétant des calculs tout à fait semblables aux précédents, mais en supposant que le point de division du courant sur l'obstacle soit situé sur la lame AC, on parvient à montrer de même, en désignant toujours par s_1 l'angle polaire du point de la circonférence $|\zeta| = 1$ qui correspond au point A, que cet angle s_1 est assujetti à varier entre les

limites o et $\pi\frac{\alpha-\delta}{2\alpha}$; à ces valeurs limites correspondent pour le rapport $\frac{AB}{AC}$ les valeurs zéro et $\left(\frac{AB}{AC}\right)_1$; en outre, le rapport $\frac{AB}{AC}$ est une fonction continue de s_1.

De tout ceci résulte enfin qu'en plaçant suivant les cas le point O soit sur AB, soit sur AC, on peut toujours s'arranger pour que le rapport des longueurs des deux lames ait une valeur quelconque donnée *a priori*. En tenant compte de l'arbitraire a, on peut donc toujours s'arranger pour donner aux deux lames deux valeurs arbitrairement données.

II.

3. Nous avons, dans le précédent Chapitre, obtenu une première solution du problème relatif à l'obstacle indiqué. Nous allons maintenant en former une seconde, d'un caractère complètement nouveau. Dans la première solution, le courant fluide, après s'être divisé au point O, où la vitesse était nulle, contournait complètement le bord de l'obstacle, le long de OB d'une part, et le long de OAC d'autre part (dans le premier cas envisagé, par exemple). La vitesse toujours plus petite que 1, devenait de nouveau nulle d'ailleurs au point A, où sa

Fig. 3.

direction changeait en même temps de sens. Or il est tout aussi légitime, et tout aussi acceptable *a priori* du point de vue physique, de supposer qu'il se forme, dans le creux avoisinant le point A, une plage de fluide mort sur laquelle le courant vienne glisser, de la même

manière qu'il glisse le long du sillage arrière. Le courant venu de l'amont se divise alors au point O, où la vitesse s'annule (sur AB par exemple). La ligne de courant qui arrive en O se divise alors en : une portion qui suit la paroi OB et va constituer ensuite la ligne de jet λ_2 qui limite d'un côté le sillage aval; et une autre portion qui suit un morceau OD de la lame AB, s'en détache tangentiellement pour constituer la ligne de glissement λ qui limite la plage de fluide mort, arrive en E tangentiellement à AC, et suit le segment EC pour venir ensuite former la seconde limite λ_1 du sillage. Sur ces deux portions, la grandeur et la direction de la vitesse varient toutes deux d'une façon continue.

A cause des équations générales de l'Hydrodynamique, on établit de suite que la vitesse, le long de chaque ligne de glissement, est constante. Nous désignerons par 1 sa valeur sur λ_1 et λ_2 (c'est la vitesse du fluide à l'infini) et par v_1 la vitesse le long de λ. La solution à édifier ne sera d'ailleurs valable que si $v_1 \leqq 1$, condition nécessaire, mais non suffisante, comme on le verra plus loin.

L'entrée en matière de ce problème se fera suivant une marche déjà bien connue (*cf.* par exemple H. VILLAT, *Annales de l'École Normale*, 1912, p. 127-197) en considérant le plan du mouvement xOy (Ox parallèle à la vitesse à l'infini en amont, et de même sens) comme le plan d'une variable $z = x + iy$, et en introduisant la fonction $f = \varphi + i\psi$, où φ et ψ représentent le potentiel et la fonction de courant, supposés nuls en O. Le domaine fluide mobile dans le plan xOy est représenté dans le plan f, sur tout ce plan limité par les deux bords d'une coupure le long du demi-axe $O\varphi$. De ce domaine on passera à l'aire intérieur à un rectangle, par les transformations suivantes, que je me contente d'énoncer, et qu'on pourrait vérifier comme je l'ai fait dans un travail antérieur (*cf.* le Mémoire cité, *supra*, p. 133). On posera successivement

$$f = t^2, \tag{11}$$

puis

$$Z_1 = \int_\infty^t \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} = \int_\infty^t \frac{dt}{\sqrt{F(t)}}, \tag{12}$$

les points $t = a, b, c, d$ $(a < b < c < d)$ correspondant aux points B, D, E, C, respectivement. De là on tire

$$(13) \qquad t = \frac{1}{2}\,\frac{p'(Z_1 \mid \omega'_1, \omega'_3) - p'(\gamma \mid \omega'_1, \omega'_3)}{p(Z_1 \mid \omega'_1, \omega'_3) - p(\gamma \mid \omega'_1, \omega'_3)} + \frac{S_1}{4}$$

en désignant par ω'_1 et ω'_3 les demi-périodes (la première réelle, la seconde imaginaire pure, avec $\omega'_1 > 0$, $\frac{\omega'_3}{i} > 0$, ce qu'on a le droit de supposer) des fonctions elliptiques introduites; elles sont fournies par les égalités

$$(14) \qquad \begin{cases} \omega'_1 = \displaystyle\int_d^a \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} = \int_c^b \frac{dt}{\sqrt{F(t)}}, \\ \omega'_3 = \displaystyle\int_b^a \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} = -\int_d^c \frac{dt}{\sqrt{F(t)}}. \end{cases}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 représentent les fonctions symétriques élémentaires des quatre nombres a, b, c, d. Enfin γ est un argument répondant aux deux égalités concordantes

$$(15) \qquad \begin{cases} p\gamma = \dfrac{S_1^2}{16} - \dfrac{S_2}{6}, \\ p'\gamma = -\dfrac{S_3}{4} + \dfrac{S_1 S_2}{8} - \dfrac{S_1^3}{32}. \end{cases}$$

On verra un peu plus loin qu'on peut choisir pour γ une valeur réelle, et même comprise entre 0 et $2\omega'_1$.

Je rappelle (*cf.* Appell et Lacour, *Fonctions elliptiques*, p. 256) que les invariants g'_2 et g'_3, des fonctions elliptiques en question, sont donnés par les formules

$$(16) \qquad \begin{cases} g'_2 = S_4 - \dfrac{S_1 S_3}{4} + \dfrac{S_2^2}{12}, \\ g'_3 = \dfrac{S_2 S_4}{6} + \dfrac{S_1 S_2 S_3}{48} - \dfrac{S_2^2}{36} - \dfrac{S_3^2}{16} - \dfrac{S_1^2 S_4}{16}, \end{cases}$$

équivalentes au fond aux formules (14).

