

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL PLANCHEREL

Les problèmes de Cantor et de Du Bois-Reymond dans la théorie des séries de polynômes de Legendre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 31 (1914), p. 223-262

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__223_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES
PROBLÈMES DE CANTOR ET DE DU BOIS-REYMOND

DANS LA
THÉORIE DES SÉRIES DE POLYNOMES DE LEGENDRE,

PAR M. MICHEL PLANCHEREL.



Étant donné un système de fonctions $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) orthogonales et normées dans un intervalle (a, b) , c'est-à-dire telles que

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx = 1, \quad \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n),$$

on peut se poser à son sujet les deux problèmes suivants :

1. *Problème de Cantor.* — Peut-il exister deux séries différentes $\sum a_n \varphi_n(x)$, $\sum b_n \varphi_n(x)$ ($a_n \not\equiv b_n$) convergeant vers la même fonction $f(x)$; en d'autres termes, existe-t-il une série $\sum c_n \varphi_n(x)$ convergeant vers zéro dans tout l'intervalle (a, b) sans que $c_n = 0$?

2. *Problème de du Bois-Reymond.* — Si la série $\sum a_n \varphi_n(x)$ converge dans (a, b) vers la fonction $f(x)$, peut-on en conclure que

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = a_n,$$

au cas où toutes ces intégrales ont un sens?

Le premier problème concerne l'unicité du développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions orthogonales; le second n'est autre que celui de la *légitimité de l'intégration terme à terme* d'un tel développement. Il ne se pose pas si l'unicité n'existe pas, et il peut être utile de remarquer que nous connaissons, en effet, des systèmes orthogonaux pour lesquels l'unicité du développement n'a pas lieu. Tel est le cas du système suivant de M. Haar, système orthogonal normé pour l'intervalle $(0, 1)$,

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 0, & \varphi_1(x) &= 1, & 0 < x \leq 1 \\ \varphi_n(0) &= 0, & \varphi_n(x) &= 2^{\frac{n-2}{2}}, & 0 < x \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ & & \varphi_n(x) &= -2^{\frac{n-2}{2}}, & \frac{1}{2^{n-1}} < x \leq \frac{1}{2^{n-2}} \\ & & \varphi_n(x) &= 0, & \frac{1}{2^{n-2}} < x \leq 1 \end{aligned} \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

pour lequel la série ⁽¹⁾

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + 2^{\frac{1}{2}} \varphi_3(x) + \dots + 2^{\frac{n-2}{2}} \varphi_n(x) + \dots$$

converge vers zéro dans tout l'intervalle $(0, 1)$.

Ces problèmes se sont présentés pour la première fois dans la théorie des séries trigonométriques et c'est surtout à G. Cantor et à P. du Bois-Reymond que nous y devons leur résolution. Les belles recherches de MM. U. Dini ⁽²⁾ et A. Haar ⁽³⁾ les résolvent dans le cas des systèmes orthogonaux formés par les fonctions de Sturm-Liouville, solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u + \lambda u = 0,$$

où l'on suppose $p(x) > 0$ dans tout l'intervalle $a \leq x \leq b$. Les méthodes

⁽¹⁾ G. FABER, *Ueber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar* [*Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, Bd. XIX, 1910 (p. 104-112), p. 111].

⁽²⁾ U. DINI, *Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale* (Pisa, FF. Nistri; 1911).

⁽³⁾ A. HAAR, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* (zweite Mitteilung) (*Mathematische Annalen*, Bd. LXXI, 1911, p. 38-53).

d'ailleurs différentes de ces deux savants, permettraient probablement, sans exiger de modifications par trop profondes dans les raisonnements, de résoudre ces deux problèmes dans certains cas où $p(x)$ s'annule aux extrémités de l'intervalle, comme dans le cas de l'équation différentielle des polynômes de Legendre. Nous préférons cependant suivre une voie différente qui conserve une analogie plus étroite avec la méthode donnée par M. O. Hölder ⁽¹⁾ pour les séries trigonométriques. Elle revient à faire correspondre à toute équation différentielle du second ordre, adjointe à elle-même, une surface de révolution sur laquelle on peut définir d'une manière géométrique très simple un *paramètre généralisé de Beltrami* jouant, pour les systèmes orthogonaux de fonctions résultant de cette équation, le même rôle que la dérivée seconde généralisée pour les fonctions trigonométriques. Nous appliquerons ici cette méthode à l'équation différentielle des polynômes de Legendre dont la surface de révolution correspondante est la sphère.

La modification apportée par M. Hölder dans les raisonnements de ses prédécesseurs repose sur la remarque que le quotient

$$D_2 f(x; h) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

reste compris dans un intervalle entre les bornes inférieure et supérieure de la dérivée seconde généralisée $\lim_{h \rightarrow 0} D_2 f(x; h)$ dans cet intervalle. Notre premier but sera donc de trouver pour les polynômes de Legendre une expression jouant le même rôle que le quotient précédent et possédant des propriétés d'extrémum analogues. Pour cela, nous aurons avantage à considérer non pas l'intervalle $(-1, +1)$, mais la sphère-unité sur laquelle toutes nos formules s'interprètent plus facilement.

(ϑ, φ) , (ϑ', φ') étant les coordonnées polaires de deux points sur la sphère-unité, ω leur distance sphérique et $F(\vartheta, \varphi)$ une fonction quelconque du point (ϑ, φ) , nous formerons l'expression

$$\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h) = \frac{1}{s(h)} \int_{\omega=h} F(\vartheta', \varphi') ds' - F(\vartheta, \varphi),$$

(1) O. HÖLDER, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen* [*Mathematische Annalen*, Bd. XXIV, 1884 (p. 181-216), p. 182].

dans laquelle l'intégrale est prise le long du petit cercle de centre (ϑ, φ) et de rayon sphérique h , ds' désignant l'élément d'arc au point (ϑ', φ') et $s(h) = 2\pi \sin h$ le périmètre du petit cercle. Le quotient $\frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$

est l'analogue cherché de $D_2 f(x; h)$. Nous appellerons *paramètre généralisé de Beltrami* sur la sphère et nous noterons par $\Delta_2^* F(\vartheta, \varphi)$ sa limite pour $h = 0$; cette dénomination est due au fait que $\Delta_2^* F$ est égal au second paramètre de Beltrami

$$\Delta_2 F(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

lorsque $F(\vartheta, \varphi)$ possède une différentielle totale du second ordre. Les propriétés d'extrémum données par le théorème VI nous permettront de montrer que toute solution continue de l'équation $\Delta_2^* F = 0$ est une fonction potentielle sur la sphère; elles nous permettront encore d'établir le théorème fondamental suivant, analogue d'un théorème de Riemann :

Étant donnée une suite quelconque de constantes $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$, la fonction

$$F(\vartheta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta)$$

est une fonction continue sur la sphère, pour laquelle, sauf peut-être pour $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 F(\vartheta; h)}{\sin \frac{h}{2}} = 0$$

et telle que, en tout point de convergence de $\sum a_n P_n(\cos \vartheta)$,

$$\Delta_2^* F(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta).$$

On déduit facilement de là le théorème d'unicité suivant, relatif au problème de Cantor:

Pour que la série $\sum a_n P_n(x)$ converge vers zéro en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$, à l'exception au plus des points d'un ensemble réductible, il faut et il suffit que tous les coefficients a_n soient nuls.

La première démonstration de ce théorème est due à M. Dini ⁽¹⁾ qui y est arrivé par une méthode exigeant des calculs très laborieux. Le théorème d'unicité et le théorème donné plus haut permettent d'aborder le problème de du Bois-Reymond de la même manière que dans le cas des séries trigonométriques et de lui donner la solution suivante :

I. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$, à l'exception au plus des points d'un ensemble réductible, vers une fonction $f(x)$ bornée dans cet intervalle, on a

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx.$$

II. Étant donnée une suite quelconque de constantes $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction sommable $f(x)$ telle que

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

est que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^x P_n(x) dx$ converge dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ vers $\int_{-1}^x f(x) dx$ ⁽²⁾.

Nous avons besoin dans le cours de ce travail de quelques théorèmes

⁽¹⁾ U. DINI, *Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variabile in serie di funzioni* X_n (*Annali di Matematica pura ed applicata*, serie 2^a, t. VI, 1874, p. 216-225).

⁽²⁾ Les résultats du présent travail ont été annoncés dans ma Note : *Les problèmes de Cantor et de du Bois-Reymond, dans la théorie des séries de polynômes de Legendre* [*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris), t. CLV, 2^e semestre 1912, p. 897-900].

relatifs à l'ordre de grandeur des coefficients d'une série de polynômes de Legendre; comme ils ne manquent pas d'intérêt en eux-mêmes, nous croyons faciliter la lecture en consacrant le Chapitre I à leur démonstration.

CHAPITRE I.

L'ORDRE DE GRANDEUR DES COEFFICIENTS D'UNE SÉRIE DE POLYNÔMES DE LEGENDRE.

