

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

Sur l'instabilité de l'équilibre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 30 (1913), p. 521-561

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30_521_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

L'INSTABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE,

PAR M. ÉMILE COTTON,
Professeur à l'Université de Grenoble.

La réciproque du théorème bien connu de Lagrange et Lejeune-Dirichlet concernant la stabilité de l'équilibre fait l'objet principal de ce travail; elle s'énonce de la façon suivante :

Étant donné un système matériel assujéti à des liaisons holonomes indépendantes du temps, pour lequel les forces données dérivent d'une fonction de forces ; si, pour une position d'équilibre, cette fonction n'est pas maximum, l'équilibre ne peut être stable.

De nombreux et importants articles de MM. Liapounoff, Kneser, Hamel, Hadamard, Painlevé et Bohl ont été consacrés à ce sujet ⁽¹⁾, sans que la proposition précédente ait été établie dans toute sa généralité. C'est ainsi que, tout en complétant les résultats de ses devanciers, M. Painlevé ⁽²⁾ suppose encore que les tangentes réelles à la ligne de niveau passant par la position d'équilibre sont distinctes, ou bien que cette position est point double, les tangentes pouvant alors être confondues. Le cas du point multiple d'ordre supérieur à deux avec tangentes réelles confondues est donc écarté.

⁽¹⁾ Pour la bibliographie, nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer au n° 37 de l'article de M. Painlevé sur les équations différentielles, inséré dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, Vol. III (voir p. 55). Nous devons cependant ajouter que le Mémoire de M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 5^e série, t. III, 1897) nous a été particulièrement utile et que nous avons tiré une bonne indication d'un travail de M. Caillet (*Annales de l'Université de Grenoble*, t. XXV, 1913).

⁽²⁾ *Comptes rendus*, t. CXXV, 1897.

L'éminent géomètre a d'ailleurs montré ⁽¹⁾ qu'il était nécessaire d'apporter des restrictions à l'énoncé donné plus haut, en indiquant un exemple où l'équilibre est stable sans que la fonction soit maximum.

On peut ramener les méthodes dont les auteurs précédents ont fait usage à deux types distincts : les unes consistent à mettre en évidence des mouvements asymptotiques à la position d'équilibre, et à utiliser la réversibilité du mouvement, les autres sont basées sur les signes que prennent, au voisinage de la position d'équilibre, des fonctions convenablement choisies des positions et des vitesses des points du système.

Dans ce travail ⁽²⁾, nous démontrons la proposition énoncée plus haut, en supposant qu'il s'agit d'un système matériel à deux paramètres, la fonction des forces et les coefficients de la force vive étant des fonctions holomorphes ⁽³⁾ des paramètres dans le domaine de la position d'équilibre, et en admettant que cette position d'équilibre est isolée.

Notre méthode se range dans le second groupe.

Les difficultés à vaincre tiennent à ce que l'étude au voisinage d'un point O du signe d'une fonction holomorphe de deux variables x, y s'annulant en O est rendue délicate par le fait que les termes les plus importants du développement n'apparaissent pas immédiatement, et varient même suivant la façon dont le point (x, y) tend vers O.

Aussi bien, avant d'aborder l'objet principal de ce Mémoire, nous donnons (nos 1 à 5) quelques indications générales sur l'étude, au voisinage de l'origine, de certaines fonctions (réelles) des deux variables (réelles) x, y . Pour donner une idée de ces considérations, d'ailleurs très simples, signalons qu'on peut parfois définir pour une fonction $F(x, y)$ et pour un *onglet* (sorte d'angle à côtés curvilignes ayant son sommet à l'origine) un ordre infinitésimal par rapport à l'une seule de ces variables, x par exemple.

Étant données deux fonctions de cette espèce s'annulant à l'origine, si celle dont l'ordre infinitésimal est le plus petit a un signe déterminé

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. CXXXVIII, 1904.

⁽²⁾ Des indications sommaires sur notre méthode ont fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus*, t. CLIII, 1911.

⁽³⁾ On peut faire des hypothèses moins restrictives (*Comptes rendus*, t. CLVI, 1913, p. 1054).

dans l'onglet, elle donne ce signe à la somme des deux fonctions. Ces généralités me paraissent d'ailleurs devoir être utiles dans d'autres questions.

Pour démontrer l'instabilité de l'équilibre, nous supposons d'abord qu'il s'agit du mouvement dans un plan.

Nous utilisons, avons-nous dit, certaines fonctions de signe constant dans des régions avoisinant la position d'équilibre; mais on donne à cette étude un caractère plus intuitif en faisant correspondre à ce signe le sens constant du mouvement d'une ligne L entraînée par le mobile. Dans la construction de cette ligne (nos 6 à 10), la courbe de niveau passant par la position d'équilibre joue un rôle essentiel; les branches imaginaires interviennent en même temps que les branches réelles pour la division en onglets de la partie du plan avoisinant l'origine. A chaque onglet correspond un segment de la ligne L ; le plus souvent ce segment est rectiligne, parfois il est curviligne; deux segments correspondant à deux onglets voisins ont une extrémité commune sur la frontière qui les sépare.

A chaque onglet, on fait correspondre une fonction $V(x, y)$; le signe de cette fonction reste invariable dans l'onglet au voisinage de l'origine: on le vérifie (nos 11 à 13 et 18) en utilisant une décomposition de la fonction de forces $U(x, y)$ en facteurs réels, conséquence d'un théorème de Weierstrass. Cette décomposition nous permet d'étudier isolément l'influence de chaque demi-branche réelle ou de chaque couple de demi-branches imaginaires conjuguées de la ligne de niveau passant par la position d'équilibre.

Du signe des fonctions V on déduit aisément (nos 14 à 16 et 19) le sens du déplacement de la ligne L et l'instabilité de l'équilibre.

Un dernier paragraphe (n° 20) montre comment le cas général d'un mouvement à deux paramètres se ramène au cas d'un mouvement plan.

1. Nous rencontrerons souvent dans la suite des fonctions définies par des séries de la forme

$$(1) \quad y = A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + \dots,$$

où les coefficients A sont des constantes réelles, les exposants α_i des

fractions positives croissant avec l'indice i , et qui sont réductibles à un même dénominateur n . La variable réelle x est comprise entre zéro et un nombre positif h_1 et pour le calcul des puissances de x , on donne au radical $z = \sqrt[n]{x}$ sa détermination arithmétique.

L'introduction de la variable auxiliaire z transforme la série (1) en une série entière dont le rayon de convergence est censé différent de zéro; on peut déduire de là quelques propriétés des fonctions considérées. C'est ainsi, par exemple, que $z = 0$ est un zéro isolé, et qu'une telle fonction a un signe bien déterminé (celui du coefficient A_1 de son premier terme) pour x positif et suffisamment petit.

La somme, la différence, le produit de deux fonctions de cette nature

$$(2) \quad y = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i x^{\alpha_i}, \quad y = \Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i x^{\beta_i}$$

sont encore des fonctions de la même nature; il en est de même du quotient $\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}$ si, A_1, B_1 étant différent de zéro, β_1 n'est pas inférieur à α_1 ; le développement du quotient commence par un terme en $x^{\beta_1 - \alpha_1}$. Si $\beta_1 < \alpha_1$, le quotient est égal à une fraction ayant pour dénominateur $x^{\alpha_1 - \beta_1}$ et pour numérateur une fonction de l'espèce considérée.

Deux fonctions distinctes telles que $\varphi(x)$ et $\Phi(x)$ sont, pour x voisin de zéro (et positif), rangées dans un ordre de grandeur bien déterminé. Pour le trouver, il suffit de comparer les premiers termes non communs aux deux développements, soient Ax^α, Bx^β ces termes; si $\alpha = \beta$, $\varphi - \Phi$ et $A - B$ sont de même signe; si $\alpha \neq \beta$, la différence $\varphi - \Phi$ a le signe de A ou celui de $-B$, selon que α est inférieur ou supérieur à β . Par exemple, pour x positif et assez petit, on a les inégalités (voir n° 9)

$$x - \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{3} x^{\frac{1}{3}} + \dots > x + x^2 + \dots > x - \sqrt[3]{2} x^{\frac{1}{3}} + \dots$$

Toutes ces propriétés, bien évidentes, ont été signalées parce qu'elles interviennent constamment dans la suite.

2. Nous appelons *onglet* la partie du plan comprise entre deux courbes $y = \varphi(x), y = \Phi(x)$ définies par des développements (2) de

l'espèce considérée et par une droite $x = h$, où h est un nombre positif assez petit ⁽¹⁾ pour que la différence $\Phi(x) - \varphi(x)$ garde un signe constant dans l'intervalle $0 < x \leq h$; soit, pour fixer les idées, le signe $+$.

Considérons alors une fonction $\psi(x)$ assujettie à la condition que la partie de la courbe $y = \psi(x)$ correspondant à l'intervalle $0 < x \leq h$ soit intérieure à l'onglet, c'est-à-dire qu'on ait

$$(3) \quad \varphi(x) \leq \psi(x) \leq \Phi(x)$$

dans cet intervalle. Quelles conclusions peut-on tirer de ce fait en ce qui concerne la façon dont $\psi(x)$ tend vers zéro avec x ?

Différents cas sont à distinguer, suivant que les courbes frontières de l'onglet $y = \varphi(x)$, $y = \Phi(x)$ sont plus ou moins voisines et suivant la position de Ox par rapport à l'onglet.

1° Si Ox est intérieur à l'onglet, c'est-à-dire si

$$\varphi(x) < 0 < \Phi(x),$$

on ne peut rien dire *a priori* sur le signe de $\psi(x)$. Soit γ un nombre égal au plus petit des exposants α_1 et β_1 (A_1, B_1 étant différent de zéro) ou à leur valeur commune s'ils sont égaux, le quotient $\frac{\psi(x)}{x^\gamma}$ reste borné quand x tend vers zéro. Nous conviendrons de dire que l'ordre infinitésimal de $\psi(x)$ n'est pas inférieur à γ ; comme ψ n'est assujettie qu'à la condition que la courbe $y = \psi(x)$ soit intérieure à l'onglet, nous dirons que l'ordre infinitésimal de l'onglet n'est pas inférieur à γ . Il est bien entendu toutefois que les mots *ordre infinitésimal* et *non inférieur* ne doivent pas, en général, être séparés les uns des autres. En particulier, pour employer cette expression, il n'est pas nécessaire que ψ ait un ordre infinitésimal déterminé au sens classique du mot (voir 3°).

Par exemple, l'onglet de frontières

$$(a) \quad y = -x^{\frac{3}{2}} + x^2 + \dots, \quad y = x^{\frac{5}{3}} - 3x^2 + \dots$$

(1) On pourra naturellement substituer à h un nombre plus petit.

est traversé par Ox et son ordre infinitésimal n'est pas inférieur à $\frac{3}{2}$.

