

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. BOUTROUX

**Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé et l'étude asymptotique
des équations différentielles du second ordre**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 30 (1913), p. 255-375

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30_255_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHES
SUR
LES TRANSCENDANTES DE M. PAINLEVÉ
ET
L'ÉTUDE ASYMPTOTIQUE
DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE ⁽¹⁾,

PAR M. P. BOUTROUX.

INTRODUCTION.

I.

M. Painlevé a, comme on sait, résolu le problème suivant : « Déterminer toutes les équations différentielles du second ordre

$$y'' = R(y', y, x),$$

où R est rationnel en y' , algébrique en y , analytique en x , dont l'intégrale est uniforme ou, plus généralement, a ses points critiques fixes. »

Les Tableaux d'équations publiées en 1900 par M. Painlevé ont dû être complétés par M. Gambier; mais sa méthode épuise la

⁽¹⁾ Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Grand prix des Sciences mathématiques, 1912).

question, et c'est cette même méthode qui a permis à M. Painlevé lui-même, puis à MM. Chazy et Garnier, d'entreprendre avec succès la détermination des équations du troisième ordre dont les intégrales ont leurs points critiques fixes.

Rappelons que la méthode de M. Painlevé est caractérisée en ces termes par son auteur (*Acta Math.*, t. XXV, p. 11) : « Il m'a fallu, dit-il, constituer une double méthode qui répondit à un double objet : 1° trouver de nouvelles conditions *nécessaires* pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes; 2° décider si ces conditions sont *suffisantes*.

» La première partie de la méthode (recherche des conditions *nécessaires*) est à la fois très simple et très élémentaire. Elle s'applique avec une extrême facilité à une équation différentielle d'ordre quelconque, ou, plus généralement, à tout système d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale ne dépend que d'un nombre fini de constantes.

» La seconde partie de la méthode (recherche des conditions *suffisantes*) est d'un caractère plus subtil; elle peut être étendue aux équations du troisième ordre ou d'ordre supérieur; mais les complications qu'elle entraîne croissent avec l'ordre différentiel ».

Ainsi, lorsque, par élimination, on a formé une équation différentielle dont l'intégrale générale *peut* être uniforme, le plus difficile reste à faire : il faut montrer qu'*effectivement* ⁽¹⁾ les intégrales de cette équation n'ont *pas* de points critiques. Constatation peu encourageante : car prouver l'absence de singularités critiques, ce n'est donner encore qu'une propriété négative des fonctions définies par l'équation différentielle. A quelles difficultés ne se heurte-t-on pas si l'on veut obtenir des propriétés positives de ces fonctions, si l'on cherche à connaître leur structure comme on connaît, par exemple, la structure des fonctions elliptiques?

Effectivement, nous ne connaissons encore, à l'heure qu'il est, aucune propriété fonctionnelle notable des transcendentes découvertes par M. Painlevé. Sans doute, l'intervention inattendue de ces transcendentes dans certaines questions relatives aux équations linéaires,

(1) Cf. PAINLEVÉ, *Bull. de la Soc. math.*, 1900, p. 31 et suiv.

intervention signalée par MM. Schlesinger et Richard Fuchs, précisée depuis, et étudiée dans des cas nouveaux par M. Garnier, est un fait nouveau bien remarquable : mais la constatation de ce fait ne nous a pas conduits jusqu'ici à une connaissance plus intime des transcendantes elles-mêmes (*voir* à ce sujet notre septième Partie).

Si les recherches qui font l'objet du présent Mémoire réussissent à apporter quelque lumière sur la nature et les propriétés distinctives de ces fonctions, c'est en rattachant le problème de M. Painlevé à un problème plus général. Partant d'un ensemble de caractères fonctionnels que nous restreignons progressivement, nous déterminons et étudions les familles de fonctions et, tout d'abord, celles qui vérifient une équation différentielle algébrique, auxquelles appartiennent ces caractères : nous retrouvons ainsi, pour un ensemble de caractères particuliers, les transcendantes de M. Painlevé. Lors donc que nous parvenons à ces fonctions, nous nous trouvons déjà savoir qu'elles sont uniformes ou à points critiques fixes (la seconde partie de la méthode de M. Painlevé ne nous est plus nécessaire) et nous en connaissons déjà certains traits caractéristiques. Et, d'autre part, nous sommes en mesure de situer ces fonctions parmi l'ensemble des fonctions (uniformes ou non) qui leur sont apparentées.