1. *Une condition nécessaire de convergence de la série $\sum a_n P_n(x)$.* — Soit $P_n(x)$ le polynôme de Legendre d'ordre n

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Les relations connues

$$(1) \quad \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

montrent que les fonctions $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ forment un système orthogonal normé pour l'intervalle $(-1, +1)$. Notons le théorème suivant, analogue d'un théorème classique de Cantor sur les séries trigonométriques :

THÉORÈME I. — *Pour que la série $\sum a_n P_n(x)$ converge en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$, à l'exception au plus des points d'un ensemble de mesure nulle, il est nécessaire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$.*

La première démonstration de ce théorème est due à M. Dini ⁽¹⁾; elle consistait à le déduire du théorème de Cantor en utilisant les formules asymptotiques que nous donnons plus loin. La démonstration

(1) U. DINI, *Sopra le serie di funzioni sferiche* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série 2^a, t. VI, 1874, p. 112-140, 208-215).

suivante, plus directe, prend pour point de départ le théorème général (1) :

Si les fonctions $f_n(x)$ forment une suite bornée de fonctions, bornées dans l'intervalle (α, β) , telles que

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f_n(x)]^2 dx \geq c^2 > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

la relation $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ est une condition nécessaire pour la convergence de la série $\sum \alpha_n f_n(x)$ en tout point de (α, β) , à l'exception au plus des points d'un ensemble de mesure nulle.

Pour appliquer ce théorème, nous aurons besoin de la formule asymptotique (2)

$$(2) \quad \begin{cases} P_n(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \vartheta}} \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\alpha(n, \vartheta)}{n} \right\} \\ [0 < \eta \leq \vartheta \leq \pi - \eta, |\alpha(n, \vartheta)| < M(\eta), n = 0, 1, 2, \dots] \end{cases}$$

valable dans tout intervalle $(\eta, \pi - \eta)$, $\eta > 0$ et dans laquelle $\alpha(n, \vartheta)$ est une fonction bornée de ϑ et de n dans cet intervalle. Il suffit de prendre

$$f_n(x) = \sqrt{n} P_n(x), \quad \alpha = -1 + \varepsilon, \quad \beta = 1 - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

pour voir au moyen de cette formule que la suite $f_n(x)$ remplit les conditions du théorème et pour en conclure que pour la convergence de $\sum a_n P_n(x) = \sum \frac{a_n}{\sqrt{n}} f_n(x)$ dans $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$, il est nécessaire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$. ε étant arbitrairement petit, il en résulte bien le théorème I.

2. Les coefficients de Legendre d'une fonction sommable. — $f(x)$ étant

(1) M. PLANCHEREL, *Sätze über Systeme beschränkter Orthogonalfunktionen* (*Mathematische Annalen*, Bd. LXVIII, 1910, p. 270-278).

(2) Voir, par exemple, E. HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen* (Berlin, Reimer), Bd. I, 1878, p. 178.

une fonction sommable (intégrable au sens de Lebesgue) dans l'intervalle $(-1, +1)$, nous pouvons former les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

que nous appellerons les *coefficients de Legendre* de $f(x)$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, abstraction faite de sa convergence ou de sa divergence, sera la *série de Legendre* de $f(x)$ et $f(x)$ sera dite la *génératrice* de cette série. L'inégalité connue

$$(3) \quad |P_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq +1)$$

entraîne immédiatement

$$|a_n| \leq \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} |f(x)| dx.$$

Une estimation plus précise de l'ordre de grandeur de a_n est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME II. — Si la fonction $f(x)$ est sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$ et si l'on pose

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

Tout revient à démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx = 0.$$

Or, $f(x)$ étant sommable, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} |f(x)| dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1-\varepsilon}^{+1} |f(x)| dx = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Nous pouvons donc, $\delta > 0$ étant pris arbitrairement petit, déterminer $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ par la condition

$$\left(\int_{-1}^{-1+\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1 \right) |f(x)| dx < \delta;$$

par suite, d'après (3), pour toute valeur de n ,

$$\left| \left(\int_{-1}^{-1+\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1 \right) f(x) P_n(x) dx \right| < \delta.$$

D'autre part, la formule asymptotique (2) montre que, dans l'intervalle $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$, $P_n(x)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$; par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x) P_n(x) dx = 0,$$

et à partir d'une valeur $N = N(\varepsilon, \delta)$, nous aurons

$$\left| \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x) P_n(x) dx \right| < \delta \quad (n \geq N).$$

Par conséquent, pour $n \geq N$,

$$\left| \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx \right| < 2\delta.$$

ce qui démontre le théorème.

Il est d'ailleurs impossible d'obtenir une relation asymptotique plus serrée pour l'ordre de grandeur de a_n . On peut, en effet, montrer, en s'appuyant sur un critère de M. Lebesgue ⁽¹⁾, qu'il n'existe pas de fonction non décroissante $\varphi(n)$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty$ et pour laquelle la relation $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{\varphi(n)}{n} = 0$ ait lieu, quelle que soit la fonction sommable $f(x)$.

La comparaison du théorème I et du théorème II ainsi complété

⁽¹⁾ H. LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières* [Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 3^e série, t. I, 1909 (p. 25-117), p. 52].

montre qu'il existe certainement des fonctions sommables dont la série de Legendre diverge sur un ensemble de points de l'intervalle $(-1, +1)$ de mesure non nulle. L'existence de ces fonctions est connue depuis longtemps. M. Darboux ⁽¹⁾ en a donné le premier exemple, que voici. La fonction $f(x) = \frac{1}{(1-x)^p}$ ($0 < p < 1$) est sommable; ses coefficients de Legendre

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x) dx}{(1-x)^p} = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(p)} \frac{(2n+1) \Gamma(n+p)}{2^p \Gamma(n+2-p)}$$

ont pour valeur asymptotique, d'après la formule de Stirling,

$$a_n = \frac{2^{1-p} \Gamma(1-p)}{\Gamma(p)} n^{2p-1} (1 + \delta_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

On a donc, pour $p \geq \frac{3}{4}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

La série de Legendre de $\frac{1}{(1-x)^p}$ diverge donc nécessairement sur un ensemble de mesure non nulle de l'intervalle $(-1, +1)$ lorsque $p \geq \frac{3}{4}$.

3. *Les coefficients de Legendre d'une fonction de carré sommable.* — Lorsque $f(x)$ est de carré sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$, les formules (1) permettent de vérifier l'identité

$$\int_{-1}^{+1} \left[f(x) - \sum_{p=0}^n a_p P_p(x) \right]^2 dx = \int_{-1}^{+1} [f(x)]^2 dx - \sum_{p=0}^n \frac{2a_p^2}{2p+1},$$

dans laquelle a_p représente encore le coefficient de Legendre de $f(x)$ relativement à $P_p(x)$. Le premier membre de cette identité étant ≥ 0 ,

⁽¹⁾ G. DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en séries* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3^e série, t. IV, 1878 (p. 5-56, 377-416), p. 393]. — Cf. encore L. FEJÉR, *Ueber die Laplacesche Reihe* [*Mathematische Annalen*, Bd. LXVII, 1909 (p. 76-109), p. 100].

il en découle l'inégalité

$$\sum_{p=0}^n \frac{2a_p^2}{2p+1} \leq \int_{-1}^{+1} [f(x)^2] dx.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{2n+1}$ est donc convergente; son terme général tend par conséquent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par suite, $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n+1}} = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉOREME III. — *Si la fonction $f(x)$ est de carré sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$ et si l'on pose*

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Ce théorème peut, comme le précédent, être complété par la remarque qu'il n'existe pas de fonction non décroissante $\varphi(n)$, telle que $\lim_{n=\infty} \varphi(n) = \infty$ pour laquelle la relation $\lim_{n=\infty} a_n \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$ ait lieu quelle que soit la fonction $f(x)$ de carré sommable. C'est une conséquence immédiate d'un autre théorème de M. Lebesgue ⁽¹⁾.

Si $f(x)$ est de carré sommable dans le voisinage des points -1 et $+1$ et simplement sommable dans le reste de l'intervalle, plus précisément si les intégrales suivantes

$$\int_{-1}^{\alpha} [f(x)]^2 dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx, \quad \int_{\beta}^{+1} [f(x)]^2 dx \quad (-1 < \alpha < \beta < 1)$$

existent, nous décomposerons

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\int_{-1}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{+1} \right) \frac{2n+1}{2} f(x) P_n(x) dx \\ &= a'_n + a''_n + a'''_n. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 55.