Quand Ox ne traverse plus l'onglet, c'est-à-dire que pour x , positif et petit, φ et Φ ont même signe, ce signe est aussi celui de ψ . Plusieurs cas peuvent encore se présenter.

2° Si φ et Φ commencent par des termes d'exposants différents (mais de même signe) $A_1 x^{\alpha_1}$, $B_1 x^{\beta_1}$, soient γ et γ' le plus petit et le plus grand de ces deux exposants. Alors $\frac{\psi(x)}{x^\delta}$ tend vers zéro avec x si $\delta < \gamma$ et devient infini si $\delta > \gamma'$; nous conviendrons alors de dire que l'ordre infinitésimal de ψ (ou l'ordre infinitésimal de l'onglet) n'est pas inférieur à γ et n'est pas supérieur à γ' ; ici encore, les mots en italique ne doivent pas être séparés les uns des autres.

Ainsi, l'ordre infinitésimal de l'onglet de frontières

$$(b) \quad y = x^{\frac{3}{2}} + x^2 + \dots, \quad y = x - x^2 + \dots$$

n'est pas inférieur à un et n'est pas supérieur à $\frac{3}{2}$.

3° Si φ et Φ commencent par des termes de même exposant α_1 et de même signe, mais de coefficients différents; alors $\frac{\psi(x)}{x^{\alpha_1}}$ reste fini et différent de zéro quand x tend vers zéro.

On dit alors que l'ordre infinitésimal ⁽¹⁾ de $\psi(x)$ est bien défini et égal à α_1 ; cependant, il peut arriver que $\frac{\psi(x)}{x^{\alpha_1}}$ ne tende pas vers une limite déterminée quand x tend vers zéro. On dira aussi que l'onglet a un ordre infinitésimal égal à α_1 . Tel est l'onglet

$$(c) \quad y = 2x + x^{\frac{4}{3}} + \dots, \quad y = 3x + x^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

dont l'ordre infinitésimal est égal à l'unité.

4° Si φ et Φ commencent par le même terme $A_1 x^{\alpha_1}$, l'ordre infinitésimal de $\psi(x)$ est encore égal à α_1 , mais maintenant l'infiniment

⁽¹⁾ Cette définition de l'ordre infinitésimal est maintenant classique. (Voir TANNERY, *Leçons d'Algèbre et d'Analyse*, t. II, p. 250.)

petit $\psi(x)$ admet une *partie principale* $A_1 x^{\alpha_1}$, la différence $\psi(x) - A_1 x^{\alpha_1}$ est alors un infiniment petit d'ordre non inférieur à un nombre $\gamma > \alpha_1$. Nous dirons encore pour abréger que *l'onglet admet comme ordre infinitésimal α_1 et comme partie principale $A_1 x^{\alpha_1}$.*

Il peut arriver, comme cas plus particulier, que φ et Φ aient en commun plusieurs termes du début de leurs développements; soient

$$f(x) = A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + \dots + A_n x^{\alpha_n}$$

ces termes communs, alors la différence $\psi(x) - f(x)$ est d'ordre infinitésimal non inférieur à un nombre $\gamma > \alpha_n$. Nous dirons que les termes communs à φ et Φ constituent *les termes principaux de l'onglet*. Par exemple, si les frontières de l'onglet sont

$$(d) \quad y = x + x^2 - x^{\frac{5}{2}} + \dots, \quad y = x + x^2 + x^{\frac{5}{2}} + \dots,$$

les termes principaux sont

$$f(x) = x + x^2.$$

3. Soient x, y les coordonnées d'un point intérieur à l'onglet, nous pouvons poser

$$(4) \quad y = \theta \varphi(x) + (1 - \theta) \Phi(x),$$

θ désignant une nouvelle variable pouvant remplacer y et qui reste comprise entre zéro et un. Lorsque x, y décrit l'onglet, x, θ se meut dans un rectangle.

Ordonnons les développements de φ et Φ suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n}}$, n étant le dénominateur commun aux exposants α et β . Soient

$$(5) \quad \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i x^{\frac{i}{n}}, \quad \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_i x^{\frac{i}{n}}$$

ces deux développements que nous supposons absolument et uniformément convergents pour $0 \leq x \leq h$. Les premiers coefficients $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ ne sont plus nécessairement différents de zéro.

On peut alors écrire (4) de la façon suivante :

$$(6) \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} [\theta a_i + (1 - \theta) b_i] x^{\frac{i}{n}}$$

et la série est absolument et uniformément convergente dans le rectangle

$$0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

On remarque que, si les développements de φ et Φ commencent par des termes communs, ces termes se retrouvent au début du développement (6).

Les séries (5) et (6) permettent de définir, dans certains cas, l'ordre infinitésimal de certaines fonctions des deux variables x, y dans l'onglet.

Soit $F(x, y)$ une fonction holomorphe de y et de $x^{\frac{1}{n}}$ [ce radical ⁽¹⁾ ayant toujours sa détermination arithmétique]; en y substituant à y le développement (6), le résultat peut être ordonné suivant les puissances croissantes de $x^{\frac{1}{n}}$

$$(7) \quad F(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} C_i x^{\frac{i}{n}},$$

les coefficients C_i dépendent de θ .

Supposons que F s'annule pour $x = y = 0$, alors $C_0 = 0$.

Parmi les coefficients suivants, il peut en être d'identiquement nuls. Soit D, x^{γ_1} le premier terme pour lequel il en est autrement; il faut distinguer plusieurs cas, comme au n° 2.

1° Le cas le plus défavorable est celui où D s'annule quand θ varie dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 1$; tout ce qu'on peut dire alors c'est que $\frac{F(x, y)}{x^{\gamma_1}}$ reste borné quand le point (x, y) tend vers l'origine O en restant dans l'onglet. Nous pourrions exprimer ceci en disant que, dans l'onglet, l'ordre infinitésimal de $F(x, y)$ (par rapport à x) n'est pas inférieur à γ_1 (en ne séparant pas ces mots les uns des autres). Tel serait, par

(1) n est un entier quelconque, mais on peut toujours le remplacer par un de ses multiples et supposer que c'est le même entier qui figure dans les développements (5).

exemple, le cas de la fonction $F(x, y) = 4y^2 - 25x^2$ pour l'onglet cité comme exemple au n° 2, 3°. On a ici

$$D_1 = 4(\theta - 3)^2 - 25 \quad \text{et} \quad \gamma_1 = 2.$$

Il pourra arriver que D_1 s'annule sans changer de signe, et qu'en outre $F(x, y)$ garde un signe constant pour $0 < x \leq h' \leq h$; lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons que la fonction F est *définie positive* ou *définie négative* dans l'onglet, au voisinage de O , selon que le signe est $+$ ou $-$. Dans les mêmes conditions, si le premier terme ne s'annulant pas en même temps que D_1 est le terme en x^{γ_1} , nous dirons que l'ordre infinitésimal de $F(x, y)$ est non inférieur à γ_1 et non supérieur à γ_2 . Ainsi, dans le même onglet (c) (n° 2, 3°), la fonction

$$F(x, y) = y^2 - 4x^2 = [(3 - \theta)^2 - 4]x^2 + 2\theta(3 - \theta)x^{\frac{7}{3}} + \dots$$

est définie positive dans l'onglet, puisqu'on a $y > 2x > -2x$ (1); l'ordre infinitésimal de la fonction dans l'onglet est non inférieur à 2 et non supérieur à $\frac{7}{3}$.

2° Supposons que D_1 ne s'annule pas pour $0 \leq \theta \leq 1$. Dans cet intervalle, $|D_1|$ admet une borne inférieure Δ_1 . La différence $F(x, y) - D_1 x^{\gamma_1}$ est une série de la forme (7) où les puissances de x ont des exposants tous supérieurs à γ_1 . Les coefficients de ces puissances restant bornés, la valeur absolue de $\frac{F(x, y) - D_1 x^{\gamma_1}}{x^{\gamma_1}}$ peut être rendue aussi petite qu'on le voudra en prenant x assez voisin de zéro, en particulier on peut la supposer inférieure à $\frac{\Delta_1}{2}$. Dès lors, $F(x, y)$ reste compris entre $(D_1 - \frac{\Delta_1}{2})x^{\gamma_1}$, $(D_1 + \frac{\Delta_1}{2})x^{\gamma_1}$, et ces nombres ont le signe de $D_1 x^{\gamma_1}$. On voit donc que $F(x, y)$ est définie au voisinage de l'origine dans l'onglet considéré. De plus, le quotient $\frac{F(x, y)}{x^{\gamma_1}}$ reste borné quand le point (x, y)

(1) Il est clair qu'on peut reconnaître si une fonction $F(x, y)$ est définie en étudiant la disposition des branches réelles de la courbe $F(x, y) = 0$ par rapport aux frontières de l'onglet (voir plus loin n° 12).

tend vers l'origine en restant dans l'onglet; nous dirons que *la fonction* $F(x, y)$ *est, dans l'onglet, infiniment petite d'ordre* γ_1 *par rapport à* x .

Il peut arriver que D_1 soit indépendant de θ ; dans ce cas particulier, nous dirons que $D_1 x^{\gamma_1}$ est, dans l'onglet, la partie principale de $F(x, y)$.

Par exemple, la fonction

$$y + x + x^{\frac{7}{6}} = (4 - \theta)x + \dots$$

est définie positive et infiniment petite du premier ordre dans l'onglet (c) ($n^\circ 2, 3^\circ$); mais on ne peut alors parler de partie principale. La même fonction est encore définie positive et infiniment petite du premier ordre dans l'onglet (d) ($n^\circ 2, 4^\circ$); elle admet dans ce dernier onglet une partie principale $2x$.

Il pourrait arriver que, non seulement D_1 , mais plusieurs termes du début du développement (7) de $F(x, y)$ soient indépendants de θ ; désignons-les par

$$D_1 x^{\gamma_1} + D_2 x^{\gamma_2} + \dots + D_p x^{\gamma_p};$$

la différence

$$F(x, y) - (D_1 x^{\gamma_1} + \dots + D_p x^{\gamma_p})$$

serait infiniment petite d'un ordre infinitésimal non inférieur à un nombre $\gamma' > \gamma_p$; nous dirions que $D_1 x^{\gamma_1} + \dots + D_p x^{\gamma_p}$ constituent les *termes principaux* de $F(x, y)$.

4. Considérons maintenant le *quotient*

$$K(x, y) = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

de deux fonctions holomorphes de y et $x^{\frac{1}{n}}$. On peut l'étudier dans l'onglet au voisinage de l'origine, en ce qui concerne son signe et la façon dont elle peut tendre vers zéro ou devenir infinie, en étudiant séparément le numérateur et le dénominateur.