La conclusion générale à laquelle nous parviendrons peut être résumée par la formule suivante : Les transcendantes de M. Painlevé, transformées en posant $y = x^m Y$, $X = x^l$ et choisissant convenablement les exposants m , l , sont *des fonctions asymptotes aux fonctions doublement périodiques* (nous expliquerons en détail ce qu'il faut entendre par ce mot *asymptote*); elles sont aux fonctions elliptiques ce que les fonctions méromorphes de Bessel sont aux fonctions circulaires ⁽¹⁾.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(A) \quad y' = y^2 + x,$$

(1) Ce rapprochement nous donne, en quelque manière, la norme des propriétés dont jouissent les transcendantes de M. Painlevé. Les fonctions de Bessel possèdent certaines propriétés remarquables des fonctions circulaires, les fonctions elliptiques en possèdent d'autres. On ne pourra retrouver chez les transcendantes nouvelles, *en fait de propriétés classiques*, que les propriétés communes aux fonctions de Bessel et aux fonctions elliptiques.

que le changement de variables $X = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, y = \sqrt{x} Y$, transforme en

$$(A') \quad Y' + \frac{1}{3} \frac{Y}{X} = Y^2 + 1.$$

Les fonctions de Bessel $Y(X)$ sont asymptotes aux fonctions tang $(X - X_0)$ intégrales de $Y' = Y^2 + 1$: l'étude de cet asymptotisme fera l'objet de notre première Partie. Considérons pareillement l'équation

$$(B) \quad y'' = 6y^2 - 6x,$$

que le changement de variables $X = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}}, y = \sqrt{x} Y$ transforme en

$$(B') \quad Y'' + \frac{Y'}{X} - \frac{4}{25} \frac{Y}{X^2} = 6Y^2 - 6,$$

nous verrons que les intégrales de (B') peuvent être caractérisées comme fonctions asymptotes aux intégrales de $Y'' = 6Y^2 - 6$.

Pareillement l'équation

$$(C) \quad y'' = 2y^3 - 2xy + \frac{2}{3}a,$$

que le changement de variables $y = \sqrt{x} Y, X = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ transforme en

$$(C') \quad Y'' + \frac{Y'}{X} - \frac{1}{9} \frac{Y}{X^2} - \frac{a}{X} = 2Y^3 - 2Y,$$

a ses intégrales asymptotes aux intégrales de $Y'' = 2Y^3 - 2Y$.

Et ainsi de suite (*voir* notre quatrième Partie).

Les propriétés asymptotiques des intégrales $Y(X)$ que nous mettrons en lumière ne sont pas toutes, nous l'avons dit, propriétés exclusives de fonctions uniformes ou de fonctions à points critiques fixes. Ainsi, par exemple, pour étudier asymptotiquement l'équation (B') et la comparer à $Y' = 6Y^2 - 6$, il est utile, sinon nécessaire, d'introduire dans l'équation un paramètre μ , et variant à partir de zéro. C'est ainsi que, pour étudier l'équation (A) , nous considérerons l'équation plus générale

$$(A \text{ bis}) \quad y' = y^2 + x^\mu,$$

ou, en posant $y = x^{\frac{\mu}{2}} Y$, $X = \frac{2}{\mu+2} x^{\frac{\mu+2}{2}}$, l'équation équivalente

$$(A' \text{ bis}) \quad Y' + \frac{\mu}{\mu+2} \frac{Y}{X} = Y^2 + 1,$$

équation qui varie entre $Y' = Y^2 + 1$ et (A') pour μ variant entre 0 et 1 : pareillement, pour étudier l'équation (B), nous considérerons l'équation plus générale

$$(B \text{ bis}) \quad y'' = 6y^2 - 6x^{\frac{\mu}{2}},$$

ou, en posant $y = x^{\frac{\mu}{4}} Y$, $X = \frac{4}{\mu+4} x^{\frac{\mu+4}{4}}$, l'équation équivalente

$$(B' \text{ bis}) \quad Y'' + \frac{5\mu}{\mu+4} \frac{Y'}{X} + \frac{4\mu(\mu-2)}{(\mu+4)^2} \frac{Y}{X^2} = 6Y^2 - 6,$$

équation qui varie entre $Y'' = 6Y^2 - 6$ et (B') pour μ variant entre 0 et 1. Nombre de résultats que nous obtiendrons s'appliqueront donc à l'équation (B bis) comme à l'équation (B) : or les intégrales de l'équation (B bis) *n'ont pas leurs points critiques fixes*.