Le théorème III appliqué aux fonctions de carré sommable $f_1(x)$ et $f_2(x)$ définies par

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) & (-1 \leq x < \alpha), & & f_2(x) &= 0 & (-1 \leq x \leq \beta), \\ f_1(x) &= 0 & (\alpha \leq x \leq 1), & & f_2(x) &= f(x) & (\beta < x \leq +1), \end{aligned}$$

montre que $\frac{a'_n}{\sqrt{n}}$ et $\frac{a''_n}{\sqrt{n}}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. D'autre part, l'emploi dans l'intervalle (α, β) de la formule asymptotique (2) ramène la recherche de la limite de $\frac{a''_n}{\sqrt{n}}$ à celle d'une intégrale

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\cos \vartheta) \sin^{-\frac{1}{2}} \vartheta \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right] d\vartheta \quad (0 < \alpha' < \beta' < \pi),$$

limite qui est nulle d'après un théorème classique de Riemann, vrai encore pour les fonctions sommables ⁽¹⁾. Par suite, donc $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$.

On peut en conclure que *si les coefficients de Legendre a_n d'une fonction ne vérifient pas la relation $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$, cette fonction n'est pas de carré sommable dans le voisinage de l'un au moins des points $-1, +1$. La réciproque n'est naturellement pas vraie; ainsi la fonction*

$$\frac{1}{(1-x)^p} \quad \left(\frac{1}{2} \leq p < \frac{3}{4} \right)$$

n'est pas de carré intégrable dans le voisinage de $x = 1$ et cependant ses coefficients de Legendre sont tels que $\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

4. *L'intégration terme à terme d'une série de Legendre.* — De même qu'une série de Fourier, une série de Legendre peut être intégrée terme à terme. C'est ce qu'indique le théorème suivant de M. Dini :

THÉORÈME IV. — *Si la fonction $f(x)$ est sommable dans l'inter-*

⁽¹⁾ Voir, par exemple, H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1906), p. 61.

valle $(-1, +1)$ et si l'on pose

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^x P_n(x) dx$ converge uniformément dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ vers $\int_{-1}^x f(x) dx$.

$\int_{-1}^x f(x) dx$ est une fonction continue à variation bornée; elle peut donc se développer en série de Legendre

$$\int_{-1}^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x), \quad b_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx P_n(x) \int_{-1}^x f(\xi) d\xi$$

$$(-1 \leq x \leq +1),$$

uniformément convergente dans $(-1, +1)$ ⁽¹⁾. Intégrons b_n par partie

$$b_n = \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^x f(\xi) d\xi \int_{-1}^x P_n(\xi) d\xi \right]_{x=-1}^{x=+1} - \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx f(x) \int_{-1}^x P_n(\xi) d\xi.$$

La relation

$$(4) \quad (2n+1) P_n(x) = \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{n-1}(x)}{dx}$$

montre, puisque $P_{n+1}(-1) = P_{n-1}(-1) = (-1)^{n+1}$, que

$$(2n+1) \int_{-1}^x P_n(\xi) d\xi = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x).$$

Par conséquent,

$$b_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \int_{-1}^{+1} P_n(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] dx;$$

⁽¹⁾ Voir, par exemple, G. JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1894), p. 252-254.

et, en tenant compte des relations d'orthogonalité (1) pour $m = 0$,

$$b_0 = a_0 - \frac{1}{3} a_1, \quad b_n = \frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Il vient donc

$$\int_{-1}^x f(x) dx = \left(a_0 - \frac{1}{3} a_1\right) P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+3}\right) P_n(x).$$

La somme des $n+2$ premiers termes du second membre peut s'écrire

$$a_0(P_0 + P_1) + \sum_{v=1}^n \frac{a_v}{2v+1} (P_{v+1} - P_v) - \frac{a_{n+1}}{2n+3} P_n - \frac{a_{n+2}}{2n+5} P_{n+1},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{v=1}^n a_v \int_{-1}^x P_v(x) dx - \left[\frac{a_{n+1}}{2n+3} P_n(x) + \frac{a_{n+2}}{2n+5} P_{n+1}(x) \right].$$

Mais, comme en vertu du théorème II et de l'inégalité (3), le dernier crochet tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, il résulte immédiatement de la convergence uniforme de $\sum b_n P_n(x)$ vers $\int_{-1}^x f(x) dx$ celle de $\sum a_n \int_{-1}^x P_n(x) dx$ vers la même fonction.

Le théorème IV nous donne la condition nécessaire suivante pour qu'une série de polynômes de Legendre possède une génératrice :

Pour que la série des polynômes de Legendre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ possède une génératrice sommable $f(x)$ il est nécessaire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^x P_n(x) dx$ converge (uniformément) dans l'intervalle $(-1, +1)$ vers $\int_{-1}^x f(x) dx$.

Nous verrons plus loin (théorème XII) que cette condition nécessaire est aussi suffisante. Bornons-nous, pour l'instant, à noter deux

conditions nécessaires à l'existence de la génératrice et plus simples que la précédente :

1° Il est nécessaire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$. Ceci résulte du théorème II.

2° Il est nécessaire que la série $\sum \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\alpha_{n-1}}{2n-1} - \frac{\alpha_{n+1}}{2n+3} \right)^2$ converge, car

$$\int_{-1}^x f(x) dx = \sum_0^{\infty} b_n P_n(x)$$

étant de carré sommable, la série $\sum \frac{b_n^2}{2n+1}$ converge.

CHAPITRE II.

LE SECOND PARAMÈTRE GÉNÉRALISÉ DE BELTRAMI SUR LA SPHÈRE.

5. *Sa définition.* — Introduisons sur la surface sphérique de rayon 1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ les coordonnées polaires ϑ, φ par les formules

$$x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

L'axe des z est donc pris comme axe polaire, ϑ est la distance (sphérique) polaire et φ la longitude. (ϑ, φ) et (ϑ', φ') étant deux points de la surface, leur distance sphérique ω est donnée par

$$(5) \quad \cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

L'élément d'aire au point (ϑ', φ') a pour valeur

$$(6) \quad d\sigma' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'.$$

Pour trouver sur la sphère une expression qui joue le même rôle et possède les mêmes propriétés que le quotient

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \frac{2}{h^2} \left[\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} - f(x) \right]$$

sur un intervalle, nous formerons, $F(\vartheta, \varphi)$ étant une fonction continue

sur la sphère, l'expression

$$\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h) = \frac{1}{s(h)} \int_{\omega=h} F(\vartheta', \varphi') ds' - F(\vartheta, \varphi),$$

expression dans laquelle l'intégrale est prise le long du petit cercle de centre (ϑ, φ) et de rayon sphérique h , ds' désignant l'élément d'arc au point (ϑ', φ') et $s(h) = \int_{\omega=h} ds' = 2\pi \sinh h$ le périmètre de ce petit cercle. On voit que $\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)$ est simplement la différence entre la *valeur moyenne* de F sur le petit cercle $\omega = h$ et la valeur de la même fonction au centre (ϑ, φ) de ce petit cercle. Si nous menons par le point (ϑ, φ) un grand cercle quelconque C et si nous notons ψ' l'angle de C avec le grand cercle joignant (ϑ, φ) à (ϑ', φ') nous aurons $ds' = \sinh h d\psi'$ et l'expression donnée pour $\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)$ prendra la forme

$$(7) \quad \Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} F(\vartheta', \varphi') d\psi' - F(\vartheta, \varphi).$$

Le quotient $\frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$ est l'analogue cherché de $\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$.

S'il tend vers une limite finie lorsque h tend vers zéro, nous appellerons cette limite le (*second*) *paramètre généralisé de Beltrami* et nous la noterons

$$(8) \quad \Delta_2^* F(\vartheta, \varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}.$$

La raison de cette dénomination est la suivante. Soit C' le grand cercle passant par le point (ϑ, φ) et orthogonal à C ; soient s_1, s_2 les distances sphériques du point (ϑ', φ') aux cercles C' et C . En affectant ces distances d'un signe convenable, on a

$$s_1 = \sin \omega \cos \psi', \quad s_2 = \sin \omega \sin \psi'.$$

Notons encore

$$F(\vartheta', \varphi') \equiv u(s_1, s_2).$$

Si la différentielle totale du second ordre de $u(s_1, s_2)$ existe au point $s_1 = s_2 = 0$, auquel cas nous conviendrons de dire que $F(\vartheta, \varphi)$

possède au point $(\mathfrak{S}, \varphi)$ une différentielle totale du second ordre, nous aurons dans le voisinage de $s_1 = s_2 = 0$

$$\begin{aligned} u(s_1, s_2) = u(0, 0) &+ \left[\frac{\partial u(0, 0)}{\partial s_1} s_1 + \frac{\partial u(0, 0)}{\partial s_2} s_2 \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial s_1^2} s_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial s_1 \partial s_2} s_1 s_2 + \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial s_2^2} s_2^2 \right] \\ &+ (e_1 s_1^2 + 2 e_2 s_1 s_2 + e_3 s_2^2). \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{s_1=0, s_2=0} e_1 = 0, \quad \lim_{s_1=0, s_2=0} e_2 = 0, \quad \lim_{s_1=0, s_2=0} e_3 = 0.$$