Parmi les nombreux cas possibles, nous signalerons seulement le suivant, important pour la suite : les fonctions F et G sont définies, et de même signe, dans l'onglet, au voisinage de l'origine; de plus, on peut déterminer des nombres positifs A, α, h' tels qu'on ait

pour $0 < x \leq h' \leq h$, dans l'onglet considéré,

$$K(x, y) = \frac{F(x, y)}{G(x, y)} > \frac{A}{x^2}.$$

Soit alors $H(x, y)$ un quotient analogue à K , si le produit $x^2 H(x, y)$ tend vers zéro quand le point (x, y) tend vers l'origine d'une façon quelconque en restant toutefois dans l'onglet, alors la fonction

$$K(x, y) + H(x, y)$$

sera, comme $K(x, y)$, *définie positive dans l'onglet au voisinage de l'origine*. Cette proposition se démontre immédiatement (*comparer* n° 3, 2°); elle sera fréquemment utilisée dans la suite (*voir* les n°s 13 et 18).

5. Abordons maintenant la question de l'instabilité de l'équilibre.

Nous supposons qu'un point matériel M (dont nous prendrons la masse comme unité) se meut dans un plan parfaitement poli sous l'action d'une force dérivant d'une *fonction de forces* U sur laquelle nous faisons les hypothèses suivantes :

C'est une *fonction holomorphe des coordonnées x, y du mobile dans le domaine de l'origine O* ; elle s'annule en ce point ainsi que ses dérivées premières; mais n'admet pas de maximum en ce point. L'origine est ainsi point multiple de la ligne de niveau $U(x, y) = 0$ passant en ce point; nous admettrons, de plus, que *cette ligne de niveau n'admet pas de branche réelle multiple passant par l'origine*.

Nous devons établir que *le mobile sort d'une région R donnée (suffisamment petite) entourant le point O si les conditions initiales sont convenablement choisies sous les seules restrictions que la position initiale M_0 puisse être aussi voisine qu'on le voudra de la position d'équilibre, et que la vitesse initiale puisse être aussi petite qu'on le voudra*.

Notre démonstration consiste à établir qu'*une ligne variable L passant par le mobile M et entraînée dans son mouvement s'éloigne constamment de O* (pour des données initiales convenablement choisies) et finit par sortir de la région R où le mobile ne peut dès lors rester indéfiniment.

6. Avant d'expliquer la construction de la ligne L , nous allons

indiquer une *décomposition de U en facteurs réels*, très utile pour la suite.

Nous admettons que les axes de coordonnées ont été choisis distincts des tangentes au point multiple. Un théorème de Weierstrass ⁽¹⁾ permet alors d'écrire

$$(8) \quad U(x, y) = (y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n) U_1(x, y),$$

les a étant des fonctions holomorphes de x pour x voisin de zéro, s'annulant pour $x = 0$, et $U_1(x, y)$ une fonction de x, y holomorphe dans le domaine de l'origine ne s'annulant plus en ce point.

Les n racines de l'équation en y

$$(9) \quad u(x, y) = y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

s'annulent pour $x = 0$ et se groupent, comme on sait ⁽²⁾, en un certain nombre de systèmes circulaires, les p racines appartenant à un même système circulaire pouvant être représentées par un seul développement

$$(10) \quad y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^{1+\frac{1}{p}} + \dots + \alpha_i x^{1+\frac{i-1}{p}} + \dots,$$

où l'on attribue successivement à $x^{\frac{1}{p}}$ ses p déterminations.

Toutefois, comme nous limitons notre étude au domaine réel, nous modifierons un peu cette forme classique.

Nous distinguerons deux cas selon que x est positif ou négatif; le second cas se ramenant au premier par le changement de x en $-x$, nous supposons dans ce qui suit $x > 0$.

Alors les diverses déterminations de $x^{\frac{n}{p}}$ sont comprises dans la formule

$$\left(\cos \frac{2n\pi}{p} + i \sin \frac{2n\pi}{p} \right)^p \sqrt[p]{x^n},$$

le radical ayant sa détermination arithmétique; en supposant maintenant que le facteur $\cos \frac{2n\pi}{p} + i \sin \frac{2n\pi}{p}$ soit compris dans le coefficient

⁽¹⁾ Voir GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 273.

⁽²⁾ Voir GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 275.

de $\sqrt[p]{x^n}$ nous aurons (pour $x > 0$), et pour chaque système circulaire de p racines, p développements de la forme

$$(10 \text{ bis}) \quad y = \sum_{n=1}^{+\infty} (\beta_n + i\gamma_n) \sqrt[p]{x^{n+p-1}};$$

où les coefficients β_n et γ_n sont *réels*.

Si tous les coefficients γ_n sont nuls, au développement

$$(11) \quad y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sqrt[p]{x^{n+p-1}}$$

correspond une partie de la ligne de niveau $U = 0$, avoisinant l'origine, et que nous appellerons *demi-branche réelle issue de l'origine* dirigée du côté des x positifs. Nous désignerons par C_r les demi-branches réelles.

Si les coefficients γ_n ne sont pas tous nuls, nous écrirons la formule (10 bis) de la façon suivante :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = g(x) + ih(x), \\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sqrt[p]{x^{n+p-1}}, \\ h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sqrt[p]{x^{n+p-1}}. \end{array} \right.$$

Il est évident qu'à une racine imaginaire $y = g + ih$ correspond une racine imaginaire conjuguée $y = g - ih$.

On pourrait dire encore que le développement (12) caractérise une demi-branche imaginaire issue de l'origine à laquelle est associée une demi-branche imaginaire conjuguée. Toutefois il faut observer que cette définition des demi-branches imaginaires : ensemble de points ou couples de nombres x, y donnés par les formules (12), où l'on suppose x *réel* positif et assez petit, dépend essentiellement des choix des axes de coordonnées, contrairement à ce qui arrive pour les demi-branches réelles.

Aux demi-branches imaginaires conjuguées

$$(13) \quad y = g(x) + i h(x), \quad y = g(x) - i h(x), \quad x > 0,$$

g et h étant donnés par (12), nous associerons une demi-branche réelle d'une courbe donnée par

$$(14) \quad y = g(x),$$

nous désignerons par C_2 les demi-branches ainsi définies.

Ces courbes C_2 dépendent des axes choisis, d'après ce qu'on vient de dire. Pour donner un exemple simple mettant bien ce fait en évidence, observons que, si

$$U(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

a, b, c étant constants et $b^2 - ac < 0$, les lignes de niveau sont des ellipses homothétiques et concentriques, et la ligne $y = g(x)$ n'est autre que la partie située du côté des $x > 0$ du diamètre conjugué de Oy , commun par rapport à toutes ces ellipses; ce diamètre varie bien avec la droite choisie comme axe Oy .

Il est utile de remarquer, pour la suite, que, si les deux branches (13) ont même tangente à l'origine, cette tangente est réelle et se trouve également tangente à la courbe C_2 définie par (14). Comme nous supposons les axes distincts des tangentes à l'origine à la courbe $U = 0$, il faut nécessairement alors que g commence par un terme du premier degré en x et h par un terme de degré supérieur à un.

Si les tangentes à l'origine aux deux branches (13) sont distinctes, elles déterminent une ellipse évanouissante, et la tangente à la courbe C_2 associée aux branches (13) est le diamètre conjugué de Oy par rapport à cette ellipse.

7. Aux diverses racines de l'équation en y (9) correspond une décomposition de $u(x, y)$ et, par suite, de $U(x, y)$ en facteurs; nous réunirons les facteurs correspondant aux racines imaginaires conjuguées, de façon à ne faire figurer dans la décomposition que des éléments réels.

Nous aurons ainsi pour $x > 0$ et assez petit

$$(15) \quad U(x, y) = U_1(x, y) \Pi[y - f(x)] \Pi\{[y - g(x)]^2 + h^2(x)\}$$

en groupant ensemble d'une part les facteurs correspondant aux racines réelles et, d'autre part, les facteurs correspondant aux couples de racines imaginaires conjuguées.

En changeant x en $-x'$ dans U et opérant sur la fonction obtenue comme on vient de le faire, on obtiendrait un produit analogue correspondant à $x < 0$.

On remarquera que les deux décompositions n'admettent pas nécessairement le même nombre de facteurs réels du premier degré, les nombres des demi-branches réelles correspondant respectivement à $x > 0$ et à $x < 0$ pouvant différer. Ainsi pour

$$U(x, y) = [(\gamma - x)^2 - x^3](\gamma + x),$$

si $x > 0$, on a trois demi-branches réelles :

$$y = x + x^{\frac{3}{2}}, \quad y = x - x^{\frac{3}{2}}, \quad y = -x,$$

et pour $x < 0$ une seule : $y = -x$.

La méthode bien connue de Puiseux permet de déterminer effectivement les coefficients successifs des développements (10), ceux des séries (11), (12) et de la série entière $U_1(x, y)$, lorsque la fonction $U(x, y)$ est donnée. Si les hypothèses du n° 5 sont réalisées, les facteurs du type $y - f(x)$ sont distincts; il peut en être autrement des facteurs du type $(y - g)^2 + h^2$.

Observons qu'on peut obtenir, en quelque sorte par synthèse, une fonction $U(x, y)$ en choisissant arbitrairement, sous les réserves qui vont être indiquées, la fonction holomorphe $U_1(x, y)$ et les coefficients β_n, γ_n des développements des formes (11), (12) donnant des facteurs

$$y - f(x) \quad \text{ou} \quad [y - g(x)]^2 + h^2(x).$$

Il faut, bien entendu, que les développements en question soient convergents pour $|x|$ assez petit, et qu'en outre, à côté d'un facteur

$$y - f(x) \quad \text{ou} \quad [y - g(x)]^2 + h^2(x),$$

on fasse figurer tous ceux qui correspondent au même système circulaire de racines.

8. La construction de la ligne L (voir n° 5) fait intervenir une division de la partie du plan avoisinant l'origine O en *onglets* (n° 2). Les courbes frontières de ces onglets seront : les *demi-branches réelles* $(C_1)y = f(x)$ de la ligne de niveau passant en O, *celles des demi-branches* $(C_2)y = g(x)$ *des courbes associées aux demi-branches imaginaires conjuguées pour lesquelles les tangentes à l'origine sont réelles*, enfin des *demi-droites* (C_3) issues de O, et sur lesquelles nous revenons plus loin ⁽¹⁾.

Bien entendu, on suppose ces frontières tracées des deux côtés de Oy. Il est à peine besoin de dire qu'on n'aura pas nécessairement des lignes des trois espèces.

Les lignes C_1, C_2, C_3 étant tracées, une parallèle Δ à Oy, située du côté des x positifs, les rencontre dans un ordre bien déterminé ⁽²⁾, pourvu que sa distance à Oy ne soit pas trop grande. Les régions du plan comprises entre deux lignes *consécutives* forment des onglets correspondant à $x > 0$; on a de même ceux correspondant à $x < 0$. Enfin il reste deux onglets, l'un contenant Oy, l'autre la demi-droite opposée Oy'.

