

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

V. JAMET

Sur le complexe des moments vectoriels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 31 (1914), p. 431-440

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__431_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'É.N.S.* » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE COMPLEXE DES MOMENTS VECTORIELS;

PAR M. V. JAMET.



Introduction.

Un système de vecteurs étant rapporté à son axe central pris pour axe des z , et les coordonnées étant rectangulaires, si l'on nomme R sa résultante générale, G son moment vectoriel à l'origine des coordonnées, la droite suivant laquelle est dirigé le moment vectoriel au point x, y, z , est représentée par les équations

$$\frac{X-x}{Ry} = \frac{Y-y}{-Rx} = \frac{Z-z}{G},$$

où l'on a désigné les coordonnées courantes par X, Y, Z .

Soit $\frac{G}{R} = k$; si l'on écrit ces équations sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} X = aZ + \alpha, \\ Y = bZ + \beta, \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{aligned} a &= \frac{y}{k}, & \alpha &= x - \frac{yz}{k}, \\ b &= -\frac{x}{k}, & \beta &= y + \frac{zx}{k}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$a\beta - b\alpha = \frac{x^2 + y^2}{k},$$

ou bien

$$(2) \quad a\beta - b\alpha = k(a^2 + b^2).$$

Donc, les droites qui portent les moments vectoriels d'un même

système de vecteurs en tous les points de l'espace forment un complexe défini par l'équation (2).

Nous les appellerons les droites G. Quant au complexe qu'elles forment, on peut l'étudier sous bien des aspects différents. Nous voulons nous occuper spécialement des courbes tracées sur une même surface, et dont toutes les tangentes font partie du complexe. Nous appellerons ces courbes les courbes G. Soient x, y, z , les coordonnées d'un point mobile sur une telle courbe. La tangente en ce point étant représentée par les équations

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

en se reportant aux équations (1) et (2), on trouve

$$\begin{aligned} a &= \frac{dx}{dz}, & b &= \frac{dy}{dz}, \\ \alpha &= x - z \frac{dx}{dz}, & \beta &= y - z \frac{dy}{dz}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(3) \quad (x dy - y dx) dz + k(dx^2 + dy^2) = 0.$$

Telle est l'équation différentielle qui caractérise les courbes G. Imposons-nous la condition suivante : les courbes répondant à l'équation (3) doivent être tracées sur une surface donnée. Si nous désignons par x, y, z , les coordonnées d'un point courant sur la surface ; par p, q , les dérivées partielles, par rapport à x, y , de la fonction z définie par l'équation de la surface, on trouve, pour déterminer les courbes G cherchées, l'équation différentielle

$$(4) \quad (p dx + q dy)(x dy - y dx) + k(dx^2 + dy^2) = 0.$$

On en conclut que par chaque point de la surface passent deux courbes G, situées en entier sur la surface, et l'on peut se demander quelle doit être cette surface pour que ces deux courbes G remplissent sans cesse une condition imposée à l'avance. Si, par exemple, on veut que leurs projections sur le plan des xy soient rectangulaires, ou qu'elles soient elles-mêmes rectangulaires, on est conduit à déter-

miner la surface par une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dont l'intégration n'offre pas de difficulté. Il nous a paru plus intéressant de rechercher à quelle condition les deux courbes G précitées sont sans cesse conjuguées. Le problème se traduit alors par une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont nous effectuons l'intégration. Mais cette intégration nous ayant conduit à adopter deux variables auxiliaires qui sont précisément les paramètres des courbes G, nous avons été conduit à traiter le même problème par une deuxième méthode, que nous publierons ailleurs : elle consiste à chercher à définir directement les courbes G au moyen de leurs paramètres, et présente un intérêt particulier en ce sens qu'elle permet de ramener à des quadratures la recherche des lignes asymptotiques des surfaces qui font l'objet de ce travail.

1. Posons, comme d'habitude,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = t,$$

et rappelons qu'en chaque point de la surface cherchée, les tangentes à nos deux courbes G doivent être dirigées suivant deux diamètres conjugués de la conique, dont la projection sur le plan des xy est représentée par l'équation

$$r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = 1,$$

où l'on a désigné les coordonnées courantes par X, Y, Z, les coordonnées du point considéré sur la surface par x, y, z . Or, les coefficients angulaires λ_1 et λ_2 des tangentes aux projections des courbes G sont les racines de l'équation

$$(p + q\lambda)(\lambda x - y) + k(1 + \lambda^2) = 0$$

déduite de (4) en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par λ , et doivent remplir la condition

$$t\lambda_1\lambda_2 + s(\lambda_1 + \lambda_2) + r = 0.$$

Donc les surfaces cherchées doivent répondre à l'équation aux dérivées partielles

$$t(k - py) - s(px - qy) + r(k + qx) = 0,$$

équivalente à

$$(5) \quad q \frac{\partial}{\partial x}(px + qy) - p \frac{\partial}{\partial y}(px + qy) + k(r + t) = 0,$$

et l'intégration de cette équation sera facilitée par l'emploi des coordonnées polaires ρ , ω , ayant avec x et y les relations