On aura donc, dans le voisinage du point $(\mathfrak{S}, \varphi)$,

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{S}', \varphi') = F(\mathfrak{S}, \varphi) &+ \sin \omega \left[\frac{\partial u(0, 0)}{\partial s_1} \cos \psi' + \frac{\partial u(0, 0)}{\partial s_2} \sin \psi' \right] \\ &+ \frac{\sin^2 \omega}{2} \left[\frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial s_1^2} \cos^2 \psi' \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial s_1 \partial s_2} \cos \psi' \sin \psi' + \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial s_2^2} \sin^2 \psi' + \varepsilon \right] \\ \lim_{\omega=0} \max_{0 \leq \psi' \leq 2\pi} |\varepsilon| &= 0. \end{aligned}$$

De là résulte que

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta_2 F(\mathfrak{S}, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial s_2^2}.$$

Or, cette dernière expression n'est autre chose que la valeur $\Delta_2 F(\mathfrak{S}, \varphi)$ du paramètre du second ordre de Beltrami sur la sphère ⁽¹⁾. En fonction des coordonnées $\mathfrak{S}, \varphi$, $\Delta_2 F$ s'exprime par

$$(9) \quad \Delta_2 F(\mathfrak{S}, \varphi) = \frac{1}{\sin \mathfrak{S}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{S}} \left(\sin \mathfrak{S} \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{S}} \right) + \frac{1}{\sin^2 \mathfrak{S}} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *En tout point $(\mathfrak{S}, \varphi)$ où la fonction $F(\mathfrak{S}, \varphi)$ possède une*

⁽¹⁾ Voir, par exemple, E. PICARD, *Traité d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars), t. II, 1905, p. 539-540.

différentielle totale du second ordre, le paramètre généralisé de Beltrami $\Delta_2^* F(\vartheta, \varphi)$ existe et est égal au paramètre du second ordre $\Delta_2 F(\vartheta, \varphi)$.

L'équation aux dérivées partielles des fonctions sphériques étant précisément

$$(10) \quad \Delta_2 P_n(\cos \omega) + n(n+1) P_n(\cos \omega) = 0,$$

nous concluons immédiatement que

$$(11) \quad \Delta_2^* P_n(\cos \omega) = -n(n+1) P_n(\cos \omega).$$

En particulier, pour $n = 0, 1$,

$$(12) \quad \Delta_2^*(\text{const.}) = 0, \quad \Delta_2^* \cos \omega = -2 \cos \omega, \quad \Delta_2^* \sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \Delta_2^*(1 - \cos \omega) = \cos \omega.$$

Nous pouvons encore obtenir ces formules en partant de la formule d'addition des fonctions sphériques. En prenant pour le cercle C le méridien passant par (ϑ, φ) , cette formule s'écrit ⁽¹⁾

$$(13) \quad P_n(\cos \vartheta') = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \omega) + \sum_{s=1}^n \alpha_{ns} P_{ns}(\cos \vartheta) P_{ns}(\cos \omega) \cos s \psi',$$

α_{ns} étant une constante et P_{ns} une fonction dont les valeurs explicites sont sans intérêt pour nous. L'intégration de (13) le long du petit cercle $\omega = h$ donne, ψ' variant de 0 à 2π ,

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta_2 P_n(\cos \vartheta; h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos \vartheta') d\psi' - P_n(\cos \vartheta) \\ &= -P_n(\cos \vartheta) [1 - P_n(\cos h)]. \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de chercher la limite de $\frac{1 - P_n(\cos h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$. La substi-

⁽¹⁾ Voir, par exemple, HEINE, *loc. cit.*, p. 312. — JORDAN, *loc. cit.*, p. 245-256. — R. FRICKE, *Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen* (Leipzig, Teubner, 1900), p. 45.

tution $\xi = \cos h$ donne

$$\frac{1 - P_n(\cos h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \frac{1 - P_n(\xi)}{\frac{1}{2}(1 - \xi)} = 2 \frac{P_n(1) - P_n(\xi)}{1 - \xi} = 2 P'_n(\eta) \quad (\xi < \eta < 1).$$

La limite cherchée est donc $2P'_n(1)$. Or, la formule (4) donne, pour $x = 1$,

$$P'_{n+1}(1) - P'_{n-1}(1) = 2n + 1$$

et, comme $P'_0(1) = 0$, $P'_1(1) = 1$, elle donne par récurrence'

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Par conséquent

$$(15) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P_n(\cos h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} = n(n+1).$$

et l'on retrouve bien

$$\Delta_2^* P_n(\cos \varpi) = -n(n+1) P_n(\cos \varpi).$$

6. *Propriétés d'extrémum du paramètre généralisé.* — De la définition de $\Delta_2 F(\varpi, \varphi; h)$ résulte immédiatement qu'en tout point où $F(\varpi, \varphi)$ est minimum, $\Delta_2 F(\varpi, \varphi; h)$ est ≥ 0 lorsque h est suffisamment petit; par suite, si $\Delta_2^* F(\varpi, \varphi)$ existe en ce point, sa valeur est certainement ≥ 0 . De même, si $F(\varpi, \varphi)$ est maximum au point (ϖ, φ) , pour h suffisamment petit $\Delta_2 F(\varpi, \varphi; h)$ est ≤ 0 et $\Delta_2^* F(\varpi, \varphi) \leq 0$, au cas où cette expression existe.

Soit $f(\varpi, \varphi)$ une fonction continue dans un domaine sphérique simplement connexe Ω , nulle sur le contour Γ de ce domaine et telle qu'en tout point intérieur du domaine $\Delta_2^* f(\varpi, \varphi) > 0$. Il est facile de montrer qu'en tout point intérieur de Ω , $f(\varpi, \varphi)$ est < 0 . Appelons, en effet, M le maximum de f dans le domaine. Si M était > 0 , il existerait à l'intérieur de Ω un point (ξ, η) où $f(\xi, \eta) = M$, c'est-à-dire où f est maximum. En un tel point, on aurait $\Delta_2^* f(\xi, \eta) \leq 0$, contrairement à l'hypothèse faite que $\Delta_2^* f$ est > 0 à l'intérieur du domaine. On ne peut donc avoir $M > 0$; comme, sur le contour Γ , f est nulle, on a donc $M = 0$. De plus, en aucun point intérieur de Ω , f ne peut être nulle, car pour



la même raison que plus haut $\Delta_2^* f$ serait ≤ 0 en ce point. On a donc bien $f(\varpi, \varphi) < 0$ en tout point intérieur de Ω .

Considérons maintenant une fonction $G(\varpi', \varphi')$ continue dans une calotte sphérique de centre (ϖ, φ) et de rayon sphérique h . Supposons de plus que $\Delta_2^* G(\varpi', \varphi')$ existe en tout point intérieur de la calotte et y vérifie l'inégalité $\Delta_2^* G(\varpi', \varphi') > 0$. Nous allons voir que, dans ces conditions,

$$G(\varpi, \varphi) < \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} G(\varpi', \varphi') d\psi'.$$

Formons en effet la fonction potentielle $H(\varpi', \varphi')$ prenant à la frontière de la calotte les mêmes valeurs que $G(\varpi', \varphi')$ et régulière à l'intérieur de la calotte ⁽¹⁾. La fonction $f(\varpi', \varphi') = G(\varpi', \varphi') - H(\varpi', \varphi')$ est continue dans la calotte, elle s'annule sur la frontière $\omega = h$ et à l'intérieur de la calotte

$$\Delta_2^* f = \Delta_2^* G - \Delta_2^* H = \Delta_2^* G - \Delta_2 H = \Delta_2^* G > 0.$$

Par conséquent, pour $\omega < h$, $f(\varpi', \varphi') < 0$, c'est-à-dire

$$G(\varpi', \varphi') < H(\varpi', \varphi').$$

En particulier donc, pour $\omega = 0$,

$$G(\varpi, \varphi) < H(\varpi, \varphi).$$

Or, en vertu du théorème de la moyenne relatif aux fonctions potentielles sur la sphère,

$$H(\varpi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} H(\varpi', \varphi') d\psi',$$

et, comme pour $\omega = h$, $H(\varpi', \varphi')$ et $G(\varpi', \varphi')$ sont égales, on en conclut

$$G(\varpi, \varphi) < \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} G(\varpi', \varphi') d\psi'.$$

(1) Par fonction *potentielle* $H(\varpi', \varphi')$, nous entendons une solution de l'équation $\Delta_2 H(\varpi', \varphi') = 0$. Une fonction potentielle est dite *régulière* dans un domaine lorsqu'elle est bornée dans ce domaine et possède en tout point intérieur du domaine une différentielle totale du second ordre continue. Au sujet des propriétés des fonctions potentielles sur une surface et du problème de Dirichlet relatif à ces fonctions, on pourra consulter E. PICARD, *Traité d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars), t. II, 1905, p. 538-540.