Enfin, la transformation

$$Z_1 = \frac{\omega'_3}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1 \tag{17}$$

fera correspondre au rectangle l'aire d'une demi-couronne circulaire dans le demi-plan positif Z. Les parois ϖ_1 et ϖ_2 correspondent à la demi-circonférence $|Z| = 1$, la paroi ϖ', à la demi-circonférence $|Z| = q$, le nombre q, inférieur à 1, étant défini par

$$q = e^{-i\frac{\pi\omega'_1}{\omega'_3}}. \tag{18}$$

Les lignes de glissement λ_1 et λ_2 correspondent au segment rectiligne q, 1 de l'axe réel; la ligne λ, au segment -1, $-q$. Le point $Z = j$ qui correspond sur q, 1, à la séparation entre λ_1 et λ_2, est

$$j = q\, e^{i\frac{\pi\gamma}{2\omega'_3}}. \tag{19}$$

4. De la donnée des quatre nombres a, b, c, d, il est clair qu'on pourra tirer les quatre quantités ω'_1 ω'_3, γ, S_1. Inversement, d'ailleurs, la connaissance de ces quatre derniers permet évidemment de calculer les racines du polynome $F(t)$, au moyen des relations (13) et (17); elle entraîne aussi la connaissance des invariants g'_2 et g'_3. Mais les nombres ω'_1, ω'_3, γ, S_1 ne sont pas quelconques : il est en effet indispensable qu'ils correspondent à quatre racines a, b, c, d réelles. On sait qu'il est pour cela nécessaire et suffisant (*cf.* par exemple, Appell et Lacour, *loc. cit.*) que le discriminant soit positif (ce qui est le cas si les périodes ont été choisies, l'une réelle, l'autre imaginaire pure, comme on l'a déjà dit) et qu'on ait les deux inégalités

$$p\gamma > 0,$$
$$p''\gamma > 0.$$

Or ces inégalités entraînent que γ soit un nombre réel, à un multiple près des périodes. On peut donc prendre γ réel, et même entre 0 et ω'_1, ce que nous supposerons dorénavant.

Ceci posé, la relation (19) fera connaître le point j; et le point e^{is_0}, qui correspond au point O dans le plan Z, sera déterminé par la condi-

tion que f soit nul en ce point. Ceci donnera

$$(20)\qquad 0 = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left[\frac{\omega'_3}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1\right] - \wp'\gamma}{\wp\left[\frac{\omega'_3}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1\right] - \wp\gamma} + \frac{S_1}{4},$$

formule qu'on peut écrire

$$\frac{S_1}{4} + \zeta\left(\frac{\omega'_3}{\pi}s_0 + \frac{\gamma}{2} + \omega'_1\right) - \zeta\left(\frac{\omega'_3}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1\right) - \zeta\gamma = 0,$$

ou bien

$$(21)\qquad S_1 = 4\left[\zeta\gamma - \zeta_1\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\omega'_3}{\pi}s_0\right) - \zeta_1\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\omega'_3}{\pi}s_0\right)\right].$$

Sous cette forme, il est clair que S_1 est réel, comme cela se doit, pour s_0 compris entre o et π. D'ailleurs on voit facilement que, si s_0 croît de o à π, S_1 donné par cette formule décroît de

$$4\left[\zeta\gamma - 2\zeta_1\frac{\gamma}{2}\right]$$

à

$$4\left[\zeta\gamma - 2\zeta_2\frac{\gamma}{2}\right].$$

Nous devons donc supposer nécessairement S_1 entre ces deux limites, pour qu'on puisse remonter de la figure du plan Z, à la configuration du plan f, et ensuite du plan z. A toute valeur de S_1 vérifiant ces conditions, correspond une valeur unique de s_0 dans l'intervalle 0π, et inversement.

De tout ceci résulte que, si l'on se donne les quantités ω'_1, ω'_3, γ et s_0 (ω'_1 réel, ω'_3 imaginaire pure, γ réel, s_0 entre o et π) cette donnée équivaudra exactement à celle des nombres a, b, c, d, qui caractérisaient le mouvement dans le plan f.

5. Désignons maintenant par α et δ les mêmes angles que dans le premier Chapitre, définissant les inclinaisons des deux lames AB et AC sur l'axe Ox, et posons, en désignant par (u, v) la vitesse d'un

élément fluide,

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\Omega} = u - iv, \tag{22}$$

$$\Omega = \Theta + i\mathrm{T}. \tag{23}$$

On voit, d'après cela, qu'en un point du fluide, la vitesse est

$$\mathrm{V} = e^{\mathrm{T}}, \tag{24}$$

et qu'elle fait avec Ox l'angle Θ. Il en résulte que la fonction $\Omega(z)$, qu'on peut envisager comme une fonction de Z, évidemment régulière dans le domaine envisagé dans ce plan, doit satisfaire aux conditions suivantes.

La partie réelle devra prendre :

Pour $\mathrm{Z} = e^{is}$ avec $0 < s < s_0$, la valeur $-\alpha - \delta$;
Pour $\mathrm{Z} = e^{is}$ avec $s_0 < s < \pi$, la valeur $\pi - \alpha - \delta$;
Pour $\mathrm{Z} = q.e^{is}$ avec $0 < s < \pi$, la valeur $\alpha - \delta$.

La partie imaginaire T devra être nulle pour Z réel compris dans l'intervalle q, 1; et prendre, dans l'intervalle -1, $-q$, la valeur constante $\log_e v_1$. Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$\mathrm{a} = -\log_e v_1, \tag{25}$$

a désignant alors une quantité essentiellement positive, comme on le verra dans un instant.

L'existence et la formation d'une pareille fonction $\Omega(z)$ ont été étudiées par moi-même dans un Mémoire [*Sur la résolution de certaines équations intégrales, et sur quelques problèmes qui s'y rattachent* (*Acta mathematica*, 1915)] dans le cas, plus général, où les valeurs de Θ ou de T sur les frontières respectives ont des valeurs données quelconques et non plus constantes. Il est ici facile d'obtenir directement la solution pour le cas particulier qui nous occupe.

$\Omega(z)$ désignant la fonction cherchée, considérons dans la demi-couronne la fonction

$$\Omega_1(z) = \Omega(z) + \frac{\mathrm{a}}{\pi}\log\mathrm{Z} = \Theta_1 + i\mathrm{T}_1, \tag{26}$$

en prenant pour $\log Z$ la détermination qui est réelle pour Z réel positif. On constate immédiatement que T_1 est nulle sur les segments -1, $-q$; q, 1, de l'axe réel; et par conséquent cette fonction $\Omega_1(z)$ est prolongeable analytiquement par symétrie dans la demi-couronne symétrique de la première par rapport à l'axe réel. Cette fonction $\Omega_1(z)$ est par suite fournie par une formule générale que j'ai démontrée antérieurement [H. VILLAT, *Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire* (*Circolo mat. di Palermo*, 1912)]. Des résultats que j'ai obtenus en cet endroit il résulte qu'il faut introduire deux demi-périodes ω_1 et ω_3 (qu'on peut prendre réelle et imaginaire pure respectivement), définies à un facteur près par l'égalité

$$q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}. \tag{27}$$

Par suite de l'égalité (18) on voit qu'on pourra toujours prendre le facteur arbitraire en question, de manière à avoir

$$\begin{cases} \omega'_1 = i\omega_1, \\ \omega'_1 = \dfrac{\omega_3}{i}. \end{cases} \tag{28}$$

Nous supposerons dans toute la suite qu'il en est ainsi.