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega,$$

équivalentes à

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega = \text{arc tang } \frac{y}{x}.$$

Nous trouverons, en effet,

$$p = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cos \omega - \frac{\sin \omega}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \omega},$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial \rho} \sin \omega + \frac{\cos \omega}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \omega},$$

$$px + qy = \rho \frac{\partial z}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(px + qy) = \left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \cos \omega - \sin \omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(px + qy) = \left(\rho \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \sin \omega + \cos \omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega},$$

$$q \frac{\partial}{\partial x}(px + qy) - p \frac{\partial}{\partial y}(px + qy) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \right) \frac{\partial z}{\partial \omega} - \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega};$$

et, pour terminer la transformation de l'équation (5), il reste à calculer $r + t$ en fonction de ρ et de ω .

Or, nous trouvons

$$r = \cos \omega \left(\cos \omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{\sin \omega}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega} \right) + \frac{\sin^2 \omega}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ - \frac{\sin \omega}{\rho} \left(\cos \omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega} - \frac{\sin \omega}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} \right) + 2 \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\sin \omega \cos \omega}{\rho^2}$$

ou bien

$$r = \cos^2 \omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega} + \frac{\sin^2 \omega}{\rho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} \\ + \frac{\sin^2 \omega}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{\rho^2} \frac{\partial z}{\partial \omega}.$$

De même

$$t = \sin^2 \omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega} + \frac{\cos^2 \omega}{\rho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} \\ + \frac{\cos^2 \omega}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{\rho^2} \frac{\partial z}{\partial \omega}.$$

Donc

$$r + t = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho}$$

et l'équation (5) devient, après cette transformation,

$$(6) \quad \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial \omega} + k \right) - \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} = 0.$$

2. Notons, avant d'aller plus loin, que cette dernière équation admet l'intégrale

$$z + k[\omega + f(\rho)] = 0,$$

où l'on a désigné par $f(\rho)$ une fonction arbitraire. Cette équation convient à toutes les surfaces hélicoïdes, dont les *hélices-parallèles* ont le même pas, $- 2k\pi$. En transformant l'équation (3) comme il suit :

$$(a) \quad \rho^2 d\omega (dz + k d\omega) + k d\rho^2 = 0,$$

on voit que les courbes G, tracées sur ces surfaces, sont déterminées par l'intégration de l'équation différentielle

$$[-\rho^2 f'(\rho) d\omega + d\rho] d\rho = 0.$$

La solution évidente

$$\rho = \rho_1,$$

où ρ_1 désigne une constante arbitraire, correspond à ces hélices, et l'on trouve l'équation qui définit les courbes conjuguées au moyen d'une quadrature, savoir :

$$\omega = \int \frac{d\rho}{\rho^2 f'(\rho)}.$$

Mais l'intégrale obtenue, ne dépendant que d'une seule fonction arbitraire, ne constitue pas la solution complète de notre problème, et il y a lieu de poursuivre l'intégration de l'équation (5), ou de sa transformée (6).

3. Or, en transformant encore celle-ci comme il suit :

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} (z + k\omega) - \rho^2 \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega} + k \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} = 0,$$

on est conduit à poser

$$\rho = \rho_0 e^\sigma, \quad z + k\omega = ku$$

(ρ_0 désignant une constante), et l'on trouve

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} \frac{\partial u}{\partial \omega} - \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial \omega} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0,$$

puis les deux transformations qui vont suivre vont nous permettre de rattacher notre problème à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} + A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0,$$

dont les coefficients A, B sont assez simples pour qu'on en trouve aisément l'intégrale générale.

4. D'abord, nous poserons

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \mu, \quad \lambda\omega + \mu\sigma - u = \nu;$$

ν désignera la nouvelle fonction à déterminer, λ , μ étant les nouvelles variables indépendantes. Cette transformation est, aux notations près, la transformation classique de Legendre, et l'on connaît, au sujet de cette transformation, les propriétés qui se traduisent par les proportions

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}}{\frac{\partial^2 \nu}{\partial \mu^2}} = - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \sigma}}{\frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda \partial \mu}} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}}{\frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda^2}};$$

ceci nous permet de transformer notre équation (7) en une équation linéaire et homogène par rapport aux dérivées de la fonction connue, savoir :

$$(8) \quad \lambda \frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda^2} + \mu \frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \mu^2} = 0.$$

Puis nous adopterons pour nouvelles variables deux fonctions α , β , de λ et de μ . Supposant v exprimée en fonction de ces deux variables nouvelles, nous trouverons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \lambda^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda \partial \mu} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial \beta}{\partial \mu} + \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \frac{\partial \beta}{\partial \mu} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \lambda \partial \mu}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \beta}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mu^2}. \end{aligned}$$

Si nous voulons que dans l'équation (8), transformée, il n'y ait plus de terme en $\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}$, ni en $\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2}$, nous adopterons, pour fonctions α et β , deux intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$(9) \quad \lambda \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right)^2 + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \right)^2 = 0.$$