Si nous avions supposé qu'à l'intérieur de la calotte $\Delta_2^* G$ était < 0 , nous aurions obtenu inversement

$$G(\mathfrak{S}, \varphi) > \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} G(\mathfrak{S}', \varphi') d\psi'.$$

Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème suivant, très important par ses conséquences :

THÉORÈME VI. — *Si la fonction $F(\mathfrak{S}, \varphi)$ est continue dans un domaine sphérique Ω simplement connexe et possède à l'intérieur du domaine un paramètre généralisé $\Delta_2^* F$ borné*

$$m \leq \Delta_2^* F(\mathfrak{S}, \varphi) \leq M;$$

alors, en tout point intérieur de Ω et pour toute valeur de h ($< \frac{\pi}{2}$) assez petite pour que la calotte de centre $(\mathfrak{S}, \varphi)$ et de rayon sphérique h soit tout entière dans Ω ,

$$\frac{m}{\cos h} \leq \frac{\Delta_2 F(\mathfrak{S}, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \leq \frac{M}{\cos h}.$$

Considérons, en effet, la fonction suivante du point $(\mathfrak{S}', \varphi')$:

$$G(\mathfrak{S}', \varphi') = F(\mathfrak{S}', \varphi') - F(\mathfrak{S}, \varphi) + \left[C - \frac{\Delta_2 F(\mathfrak{S}, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \right] \sin^2 \frac{\omega}{2},$$

dans laquelle h répond aux conditions posées par le théorème et où C est une constante quelconque. Cette fonction du point $(\mathfrak{S}', \varphi')$ est continue dans la calotte $\omega \leq h$; elle s'annule au centre $(\mathfrak{S}, \varphi)$ de cette calotte et l'on a, en se rappelant la définition de $\Delta_2 F(\mathfrak{S}, \varphi, h)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} G(\mathfrak{S}', \varphi') d\psi' = C \sin^2 \frac{h}{2}.$$

Prenons d'abord la constante C positive. L'expression précédente est alors positive, et comme $G(\mathfrak{S}, \varphi) = 0$, nous aurons

$$G(\mathfrak{S}, \varphi) < \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} G(\mathfrak{S}', \varphi') d\psi'.$$

Nous en concluons qu'il existe à l'intérieur de la calotte $\omega \leq h$ au moins un point (ϑ_1, φ_1) pour lequel $\Delta_2^* G(\vartheta_1, \varphi_1)$ est ≥ 0 , sans quoi, d'après des inégalités établies plus haut, l'inégalité obtenue ne pourrait avoir lieu. Appelons h_1 la distance sphérique des points (ϑ, φ) et (ϑ_1, φ_1) . De $\Delta_2^* G(\vartheta_1, \varphi_1) \geq 0$ résulte, d'après (12),

$$\Delta_2^* F(\vartheta_1, \varphi_1) + \left[C - \frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \right] \cos h_1 \geq 0;$$

d'où, puisque $0 \leq h_1 < h < \frac{\pi}{2}$, successivement

$$\frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \leq \frac{1}{\cos h_1} \Delta_2^* F(\vartheta_1, \varphi_1) + C \leq \frac{M}{\cos h} + C.$$

Comme C peut être pris aussi voisin de zéro que l'on veut, on voit que $\frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \leq \frac{M}{\cos h}$. Si nous prenons ensuite C négatif, nous obtenons d'abord

$$G(\vartheta, \varphi) > \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} G(\vartheta', \varphi') d\psi'$$

et nous en déduirons l'existence d'un point (ϑ_2, φ_2) intérieur à la calotte, pour lequel $\Delta_2^* G(\vartheta_2, \varphi_2) \leq 0$. Nous obtiendrions ainsi l'inégalité

$$\frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \geq \frac{m}{\cos h} + C,$$

et comme $C < 0$ peut être pris aussi voisin de zéro que l'on veut, il en résulte $\frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \geq \frac{m}{\cos h}$, ce qui achève la démonstration. Le corollaire suivant est immédiat.

COROLLAIRE. — Si dans un domaine sphérique Ω , $\Delta_2^* F$ existe et est bornée, le quotient $\frac{\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$ est uniformément borné dans ce domaine, lorsque h tend vers zéro.

7. L'équation $\Delta_2^* F = 0$. — Si à l'intérieur du domaine Ω la fonction F vérifie la relation $\Delta_2^* F(\vartheta, \varphi) = 0$, on aura, dans ce domaine, d'après le théorème précédent, pour h suffisamment petit,

$$\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h) = 0;$$

par suite, en tout point intérieur de Ω ,

$$F(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=h} F(\vartheta', \varphi') d\psi',$$

c'est-à-dire $F(\vartheta, \varphi)$ est en tout point intérieur de Ω égal à sa valeur moyenne prise sur un cercle décrit autour de lui comme centre avec un rayon arbitraire. De cette propriété on déduit comme dans la théorie du potentiel que les extréma de F dans la calotte $\omega \leq h$ se trouvent à la frontière $\omega = h$. Si donc nous construisons la fonction potentielle F' régulière dans la calotte et prenant pour $\omega = h$ les mêmes valeurs que F , la fonction $F - F'$ vérifiant encore l'équation $\Delta_2^*(F - F') = 0$ à l'intérieur de la calotte a nécessairement ses extréma à la frontière $\omega = h$; comme elle est nulle le long de cette frontière, on conclut $F - F' \equiv 0$ pour $\omega \leq h$, d'où le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Toute fonction $F(\vartheta, \varphi)$ continue dans un domaine sphérique et vérifiant en tout point intérieur du domaine l'équation $\Delta_2^* F = 0$ est une fonction potentielle, régulière dans ce domaine, c'est-à-dire une solution de l'équation $\Delta_2 F = 0$ ayant une différentielle totale du second ordre continue à l'intérieur du domaine.*

De même que le théorème précédent est l'analogue d'un théorème de Hölder, celui-ci est l'analogue d'un théorème classique de Schwartz sur les fonctions continues d'une variable dont la dérivée seconde généralisée est nulle dans un intervalle. Si, en particulier, le domaine Ω comprend toute la sphère, comme la seule fonction potentielle régulière sur toute la sphère est une constante ⁽¹⁾, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Si la fonction $F(\vartheta, \varphi)$ est continue sur toute la*

(1) Ce théorème est l'analogue sur la sphère du théorème d'après lequel la seule fonc-

sphère et si elle vérifie en tout point de la sphère l'équation $\Delta_2^* F = 0$, elle se réduit à une constante.

$f(\vartheta, \varphi)$ étant une fonction continue possédant dans un domaine sphérique une différentielle totale du second ordre continue, l'intégration de l'équation $\Delta_2 F = f$ dans le domaine Ω avec données aux frontières est possible ⁽¹⁾ et bien déterminée, et le théorème VII a le corollaire suivant, dont la démonstration est immédiate :

COROLLAIRE. — Toute fonction $F(\vartheta, \varphi)$ continue dans un domaine sphérique et vérifiant en tout point intérieur du domaine l'équation $\Delta_2^* F = f$, où f est une fonction possédant une différentielle totale seconde continue dans le domaine, est une solution de l'équation $\Delta_2 F = f$, régulière dans le domaine.

CHAPITRE III.

$$\text{LA SÉRIE } F(\vartheta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta).$$

8. *Un théorème fondamental sur $\Delta_2^* F(\vartheta)$.* — La méthode qu'emploie Riemann dans son Mémoire célèbre sur la théorie des séries trigonométriques ⁽²⁾ est fondée sur la remarque que les fonctions $\cos nx$, $\sin nx$ sont des solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{dx^2} = -n^2 u$. Riemann associe en effet à toute série trigonométrique

$$f(x) = \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

tion harmonique régulière dans tout le plan est une constante. Voir, par exemple, J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique* (Paris, Hermann, 1903), p. 48-53.

⁽¹⁾ Voir, par exemple, J. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 50.