La partie réelle Θ_1 de Ω_1 devra, d'après ce qui précède, assumer les valeurs suivantes :

Pour $Z = e^{is}$ avec $0 < s < s_0$, la valeur $-\alpha - \delta$;
Pour $Z = e^{is}$ avec $s_0 < s < \pi$, la valeur $\pi - \alpha - \delta$;
Pour $Z = q.e^{is}$ avec $0 < s < \pi$, la valeur $\alpha - \delta - a\dfrac{\omega_3}{i\omega_1}$,

et les valeurs égales aux précédentes aux points symétriques par rapport à OX.

Pour que la fonction $\Omega_1(z)$ existe, nous devons (*cf.* H. VILLAT, *loc. cit.*) imposer, entre les constantes précédentes, la relation

$$s_0(-\alpha - \delta) + (\pi - s_0)(\pi - \alpha - \delta) = \pi\left(\alpha - \delta - a\frac{\omega_3}{i\omega_1}\right)$$

ou bien

$$\pi - 2\alpha - s_0 + a\frac{\omega_3}{i\omega_1} = 0. \tag{29}$$

C'est cette équation qui déterminera a, c'est-à-dire la vitesse v_1 sur la ligne λ, quand tous les autres éléments seront donnés; cette vitesse est donc déterminée d'une façon unique et nécessaire.

Cela étant, on aura (*loc. cit.*) pour l'expression suivante

$$(30)\quad \Omega_1(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\left\{\int_0^{s_0}(-\alpha-\delta)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)d\varepsilon\right.$$
$$+\int_{s_0}^{2\pi-s_0}(\pi-\alpha-\delta)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)d\varepsilon$$
$$+\int_{2\pi-s_0}^{2\pi}(-\alpha-\delta)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)d\varepsilon$$
$$\left.-\int_0^{2\pi}\left(\alpha-\delta-a\frac{\omega_3}{i\omega_1}\right)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)d\varepsilon\right\}.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$(31)\quad \Omega_1(z) = i\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)} + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0\log Z + \pi - \alpha - \delta$$

et, par suite,

$$(32)\quad \Omega(z) = i\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\,\middle|\,\omega_1\omega_3\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\log Z + \pi - \alpha - \delta.$$

Cette équation définit une fonction de Z uniforme et régulière dans la demi-couronne. LogZ, comme on l'a dit plus haut, possède ici la détermination qui est nulle pour $Z = 1$; quant à la détermination choisie pour

$$\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)},$$

c'est celle qui est égale à $i\pi$ pour $Z = 1$, et qu'on suit par continuité.

Tous ces résultats seraient d'ailleurs faciles à vérifier *a posteriori*.

6. Il s'agit maintenant de savoir si la solution qu'on va édifier au moyen de cette fonction $\Omega(z)$ sera valable.

D'après la formule (22), on placera les éléments de la figure dans le plan z, par l'intégration de la différentielle

$$dz = e^{i\Omega}\,df = 2\,e^{i\Omega}\,t\,dt = 2\,e^{i\Omega}\,t\sqrt{F(t)}\,dZ_1, \tag{33}$$

laquelle, en observant que le radical $\sqrt{F(t)}$ a pour valeur

$$\sqrt{F(t)} = \wp(Z_1) - \wp(Z_1 + \gamma),$$

se met facilement sous la forme

$$\begin{aligned} dz = 2\,e^{i\Omega} &\left\{ \frac{S_1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(\frac{\omega'_3}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1 \,\middle|\, \omega'_1\,\omega'_3\right) - \wp'(\gamma \mid \omega'_1\,\omega'_3)}{\wp\left(\frac{\omega'_3}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1 \,\middle|\, \omega'_1\,\omega'_3\right) - \wp(\gamma \mid \omega'_1\,\omega'_3)} \right\} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\wp\left(\frac{\omega'_3}{i\omega}\log Z - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1 \,\middle|\, \omega'_1\,\omega'_3\right) \\ &- \wp\left(\frac{\omega'_3}{i\pi}\log Z + \frac{\gamma}{2} + \omega'_1 \,\middle|\, \omega'_1\,\omega'_3\right) \end{aligned} \right\} \frac{\omega'_3}{i\pi}\,\frac{dZ}{Z}. \end{aligned} \tag{34}$$

Il y a d'ailleurs évidemment lieu, puisque $\Omega(z)$ est exprimée au moyen de fonctions elliptiques aux demi-périodes ω_1 et ω_3, d'exprimer aussi au moyen de ces demi-périodes les fonctions elliptiques qui figurent dans cette dernière formule avec les demi-périodes ω'_1 et ω'_3. Or on a, en vertu de (28),

$$\wp(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = \wp(u \mid -i\omega_3, i\omega_1) = \wp(u \mid i\omega_1, i\omega_3)$$

et, en vertu des formules connues d'homogénéité, il en résulte

$$\wp(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = -\,\wp\left(\frac{u}{i} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)$$

et de même

$$\wp'(u \mid \omega'_1, \omega'_3) = \quad i\wp'\left(\frac{u}{i} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right).$$

De sorte qu'on peut écrire, en ne conservant que les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$,

que nous nous dispenserons désormais d'énoncer explicitement,

$$(35)\qquad dz = 2e^{i\Omega(z)}\left\{\frac{S_1}{4} + \frac{i}{2}\,\frac{\wp'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - \wp'\left(\frac{\gamma}{i}\right)}{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - \wp\left(\frac{\gamma}{i}\right)}\right\}$$
$$\times\left\{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right)\right\}\frac{\omega_1}{\pi}\,\frac{dZ}{Z}.$$

Dans cette formule, S_1 devra être remplacé par sa valeur (21) au moyen des paramètres s_0, γ, ω_1, ω_3.

7. Ceci posé, la pression dans le fluide est donnée par l'équation d'Euler

$$(36)\qquad p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2),$$

où p_0 est la pression (positive quelconque) à l'infini. Pour que la solution puisse être acceptable, il faudra que p ne devienne nulle part négatif, et par suite que l'on assujettisse V à ne dépasser nulle part l'unité, si l'on veut que la solution soit générale. Comme $V = e^T$, T ne devra acquérir nulle part de valeur positive. Ceci impose notamment que l'on ait, comme on l'a déjà indiqué plus haut,

$$(37)\qquad a > 0.$$

Comme T est dans la demi-couronne une fonction harmonique de X et Y, régulière dans le domaine, il suffira, pour assurer le signe de cette fonction, de faire en sorte qu'elle ne devienne pas positive sur les frontières.