Or, on peut intégrer celle-ci en intégrant l'équation différentielle

$$\lambda d\mu^2 - \mu d\mu d\lambda + d\lambda^2 = 0.$$

Si l'on a trouvé deux intégrales distinctes de cette dernière équation et si, en les résolvant par rapport aux deux constantes arbitraires C_1 et C_2 qu'elles contiennent, on a trouvé

$$C_1 = f_1(\lambda, \mu), \quad C_2 = f_2(\lambda, \mu),$$

les fonctions f_1 , f_2 sont, l'une et l'autre, des intégrales de l'équation (9). Or, notre équation différentielle est une équation de Clairaut, admettant pour intégrale générale

$$\lambda - C\mu + C^2 = 0$$

avec C pour constante arbitraire. On peut donc intégrer (9) en faisant

$$\alpha = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\lambda},$$

et l'on adoptera pour nouvelles variables α et β , définies comme il suit :

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha = \mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda}, \\ \beta = \mu - \sqrt{\mu^2 - 4\lambda}. \end{cases}$$

Ainsi, on aura ramené l'équation (8) à la forme

$$A \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + B \frac{\partial v}{\partial \alpha} + C \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0,$$

et l'on pourra déterminer les coefficients A, B, C, en observant que l'équation (8) admet les solutions $v = \mu$, $v = \lambda$, et que, par conséquent, l'équation transformée doit admettre les solutions $v = \alpha + \beta$, $v = \alpha\beta$. De là, les conditions

$$\begin{aligned} B + C &= 0, \\ A + B + C\alpha &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de A, B, C entre ces trois équations montre que l'équation transformée est

$$(11) \quad (\alpha - \beta) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0.$$

Cette équation est un cas particulier de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{m}{\alpha - \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{n}{\alpha - \beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0,$$

dont les propriétés ont été magistralement exposées par M. Darboux, dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (Livre IV, Chap. III et IV). Mais, comme nous l'avions fait pressentir, la simplicité des coefficients est telle qu'on peut, sans grand effort, en trouver l'intégrale générale.

5. En effet, si l'on différencie l'équation (11) par rapport à α , on trouve l'équation

$$(\alpha - \beta) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = 0,$$

équivalente à

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}}{\alpha - \beta} \right) = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = (\alpha - \beta) F(\alpha).$$

Mais il nous est plus commode de remplacer $F(\alpha)$ par la dérivée troisième A''' d'une fonction A de α , et nous trouvons

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = (\alpha - \beta) A''';$$

et comme le second membre de cette équation est, par rapport à α , la dérivée seconde de

$$(\alpha - \beta) A' - 2A,$$

nous concluons que toute intégrale de l'équation (11) est de la forme

$$v = (\alpha - \beta) A' - 2A + \mathfrak{v}_1 \alpha + \mathfrak{v}_2,$$

$\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ désignant des fonctions de β . La condition pour qu'une telle fonction soit une intégrale de (11) se réduit à

$$\mathfrak{v}_2' = \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1' \beta,$$

et si l'on remplace \mathfrak{v}_1 par la dérivée B' d'une fonction de β , on trouve

$$\mathfrak{v}_2' = B' - B'' \beta,$$

puis, en intégrant,

$$\mathfrak{v}_2 = 2B - B' \beta + \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire, qu'on peut supprimer en considérant $2B + \alpha$ comme une fonction complètement arbitraire de β . Finalement, on trouve, pour l'intégrale générale de (11),

$$v = (\alpha - \beta) A' - 2A + (\alpha - \beta) B' + 2B,$$

ou bien

$$v = (\alpha - \beta) (A' + B') - 2(A - B).$$

6. En revenant aux formules écrites au début du n° 4, nous trouvons

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = \frac{4}{\alpha - \beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = 4 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = 4(B'' - A''),$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial v}{\partial \mu} = \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \alpha} \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - 4\lambda}} \right) + \frac{\partial v}{\partial \beta} \left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - 4\lambda}} \right) = \frac{2}{\alpha - \beta} \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \end{aligned}$$

ou bien

$$\sigma = 2(A''\alpha - A' + B''\beta - B')$$

et

$$u = \lambda\omega + \mu\sigma - \nu = A''\alpha^2 - 2A'\alpha + 2A - B''\beta^2 + 2B'\beta - 2B.$$

Ainsi se trouvent exprimées les trois coordonnées ω , σ , u , d'un point mobile sur la surface cherchée. Nous en profiterons pour démontrer que, sur cette surface, les variables α et β sont précisément les paramètres des courbes G. En effet, l'équation différentielle signalée dans l'introduction

$$x dy - y dz + k(dx^2 + dy^2) = 0$$

se transforme comme il suit :

$$\rho^2 d\omega (dz + k d\omega) + k d\rho^2 = 0$$

ou

$$d\omega du + d\sigma^2 = 0;$$

en vertu des formules ci-dessus, elle devient

$$A' B'' (\alpha - \beta)^2 d\alpha d\beta = 0,$$

ce qui démontre l'énoncé.