⁽²⁾ B. RIEMANN, *Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* [*Gesammelte mathematische Werke*; Leipzig, Teubner, 1892 (p. 227-265), p. 246].

une fonction

$$F(x) = - \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

et le théorème fondamental de son Mémoire consiste à prouver que la dérivée seconde généralisée de $F(x)$ est égale à $f(x)$ en tout point de convergence de $f(x)$. Si nous remarquons que $P_n(\cos \vartheta)$ vérifie l'équation

$$\Delta_2 P_n(\cos \vartheta) = -n(n+1) P_n(\cos \vartheta),$$

nous serons tout naturellement conduit, en suivant l'idée de Riemann, à faire correspondre à toute série $\sum_1^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta)$ une fonction

$$F(\vartheta) = - \sum \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta)$$

et à examiner si le paramètre généralisé $\Delta_2^* F(\vartheta)$ est égal à

$$\sum_1^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta)$$

aux points de convergence de cette série (1). C'est évidemment vrai lorsque cette dernière série est uniformément convergente; le théorème suivant, qui est bien l'analogue du théorème de Riemann énoncé plus haut, donne la réponse :

THÉORÈME IX. — *Étant donnée une suite de constantes quelconques a_n , telles que* (2)

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0,$$

la fonction

$$(17) \quad F(\vartheta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta) \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi)$$

est continue sur la sphère. En tout point de la sphère, sauf peut-être aux

(1) Cette même idée de Riemann est à la base des travaux cités de MM. Haar et Dini

(2) Et non pas $\lim \frac{a_n}{n} = 0$, comme le dit, par erreur, ma Note des *Comptes rendus*.

pôles $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 F(\vartheta; h)}{\sin \frac{h}{2}} = 0$$

et en tout point de convergence de la série $\sum a_n P_n(\cos \vartheta)$,

$$\Delta_2^* F(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta).$$

Les formules (2) et (16) font voir que la série (17) est absolument et uniformément convergente dans tout l'intervalle $0 \leq \vartheta \leq \pi$. $F(\vartheta)$ est, par conséquent, une fonction continue sur toute la sphère. On déduit de la formule (14) que

$$\Delta_2 F(\vartheta; h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1)}.$$

Il suffit donc de démontrer que, sauf peut-être pour $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1) \sin \frac{h}{2}} = 0$$

et que, lorsque $\sum a_n P_n(\cos \vartheta)$ converge,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1) \sin^2 \frac{h}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta).$$

Si nous remarquons qu'en vertu de (2) et de (16), $a_n P_n(\cos \vartheta)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pour $\vartheta \neq 0, \pi$, la transformation d'Abel, appliquée aux séries qui constituent le premier membre de ces deux relations, nous montre qu'il suffit pour les établir de faire voir, pour la première, que (1)

$$R(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1) \sin \frac{h}{2}} \right| = \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} |r_n(h)|$$

(1) Voir, par exemple, RIEMANN, *loc. cit.*, p. 246-248; H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 39-40 et 112-113; E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 1901, p. 261-264.

est une fonction bornée de h dans le voisinage de $h = 0$ et, pour la seconde, que

$$S(h) = \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1)} - \frac{1 - P_{n+1}(\cos h)}{(n+1)(n+2)} \right| = \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} |s_n(h)|$$

est également une fonction bornée de h dans le voisinage de $h = 0$.

9. *Étude de $R(h)$ et de $S(h)$.* — Ce paragraphe est consacré à établir que $R(h)$ et $S(h)$ sont des fonctions bornées de h dans le voisinage de $h = 0$ et à achever ainsi la démonstration du théorème IX.

m_0 étant un nombre entier tel que $m_0 \leq \frac{1}{h} < m_0 + 1$, nous décomposons d'abord

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r_n(h)| = \sum_{n=1}^{m_0} |r_n(h)| + \sum_{n=m_0+1}^{\infty} |r_n(h)|$$

et remarquerons que le théorème VI en relation avec les formules (11) et (14) montre que

$$(18) \quad \left| \frac{r_n(h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} \right| = \left| \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1) \sin^2 \frac{h}{2}} \right| \leq \frac{1}{\cos h}.$$

Par suite,

$$\frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \sum_{n=1}^{m_0} |r_n(h)| \leq m_0 \frac{\sin \frac{h}{2}}{\cos h} < \left(\frac{1}{h} + 1 \right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\cos h}$$

est une fonction bornée de h dans le voisinage de $h = 0$. D'autre part,

de $|r_n(h)| \leq \frac{2}{n(n+1)}$ découle

$$\frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \sum_{n=m_0+1}^{\infty} |r_n(h)| \leq \frac{2}{\sin \frac{h}{2}} \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{\sin \frac{h}{2}} \frac{1}{m_0+1} < \frac{2h}{\sin \frac{h}{2}}$$

qui est bornée. On voit donc que $R_n(h)$ est bornée au voisinage de $h = 0$.

Étudions maintenant $S(h)$. La formule de Mehler (¹)

$$P_n(\cos h) = \frac{2}{\pi} \int_0^h \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi d\psi}{\sqrt{2(\cos \psi - \cos h)}} \quad (0 < h \leq \pi; n = 0, 1, 2, \dots),$$

dont

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^h \frac{\cos \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{2(\cos \psi - \cos h)}}$$

est un cas particulier, donne

$$s_n(h) = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \int_0^h \frac{t_n(\psi) d\psi}{\sqrt{2(\cos \psi - \cos h)}}$$

avec

$$\begin{aligned} t_n(\psi) = & \sin n\psi \left[(n+2) \sin \frac{\psi}{2} - n \sin \frac{3\psi}{2} \right] \\ & - \cos n\psi \left[(n+2) \cos \frac{\psi}{2} - n \cos \frac{3\psi}{2} \right] + 2 \cos \frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Étudions $t_n(\psi)$ dans le voisinage de $\psi = 0$. Effectuons pour cela la substitution $\psi = \frac{\varphi}{n}$ et développons $\sin \varphi$, $\sin \frac{\varphi}{2n}$, $\cos \varphi$, ... en séries entières. En nous arrêtant aux premiers termes de ces séries alternées, à termes décroissants lorsque $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, nous aurons

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varepsilon_1 \varphi^5}{5!}, \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varepsilon_2 \varphi^6}{6!}, \quad \sin \frac{\varphi}{2n} = \dots$$

Les grandeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ sont des fonctions de φ, n telles que, quel que soit n et quel que soit φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$,

$$0 < \varepsilon_1 < 1, \quad 0 < \varepsilon_2 < 1, \quad \dots \quad \left(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \right).$$

On en déduit

$$t_n\left(\frac{\varphi}{n}\right) = \varphi^4 \left[\frac{1}{12} + P_4 + \varphi^2(\beta + P_6) + \varphi^4(\gamma + P_8) + \varphi^6(\delta + P_{10}) \right],$$

(¹) MEHLER, *Notiz über die Dirichletschen Integralausdrücke für die Kugelfunktion $P_n(\cos \vartheta)$ und über eine analoge Formel für die Cylinderfunktion $J(x)$* (*Mathematische Annalen*, Bd. V, 1872, p. 141-144); voir aussi, HEINE, *loc. cit.*, p. 44.

β, γ, δ étant des constantes, $P_4, \dots, P_{10}$ des polynômes en $\frac{1}{n}$ de degrés respectifs 4, ..., 10, sans termes indépendants de n et à coefficients fonctions bornées de φ et de n . Pour n très grand, $P_4, \dots, P_{10}$ sont, par conséquent, quel que soit φ dans $(0, \frac{\pi}{2})$, aussi petits qu'on veut. On pourra donc trouver un entier N et une quantité positive α , tels que $t_n(\frac{\varphi}{n}) > 0$ pour $0 < \varphi \leq \frac{\alpha\pi}{2}$, lorsque $n \geq N$. Par conséquent, pour toute valeur $n \geq N$ et pour toute valeur $0 < \psi \leq \frac{\alpha\pi}{2n}$, on aura $t_n(\psi) > 0$. Par suite,

$$(19) \quad s_n(h) > 0, \quad \text{pour} \quad 0 < h \leq \frac{\alpha\pi}{2n}, \quad n \geq N.$$

$n_0 = n_0(h)$ étant un nombre entier tel que

$$(20) \quad n_0 \leq \frac{\alpha\pi}{2h} < n_0 + 1,$$

nous supposons h assez petit pour que $n_0 > N$; nous décomposerons

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(h)| = \left(\sum_{n=1}^N + \sum_{n=N+1}^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \right) |s_n(h)|$$

et étudierons séparément ces trois sommes, en montrant que le quotient de chacune d'elles par $\sin^2 \frac{h}{2}$ est une fonction bornée de h dans le voisinage de $h = 0$. Nous aurons ainsi achevé la démonstration relative à $S(h)$.

Quant à la première somme, comme N est un nombre constant indépendant de h et que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s_n(h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} = 0$, on voit immédiatement que

son quotient par $\sin^2 \frac{h}{2}$ tend vers zéro avec h ; elle est donc bornée dans le voisinage de $h = 0$.