Nous supposerons que les angles formés par les deux tangentes à l'origine aux frontières de chacun des onglets ne surpassent pas une limite λ déterminée de la façon suivante.

L'angle λ est *inférieur à π* ; de plus s'il y a des tangentes imaginaires à la courbe de niveau passant à l'origine, en associant deux tangentes imaginaires conjuguées, on a une ellipse évanouissante; λ doit être *inférieur au double de l'angle aigu minimum des diamètres conjugués* des ellipses ayant mêmes asymptotes. Nous admettrons encore que *les onglets contenant Oy et Oy' ne sont pas limités par des courbes $y = g$* ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Dans certains cas exceptionnels (n° 16) on utilise aussi des branches C' symétriques de C par rapport à un axe.

⁽²⁾ Il pourrait arriver exceptionnellement qu'une ligne C_1 et une ligne C_2 soient confondues; cela n'aurait d'ailleurs aucun inconvénient pour la suite.

⁽³⁾ Cette seconde hypothèse est destinée à rendre applicable aux onglets en question

Ces hypothèses peuvent toujours être réalisées en adjoignant, s'il est nécessaire, aux lignes C_1 et C_2 des demi-droites C_3 ; c'est la seule utilité de ces demi-droites.

9. Donnons quelques exemples :

1° Soit d'abord

$$U = y^2 - x^2 + x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - y^3 + \dots$$

La décomposition en facteurs (1)

$$U = (y - x + x^2 + \dots)(y + x + 2x^2 + \dots)(1 - 2x + y + \dots)$$

convient quel que soit le signe de x . Les deux branches de courbe

$$y = f_1 = x - x^2 + \dots, \quad y = f_2 = -x - 2x^2 + \dots$$

sont divisées par l'origine en quatre demi-branches limitant quatre onglets qui contiennent respectivement Ox , Oy et les demi-droites opposées Ox' , Oy' .

Il en est de même, plus généralement, si $U = 0$ admet O comme *point double à tangentes distinctes* (les axes étant convenablement choisis).

2° Pour

$$U = (y - x)^2 - 2x^3 + 2x^2y - 2xy^2 + y^3 + \dots,$$

on a deux décompositions distinctes, savoir

$$= \left(y - x - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + \dots \right) \left(y - x + x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + \dots \right) (1 + y + \dots)$$

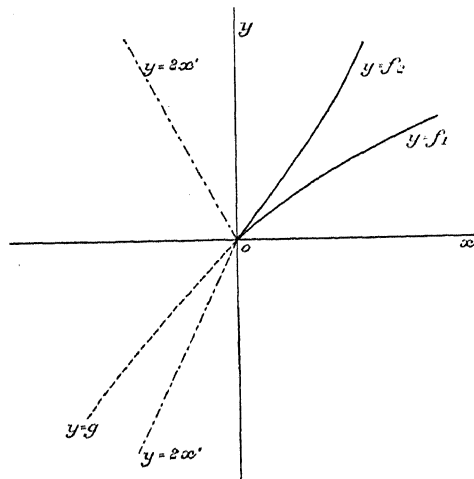
les résultats établis pour les onglets situés d'un côté déterminé de Oy . De cette façon les courbes limites de ces onglets particuliers ne dépendent pas des axes (alors que les lignes $y = g$ en dépendent; voir n° 6); et, en faisant tourner les axes d'un angle droit, ces deux onglets particuliers ne seront plus traversés par le nouvel axe des ordonnées. On verrait de même qu'on peut parfois utiliser (voir n° 9, 4°) un onglet limité par Oy et par une courbe $y = f$.

(1) Dans ceux des facteurs de U ne contenant pas de termes indépendants, les points désignent des termes contenant x seul dont l'ordre surpasse celui des termes écrits; pour le facteur contenant un terme indépendant, et pour le développement de $U(x, y)$ les points désignent des termes pouvant contenir à la fois x et y .

pour $x > 0$ et

$$U = \left[\left(y + x' + \frac{x'^2}{2} + \dots \right)^2 + \left(x'^{\frac{3}{2}} + \dots \right)^2 \right] (1 + y + \dots)$$

Fig. 1.



avec $x' = -x$ pour $x < 0$. Nous aurons comme frontières d'onglets les deux demi-branches (C_1)

$$y = f_1 = x - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + \dots, \quad y = f_2 = x + x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + \dots$$

pour $x > 0$, et pour $x < 0$ la demi-branche (C_2)

$$y = g = -x' - \frac{x'^2}{2} + \dots, \quad x' = -x > 0,$$

à laquelle il convient, pour l'isoler de Oy , d'adjoindre deux demi-droites (C_3) ; nous prendrons, par exemple,

$$y = 2x', \quad y = -2x', \quad x' = -x > 0.$$

Si U admet en O un point de rebroussement de première ou de seconde espèce, on peut toujours avoir un tracé analogue à celui-ci.

3° Si

$$U = [(y + x + \dots)^2 + 2(x + \dots)^2][(y - x + x^2 + \dots)^2 + (x^2 + \dots)](1 + 2x + 3y + \dots),$$

l'origine est point multiple isolé d'ordre 4 de la courbe $U=0$; dans le premier facteur l'ensemble des termes du second degré représente une ellipse évanouissante, les diamètres conjugués égaux de la famille d'ellipses admettant mêmes asymptotes que celle-là sont, comme on le voit aisément,

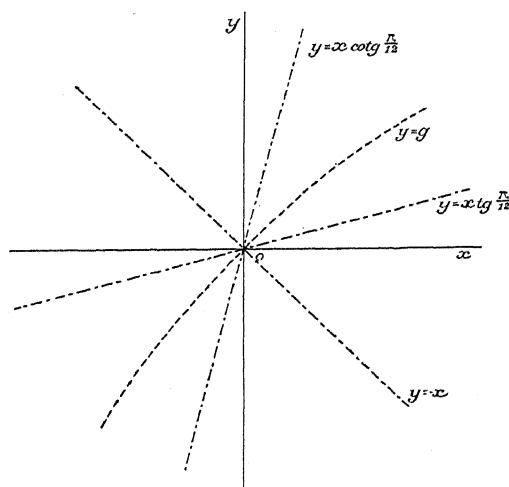
$$x=0, \quad y+x=0;$$

leur angle aigu est de 45° . Par suite, ce premier facteur ne donne pas lieu au tracé immédiat d'une courbe frontière, mais à cause de sa présence on est conduit à ne considérer que des onglets dont les courbes frontières admettent à l'origine des tangentes dont l'angle soit inférieur à 90° . Quant au second facteur, il correspond à deux branches imaginaires conjuguées tangentes en O à une droite réelle $y=x$; il amène à tracer deux demi-branches C_2 , ayant pour équation commune

$$y=g=x-x^2+\dots$$

et correspondant l'une à $x > 0$, l'autre à $x < 0$. On pourra, dès lors,

Fig. 2.



pour la division en onglets de la partie du plan voisine de l'origine, adjoindre à ces deux lignes C_2 des demi-droites C_3 , correspondant, par

exemple, aux deux directions $x > 0$, $x < 0$ sur les droites

$$y = -x, \quad y = x \tan \frac{\pi}{12}, \quad y = x \cot \frac{\pi}{12};$$

on obtient ainsi huit onglets autour de O, satisfaisant à toutes les conditions indiquées plus haut (fin du n° 8).

4° Prenons enfin

$$U = [(y - x - x^2 + \dots)^2 + x^3 + \dots][(y - x + \dots)^3 + 2x^4 + \dots](1 + x - y + \dots).$$

L'origine est point multiple d'ordre 5, de la courbe $U = 0$ les tangentes en ce point sont confondues avec la droite $y = x$.

Pour $x > 0$ on a une seule demi-branche réelle

$$y = f = x - x\sqrt[3]{2x} + \dots$$

et deux couples de demi-branches imaginaires conjuguées auxquels correspondent deux lignes C_2 qui sont

$$\begin{aligned} y = g_1 &= x + x^2 + \dots, \\ y = g_2 &= x - x\sqrt[3]{2x} \cos \frac{2\pi}{3} + \dots \end{aligned}$$

On a, du reste (n° 1),

$$f < g_1 < g_2.$$

Pour $x = -x' < 0$, il y a trois demi-branches réelles :

$$\begin{aligned} y = \bar{f}_1 &= -x' - x'\sqrt[3]{2x'} + \dots, \\ y = \bar{f}_2 &= -x' - x'\sqrt[3]{2x'} + \dots, \\ y = \bar{f}_3 &= -x' + x'\sqrt[3]{2x'} + \dots, \end{aligned}$$

et deux demi-branches imaginaires conjuguées auxquelles correspond la ligne C_2 donnée par

$$y = \bar{g} = -x' - x'\sqrt[3]{2x'} \cos \frac{2\pi}{3} + \dots$$

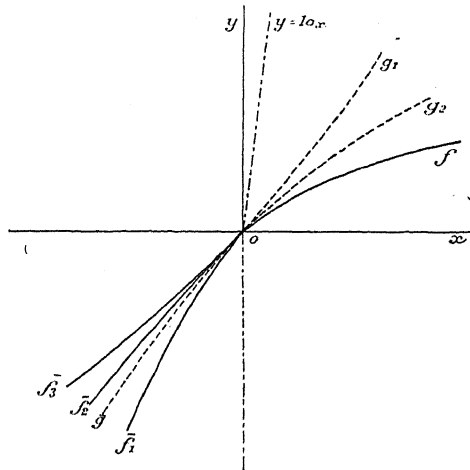
On a

$$\bar{g} > \bar{f}_3 > \bar{f}_2 > \bar{f}_1.$$

Pour la formation des onglets, on adjoindra aux sept demi-branches

de courbe ainsi tracées trois demi-droites. Il faut, en effet, que les angles formés par les tangentes à l'origine aux frontières des onglets

Fig. 3.



soient inférieurs à π , et que l'axe Oy soit séparé des courbes C_2 . En faisant la figure, on voit qu'on satisfait en ces conditions en prenant la demi-droite Oy' opposée à Oy et deux demi-droites telles que $y = 10x$, $y = -10x$ très voisines de Oy situées du côté des $y > 0$. On aura ainsi dix onglets autour de O ⁽¹⁾.

10. Ayant ainsi expliqué la formation des onglets, nous pouvons indiquer la construction de la ligne L . Cette ligne sera composée de segments, rectilignes ou curvilignes, ayant leurs extrémités sur les frontières des onglets; deux segments consécutifs, correspondant à deux onglets adjacents auront une extrémité commune sur la frontière séparant les deux onglets.