L'étude asymptotique des équations (B') , (C') , ... nous fera connaître en premier lieu l'allure des « branches d'intégrales » $Y(X)$ (suivies sur l'ensemble des rayons issus, par exemple, de l'origine), la distribution de leurs infinis (ou des points où elles prennent une valeur donnée quelconque), le mécanisme des permutations des fonctions inverses; nous verrons qu'on peut décomposer les régions éloignées du plan X en cases où une *branche* $Y(X)$ ne prend qu'un nombre limité (donné) de fois toute valeur donnée et qui se rapprochent arbitrairement de parallélogrammes des périodes lorsqu'elles sont arbitrairement éloignées.

Les intégrales $Y(X)$, dont la structure est la plus régulière et peut être prise comme type, sont les intégrales *symétriques*, qui sont méromorphes en $X = 0$ [il est clair que, pour l'intégrale générale de (B') , $(B' \text{ bis})$, (C') , ..., l'origine est en général point critique]. Ces intégrales symétriques sont intéressantes à étudier à cause des analogies qu'il y a entre elles et les fonctions de Bessel correspondantes.

Écrivons l'équation (A' bis) sous la forme

$$Y' + 2\rho \frac{Y}{X} = Y^2 + 1;$$

cette équation admet une intégrale $Y_{1\rho}$ holomorphe et une intégrale $Y_{2\rho}$ méromorphe à l'origine. Ces intégrales sont liées par la relation

$$Y_{2\rho} = Y_{1(1-\rho)} + \frac{2\rho-1}{X},$$

et $Y_{1\rho}$ se développe sous la forme $a_{1\rho}X + a_{3\rho}X^3 + \dots$, où

$$a_{1\rho}(1+2\rho)=1, \quad a_{3\rho}(3+2\rho)=a_{1\rho}^2, \quad a_{5\rho}(5+2\rho)=2a_{1\rho}a_{3\rho}, \quad \dots$$

Écrivons semblablement l'équation (B' bis) sous la forme

$$Y'' + m \frac{Y'}{X} + n \frac{Y}{X^2} = 6Y^2 - 6;$$

cette équation admet une intégrale $Y_{1(m,n)}$ holomorphe et une intégrale $Y_{2(m,n)}$ méromorphe à l'origine. Ces intégrales sont liées par la relation

$$Y_{2(m,n)} = Y_{1(m,4m+n-12)} + \frac{6+n-2m}{6X^2},$$

et $Y_{1(m,n)}$ se développe sous la forme

$$Y_{1(m,n)} = a_{2(m,n)}X^2 + a_{6(m,n)}X^6 + \dots,$$

où

$$a_{2(m,n)}(2.1+2m+n)=-6, \quad a_{6(m,n)}(6.5+6m+n)=6a_{2(m,n)}^2,$$

$$a_{10(m,n)}(10.9+10m+n)=12a_{2(m,n)}a_{6(m,n)}.$$

Il serait intéressant de poursuivre l'étude du développement $Y_{1(m,n)}$ pour les diverses valeurs de m, n . Mais revenons à l'intégrale générale $Y(X)$ d'une équation (B'), ou (C').

La connaissance de l'allure des $Y(X)$ permet de choisir en toute connaissance de cause les développements ou modes de représentation de ces fonctions qui rendront le mieux compte de leurs caractères distinctifs; elle permet aussi d'étudier les propriétés que l'on pourrait appeler *propriétés périodiques* des fonctions $Y(X)$.

Soient X_0 et X_1 deux points où une même intégrale $Y(X)$ prend la même valeur η : sous certaines conditions, qui seront ultérieurement

précisées, je dirai que la différence $X_1 - X_0$ est une *période* de l'intégrale; cette période est en général fonction de X , de η et de la valeur η' prise par Y' au point X ; en vertu de l'asymptotisme des $Y(X)$ elle sera (pour des η et η' donnés) d'autant plus voisine d'une constante que $|X|$ sera plus grand.