Ceci ne sera d'ailleurs pas suffisant. Il faudra encore s'assurer que la configuration du plan z, résultant de l'application de la formule (35), répond bien à la figure 3 quant à la disposition des lignes λ_1, λ_2, λ. λ_1 et λ_2 doivent ne pas se couper, de manière que le sillage arrière soit d'un seul tenant; ceci sera assuré si ces lignes sont convexes partout vers le fluide du mouvement, ce qui revient à dire que l'angle Θ de la vitesse avec Ox aille en décroissant quand on parcourt λ_1

depuis le point C jusqu'à l'infini, et en croissant quand on parcourt λ_2 depuis B jusqu'à l'infini. Quant à la ligne de glissement λ, il faudra qu'elle soit située tout entière dans l'angle BAC, *en avant* des deux lames.

Les conditions précédentes, qui sont évidemment nécessaires et suffisantes, pour que la solution soit acceptable, vont nous imposer, entre les constantes introduites, quelques relations nouvelles.

Commençons par traiter ce qui concerne les lignes libres.

On décrit les lignes λ_1 et λ_2, en partant du point C pour arriver au point B après être passé par le point à l'infini, quand Z varie en restant réel, et en croissant de $+q$ à $+1$. Dans ces conditions, voyons si l'angle Θ décroît constamment. Comme Ω est réelle dans l'intervalle en question, on a alors $\Theta(z) = \Omega(z)$; c'est une fonction de Z dont la dérivée, ainsi qu'on s'en assure aisément, a le signe de l'expression

$$(38)\quad U(z) = \omega_1\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right] + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a.$$

Cette expression elle-même reste continue dans tout l'intervalle et a pour dérivée

$$U'(z) = -\frac{\omega_1^2}{i\pi Z}\left[\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right],$$

qui garde un signe constant pour les valeurs de Z considérées. Θ sera donc toujours décroissant si les valeurs extrêmes de U(Z) sont négatives. Ces valeurs sont

$$(39)\qquad U(q) = -2\omega_1\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a$$

et

$$(40)\qquad U(1) = -2\omega_1\zeta\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a.$$

Si maintenant on observe que la différence $U(q) - U(1)$ peut s'écrire successivement

$$U(q) - U(1) = 2\omega_1\left(\zeta\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)$$

$$= 2\omega_1\left[\zeta\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_3\right) + \eta_3\right] = \frac{-\omega_1\wp'\frac{\omega_1}{\pi}s_0}{\wp\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - e_3},$$

et qu'elle est par suite positive, il en résulte que la forme des deux lignes λ_1 et λ_2 sera assurée si l'on a l'inégalité

$$(41) \qquad -2\omega_1\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}s_0+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0-\mathrm{a}\leqq 0.$$

Considérons ensuite la ligne λ que l'on obtient, du point D au point E, lorsque Z réel croît de -1 à $-q$. On a alors

$$\log Z=\log\rho+i\pi$$

en désignant par ρ le module de Z; et $\Omega(z)$ devient

$$i\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho-\frac{\omega_1}{\pi}s_0+\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho+\frac{\omega_1}{\pi}s_0+\omega_1\right)}+\left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0-\frac{\mathrm{a}}{\pi}\right)(\log\rho+i\pi)+\pi-\alpha-\delta.$$

L'angle Θ de la tangente à λ, avec Ox, est la partie réelle de cette expression. Mais on sait que

$$\sigma(u+\omega_1)=e^{\eta_1 u}\sigma\omega_1\sigma_1 u;$$

de sorte qu'en remplaçant et réduisant il vient pour Ω la valeur

$$i\log\frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho-\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho+\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}-2i\frac{\eta_1\omega_1}{\pi}s_0+\left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0-\frac{\mathrm{a}}{\pi}\right)(\log\rho+i\pi)+\pi-\alpha-\delta.$$

On constate en passant que le coefficient de i est bien $-\mathrm{a}$; et la valeur de Θ est

$$(42) \quad \Theta(\rho)=i\log\frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho-\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho+\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}+\left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0-\frac{\mathrm{a}}{\pi}\right)\log\rho+\pi-\alpha-\delta.$$

Écrivons donc que cet angle décroît constamment lorsque ρ croît; alors nous serons assurés que λ tourne sa convexité vers le point A, et qu'elle est entièrement en avant des deux lames. On voit sans peine

que $\frac{d\Theta}{d\rho}$ a le signe de la fonction

$$(43)\quad U_1(\rho)=\omega_1\left[\zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho-\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)-\zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho+\frac{\omega_1}{i\pi}s_0\right)\right]+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0-a,$$

et que cette fonction est continue et varie constamment dans le même sens. Ses valeurs aux limites sont, par un calcul facile,

$$(44)\qquad U_1(q)=-2\omega_1\zeta_2\frac{\omega_1}{\pi}s_0+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0-a$$

et

$$(45)\qquad U_1(1)=-2\omega_1\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0-a.$$

Il suffira que ces deux nombres soient tous les deux négatifs. Or la différence

$$\begin{aligned}U_1(1)-U_1(q)&=2\omega_1\left(\zeta_2\frac{\omega_1}{\pi}s_0-\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\\&=\omega_1\left(\frac{\wp'\frac{\omega_1}{\pi}s_0}{\wp\frac{\omega_1}{\pi}s_0-e_2}-\frac{\wp'\frac{\omega_1}{\pi}s_0}{\wp\frac{\omega_1}{\pi}s_0-e_1}\right)\\&=\omega_1\frac{(e_2-e_1)\wp'\frac{\omega_1}{\pi}s_0}{\left(\wp\frac{\omega_1}{\pi}s_0-e_1\right)\left(\wp\frac{\omega_1}{\pi}s_0-e_2\right)}\end{aligned}$$

est visiblement positive, de sorte qu'il reste l'unique condition

$$(46)\qquad U_1(1)\leqq 0.$$

D'ailleurs, si l'on forme encore la différence $U(q)-U_1(1)$, on voit qu'elle est égale à

$$U(q)-U_1(1)=2\omega_1\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0-\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)=\omega_1\frac{(e_1-e_3)\wp'\frac{\omega_1}{\pi}s_0}{\left(\wp\frac{\omega_1}{\pi}s_0-e_1\right)\left(\wp\frac{\omega_1}{\pi}s_0-e_3\right)},$$

et qu'elle est négative. En conséquence, les deux conditions (41)

et (46) seront remplacées par la condition unique

$$(47)\qquad U_1(1) = -2\omega_1\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a \leqq 0.$$

8. Voyons maintenant ce qui concerne les vitesses. Sur les deux segments de l'axe OX qui bordent le domaine du plan Z, on a vu que T était égal à o ou à $-a$. Il n'y a donc à s'occuper que des demi-circonférences.