Les segments de L seront *rectilignes* pour ceux des onglets dont les frontières ne sont pas tangentes entre elles à l'origine; ces segments seront alors perpendiculaires à une demi-droite Δ intérieure à l'angle formé par les tangentes à l'origine aux frontières de l'onglet; nous prendrons la bissectrice de cet angle.

(1) Le lecteur est prié de modifier sur la figure les positions des lignes g_2 et \bar{g} et d'y tracer la demi-droite $y = -10x$.

Si les frontières se touchent à l'origine et sont disposées au voisinage de l'origine de part et d'autre de la tangente commune, les segments seront encore *rectilignes*; ils seront perpendiculaires à cette tangente, sur laquelle nous distinguerons la demi-droite Δ dirigée vers l'intérieur de l'onglet.

Quand l'onglet sera borné par des frontières tangentes entre elles à l'origine et sera situé, au voisinage de ce point, d'un même côté de la tangente commune, les segments de L seront *curvilignes*. Nous prendrons les arcs, intérieurs à l'onglet, des courbes Γ , trajectoires orthogonales des courbes Γ obtenues en déplaçant, par translation parallèle à Oy , le lieu des milieux des cordes de l'onglet parallèles à cet axe.

Si donc les frontières de l'onglet ont pour équations

$$(16) \quad y = \varphi(x), \quad y = \Phi(x)$$

les courbes Γ seront

$$(17) \quad y - \frac{1}{2} [\varphi(x) + \Phi(x)] = C$$

et les courbes Γ_1

$$(18) \quad y + 2 \int_0^x \frac{dx}{\varphi'(x) + \Phi'(x)} = C_1,$$

C et C_1 désignant des constantes.

La valeur commune de $\varphi'(0)$ et $\Phi'(0)$ n'est pas nulle puisque les axes sont distincts des tangentes au point multiple. L'intégrale est donc, comme φ et Φ , développable en une série ordonnée suivant les puissances fractionnaires de x telle que celles considérées au n° 4. On en conclut aisément que si la constante C_1 est de signe convenable et assez voisine de zéro, la courbe Γ_1 rencontre chaque frontière de l'onglet en un point voisin de l'origine. De plus, chacun de ces points s'éloigne de O lorsque la valeur absolue de C_1 croît; nous exprimerons ceci en disant que Γ_1 *s'éloigne de l'origine*.

11. Nous supposons le mobile lancé de façon que la constante des forces vives soit nulle; c'est-à-dire qu'on aura constamment

$$(19) \quad v^2 = 2U,$$

v désignant la vitesse du mobile (dont la masse a été prise pour unité de masse).

Il résulte de (19) que le mobile se mouvra constamment dans la région $U > 0$. Comme on a supposé que U n'était pas maximum en O et s'annulait en ce point, sans y admettre de branche multiple, il existe des onglets où U est positif : ce choix particulier de la constante des forces vives est donc bien compatible avec la restriction qu'il soit possible de prendre la position initiale aussi voisine de O qu'on le voudra, et la vitesse initiale aussi petite qu'on le voudra ; la direction de cette vitesse reste, pour le moment, indéterminée.

Supposons d'abord le mobile placé à l'instant initial dans un onglet où les segments de L sont rectilignes. Nous avons défini au n° 10 ces segments comme perpendiculaires à une même droite, sur laquelle nous avons choisi une direction Δ , intérieure à l'onglet. Nous admettrons désormais que *la projection de la vitesse initiale sur Δ a le sens de Δ* : c'est la seule restriction que nous apporterons au choix de la direction de cette vitesse.

Nous montrerons que la ligne L passant par le mobile s'éloigne de O en utilisant la proposition suivante :

Si dans une région R située tout entière à distance finie, la force agissant sur un mobile a une projection de sens constant sur un axe fixe Δ , le mobile, lancé de façon que sa vitesse initiale se projette sur Δ dans le même sens que la force, sort de la région au bout d'un temps fini, sa projection sur Δ se mouvant toujours dans le même sens.

Cette proposition, due à M. Caillet (1), se démontre immédiatement en prenant Δ comme axe Ox . La valeur initiale de la projection $\frac{dx}{dt}$ de la vitesse du mobile étant désignée par x'_0 et celle de l'abscisse x du mobile étant x_0 , on a pour $t > 0$

$$\frac{dx}{dt} > x'_0 \quad \text{et} \quad x > x_0 + x'_0 t.$$

Le domaine R étant borné (il suffit même qu'il le soit dans la partie où

(1) *Annales de l'Université de Grenoble*, t. XXV, 1913, p. 108.

$x > x_0$), on doit avoir d'autre part $x < X$ et par suite au bout d'un temps θ tel que

$$x_0 + x'_0 \theta = X,$$

c'est-à-dire

$$\theta = \frac{X - x_0}{x'_0},$$

le mobile a certainement quitté la région R.

Pour appliquer cette proposition, nous revenons aux axes antérieurement choisis, et désignons par α l'angle que fait avec Ox la droite Δ correspondant à l'onglet considéré. On peut toujours (1) supposer que cet ongle correspond à $x > 0$, l'angle α est alors compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha > 0$.

La projection de la force sur Δ est

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \alpha;$$

puisque, dans l'onglet, on a $U > 0$, cette expression a le signe de

$$(20) \quad A(U) = \frac{\partial \log U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \log U}{\partial y} \sin \alpha.$$

Nous allons montrer que ce signe est $+$.

12. A chaque facteur de

$$U = U_1(x, y) \Pi[y - f(x)] \Pi\{[y - g(x)]^2 + h^2(x)\}$$

correspond un terme de la somme $\log U$ et par suite un terme de

$$(21) \quad A(U) = \Sigma A[y - f(x)] + \Sigma A\{[y - g(x)]^2 + h^2(x)\} + A(U_1);$$

nous étudierons séparément les signes de ces divers termes, sauf le dernier pour lequel nous montrerons qu'il ne peut donner son signe à la somme.

(1) Voir les remarques des nos 6 et 8 sur le choix des axes.

Un facteur $y - f(x)$ donne le terme

$$\Lambda[y - f(x)] = \frac{\sin \alpha - f'(x) \cos \alpha}{y - f(x)} = \cos \alpha \frac{\tan \alpha - f'(x)}{y - f(x)},$$

Nous avons $\cos \alpha > 0$; tout revient à étudier le signe de la fraction. Si la courbe $y = f(x)$ est au-dessous de l'onglet (c'est-à-dire, par rapport à l'intérieur de l'onglet, du côté des y négatifs), la tangente à l'origine à cette courbe $y = xf'(0)$ est, soit au-dessous de la droite Δ correspondant à l'onglet, soit confondue avec cette droite; dans la première hypothèse, $\tan \alpha - f'(0) > 0$ et par suite aussi $\tan \alpha - f'(x)$ pour x positif et petit; dans la seconde hypothèse, $\tan \alpha - f'(0) = 0$, mais comme $x \tan \alpha - f(x) > 0$ pour $x > 0$ et petit et que $\tan \alpha - f'(x)$ a un signe déterminé (n° 1) dans les mêmes conditions, ce signe est nécessairement $+$. D'autre part, $y > f(x)$ dans l'onglet; *donc la fraction précédente est positive* dans l'onglet (les frontières pouvant être exclues). Une démonstration analogue s'applique au cas où $y = f(x)$ est au-dessus de l'onglet; le résultat subsiste.

Ainsi (voir n° 9, 1°) pour

$$y - f_1(x) = y - x + x^2 + \dots$$

et pour $\alpha = 0$, on a

$$\Lambda(y - f_1) = \frac{-1 + 2x + \dots}{y - x + x^2 + \dots}.$$

Lorsque le point (x, y) est dans l'onglet $f_1 > y > f_2$, $x > 0$, assez voisin de l'origine, le numérateur et le dénominateur de cette expression sont négatifs tous deux; l'expression est positive.

De même pour

$$y - f = y - x + x\sqrt[3]{2x} + \dots$$

et pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ correspondant à l'onglet $f < y < g_1$, $x > 0$, du n° 9 (4°), on a

$$\Lambda(y - f) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt[4]{2}}{3} \sqrt[3]{2} x^{\frac{1}{3}} + \dots}{y - f};$$

le numérateur est positif et le dénominateur aussi pour un point voisin de l'origine dans l'onglet considéré.

En ce qui concerne les facteurs de la forme $[\gamma - g(x)]^2 + h^2(x)$, ils donnent dans $A(U)$ des termes de la forme

$$A[(\gamma - g)^2 + h^2] = 2 \frac{(\gamma - g)(\sin \alpha - g' \cos \alpha) + hh' \cos \alpha}{(\gamma - g)^2 + h^2}.$$

Nous distinguons deux cas :

1° Si h contient un terme du premier degré, soit :

$$\begin{aligned} g(x) &= ax + \dots, \\ h(x) &= bx + \dots \quad (b \neq 0), \end{aligned}$$

le numérateur de la fraction précédente commence par un terme du premier degré en x, γ :

$$(\gamma - ax)(\sin \alpha - a \cos \alpha) + b^2 x \cos \alpha,$$

qui donne son signe (on le démontre facilement) si la droite obtenue en l'égalant à zéro ne traverse pas l'onglet et n'est pas tangente aux frontières. Or cette droite est le diamètre conjugué Δ' de la droite Δ , $\gamma = x \tan \alpha$, par rapport à l'ellipse évanouissante

$$(\gamma - ax)^2 + b^2 x^2 = 0,$$

elle est bien extérieure à l'onglet (*voir* n° 8). L'expression précédente $A[(\gamma - g)^2 + h^2]$ garde un signe constant dans l'onglet au voisinage de l'origine; en l'étudiant sur Δ , on trouve que ce signe est $+$; c'est aussi le signe de la fraction.

2° Si g seul contient un terme du premier degré, h commençant par des termes de degré plus élevé, on voit, en raisonnant comme pour $\gamma - f$, que $\tan \alpha - g'$ et $\sin \alpha - g' \cos \alpha$ ont le signe de $\gamma - g$ dans l'onglet, du reste hh' est positif pour x positif et petit, l'expression $A[(\gamma - g)^2 + h^2]$ est encore positive dans l'onglet.

On appliquerait aisément ceci aux exemples du n° 9.

13. Il ne reste en définitive que le terme

$$A(U_1) = \frac{\partial \log U_1}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \log U_1}{\partial \gamma} \sin \alpha.$$

Ce terme reste *fini* quand le point xy se déplace au voisinage de

l'origine; il peut du reste avoir un signe quelconque et même changer de signe dans l'onglet. Mais, comme les termes précédemment étudiés deviennent infinis, ils donnent leur signe + à la somme $A(U)$; nous le montrerons, en établissant qu'on peut trouver un nombre positif μ tel qu'un au moins de ces termes soit supérieur à $\frac{\mu}{x}$, pour x positif assez petit, et appliquant la proposition du n° 4.