A cause du choix (20) de n_0 , pour $N < n \leq n_0$, h vérifie la relation $0 < h < \frac{\alpha\pi}{2n}$ et, par conséquent (19), $s_n(h)$ est > 0 pour toutes les

valeurs de n comprises entre N et n_0 . Il en résulte

$$\sum_{n=N+1}^{n_0} |s_n(h)| = \sum_{n=N+1}^{n_0} s_n(h) = \sum_{n=N+1}^{n_0} [r_n(h) - r_{n+1}(h)] = r_{N+1}(h) - r_{n_0+1}(h)$$

et de (18) découle le résultat cherché pour cette somme. Enfin, lorsque $n > n_0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |s_n(h)| &= \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \frac{n[P_n(\cos h) - P_{n+1}(\cos h)] + 2[P_n(\cos h) - 1]}{n(n+1)(n+2)} \right| \\ &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \frac{P_n(\cos h) - P_{n+1}(\cos h)}{(n+1)(n+2)} \right| + 2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1)(n+2)} \right| \\ &= J_1(h) + J_2(h). \end{aligned}$$

De la formule de Mehler on déduit

$$\begin{aligned} |P_n(\cos h) - P_{n+1}(\cos h)| \\ = \frac{4}{\pi} \left| \int_0^h \frac{\sin(n+1)\psi \sin \frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos \psi - \cos h)}} d\psi \right| < \frac{4}{\pi} \sin \frac{h}{2} \int_0^h \frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos \psi - \cos h)}} < M \sin \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

M étant une constante positive indépendante de h et de n . Par suite,

$$J_1(h) \leq M \sin \frac{h}{2} \sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{M \sin \frac{h}{2}}{n_0+1} < \frac{2M}{\alpha\pi} h \sin \frac{h}{2}.$$

D'autre part, comme $|1 - P_n(\cos h)| \leq 2$,

$$J_2(h) \leq 4 \sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n_0+1)(n_0+2)} < 2 \left(\frac{2h}{\alpha\pi} \right)^2.$$

Il résulte immédiatement de ces inégalités que $\frac{J_1(h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$ et $\frac{J_2(h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$, donc aussi $S(h)$ sont bornées dans le voisinage de $h = 0$.

CHAPITRE IV.

LES PROBLÈMES DE CANTOR ET DE DU BOIS-REYMOND.

10. *Le théorème d'unicité.* — Tous les préliminaires nécessaires à la résolution des deux problèmes qui font l'objet de ce travail sont maintenant terminés, et nous pouvons établir le théorème d'unicité suivant :

THÉORÈME X. — *Pour que la série $\sum a_n P_n(x)$ converge vers zéro en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$, à l'exception au plus des points d'un ensemble réductible, il faut et il suffit que tous les coefficients a_n soient nuls.*

Soit E cet ensemble réductible ; c'est un ensemble dénombrable, nulle part dense. Sa mesure est donc nulle, et du fait de la convergence de $\sum a_n P_n(x)$ dans le complémentaire de E relatif à $(-1, +1)$, on a nécessairement, d'après le théorème I, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$. On peut, par conséquent, former effectivement la série (17)

$$F(\vartheta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta)$$

et lui appliquer le théorème IX. Appelons $\bar{E}$ l'ensemble réductible de l'intervalle $(0, \pi)$ qui résulte de E par la substitution $x = \cos \vartheta$, et complémentaire de $\bar{E}$ l'ensemble des points de $(0, \pi)$ qui n'appartiennent pas à $\bar{E}$. En ces derniers points $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta)$ converge vers zéro ; par conséquent,

$$\Delta_2^* F(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) = -a_0.$$

Soit β un point isolé de $\bar{E}$ différent de 0, π , et (α, β) , $\alpha < \beta$, le plus

grand intervalle d'extrémité droite β ne contenant aucun point de $\bar{E}$ à son intérieur. Pour $\alpha < \vartheta < \beta$, on aura donc $\Delta_2^* F(\vartheta) = -\alpha_0$; par conséquent aussi, en vertu du corollaire du paragraphe 7, $\Delta_2 F(\vartheta) = -\alpha_0$, c'est-à-dire, puisque $F(\vartheta)$ est indépendant de φ , d'après (9),

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) = -\alpha_0.$$

L'intégration de cette équation donne

$$F(\vartheta) = \alpha_0 \log \sin \vartheta + c_1 \log \tan \frac{\vartheta}{2} + c_2 \quad (\alpha < \vartheta < \beta),$$

c_1 et c_2 étant deux constantes d'intégration. Nous écrirons encore

$$F(\vartheta) = (\alpha_0 \log 2 + c_2) + (\alpha_0 + c_1) \log \sin \frac{\vartheta}{2} + (\alpha_0 - c_1) \log \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Si (β, γ) , $\beta < \gamma$, est de même le plus grand intervalle d'extrémité gauche β ne contenant aucun point de $\bar{E}$ à son intérieur, $F(\vartheta)$ vérifie encore l'équation $\Delta_2 F(\vartheta) = -\alpha_0$ pour $\beta < \vartheta < \gamma$; par suite, dans cet intervalle,

$$F(\vartheta) = (\alpha_0 \log 2 + c'_2) + (\alpha_0 + c'_1) \log \sin \frac{\vartheta}{2} + (\alpha_0 - c'_1) \log \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (\beta < \vartheta < \gamma),$$

c'_1 et c'_2 étant deux nouvelles constantes d'intégration. Mais, comme, d'après le théorème IX, au point β ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 F(\vartheta; h)}{\sin \frac{h}{2}} = 0,$$

il est facile de voir, en utilisant les développements donnés au paragraphe 5 et en remarquant que $F(\vartheta)$ continue possède dans les zones $\alpha < \vartheta < \beta$, $\beta < \vartheta < \gamma$ une différentielle totale seconde continue, que cette relation a pour conséquence

$$\frac{\partial F(\beta - 0)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial F(\beta + 0)}{\partial \vartheta}.$$

et par suite $c_1 = c'_1$. La continuité de $F(\vartheta)$ au point β entraîne ensuite

$c_2 = c'_2$. $F(\vartheta)$ est par conséquent représentée par la même expression analytique dans tout l'intervalle $\alpha < \vartheta < \gamma$. Si l'ensemble E est formé d'un nombre fini de points, on obtient immédiatement pour $0 < \vartheta < \pi$

$$F(\vartheta) = a_0 \log 2 + c_2 + (a_0 + c_1) \log \sin \frac{\vartheta}{2} + (a_0 - c_1) \log \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Ce résultat s'étend par un procédé connu ⁽¹⁾ au cas général d'un ensemble réductible quelconque. Comme $F(\vartheta)$ est encore continue pour $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, il est nécessaire que $a_0 + c_1 = 0$, $a_0 - c_1 = 0$, d'où $a_0 = c_1 = 0$, de sorte que $F(\vartheta)$ ne peut être qu'une constante

$$F(\vartheta) = c_2.$$

L'intégration terme à terme dans $(0, \pi)$ de la série uniformément convergente (17), multipliée préalablement par $\sin \vartheta$, donne, en tenant compte des relations (1) pour $m = 0$,

$$\int_0^\pi F(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0.$$

Par conséquent, $c_2 = 0$ et $F(\vartheta)$ est identiquement nulle pour $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Multipliant (17) par $P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta$ et intégrant entre 0 et π , nous aurons donc

$$0 = \int_0^\pi F(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = - \frac{a_n}{2n+1} \frac{2}{n(n+1)},$$

et par suite $a_n = 0$.

11. *Le problème de du Bois-Reymond.* — Alors que le théorème précédent est une réponse au problème de Cantor, le suivant résout partiellement le problème de du Bois-Reymond :

THÉORÈME XI. — Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$, à l'exception au plus des points d'un ensemble réduc-

⁽¹⁾ Voir, par exemple, H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 122.

tible, vers une fonction $f(x)$, bornée dans cet intervalle, on a ⁽¹⁾

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ici encore, d'après le théorème I, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$; par suite la série uniformément convergente

$$F(\varpi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \varpi)$$

est une fonction continue sur toute la sphère. $d\sigma' = \sin \omega d\omega d\psi'$ désignant l'élément d'aire au point (ϖ', ψ') , on vérifie facilement au moyen des formules (13) et (14) que

$$\begin{aligned} (21) \quad \Delta_2 \left(\int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_n(\cos \varpi') d\sigma'; h \right) \\ = -2\pi P_n(\cos \varpi) [1 - P_n(\cos h)] \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega \\ = \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} \Delta_2 P_n(\cos \varpi'; h) d\sigma' \quad (0 \leq r \leq \pi), \end{aligned}$$

et par suite, en vertu de la convergence uniforme de la série (17),

$$\begin{aligned} (22) \quad \Delta_2 \left(\int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} F(\varpi') d\sigma'; h \right) \\ = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \varpi) \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1)} \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega \\ = \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} \Delta_2 F(\varpi'; h) d\sigma'. \end{aligned}$$

(1) La condition $f(x)$ bornée dans l'intervalle $(-1, +1)$ pourrait être remplacée par la suivante, plus générale : La fonction $f(x)$ est de carré sommable dans le voisinage des points -1 et $+1$, simplement sommable dans le reste de l'intervalle $(-1, +1)$ et telle que l'ensemble des points dans le voisinage desquels elle n'est pas bornée soit un ensemble réductible. Quelques changements insignifiants dans la démonstration donnée conduisent à cette extension. La restriction $f(x)$ de carré sommable dans le voisinage des points ± 1 tient à ce que la méthode de démonstration employée exige que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}} = 0$, b_n étant le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Legendre de $f(x)$.