Pareille généralisation de la notion de période répugne au premier abord et paraît bien artificielle : cependant mes recherches relatives aux intégrales $Y(X)$ m'ont de plus en plus convaincu que la considération des *fonctions-périodes* doit jouer un rôle important dans l'étude de ces intégrales. Il en est ainsi surtout pour certaines valeurs particulières de η .

Considérons, par exemple, les pôles $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots$ des intégrales de l'équation (B'). Ces pôles sont tous, sans exception, des pôles doubles; l'intégrale assujettie à être infinie en \bar{X}_0 est entièrement définie si l'on se donne, avec \bar{X}_0 , la valeur d'un certain paramètre C qui est le coefficient (arbitraire) de $(X - \bar{X}_0)^4$ dans le développement de l'intégrale autour de \bar{X}_0 . Si l'on regarde \bar{X}_1 comme fonction de \bar{X}_0 ou de C , cette fonction est nécessairement holomorphe partout où elle est finie. C'est là un fait gros de conséquences : en approfondissant l'étude de la fonction $\bar{X}_1(\bar{X}_0, C)$ et des *fonctions connexes*, il semble que nous touchions au cœur des nouveaux êtres analytiques introduits dans la Science par M. Painlevé.

Je n'ai point, dans le présent travail, tiré de l'introduction de la notion de *période* toutes les conséquences qu'elle comporte, car j'ai dû traiter longuement un problème préliminaire qui est assez ardu à cause de l'insuffisance des moyens dont nous disposons pour l'aborder : il s'agissait de préciser les conditions dans lesquelles la fonction $\bar{X}_1(\bar{X}_0)$ devient infinie et critique, c'est-à-dire d'étudier les intégrales $Y(X)$, ou les intégrales $y(x)$ correspondantes, qui ont des pôles rejetés à l'infini. J'ai appelé ces intégrales *intégrales tronquées* : remarquables en elles-mêmes à cause de leur structure exceptionnelle, elles sont en outre le pivot des recherches que nous avons entreprises.

Les pôles de l'intégrale générale de l'équation (A) sont distribués suivant trois demi-lignes qui partent d'un cercle de rayon fini

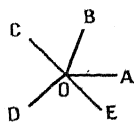
entourant $x = 0$ et s'éloignent indéfiniment en affectant une forme de plus en plus rectiligne [voir première Partie, § 3-5; pour les intégrales *symétriques*, dont il a été question plus haut, ces demi-lignes sont l'axe réel positif OA, et les demi-droites OB, OC, issues de l'origine, qui font avec cet axe les angles $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$]. En particulier, il existe *trois* intégrales de (A) pour lesquelles deux demi-lignes de pôles sont rejetées à l'infini; ces intégrales, *fonctions de Bessel tronquées*, n'ont donc plus, chacune, qu'une *demi-ligne de pôles*, laquelle coïncide avec l'axe réel positif ou avec l'une des demi-droites OB, OC (voir § 4-5). Dans toute direction autre que celle de la demi-ligne de pôles, l'intégrale Y (déduite de y en posant $y = \sqrt{x}Y$) tend vers une limite finie ($\pm \sqrt{-1}$).

Considérons d'autre part l'équation $Y'' = 6Y^2 - 6$: les *intégrales tronquées* de cette équation sont les dégénérescences des fonctions elliptiques p dont une ou deux périodes deviennent infinies; il existe deux intégrales tronquées et deux seulement polaires en un point donné \bar{X}_0 .

J'ai recherché ce que deviennent ces intégrales tronquées lorsqu'on passe de l'équation $Y'' = 6Y^2 - 6$ à l'équation asymptote (B'). Voici, transportés à l'équation (B) en y, x qui correspond à (B'), les principaux résultats obtenus :

Appelons (*fig. 1*) OA l'axe réel positif du plan x , et OB, OC, OD, OE

Fig. 1.