Si d'abord il existe une demi-branche réelle $y = f$ non tangente à l'axe Δ correspondant à l'onglet, la différence $\sin \alpha - f' \cos \alpha$ tend vers une limite différente de zéro quand x tend vers zéro; $\frac{y-f}{x}$ reste, en valeur absolue, inférieur à un nombre fixe; l'existence du membre μ en résulte immédiatement.

Par exemple, si l'on reprend l'expression considérée au numéro précédent

$$A(y - f_1) = \frac{-1 + 2x + \dots}{y - x + x^2 + \dots},$$

pour un point de l'onglet ($f_1 > y > f_2$, $x > 0$) considéré, voisin de 0, le numérateur est voisin de -1 , le dénominateur compris entre zéro et $f_2 - f_1 = -2x - x^2 + \dots$; c'est-à-dire qu'on peut prendre ici pour μ un nombre quelconque inférieur à $\frac{1}{2}$.

S'il y a deux branches imaginaires conjuguées à tangentes imaginaires ou à tangentes réelles distinctes de Δ , le résultat est le même.

On voit, en effet, dans la première hypothèse, en conservant les notations du n° 12, que

$$q = \frac{(y - ax)(\sin \alpha - a \cos \alpha) + b^2 x \cos \alpha + \dots}{x}$$

reste compris, lorsque le point (x, y) reste dans l'onglet au voisinage de l'origine, entre deux nombres positifs fixes et comme $(y - g)^2 + h^2$ est, dans l'onglet, d'ordre infinitésimal égal à deux (n° 3), la proposition énoncée en résulte immédiatement.

Dans la seconde hypothèse, nous écrirons

$$\begin{aligned} (22) \quad A[(y - g)^2 + h^2] &= \frac{\mu}{x} \\ &= \frac{(y - g)^2 \left[2 \frac{\sin \alpha - g' \cos \alpha}{y - g} - \frac{\mu}{x} \right] + h^2 \left[\frac{2 h' \cos \alpha}{h} - \frac{\mu}{x} \right]}{(y - g)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

En raisonnant comme on l'a fait plus haut pour $A(y - f)$, on démontre que μ peut être pris assez petit pour que le coefficient de $(y - g)^2$ soit positif; quant au second terme, si l'ordre infinitésimal de $h(x)$ est $1 + p$, $x \frac{2h' \cos \alpha}{h}$ tend évidemment vers $2(1 + p) \cos \alpha$, et l'on prendra encore μ inférieur à cette limite. On aura bien

$$A[(y - g)^2 + h^2] > \frac{\mu}{x}.$$

Ainsi (n° 9, 3°) lorsque

$$(y - g_1)^2 + h_1^2 = (y + x + \dots)^2 + 2(x + \dots)^2,$$

on a

$$q = \frac{(y + x)(\sin \alpha + \cos \alpha) + 2x \cos \alpha}{x} + \dots$$

Soient l'onglet $x \tan \frac{\pi}{12} < y < g = x - x^2 + \dots$ ($x > 0$), l'angle $\alpha = \frac{\pi}{6}$, les termes de q ne tendant pas vers zéro avec x restent compris entre

$$q_1 = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \tan \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad q_2 = 1 + 2\sqrt{3},$$

du reste $q_1 < q_2$; d'autre part les termes de

$$\frac{(y - g)^2 + h^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 2 + \dots$$

ne tendant pas vers zéro avec x restent compris entre

$$\tan^2 \frac{\pi}{12} + 2 \tan \frac{\pi}{12} + 2 \quad \text{et} \quad 5;$$

on pourra donc prendre pour μ un nombre quelconque inférieur à $\frac{q_1}{5}$.

Un exemple du second cas est fourni par

$$A[(y - g)^2 + h^2] = A[(y - x + x^2 + \dots)^2 + (x^2 + \dots)^2]$$

et par l'onglet précédemment considéré; on prendrait μ inférieur à la fois aux deux nombres $\frac{\sqrt{3}-1}{1-\tan\frac{\pi}{12}}$ et $2\sqrt{3}$.

Il ne reste à examiner que le cas où *toutes les branches réelles ou imaginaires de* $U=0$ *sont tangentes à la droite* Δ *correspondant à l'onglet*. Alors les frontières $\gamma=\varphi$, $\gamma=\Phi$ appartiennent aux catégories C_1 ou C_2 et sont de part et d'autre de la tangente commune. Soient

$$\begin{aligned}\varphi &= x \tan \alpha + A x^{1+p} + \dots & (p > 0), \\ \Phi &= x \tan \alpha + B x^{1+p'} + \dots & (p' > 0).\end{aligned}$$

Les différences $\gamma - \varphi$, $\gamma - \Phi$ sont définies, leurs valeurs absolues ne surpassent pas $|\varphi - \Phi|$ et restent par suite inférieures à Hx^{1+q} où H est un nombre positif convenable et où q désigne le plus petit des nombres p et p' . Les différences

$$\sin \alpha - \varphi' \cos \alpha \quad \text{et} \quad \sin \alpha - \Phi' \cos \alpha$$

sont infiniment petites d'ordres respectivement égaux à p et p' ; l'un au moins des quotients positifs (celui qui correspond au plus petit des nombres p , p' s'ils sont différents),

$$\frac{\sin \alpha - \varphi' \cos \alpha}{\gamma - \varphi}, \quad \frac{\sin \alpha - \Phi' \cos \alpha}{\gamma - \Phi}$$

reste supérieur à $\frac{\mu}{x}$, μ étant positif et convenablement choisi.

Par exemple (n° 9, 4°), pour

$$\begin{aligned}\varphi &= x - x\sqrt[3]{2}x + \dots, \\ \Phi &= x + x^2 + \dots, \\ \alpha &= \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

on prendra μ inférieur à $\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

La proposition est donc établie si le quotient en question correspond à une courbe C_1 . S'il correspondait à une courbe C_2 , on compléterait

le raisonnement en étudiant, comme plus haut, la différence $A[(\gamma - g)^2 + h^2] - \frac{\mu}{x}$ mise préalablement sous la forme (22).

En définitive, nous avons bien montré que $A(U) > 0$, dans l'onglet, au voisinage de l'origine.

14. On peut toujours supposer que la région R d'où le mobile doit sortir (n° 5) est donnée assez petite pour que la partie de cette région intérieure à l'onglet considéré $A(U) > 0$ et de même pour tous les onglets. Dès lors, ou bien le mobile (lancé comme il a été dit au n° 11) quitte la région R et la proposition énoncée est vérifiée; ou bien il passe dans l'onglet voisin ⁽¹⁾.

Supposons que cet onglet voisin, où pénètre le mobile, soit encore un onglet à segments rectilignes; soit Δ' l'axe auquel ces segments de L sont perpendiculaires. Montrons que *lors de l'entrée du mobile dans ce second onglet la projection de sa vitesse sur Δ' est positive.*

Soient A le point de passage, AT la tangente en ce point à la courbe frontière dirigée du côté opposé à l'origine, Ax une demi-droite perpendiculaire menée par A à la droite Δ du premier onglet, dirigée dans un sens tel que cette demi-droite ne rencontre pas Δ , Ax' la perpendiculaire analogue à Δ' . On peut toujours supposer la région R assez petite, et, par suite, A assez voisin de O, pour que les angles $\widehat{\Delta'Ax}$, $\widehat{\Delta'AT}$ soient aigus (comme ils le sont lorsque A vient en O). La projection de la vitesse du mobile sur Δ étant positive, au moment du passage, cette vitesse AV est, par rapport à la droite qui porte Ax du côté de la demi-droite AT; comme, d'autre part, le mobile pénètre dans le second onglet il faut que AV soit par rapport à la droite qui porte AT du même côté que Ax. En résumé il faut que AV soit dans l'angle xAT . Or, les demi-droites, issues de A, situées dans cet angle font avec Δ' des angles aigus; la vitesse AV se projette donc sur Δ' dans le sens positif, comme nous l'avions annoncé.

15. Ce qui précède suffit à établir l'instabilité de l'équilibre *lorsque tous les segments de L sont rectilignes.*

⁽¹⁾ Cette dernière hypothèse ne peut d'ailleurs être réalisée si la frontière commune aux deux onglets est de l'espèce C_1 .

Supposons d'abord que U ne soit pas minimum en O . Nous n'utilisons alors que la partie L' de L située dans la région $U > 0$ où se trouve constamment le mobile. Il est manifeste que tous les segments de L' s'écartent simultanément de l'origine si R est assez petite ⁽¹⁾; si le mobile sort de la région R il y a bien instabilité; s'il y reste constamment la ligne L' tend vers une position limite Λ . Si le mobile lui-même tendait vers une position limite, ce serait, d'après une proposition connue de M. Painlevé, une position d'équilibre, nécessairement distincte de O ; or on peut toujours supposer la région R assez petite pour qu'elle n'en contienne pas d'autre que O . Cette hypothèse devant être ainsi écartée, le mobile ne pouvant d'ailleurs rester infiniment dans un même onglet, et les onglets étant en nombre fini, il faut que la trajectoire contienne une infinité de segments intérieurs à un même onglet; ces segments se rapprochant de plus en plus, quand t croît indéfiniment du segment correspondant de Σ de Λ , tout en étant tous d'un même côté de Σ . On peut alors montrer ⁽²⁾ que Σ , ou une partie de Σ ,

(1) Cela tient à ce que chaque droite Δ fait un angle aigu avec les frontières de l'onglet.

(2) La démonstration donnée par M. Hadamard (Mémoire cité, n° 15) est inapplicable ici parce que la fonction V dont nous faisons usage ici n'est plus une fonction continue (elle change brusquement de valeur lors du passage du mobile d'un onglet à l'autre). Indiquons rapidement une démonstration ne présentant pas cet inconvénient.

On établit d'abord que, si $\alpha\beta$ est un segment convenable de Σ , $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ les normales à Σ dirigées en sens inverse de Δ , il y a une infinité d'arcs de la trajectoire compris entre $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ayant leurs extrémités sur ces droites. Soit ab un de ces arcs d'extrémités a , b ; il existe au moins un point c sur l'arc tel que la tangente ct soit parallèle à ab . Sur chaque arc ab , choisissons un tel point, s'il en existe plusieurs, l'ensemble ainsi formé admet au moins un point limite. Soit γ un point limite, il est évidemment situé sur Σ . On peut détacher de l'ensemble des points c un autre ensemble de points $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, numérotés dans l'ordre où le mobile les rencontre, et tels que c_n tend pour n infini vers γ . La tangente $c_n t_n$ à la courbe $a_n b_n$ correspondante, tend, comme la corde $a_n b_n$, à se confondre, pour n infini avec Σ .