Pour $Z = e^{is}$, on a immédiatement

$$(48)\qquad \Omega(e^{is}) = i\log\frac{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)is + \pi - \alpha - \delta.$$

On constate sans peine que le logarithme qui y figure a pour partie imaginaire $i\pi$ lorsque s est compris entre o et s_0, et zéro lorsque s est compris entre s_0 et π; de sorte que l'on retrouve bien, pour partie réelle, $-\alpha-\delta$ dans le premier cas, et $\pi-\alpha-\delta$ dans le second. Quant au coefficient de i, il est égal à

$$(49)\qquad F_1(s) = \log\left|\frac{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0)}\right| + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)s.$$

Cette fonction de s est discontinue seulement pour $s = s_0$, valeur pour laquelle elle devient égale à $-\infty$. Ses deux premières dérivées sont

$$\frac{dF_1}{ds} = \frac{\omega_1}{\pi}\left[\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0) - \zeta\frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0)\right] + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}$$

et

$$\frac{d^2F_1}{ds^2} = -\frac{\omega_1^2}{\pi^2}\left[\wp\frac{\omega_1}{\pi}(s-s_0) - \wp\frac{\omega_1}{\pi}(s+s_0)\right].$$

Cette dernière est évidemment toujours négative, car elle ne s'annule pas à l'intérieur de l'intervalle o, π, et elle devient négative sans changer de signe pour $s = s_0$. La dérivée première est donc décrois-

sante; pour $s = 0$, sa valeur est

$$-\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta\,\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi} = \frac{1}{\pi}U(1) < 0$$

et pour $s = \pi$,

$$-\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi} = \frac{1}{\pi}U_1(1) \leqq 0,$$

ce qu'il était du reste facile de prévoir à cause des calculs du paragraphe précédent.

On voit donc que, d'après les conditions déjà écrites, $F_1(s)$ sera décroissant dans l'intervalle $0, s_0$; il y sera donc négatif, puisque sa valeur initiale est nulle. Mais dans l'intervalle s_0, π, $F_1(s)$ partira de $-\infty$, passera par un maximum, pour revenir à la valeur (négative) $-a$. Imposons alors la condition

$$(50) \qquad -2\omega_1\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a = 0.$$

Alors le maximum en question sera atteint pour $s = \pi$; il sera égal à $-a$, et par suite on sera certain que $F_1(s)$ reste constamment négatif. On voit de plus que, dans ces circonstances, la vitesse, nulle au point O dans le plan z, ira en croissant de 0 à 1 le long de OB, et en croissant également, de 0 à e^{-a}, le long de OD.

Reste à envisager la paroi ϖ, qui correspond à $Z = q.e^{is}$ $(0 < s < \pi)$. Pour une telle valeur de Z, Ω devient

$$i\log\frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) + \omega_3\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0) + \omega_3\right]} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\left(is - \frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}\right) + \pi - \alpha - \delta$$

ou bien (*cf.* Tannery et Molk, XII, 3)

$$i\log\frac{\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)}{\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\left(is - \frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}\right) + \pi - \alpha - \delta - 2i\frac{\omega_1\eta_3}{\pi}s_0.$$

La partie réelle, à cause de la relation connue

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2}, \tag{51}$$

se réduit à $\alpha - \delta$, comme on le constate en passant; et le coefficient de i devient

$$F_2(s) = \log \frac{\sigma_3 \frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)}{\sigma_3 \frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)} + \left(\frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}\right) s. \tag{52}$$

Or, on voit sans peine que cette expression varie constamment en décroissant, $\frac{dF_2}{ds}$ variant elle-même en croissant de

$$-\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi} = \frac{1}{\pi} U(q) < 0$$

à

$$-\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi} = \frac{1}{\pi} U_1(q) < 0.$$

Il en résulte que, sur la paroi EC, la vitesse du fluide va en croissant constamment depuis e^{-a} jusqu'à 1.

9. Observons ici le sens physique de la condition (50) rencontrée ci-dessus. Je vais faire voir que cette condition exprime que le rayon de courbure de la ligne de glissement λ est infini au point D où elle se détache de la paroi AB. En effet, d'après l'égalité (22), le long d'une ligne de glissement, l'arc est égal à

$$|dz| = e^{-T} \left|\frac{df}{dZ}\right| \times |dZ|,$$

et le rayon de courbure, à

$$\mathcal{R} = \left|\frac{dz}{d\Theta}\right| = e^{-T} \left|\frac{\frac{df}{dZ}}{\frac{d\Theta}{dZ}}\right|. \tag{53}$$

Or si l'on se rapporte à l'expression de $\frac{df}{dZ}$, tirée de (33) et (34), on constate que, lorsque Z réel tend vers -1, chaque facteur reste fini et

non nul, à l'exception du facteur

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right)$$

qui tend vers zéro. En outre, la dérivée $\frac{d^2 f}{dZ^2}$ ne s'annule pas en ce point; cela résulte facilement de ce que la différence

$$\wp'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - \wp'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right)$$

ne s'y annule pas : elle devient en effet

$$2\wp'\left(\frac{\gamma}{2i} + \omega_1 - \omega_3\right),$$

quantité qui ne serait nulle que pour γ égal à une période

$$2\eta\omega'_1 + 2\eta\omega'_3;$$

mais alors $\wp(\gamma \mid \omega'_1\omega'_3)$ serait infini, et nous devons évidemment supposer le contraire.

Un calcul analogue s'applique lorsque Z réel tend vers l'un quelconque des nombres $-q$, $+q$, $+1$. De sorte que si pour l'une des valeurs -1, $-q$, $+q$, $+1$, de Z, $\frac{d\Theta}{dZ}$ ne s'annule pas, le rayon de courbure de la ligne de jet correspondante sera nul au point de raccord avec la paroi fixe. Ce sera le cas pour λ_1 et λ_2, aux points C et B, et pour λ au point E. Pour ces trois points, en effet, $\frac{d\Theta}{dZ}$ devient proportionnel aux trois nombres $U(q)$, $U(1)$, $U_1(q)$ respectivement; et ces trois nombres sont tous différents de zéro.

Au contraire, la condition (50) entraîne

$$\left(\frac{d\Theta}{dZ}\right)_{Z=-1} = 0$$

et l'on a en outre sur l'équation (42),

$$\frac{d^2\Theta}{dZ^2} = \frac{d^2\Theta}{d\rho^2} = -\frac{1}{\pi\rho^2}\left\{\omega_1\left[\zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right] + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - \mathrm{a}\right\}$$
$$+ \frac{\omega_1^2}{i\pi^2\rho^2}\left\{-\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_1\right) + \wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}s_3 + \omega_1\right)\right\}$$

et l'on voit tout de suite que cette quantité s'annule aussi pour $\rho = 1$, ce qui correspond à $Z = 1$.

Le rayon de courbure au départ de la ligne de jet λ, en D, est donc infini, comme nous voulions le prouver; ceci est d'ailleurs bien conforme à la nature physique de la question.