les demi-axes qui font avec OA les angles $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \dots, \frac{8\pi}{5}$. Pour toute position de \bar{x}_0 non située sur un des cinq demi-axes, il existe *cinq intégrales tronquées* polaires en \bar{x}_0 ; elles sont tronquées respectivement dans les directions OA, OB, ..., OE. J'entends par là que chacune de ces intégrales a une *ligne de pôles extrême*, c'est-à-dire un ensemble

de pôles distribués sur une ligne qui va de l'infini à l'infini et dont les deux extrémités sont asymptotiquement parallèles à deux demi-axes tels que OB et OE; sur tout chemin du plan x qui s'éloigne indéfiniment à droite de cette ligne de pôles extrême (c'est-à-dire du côté de OA), l'intégrale tronquée reste finie, et Y (égal à $x^{-\frac{1}{2}}\gamma$) tend vers une limite finie (± 1). *A gauche* de la ligne de pôles extrême, par contre, l'intégrale n'est pas tronquée : la distribution de ses pôles de grand module est normale.

A l'étude des intégrales tronquées polaires en \bar{x}_0 sont liées certaines fonctions remarquables. Pour déterminer une intégrale $\gamma(x)$ polaire en \bar{x}_0 , il faut, comme nous l'avons dit plus haut ⁽¹⁾, se donner une valeur du paramètre c , coefficient de $(x - x_0)^4$ dans le développement de l'intégrale. Appelons c_a la valeur de ce paramètre qui donne l'intégrale tronquée dans la direction OA. Lorsque \bar{x}_0 varie, c_a engendre une fonction uniforme ⁽²⁾ de \bar{x}_0 : cette fonction n'a d'autres singularités qu'une coupure rectiligne qui se trouve sur le prolongement OA' de OA entre un certain point A, de ce prolongement et $x = -\infty$; elle offre des particularités curieuses que nous signalerons au paragraphe 16 (troisième Partie).

Envisageant de même les quatre autres intégrales tronquées polaires en \bar{x}_0 , nous obtenons quatre autres fonctions uniformes à coupures, $c_b(\bar{x}_0)$, ..., $c_e(\bar{x}_0)$. On devine le rôle que vont jouer ces fonctions dans l'étude de la période $\bar{x}_1(\bar{x}_0, c) - x_0$ [transformée en x de la période $\bar{X}_1(\bar{X}_0, C) - \bar{X}_0$ envisagée plus haut].

A gauche de la ligne de pôles extrême correspondant à l'intégrale tronquée dans la direction OA, se trouvent d'autres lignes de pôles asymptotiquement parallèles à OB, OE : nous les appellerons *ligne de pôles pénultième*, *ligne de pôles antépénultième*, etc. Appelant c'_a le paramètre de l'intégrale en un pôle \bar{x}'_0 d'une quelconque de ces lignes, on pourra étudier la fonction $c'_a(\bar{x}'_0)$ comme on a étudié la fonction $c_a(\bar{x}_0)$. Exceptionnellement, il pourrait arriver qu'une moitié de la ligne de

(1) Nous avons noté ce fait plus haut en considérant la fonction $Y(X)$. Il se présente également pour la fonction $\gamma(x)$.

(2) Observons qu'en tous les pôles $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$, de la ligne de pôles extrême, le paramètre est donné par la même fonction $c_a(\bar{x}_0)$, où l'on fait $\bar{x}_0 = \bar{x}_1, \bar{x}_2$, etc.

pôles pénultième fût rejetée à l'infini dans la direction OC ou OD : l'intégrale serait alors une *intégrale bitronquée*. Nous n'insisterons pas sur cette éventualité dont l'intérêt est secondaire, mais nous attachons, par contre, une grande importance aux INTÉGRALES TRITRONQUÉES dont le nombre total est 5.

Une intégrale *tritronquée* est une intégrale tronquée suivant trois des cinq directions spécifiées plus haut, telles que OE, OA, OB : elle ne présente des pôles (en nombre infini) que sur les rayons qui s'éloignent indéfiniment dans le seul angle $\widehat{C\hat{O}D}$; lorsque x croît indéfiniment dans toute autre direction, Y (égal à $x^{-\frac{1}{2}}\gamma$) tend vers ± 1 . Il n'y a qu'une intégrale tritronquée dans les trois directions OE, OA, OB, comme il n'y a que deux intégrales de $Y'' = 6Y^2 - 6$, dont les deux périodes soient infinies. — Les cinq intégrales tritronquées de l'équation (B) doivent jouer dans l'étude de cette équation le rôle qui revient, dans la théorie des fonctions de Bessel, aux *trois* intégrales (simplement) tronquées.