D'autre part, les trajectoires des mouvements correspondant à la valeur zéro de la constante des forces vives satisfont à une équation différentielle du second ordre facile à former. En s'appuyant sur le fait bien connu que les intégrales d'un système différentiel sont fonctions continues des données initiales (voir GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, n° 439), on voit que les trajectoires T_n déterminées par les éléments initiaux c_n et $c_n t_n$ tendent, pour n infini, vers une trajectoire limite θ déterminée par l'élément γ et Σ ; mais les trajectoires T_n tendent vers Σ , donc θ et Σ sont confondues, et Σ est bien une trajectoire.

Au surplus on peut démontrer autrement l'impossibilité d'une position limite Λ pour L' ,

devrait être une trajectoire, correspondant à la fonction de forces considérée (et à la valeur zéro de la constante des forces vives); mais cela est contradictoire avec le fait que la force doit avoir une projection sur la perpendiculaire à Δ de sens bien déterminé. L'instabilité de l'équilibre est établie.

16. Examinons le cas où U est *minimum en* O . Nous avons dû le réserver, parce qu'on peut alors imaginer que le mobile revienne dans un onglet déterminé en faisant un tour complet autour de O ; le segment de la ligne L correspondant à ce second passage n'étant point le même que lors du premier passage. Les segments correspondant à un même onglet étant parallèles entre eux, la ligne L formerait alors une sorte de spirale autour de O ⁽¹⁾.

Pour éviter toute difficulté, nous modifierons alors la construction de la ligne L de façon à obtenir une ligne admettant un axe de symétrie et, par suite, fermée.

A cet effet, nous adjoindrons aux lignes C_1, C_2, C_3 des lignes C'_1, C'_2, C'_3 symétriques des précédentes par rapport à l'axe Ox . On peut évidemment supposer cet axe choisi de façon que les lignes C'_1, C'_2 aient des tangentes à l'origine distinctes des tangentes à C_1, C_2 et obtenir que les lignes C_3 et C'_3 soient distinctes de ces tangentes.

On construira avec ces lignes C, C' une ligne L en procédant comme plus haut. Cette ligne se formera après un tour autour de O ; les segments qui la composeront seront tous rectilignes; deux d'entre eux étant perpendiculaires à Ox .

en s'appuyant sur la proposition suivante : Soit un segment $\alpha\beta$ perpendiculaire à la droite Δ d'un onglet, situé tout entier dans la région où la force a une projection positive sur Δ . Si le mobile vient à passer assez près du milieu de $\alpha\beta$ et du côté de $\alpha\beta$ opposé au sens positif de Δ , il traverse nécessairement le segment $\alpha\beta$.

La démonstration, que le lecteur établira aisément, repose sur les faits suivants : La vitesse numérique du mobile reste bornée supérieurement (à cause de l'intégrale des forces vives) au voisinage de $\alpha\beta$; il en est de même de l'intensité de la composante de la force parallèle à $\alpha\beta$ et la valeur de la composante parallèle à Δ reste supérieure à un nombre positif fixe.

⁽¹⁾ Cependant si les frontières des onglets sont toutes rectilignes, la ligne L est un polygone inscriptible, aucune difficulté ne se présente. C'est ce qui arriverait, par exemple, pour $U = (y^2 + x^2)(y^2 + 2x^2)$.

Les propriétés des nouveaux onglets sont identiques à celles des anciens. Il est à noter, en effet, que les propriétés établies aux n^{os} 11 à 15. reposent exclusivement sur le fait que ces onglets ne contiennent à leur intérieur aucune demi-branché C_1 ou C_2 ; comme il en était ainsi des anciens onglets, il en est de même *a fortiori* des nouveaux, obtenus par subdivision des anciens.

En définitive, *l'instabilité de l'équilibre est bien établie dans tous les cas où la ligne L ne comprend pas de segments curvilignes.*

17. Abordons maintenant le cas d'un onglet à segments curvilignes.

Soient, comme au n^o 10,

$$(23) \quad y = \varphi(x), \quad y = \Phi(x),$$

les équations des frontières de l'onglet; nous pouvons supposer $x > 0$ et $\Phi > \varphi$. Par hypothèse, $\varphi'(0)$ et $\Phi'(0)$ sont égaux et différents de zéro, soit tang α leur valeur commune.

Si cette valeur est positive on prendra

$$(24) \quad V(x, y) = y + 2 \int_0^x \frac{dx}{\varphi'(x) + \Phi'(x)},$$

si elle est négative on prendra

$$(24 \text{ bis}) \quad V(x, y) = -y - 2 \int_0^x \frac{dx}{\varphi'(x) + \Phi'(x)},$$

de toute façon $V = \text{const.}$ est l'équation générale des courbes Γ , du n^o 10.

En remplaçant x, y par les coordonnées du mobile, V devient une fonction du temps t et le sens du déplacement du segment de L dépend (n^o 10) du signe de $\frac{dV}{dt}$. Nous raisonnerons *en supposant*

$$\varphi'(0) = \Phi'(0) > 0;$$

alors

$$(25) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} \frac{2}{\varphi'(x) + \Phi'(x)};$$

Calculons encore

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} \frac{2}{\varphi' + \Phi'} - \frac{2(\varphi'' + \Phi'')}{(\varphi' + \Phi')^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

ou, en tenant compte des équations du mouvement et de l'intégrale première des forces vives,

$$(26) \quad \frac{1}{U} \frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{\partial \log U}{\partial y} + \frac{2}{\varphi' + \Phi'} \frac{\partial \log U}{\partial x} - \frac{4(\varphi'' + \Phi'')}{(\varphi' + \Phi')^2} \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Or $\varepsilon = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2}$ est compris entre 0 et 1; si donc nous établissons que les deux expressions

$$(27) \quad \begin{cases} B(U) = \frac{\partial \log U}{\partial y} + \frac{2}{\varphi' + \Phi'} \frac{\partial \log U}{\partial x}, \\ B(U) - \frac{4(\varphi'' + \Phi'')}{(\varphi' + \Phi')^2} = B_1(U) \end{cases}$$

sont positives, nous pourrions affirmer que l'expression (26)

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 V}{dt^2} = \varepsilon \left[B(U) - 4 \frac{\varphi'' + \Phi''}{(\varphi' + \Phi')^2} \right] + (1 - \varepsilon) B(U)$$

l'est également, et par suite ainsi que $\frac{d^2 V}{dt^2} > 0$, puisque V reste positif dans les onglets où le mobile pénètre (¹).

Commençons par établir que $B(U) > 0$; nous verrons ensuite que le terme $4 \frac{\varphi'' + \Phi''}{(\varphi' + \Phi')^2}$ est négligeable vis-à-vis des autres.

L'expression $B(U)$ est une somme de termes correspondant aux divers facteurs de U :

$$(28) \quad B(U) = \sum B[y - f(x)] + \sum B\{[y - g(x)]^2 + h^2(x)\} + B(U_1).$$

On peut écrire

$$(29) \quad B[y - f(x)] = \frac{(\varphi' - f') + (\Phi' - f')}{(y - f)(\varphi' + \Phi')}.$$

Par hypothèse $\varphi' + \Phi'$ est positif pour $x = 0$; il l'est encore pour $x > 0$ et petit; d'autre part $\varphi' - f'$ et $\Phi' - f'$ gardent pour $x > 0$ et petit un signe constant, qui est évidemment + si, dans ces conditions, $\varphi > f$ et $\Phi > f$, c'est-à-dire si $y = f$ est au-dessous de l'onglet et qui

(¹) Tout le début de ce numéro a été inspiré par le Mémoire de M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 1897). Voir, en particulier, les nos 1 à 6 et le n° 23 de ce Mémoire.

est — si cette courbe est au-dessus de l'onglet. Dans les deux cas la fraction est positive.

Pour les termes

$$(30) \quad B[(y-g)^2 + h^2] = 2 \frac{(y-g)(\varphi' + \Phi' - 2g') + 2hh'}{(\varphi' + \Phi')[(y-g)^2 + h^2]},$$

on distingue encore deux cas selon que $h'(o)$ est différent de zéro ou nul. Si $h'(o) \neq 0$, on voit, en conservant les notations antérieures (n° 12) que le numérateur commence par des termes du premier degré qui sont, à un facteur positif près,

$$(y - ax)(\sin \alpha - a \cos \alpha) + b^2 x \cos \alpha,$$

où $\alpha = \text{arc tang} [\varphi'(o)]$; et le raisonnement s'achève comme au n° 12.

Si $h'(o) = b = 0$, on voit, en raisonnant comme pour $y = f$, que $(y - g)(\varphi' + \Phi' - 2g')$ est positif dans l'onglet et, comme il en est de même de hh' , la fraction (30) est encore positive.

18. Le terme $B(U_1)$ correspondant à celui des facteurs de U qui ne s'annule pas en O est négligeable vis-à-vis des précédents. Il reste, en effet, fini, alors que les autres termes deviennent infinis en O , l'un au moins d'entre eux restant, dans l'onglet, supérieur à $\frac{\mu}{x}$, où μ est un nombre positif convenablement choisi.

Il convient d'apporter quelques petites modifications au raisonnement du n° 13 quand il existe soit une demi-branche réelle non tangente en O aux frontières de l'onglet, soit des demi-branches imaginaires à tangentes en O imaginaires ou à tangentes réelles distinctes de la tangente aux frontières de l'onglet; mais ces modifications sont faciles à trouver et nous nous contenterons de donner un exemple de détermination du nombre μ .

Soit

$$U = [(y - x - x^2 + \dots)^2 - x^5 + \dots][(y + x + \dots)^2 + 2x^2 + \dots](1 + \dots)$$

la courbe de niveau passant à l'origine y admet un point de rebroussement de seconde espèce; dans l'onglet $\varphi < y < \Phi$, $x > 0$:

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &= x + x^2 - x^{\frac{5}{2}} + \dots, \\ y = \Phi(x) &= x + x^2 + x^{\frac{5}{2}} + \dots, \end{aligned}$$

dont les frontières sont les demi-branches formant le rebroussement, considérons le terme

$$B[(y+x+\dots)^2+2x^2+\dots]=2\frac{(y+x+\dots)(4+\dots)+4x+\dots}{(2+\dots)[(y+x+\dots)^2+2x^2+\dots]}.$$

Dans l'onglet considéré le numérateur a pour partie principale $12x$ le dénominateur $12x^2$ et le terme en question est comparable à $\frac{2}{x}$; on prendra pour μ un nombre positif inférieur à 2.

Supposons enfin que *toutes les branches de la ligne de niveau soient tangentes aux frontières de l'onglet.*

Tout d'abord, si l'une de ces frontières, $y = \varphi$ par exemple, est une demi-branch réelle $y = f$, l'expression (29) devient

$$B(y-f) = B(y-\varphi) = \frac{\Phi' - \varphi'}{(y-\varphi)} \frac{1}{(\varphi' + \Phi')}.$$

La seconde fraction tend vers la limite positive $\frac{\cotang \alpha}{2}$ quand x tend vers zéro; quant à la première, comme dans l'onglet

$$0 < y - \varphi < \Phi - \varphi,$$

on a

$$\frac{\Phi' - \varphi'}{y - \varphi} > \frac{\Phi' - \varphi'}{\Phi - \varphi},$$

et il est bien évident que le produit $x \frac{\Phi' - \varphi'}{\Phi - \varphi}$ tend vers une limite positive quand x tend vers zéro; l'existence du nombre μ est alors évidente.