10. Tout ceci étant acquis, il reste encore, pour placer l'obstacle dans le courant, à écrire, ce que nous n'avons pas encore fait, que la vitesse à l'infini est parallèle à l'axe des x du plan z, ce qui assurera aux deux lames AB et AC les inclinaisons requises. Il faut donc exprimer que Θ est nul pour $Z = J = qe^{\frac{i\pi\gamma}{2\omega_1}} = q.e^{\frac{\pi\gamma}{2\omega_1}}$. On a ainsi la condition

$$(54)\quad i\log\frac{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{\mathrm{a}}{\pi}\right)\left(-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\pi\gamma}{2\omega_1}\right) + \pi - \alpha - \delta = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire, après quelques transformations,

$$(55)\quad i\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma_3\left(\frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} - s_0 + \mathrm{a}\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1}\left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - \mathrm{a}\right) + \pi - \alpha - \delta = 0.$$

En considérant par exemple la formule (54), précisons, ce qui est essentiel, la détermination du logarithme qui figure dans le premier

terme. Ce logarithme provient de l'expression

$$\log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)},$$

à laquelle nous avons attribué la détermination égale à $i\pi$ pour $Z = 1$. Faisons alors varier Z sur l'axe réel, depuis le point 1 jusqu'au point q en passant par le point j; les imaginaires

$$u_1 = \frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0$$

et

$$u_2 = \frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0$$

décrivent deux segments de droites verticales, à partir de l'axe réel, ces segments étant situés dans le second et le premier quadrant respectivement, et étant en outre symétriques par rapport à l'axe imaginaire. Le point σu_1 part d'une position initiale placée sur l'axe réel (côté négatif), et, si Z décroît de 1 à q, il reste toujours du même côté de l'axe réel, sans traverser jamais l'axe des quantités imaginaires, puisque σu_1 ne redevient ni réel, ni imaginaire pure. Le point σu_2 part d'un point de l'axe réel (côté positif) et décrit la courbe symétrique de la précédente par rapport à l'axe imaginaire. Il faut maintenant s'assurer si les courbes décrites par les points σu_1 et σu_2 sont au-dessus ou au-dessous de l'axe réel. En considérant par exemple σu_2, lorsque Z arrive à la valeur q, u_2 prend la valeur $\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_3$ à laquelle correspond pour σu_2 la valeur

$$\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_3\right) = e^{\eta_3 \frac{\omega_1}{\pi}s_0}\,\sigma\omega_3\,\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}s_0$$

(*cf*, Tannery et Molk, XII, 3). Or (*Ibid.*, t. I, p. 201) la quantité $\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}s_0$ est positive, ainsi que $\frac{1}{i}\sigma\omega_3$; de sorte qu'on peut écrire, m^2 désignant un nombre positif,

$$\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_3\right) = m^2\, e^{i\frac{\pi}{2} + \eta_3\frac{\omega_1}{\pi}s_0}.$$

L'argument de cette imaginaire est

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{i\pi}\eta_3\omega_1 s_0 \tag{56}$$

ou bien

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{s_0}{\pi}\right) + \frac{s_0}{\pi}\eta_1\frac{\omega_3}{i},$$

en utilisant (51), la valeur de cet argument nous permettra de placer avec sûreté la position finale des points σu_2 et σu_1, et par suite nous apprendra si les chemins décrits par ces deux points sont au-dessus ou au-dessous de l'axe réel. Nous utiliserons cette remarque un peu plus loin.

Comme le coefficient de i dans l'imaginaire $\log\frac{\sigma u_1}{\sigma u_2}$ est égal à la différence des arguments des points σu_1 et σu_2, cette différence devant être égale à π pour $Z = 1$, on peut prendre en ce point l'argument de σu_1 égal à π, et celui de σu_2 égal à zéro; et l'on en conclut immédiatement que la détermination qui convient pour l'imaginaire pure

$$\log\frac{\sigma\left(\omega_2 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$

sera celle dont le coefficient de i est compris entre o et π dans le cas où les points σu_1 et σu_2 se placent au-dessus de l'axe réel, entre π et 2π dans le cas contraire. Dans le premier cas, le premier terme de l'équation (54) sera négatif entre o et $-\pi$; dans le second cas, négatif entre $-\pi$ et -2π.

11. En résumé, il résulte de tout ce qui précède, que la solution actuelle du problème est tout entière construite au moyen de l'introduction des sept constantes ω_1, ω_3, γ, s_0, a, α, δ, entre lesquelles il existe les conditions d'inégalité et d'égalité suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} a < o, \\ o < s_0 < \pi \\ o < \gamma < \frac{2\omega_3}{i}, \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \\ o < \alpha \pm \delta < \pi; \end{array}\right. \tag{57}$$

$$\pi - 2\alpha - s_0 + \mathrm{a}\frac{\omega_3}{i\omega_1} = 0; \tag{58}$$

$$-2\omega_1\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + 2\frac{\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - \mathrm{a} = 0; \tag{59}$$

$$i\log\frac{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_2}{\pi}s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - \mathrm{a}\right)\left(-\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1}\right) + \pi - \alpha - \delta = 0. \tag{60}$$

Si l'on se donne la grandeur et l'inclinaison des deux lames AB et AC, il faudra joindre à ces relations deux égalités exprimant que les longueurs AB et AC sont données. Ces deux relations, que je n'écris pas ici, jointes à (58), (59), (60), permettront de déterminer les cinq constantes ω_1, ω_3, γ, s_0, a, encore inconnues. (α et δ sont parmi les données.)

Toute la question revient donc à démontrer, en fin de compte, que les précédentes conditions sont compatibles. Pour parvenir à ce résultat, au lieu de nous donner les longueurs et les inclinaisons des deux lames, nous remplacerons la donnée des deux longueurs, par celle des deux demi-périodes ω_1 et ω_3. Nous en déduirons, au moyen des équations indiquées, les quantités a, s_0 et γ. Les longueurs des lames se calculeront ensuite par l'application de la formule (35) intégrée le long des frontières du domaine du plan Z; et aucune difficulté ni impossibilité quelconque ne pourra apparaître dans ce dernier calcul.

Supposons donc connus les nombres α, δ, ω_1, ω_3; et montrons qu'on peut ensuite obtenir les inconnues a, s_0, γ, satisfaisant à toutes les conditions imposées (en admettant bien entendu que α et δ satisfassent elles-mêmes aux conditions déjà écrites).