De l'équation différentielle (9) résulte par intégration

$$\left| \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega \right| \\ = \left| \frac{\sin r P_n(\cos r) - \int_0^r P_n(\cos r) \cos r dr}{n(n+1)} \right| < \frac{2}{n(n+1)};$$

par conséquent la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega$$

est absolument convergente, ce qui assure pour $0 < \vartheta < \pi$ la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega.$$

Le théorème IX appliqué à $\int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} F(\vartheta') d\sigma'$ considérée comme fonction de ϑ , φ , donne donc, d'après (22),

$$(23) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} \frac{\Delta_2 F(\vartheta'; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} d\sigma' \\ = \Delta_2^* \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} F(\vartheta') d\sigma' \\ = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega \\ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_n(\cos \vartheta') d\sigma' \quad (0 < \vartheta < \pi, 0 \leq r \leq \pi).$$

Or, remarquons qu'en tout point n'appartenant pas à l'ensemble réductible $\bar{E}(\vartheta)$, d'après le théorème IX,

$$(24) \quad \Delta_2^* F(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta) = f(\cos \vartheta) - a_0;$$

β étant un point isolé de $\bar{E}$, $\neq 0, \pi$ et (α, β) le plus grand intervalle d'extrémité droite β ne contenant à son intérieur aucun point de $\bar{E}$, prenons $r > 0$ assez petit pour que $\alpha + r < \beta - r$. Le corollaire du paragraphe 6 montre alors, $\Delta_2^* F$ étant d'après (24) bornée dans la zone sphérique $\alpha + r \leq \varpi \leq \beta - r$, que $\frac{\Delta_2 F(\varpi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}}$ est uniformément bornée

en h dans cet intervalle. Un théorème de M. Lebesgue sur l'intégration des suites uniformément bornées de fonctions ⁽¹⁾ permet de conclure

$$\begin{aligned} \lim_{h=0} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} \frac{\Delta_2 F(\varpi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} d\sigma' &= \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} \lim_{h=0} \frac{\Delta_2 F(\varpi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} d\sigma' \\ &= \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} [f(\cos \varpi') - a_0] d\sigma' \\ &(\alpha < \alpha + r \leq \varpi \leq \beta - r < \beta). \end{aligned}$$

De la comparaison de cette relation avec la formule (23) résulte

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} f(\cos \varpi') d\sigma' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_n(\cos \varpi') d\sigma' \\ &(\alpha < \alpha + r \leq \varpi \leq \beta - r < \beta). \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant exprimer d'une autre manière le premier membre de (25). $f(x)$ étant une fonction bornée, nous pouvons former les coefficients

$$b_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

de la série de Legendre dont elle est la génératrice. Le théorème III montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}} = 0$ et le théorème IV amène facilement à conclure que la série $\sum b_n P_n(\cos \varpi)$ peut être intégrée terme à terme dans toute

⁽¹⁾ H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 14.

calotte sphérique et qu'en particulier

$$(26) \quad \left\{ \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} f(\cos \vartheta') d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_n(\cos \vartheta') d\sigma' \right. \\ \left. (0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq r \leq \pi). \right.$$

Notons $a'_n = a_n - b_n$ et remarquons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{\sqrt{n}} = 0$; (25) et (26) montrent que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_n(\cos \vartheta') d\sigma' = 0 \quad (\alpha < \alpha + r \leq \vartheta \leq \beta - r < \beta).$$

La fonction

$$H(\vartheta, r) = \frac{1}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n(n+1)} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_n(\cos \vartheta') d\sigma' \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta) \frac{2\pi}{r^3} \int_0^r d\rho \int_0^{\rho} P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega$$

est pour $r > 0$ une fonction continue du point (ϑ, r) sur la sphère. Par conséquent, en vertu du théorème IX et de la relation précédente,

$$\Delta_2^* H(\vartheta, r) = - \frac{a'_0}{r^3} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_0 d\sigma' = - \frac{2\pi a'_0 (r - \sin r)}{r^3} \equiv - \alpha_0(r) \\ (\alpha < \alpha + r \leq \vartheta \leq \beta - r < \beta),$$

c'est-à-dire, d'après le corollaire de ce même théorème,

$$\Delta_2 H(\vartheta, r) = - \alpha_0(r).$$

En intégrant cette équation, nous obtenons donc, $c_1(r)$ et $c_2(r)$ étant deux fonctions arbitraires de r ,

$$H(\vartheta, r) = \alpha_0(r) \log \sin \vartheta + c_1(r) \log \tan \frac{\vartheta}{2} + c_2(r) \\ (\alpha < \alpha + r \leq \vartheta \leq \beta - r < \beta).$$

La série $\sum \frac{a'_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta)$ étant absolument convergente,

$$\frac{1}{r^3} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_n(\cos \vartheta') d\sigma'$$

ayant pour limite $\frac{\pi}{3}$ lorsque r tend vers zéro et étant uniformément borné en r, n

$$\left| \frac{1}{r^3} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} P_n(\cos \varpi') d\sigma' \right| \leq \frac{1}{r^3} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leq \rho} d\sigma' = \frac{2\pi(r - \sin r)}{r^3} < \frac{\pi}{3},$$

la série qui définit $H(\varpi, r)$ est uniformément convergente en r . Par conséquent, pour toute valeur de ϖ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} H(\varpi, r) = \frac{\pi}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n(n+1)} P_n(\cos \varpi).$$

Par suite, pour $\alpha < \varpi < \beta$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\alpha_0(r) \log \sin \varpi + c_1(r) \log \tan \frac{\varpi}{2} + c_2(r) \right] = \frac{\pi}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n(n+1)} P_n(\cos \varpi).$$

Les limites de $c_1(r)$ et de $c_2(r)$ pour $r = 0$ existent donc. Notons-les $\frac{\pi C_1}{3}$ et $\frac{\pi C_2}{3}$. Celle de $\alpha_0(r)$ est $\frac{\pi}{3} a'_0$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n(n+1)} P_n(\cos \varpi) = a'_0 \log \sin \varpi + C_1 \log \tan \frac{\varpi}{2} + C_2 \quad (\alpha < \varpi < \beta).$$

Une relation de ce genre, avec peut-être d'autres valeurs pour les constantes C , a lieu dans tout intervalle ne contenant aucun point de $\bar{E}$ à son intérieur. En s'appuyant, comme dans le paragraphe 10, sur la relation

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \Delta_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n(n+1)} P_n(\cos \varpi); h \right) = 0,$$

donnée par le théorème IX, on établit d'abord que les constantes C_1 et C_2 ont mêmes valeurs dans tous ces intervalles. La continuité de la série sur toute la sphère a ensuite comme conséquence $a'_0 = C_1 = 0$. L'intégration dans $(0, \pi)$ de $\sum \frac{a'_n}{n(n+1)} P_n(\cos \varpi) \sin \varpi$ montre encore que

$C_2 = 0$, de sorte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n(n+1)} P_n(\cos \vartheta) = 0 \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi);$$

d'où résulte immédiatement $a'_n = 0$. On a donc $a_n = b_n$, c'est-à-dire

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx.$$

Une conséquence immédiate du théorème X en relation avec le théorème IV est donnée par le théorème suivant :

THÉOREME XII. — *Étant donnée une suite de constantes quelconques $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction sommable $f(x)$, telle que*

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx,$$

est que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^x P_n(x) dx$ converge dans tout l'intervalle

$(-1 \leq x \leq +1)$ vers $\int_{-1}^x f(x) dx$.

La nécessité de la condition est démontrée par le théorème IV. La suffisance résulte du théorème d'unicité. Soit, en effet,

$$b_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx.$$

D'après le théorème IV

$$\int_{-1}^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{-1}^x P_n(x) dx \quad (-1 \leq x \leq +1).$$

On aura donc, dans tout l'intervalle $(-1, +1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \int_{-1}^x P_n(x) dx = 0.$$

Pour $x = 1$, cette relation donne $a_0 - b_0 = 0$. Or, de la convergence de la série $\sum a_n \int_{-1}^x P_n(x) dx$ résulte celle de la série $\sum a_n \int_0^x P_n(x) dx$.

La suite

$$f_n(x) = n \sqrt{n} \int_0^x P_n(x) dx$$

remplit les conditions exigées par le théorème général énoncé au paragraphe 1. On le voit facilement au moyen des formules (4) et (2).

On a donc nécessairement $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n \sqrt{n}} = 0$. Comme, d'autre part, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$, il vient, en utilisant la formule (2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n - b_n) P_n(x)}{n} = 0,$$

sauf peut-être pour $x = \pm 1$. Par conséquent, en notant $a'_n = a_n - b_n$, on aura, en vertu de calculs déjà faits au paragraphe 4, pour $-1 < x < +1$,

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \int_{-1}^x P_n(x) dx = \left(a'_0 - \frac{1}{3} a'_1 \right) P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a'_{n-1}}{2n-1} - \frac{a'_{n+1}}{2n+3} \right) P_n(x).$$

Le théorème d'unicité nous donne donc

$$a'_0 - \frac{a'_1}{3} = 0, \quad \frac{a'_{n-1}}{2n-1} - \frac{a'_{n+1}}{2n+3} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $a'_0 = a_0 - b_0 = 0$,

$$a'_n = 0 \quad \text{ou} \quad a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$