Par exemple, pour l'onglet

$$\begin{aligned} \varphi = f = \bar{f}_1 < y < \bar{f}_2 = \Phi \quad (x > 0), \\ f = -x - x\sqrt[3]{2x} + \dots, \\ \bar{f}_2 = -x - x^{\frac{3}{2}} + \dots; \end{aligned}$$

considéré au n° 9 (4°), on a, en tenant compte de $\varphi'(0) < 0$,

$$B(y-f) = \frac{\frac{4}{3}\sqrt[3]{2x} + \dots}{y - x + x\sqrt[3]{2x} + \dots} \frac{1}{2 + \dots};$$

le dénominateur de la première fraction est inférieur à

$$x \sqrt[3]{2x} + \dots$$

et l'on prendra pour μ un nombre inférieur à $\frac{2}{3}$.

Si les deux frontières sont du type C_2 , on a, en prenant par exemple $g(x) = \varphi(x)$,

$$B[(y - \varphi)^2 + h^2] - \frac{\mu}{x} = \frac{(y - \varphi)^2 \left(\frac{2}{\varphi' + \Phi'} \frac{\Phi' - \varphi' - \frac{\mu}{x}}{y - \varphi} \right) + h^2 \left[\frac{4h'}{(\Phi' + \varphi')h} - \frac{\mu}{x} \right]}{(y - \varphi)^2 + h^2}.$$

et l'on peut manifestement choisir le nombre positif μ de façon que cette expression soit positive dans l'onglet au voisinage de l'origine.

En définitive l'ensemble des termes $B(y - f)$, $B[(y - g)^2 + h^2]$ est supérieur à $\frac{\mu}{x}$ ($\mu > 0$). Il en résulte d'abord que $B(U_1)$ qui reste fini est négligeable dans la détermination du signe de $B(U)$ et ensuite que $4 \frac{\varphi'' + \Phi''}{(\varphi' + \Phi')^2}$ est négligeable dans la recherche du signe de $B_1(U)$. Montrons, en effet, que si $4 \frac{\varphi'' + \Phi''}{(\varphi' + \Phi')^2}$ devient infinie, son ordre d'infinitude est inférieur à un.

On peut écrire

$$\varphi' + \Phi' = \alpha + \alpha_1 x^{\alpha_1} + \dots,$$

α est différent de zéro, les frontières de l'onglet n'étant pas tangentes à Ox ; et $\alpha_1 > 0$; comme

$$\varphi'' + \Phi'' = \alpha_1 \alpha_1 x^{\alpha_1 - 1} + \dots,$$

la fraction $\frac{\varphi'' + \Phi''}{(\varphi' + \Phi')^2}$ devient infinie si $\alpha_1 < 1$, mais son ordre d'infinitude $1 - \alpha_1$ est bien inférieur à un.

19. Il est donc bien établi que $\frac{d^2 V}{dt^2} > 0$ dans l'onglet considéré. Dès lors $\frac{dV}{dt}$ croît, et si, au début cette dérivée est positive, elle le restera, V ira en croissant, et, par suite (n° 10), le segment Γ_1 de la ligne L , situé dans l'onglet, s'éloigne de l'origine.

Soit Δ_M la tangente menée à la courbe Γ (n° 10) par le point M' de cette courbe ayant même abscisse que le mobile M ; choisissons sur cette tangente le sens correspondant à M' s'éloignant de l'origine; soit α l'angle que fait avec Ox la tangente Δ_M ainsi dirigée, on a

$$\tan \alpha = \frac{\varphi' + \Phi'}{2},$$

et $\cos \alpha > 0$; par suite l'expression (25) de $\frac{dV}{dt}$ nous montre que, si cette expression est positive, la vitesse du mobile M fait un angle aigu avec Δ_M . Cette remarque entraîne l'extension au cas des onglets à segments curvilignes des propriétés établies au n° 14 au sujet du passage du mobile d'un ongle à un autre.

La ligne L s'éloigne donc constamment de O. On écarte encore les hypothèses du mobile tendant asymptotiquement vers une position d'équilibre ou d'une trajectoire asymptote à une position limite de L , et l'on démontre ainsi que le mobile doit sortir de la région R , dans le cas où U n'est pas minimum en O . Dans le cas où U est minimum en O , on modifiera la construction des onglets de manière à obtenir une ligne L admettant un axe de symétrie, et, par suite, fermée.

Dès lors, *l'instabilité de l'équilibre est démontrée.*

20. Nous avons supposé le système matériel réduit à un point mobile dans un plan de la fonction des forces $U(x, y)$ holomorphe dans le domaine de la position d'équilibre. Nous examinerons très rapidement comment on pourrait élargir ces hypothèses.

Admettons d'abord qu'il s'agisse toujours d'un mouvement plan, et cherchons à substituer une hypothèse moins restrictive à l'hypothèse que $U(x, y)$ est une fonction holomorphe. Celle-ci nous avait permis de décomposer $U(x, y)$ en facteurs des types $y - f(x)$, $[y - g(x)]^2 + h^2(x)$, $U_1(x, y)$ avec $U_1(0, 0) \neq 0$, et de développer les fonctions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ en séries (11) et (12). Or les premiers termes de ces développements nous ont seuls été utiles.

D'autre part, le calcul de ces premiers termes, par la méthode de Puiseux, ne fait intervenir que l'ensemble $U_N(x, y)$ des termes du développement de $U(x, y)$ dont l'ordre, par rapport aux variables x, y , ne surpasse pas un nombre N . Si une seconde fonction des forces

$V(x, y)$ holomorphe a en commun avec U ces termes U_N , il est certain qu'elle donnerait lieu, comme U , à un équilibre instable.

Imaginons maintenant une fonction $W(x, y)$ non plus nécessairement holomorphe, mais admettant des dérivées jusqu'à l'ordre $N + 1$, ces dérivées étant continues au voisinage de l'origine. Supposons que le développement fini de Taylor correspondant à ce point donne, lorsqu'on y fait abstraction du terme complémentaire, le même ensemble $U_N(x, y)$ de termes que la fonction U précédemment considérée.

La question se pose de *rechercher si, comme il paraît bien probable, l'équilibre est instable pour la loi de force définie par la fonction de forces $W(x, y)$* ; nous ne l'aborderons pas ici ⁽¹⁾.

En ce qui concerne les autres hypothèses rappelées au début de ce numéro, observons d'abord qu'on sait faire correspondre, au mouvement d'un système à liaisons holonomes à deux degrés de liberté, le mouvement d'un point sur une surface, le système et le point donnant lieu aux mêmes équations de Lagrange. Il paraît d'ailleurs possible d'étendre la démonstration précédente au cas d'un point mobile sur une surface analytique, la fonction des forces étant holomorphe.

Mais cela n'est même pas nécessaire; on peut montrer, en effet, ainsi que nous allons l'indiquer rapidement, que *l'instabilité dans ce cas (point mobile sur une surface analytique, fonction des forces holomorphe non maximum pour une position d'équilibre isolée) est une conséquence de l'instabilité démontrée dans le cas du mouvement plan*.

Soient, en effet, ds^2 l'élément linéaire de la surface, U la fonction des forces; les trajectoires correspondant à la valeur zéro de la constante des forces vives sont données par les équations différentielles ⁽²⁾

$$d \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{U ds^2} - \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{U ds^2} = 0 \quad (i = 1, 2);$$

q_1, q_2 désignent les paramètres caractérisant la position du point sur la surface. Le temps t est donné par l'intégrale des forces vives

$$dt = \sqrt{\frac{ds^2}{2U}}.$$

⁽¹⁾ Voir *Comptes rendus*, t. CLVI, p. 1054.

⁽²⁾ Voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 499.

Considérons une seconde surface rapportée aux mêmes paramètres, la correspondance ainsi établie entre les points des deux surfaces conservant les angles, soit

$$dS^2 = \lambda^2 ds^2$$

son élément linéaire; si nous prenons comme fonction de forces

$$V = \frac{U}{\lambda^2},$$

de telle façon qu'on ait

$$V dS^2 = U ds^2,$$

les trajectoires pour les mouvements correspondant sur la première surface à la fonction des forces U et sur la seconde à la fonction V , la constante des forces vives étant nulle dans les deux cas, ainsi que nous le supposons dans tout ce qui suit, se transforment les unes dans les autres par la correspondance précédente. On a, d'ailleurs, pour déterminer l'instant t' où le second mobile atteint un point déterminé de sa trajectoire,

$$dt' = \sqrt{\frac{dS^2}{2V}},$$

et, par suite,

$$(a) \quad dt' = \lambda^2 dt.$$

Les deux mobiles étant placés, pour $t = t' = 0$, dans des conditions initiales correspondantes atteindront à des instants t et t' différents les points correspondants de leurs trajectoires, mais il est essentiel d'observer que λ^2 reste compris, dans le voisinage d'un point, entre deux bornes positives m et M .

Il est clair qu'à une position d'équilibre du premier point pour laquelle U s'annule correspond pour le second une position d'équilibre pour laquelle V s'annule; les signes de U et V étant les mêmes aux points correspondants, si U n'est pas maximum, pour une telle position, V ne le sera pas pour la position correspondante. A une petite région r entourant la position d'équilibre sur la première surface correspond une petite région R entourant la position correspondante sur la seconde surface, et inversement.

D'ailleurs, si le second mobile placé au début à l'intérieur de R quitte cette région au bout d'un temps fini θ' , le premier mobile, placé dans

des conditions initiales correspondantes, partira de l'intérieur de la région r et quittera cette région au bout d'un temps θ compris entre $\frac{\theta'}{\bar{M}}$ et $\frac{\theta'}{m}$, donc fini. C'est dire que si l'équilibre est instable pour le second mobile, il le sera aussi pour le premier.

Comme on sait effectuer la représentation conforme d'une surface sur un plan, on voit bien que l'instabilité de l'équilibre démontrée plus haut pour le plan est par cela même établie pour un système holonome quelconque à deux paramètres. Il faut toutefois, pour que la conclusion soit rigoureuse, que les transformations précédentes conduisent dans le plan à une fonction des forces qui soit fonction analytique des coordonnées du mobile. C'est ce qui arrivera certainement si les coefficients de la force vive et la fonction des forces pour le système donné sont fonctions holomorphes des paramètres au voisinage de la position d'équilibre, et si le discriminant de la force vive est positif.