Si nous posons

$$\mathrm{u} = \frac{\omega_1}{\pi}s_0, \qquad \mathrm{v} = \frac{\mathrm{a}}{2\omega_2},$$

les équations (58) et (59) s'écrivent immédiatement

$$\mathrm{v} = -\zeta_1\mathrm{u} + \frac{\eta_1}{\omega_1}\mathrm{u}, \tag{61}$$

$$\mathrm{v} = \frac{i}{2\omega_3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\mathrm{u} + 2\alpha - \pi\right) \tag{62}$$

et l'on doit avoir

$$0 < \mathfrak{u} < \omega_1, \qquad \mathfrak{v} > 0.$$

La fonction $-\zeta_1 \mathfrak{u} + \frac{\eta_1}{\omega_1}\mathfrak{u}$ est facile à construire dans l'intervalle $0, \omega_1$ pour $\mathfrak{u}$. Elle croît constamment, de 0 à $+\infty$, cela résulte de ce que sa dérivée, $\frac{\eta_1}{\omega_1} + \wp(\mathfrak{u} + \omega_1)$, est manisfestement elle-même croissante, à partir d'une valeur initiale

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} + e_1,$$

valeur qui est positive, puisqu'elle est égale à

$$\frac{\pi^2}{2\omega_1^2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right)$$

(*cf.* Tannery et Molk, XXX, 1). Dans le plan $\mathfrak{u}O\mathfrak{v}$, la fonction

$$-\zeta_1 \mathfrak{u} + \frac{\eta_1}{\omega_1}\mathfrak{u}$$

est donc représentée par la courbe Γ de la figure 4. On peut alors traduire les deux égalités (61) et (62) par la construction géométrique suivante :

On prendra sur l'axe $O\mathfrak{v}$ un point P dont l'ordonnée, positive, soit

Fig. 4.

égale à la quantité $\frac{i}{2\omega_3}(2\alpha - \pi)$; par ce point on mènera une droite D de coefficient angulaire $\frac{i\pi}{2\omega_1\omega_3}$, puis on prendra le point d'intersection M

de cette droite D avec la courbe Γ. Les coordonnées $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, du point d'intersection dont l'existence est manifeste, et qui est unique, comme on s'en assure facilement, fournissent la solution des équations (61) et (62). On en déduit immédiatement les nombres s_0 et a, le premier entre o et π, le second positif, répondant aux équations (58) et (59).

Reste maintenant à obtenir γ, au moyen de l'équation (60).

A cet effet, observons que, d'après les calculs du paragraphe 7, la fonction de Z,

$$i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_3 - \frac{a}{\pi}\right)\log Z + \pi - \alpha - \delta,$$

quand Z réel varie de q à 1, varie de $\alpha - \delta$ à $-\alpha - \delta$, en décroissant constamment. Par suite, en posant $Z = q.e^{\frac{\pi\gamma}{2\omega_1}}$ lorsque γ varie de o à $\frac{2\omega_3}{i}$, la fonction de γ,

$$i \log \frac{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a\right)\left(-\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1}\right)$$

décroît de $2\alpha - \pi$ à $-\pi$. Elle prend donc une fois et une seule la valeur $-\pi + \alpha + \delta$, puisque celle-ci est comprise entre les deux limites précédentes, d'après les hypothèses faites sur α et δ. Donc, dans l'intervalle o, $\frac{2\omega_3}{i}$, l'équation (60) admet une solution et une seule par rapport à l'inconnue γ.

Ceci démontre par conséquent la proposition énoncée : la solution des équations (58), (59), (60) existe et est même unique dans les conditions imposées.

12. Si l'on veut maintenant effectuer pratiquement le calcul d'un système de solutions de ces équations, pour y parvenir plus aisément, le mieux est, en modifiant légèrement la marche qu'on vient d'indiquer, de se donner à l'avance des valeurs convenablement choisies,

de ω_1 ω_3, s_0, γ; on en déduit ensuite a, α, δ. Il ne sera pas inutile d'indiquer ici explicitement la marche du calcul dans un cas précis.

Nous nous placerons, pour fixer les idées, dans l'hypothèse

$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{i} = \pi. \tag{63}$$

Cette hypothèse entraîne (*cf.* HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 281)

$$\eta_1 \omega_1 = \frac{\pi}{4}.$$

On en conclut donc

$$\eta_1 = \frac{1}{4} \tag{64}$$

et, par suite,

$$\eta_3 = -\frac{i}{4}.$$

On a en outre

$$q = e^{-\pi} = 0,04321\ldots, \tag{65}$$

d'où facilement, en ne conservant partout que cinq décimales,

$$\begin{aligned} q^{\frac{1}{4}} &= 0,45592\ldots, \\ q^{\frac{3}{2}} &= 0,00898\ldots, \\ q^2 &= 0,00186\ldots, \\ q^3 &= 0,00008\ldots, \\ q^4 &= 0,00000\ldots; \end{aligned}$$

les puissances suivantes de q sont toutes négligeables à ce degré d'approximation.

Faisons maintenant

$$s_0 = \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = u = \frac{\pi}{2}. \tag{66}$$

Nous aurons, pour calculer a, l'équation

$$a = -2\omega_1 \left[\zeta_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\eta_1}{\pi}\frac{\pi}{2} \right].$$

Or on a (TANNERY et MOLK, CVI, 2)

$$\zeta_1 u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u = -\frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{tang} \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r q^{2r}}{1-q^{2r}} \sin \frac{r\pi u}{\omega_1},$$

formule valable certainement pour u réel. On en conclut ici

$$\zeta_1 \frac{\pi}{2} - \frac{\eta_1}{2} = -\frac{1}{2} - 2\left[\frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^6}{1-q^6} + \frac{q^{10}}{1-q^{10}} + \ldots\right].$$

Si dans le crochet nous négligeons tous les termes à partir du second, on se rend facilement compte que l'erreur commise est inférieure au nombre

$$2\left[\frac{q^6}{1-q^4} + \frac{2q^{12}}{1-q^8}\right]$$

et est par suite négligeable, au degré d'approximation supposé. Il vient alors

$$\zeta_1 \frac{\pi}{2} - \frac{\eta_1}{2} = -0,50374\ldots$$

et

$$\text{a} = 3,16511\ldots. \tag{67}$$

L'équation (58) nous donnera ensuite, en radiants,

$$\alpha = 2,36795\ldots. \tag{68}$$

Cette valeur de α tombe bien dans les limites prescrites.

Calculons maintenant δ, en choisissant pour γ la valeur

$$\gamma = \pi = \omega_1; \tag{69}$$

il vient dans ces conditions

$$\pi - \alpha + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} s_0 - \text{a}\right)\left(-\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1}\right)$$
$$= 0,77364\ldots + (-2,37972\ldots)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,96350\ldots$$

et, en remplaçant dans la formule (60),

$$(70)\qquad \delta = 1,96350\ldots + i\log\frac{\sigma\left(-\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Précisons la détermination du logarithme qui reste à calculer. Nous sommes ici dans le cas où la valeur finale de la quantité qui a été désignée au paragraphe 10, par σu_2, a pour argument [*cf.* form. (56)]

$$\frac{\pi}{2}+\frac{1}{i\pi}\eta_3\omega_1 s_0 = \frac{3\pi}{8};$$

les courbes dont il a été question à l'endroit rappelé sont donc certainement situées au-dessus de l'axe réel, puisque le point σu_2 se place finalement dans le premier quadrant. Donc la détermination de $i\log\dfrac{\sigma\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{i\pi}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\pi}{2}+\frac{i\pi}{2}\right)}$ devra être comprise entre o et $-\pi$.

Nous la calculerons en utilisant la formule (*cf.* TANNERY et MOLK, CVI, 1)

$$(71)\quad \log\sigma u = \log\frac{2\omega_1}{\pi}+\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}+\log\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}+\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\left(2\sin\frac{r\pi u}{2\omega_1}\right)^2$$

qui est valable comme on sait, pour $u = 2a\omega_1 + 2b\omega_3$, si $|b|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, ce qui est le cas ici, $\left(a=\pm\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4}\right)$. On a donc tout d'abord

$$\log\sigma\left(\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right) = \log 2+\frac{i\pi}{16}+\log\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}\right)$$
$$+\sum_{1}^{\infty}\frac{4q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\sin^2\left(\frac{r\pi}{4}+i\frac{r\pi}{4}\right).$$

Le terme général de la série qui figure dans le second membre a pour module

$$\frac{4q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\left(\sin^2\frac{\pi}{4}\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{4}\right) < \frac{4q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{4};$$

cette dernière quantité, à cause de (65), s'écrit

$$\frac{4q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{4}=\frac{q^{2r}\left(q^{\frac{r}{4}}+q^{-\frac{r}{4}}\right)^2}{r(1-q^{2r})}=\frac{q^{\frac{3r}{2}}\left(1+q^{\frac{r}{2}}\right)^2}{r(1-q^{2r})}<\frac{2q^{\frac{3r}{2}}}{r},$$

comme on s'en assure facilement, dès que r est supérieur ou égal à 1. Si dans la série on s'arrête au rang $r-1$, le module du reste est donc inférieur à

$$\frac{2q^{\frac{3r}{2}}}{r}+\frac{2q^{\frac{3(r+1)}{2}}}{r+1}+\ldots<\frac{2}{r}q^{\frac{3r}{2}}\left(1+2q^{\frac{3}{2}}\right)$$

comme il est aisé de le vérifier. Pour $r=2$, ce reste est donc en module inférieur à $0,00008\ldots\times 1,01796\ldots<0,0001$. En ne conservant alors que le premier terme de la série, il viendra, avec l'approximation admise,

$$(72)\qquad \log\sigma\left(\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)=\log 2+\frac{i\pi}{16}+\log\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$+\frac{2q^2}{1-q^2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

La quantité $\log\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)\right]$ doit être considérée comme égale à sa détermination principale (*cf.* Tannery et Molk, *loc. cit.*, t. III, p. 111), c'est-à-dire à celle dont le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et $+\pi$ $\left(\text{ici évidemment entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$.

On aura de même, avec la même approximation que ci-dessus,

$$(73)\qquad \log\sigma\left(-\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)=\log 2-\frac{i\pi}{16}+\log\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$+\frac{2q^2}{1-q^2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

la même observation s'appliquant au logarithme qui figure au second

membre. On en conclut

$$\log\frac{\sigma\left(-\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{i\pi}{8}+\log\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$-\log\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)\right]-\frac{4iq^2}{1-q^2}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}.$$

Mais on a, en introduisant l'arc tangente compris entre o et $\frac{\pi}{2}$,

$$\log\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\log\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{4}+\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{4}\right)\right]+i\operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\log\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\log\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{4}+\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{4}\right)\right]+i\left[\pi-\operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

puis

$$\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}=\frac{1-q}{2q^{\frac{1}{2}}},$$

en sorte que finalement

$$(74)\qquad i\log\frac{\sigma\left(-\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)}=-\pi+\frac{\pi}{8}+2\operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{4}\right)+2\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1+q}.$$

Maintenant on a

$$\operatorname{th}\frac{\pi}{4}=\frac{1-q^{\frac{1}{2}}}{1+q^{\frac{1}{2}}},$$

en sorte qu'en posant

$$q^{\frac{1}{2}}=\operatorname{tang}\chi\qquad\left(0<\chi<\frac{\pi}{2}\right),$$

on obtient

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\chi.$$

Ce calcul très simple conduit au résultat

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{4}\right) = 0,5760\ldots.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1+q} = 0,0086\ldots.$$

En remplaçant il vient enfin

$$(75)\qquad i\log\frac{\sigma\left(-\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)} = -3,1416+1,5619 = -1,5797\ldots;$$

d'où nous tirons

$$(76)\qquad \delta = 0,3838\ldots.$$

Les angles que font les deux lames avec le courant à l'infini, c'est-à-dire avec l'axe Ox, sont donc, avec une approximation beaucoup supérieure à $\frac{1}{1000}$, et en radiants :

Pour AC,

$$\alpha - \delta = 1,9841\ldots;$$

Pour AB, en valeur absolue,

$$\alpha + \delta = 2,7517\ldots.$$

La valeur de δ trouvée et celles des deux angles qu'on vient d'écrire tombent bien dans les intervalles voulus. La figure correspondante fournit deux lames faisant avec l'axe Ox, l'un en dessus, l'autre en dessous, deux angles égaux à peu près à $113°36'$ et à $157°39'$.

Rien n'empêche maintenant de calculer les longueurs des deux lames; mais ce calcul n'est nullement nécessaire à notre objet. Quelles que soient les longueurs auxquelles on est conduit, nous sommes assurés, d'après les résultats du Chapitre I, de pouvoir trouver une solution du problème de M. Levi-Cività, correspondant à l'obstacle

ainsi constitué. Pour cet obstacle, par conséquent, nous avons édifié deux solutions entièrement différentes, ce que nous voulions prouver.

Ces deux solutions fournissent deux mouvements permanents distincts, relatifs au même obstacle, et satisfaisant tous les deux aux équations générales de l'Hydrodynamique, aux équations d'Euler par exemple. Pour ces deux mouvements, la pression est partout positive, quelle que soit la pression donnée (positive) à l'infini. Rien ne permet de dire laquelle de ces deux solutions, toutes deux acceptables au même titre du point de vue de l'Hydrodynamique, est la meilleure. Seules des considérations tirées de la viscosité, ou de l'étude de la stabilité, pourraient permettre le meilleur choix. C'est là un point sur lequel je me réserve de revenir.

On peut observer ici que, dans l'exemple qui vient d'être traité, les deux solutions conduisent à deux états de vitesses le long des deux lames, assez peu différents : dans la solution de M. Levi-Cività, la vitesse est nulle au point O commun aux deux lames, et elle est petite au voisinage de ce point. Dans la seconde solution, la vitesse le long de la ligne λ est également fort petite, puisqu'elle est égale à $e^{-a} = 0,04125$, environ. Mais c'est là un fait qui n'est pas général, ainsi qu'il est facile de s'en assurer par la considération d'autres cas particuliers. Et cela n'empêche pas, du reste, les deux solutions d'être essentiellement et radicalement distinctes.