La notion d'intégrale tronquée est, comme je le disais plus haut, à la base des propriétés périodiques des transcendentes de M. Painlevé. J'ai cherché à montrer, dans la sixième Partie de ce travail, comment, en partant de cette notion, on peut, *a priori* et sans aucuns calculs, faire une étude systématique des fonctions méromorphes définies par les équations du second ordre. Bien que je n'aie pas appliqué aux équations du troisième ordre la méthode que je propose, il ne me paraît pas douteux qu'elle ne s'étende à cet ordre et aux ordres supérieurs (en ce qui concerne, du moins, les équations à intégrales méromorphes).

Soit, par exemple, à définir la *période* aux pôles de $\gamma(x)$. Je considère une intégrale $\gamma(x)$ qui a un pôle en \bar{x}_0 avec paramètre c voisin de c_a (voir plus haut le sens de ces lettres). Cette intégrale présente une « *ligne de pôles* » ..., $\bar{x}_{1,-1}$, $\bar{x}_{1,0}$, $\bar{x}_{1,1}$, ..., qui est tout entière rejetée à l'infini dans la direction OA pour $c = c_a$; ces pôles se permutent dans l'ordre des indices croissants ou décroissants, lorsque c décrit un petit lacet fermé (λ) autour de c_a : on peut, dès lors, regarder comme l'une des périodes de l'intégrale $\gamma(x)$ la différence de deux pôles consécutifs $\bar{x}_{1,0}$, $\bar{x}_{1,1}$ permutée par ce lacet (λ).

Appelons, d'autre part, c_{10} le paramètre de l'intégrale en \bar{x}_{10} : laissant \bar{x}_0 fixe, on peut étudier c_{10} comme fonction de c ou comme fonction \bar{x}_{10} (voir § 17 et § 24 et suiv.). L'étude de ces fonctions nous permettra d'opposer les intégrales du *type monopériodique* (telles que les fonctions de Bessel) aux intégrales du *type bipériodique* (telles que les fonctions de Painlevé) et de montrer que *les équations qui définissent les premières sont toujours réductibles à des équations du premier ordre*.

Pour étudier les *périodes* correspondant aux divers pôles d'une même intégrale $y(x)$, ou $Y(X)$, on envisage une *ligne de pôles*, soit la ligne de pôles $\dots, \bar{x}_{1,-1}, \bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}, \dots$, définie ci-dessus, et l'on se demande : d'une part, *comment varie la ligne de pôles lorsque l'un de ses sommets, \bar{x}_{10} , se déplace*; d'autre part, *comment se comporte la suite des paramètres $c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1n}, \dots$, qui définissent une même intégrale aux pôles $\bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}, \dots$* . Ces questions peuvent être résolues, indépendamment de la théorie des intégrales tronquées, au moyen de l'étude asymptotique directe des intégrales $y(x)$ ou $Y(X)$ quelconques. C'est la voie que nous avons suivie dans la deuxième partie de ce travail. Appelant $c_{-n}, \dots, c_0, \dots, c_n, \dots$ les paramètres de l'intégrale $Y(X)$ sur une *ligne de pôles* du plan X , nous démontrons que, pour n croissant indéfiniment, *les paramètres c_n, c_{-n} tendent vers les limites ± 2* , en sorte que, sur la ligne de pôles indéfiniment prolongée, $Y(X)$ tend vers une fonction circulaire, intégrale tronquée de $Y'' = 6Y^2 - 6$. Il en est ainsi du moins pour une ligne de pôles ⁽¹⁾ définie comme il a été dit plus haut. On peut définir d'autres lignes de pôles sur lesquels C_n tend vers une autre limite. Si l'on considère, par contre, une suite de pôles s'éloignant indéfiniment dans une direction autre que celle d'une ligne de pôles, la suite des paramètres correspondants n'a en général aucune limite. L'élucidation complète de ces faits était nécessaire pour expliquer exactement en quoi consiste l'asymptotisme des intégrales de (B') et des fonctions elliptiques p (voir plus bas Introduction, II, et deuxième Partie).

⁽¹⁾ Nous développerons, au paragraphe 9, la définition de la ligne de pôles à laquelle conduit l'étude asymptotique de l'équation différentielle.

Tels sont les premiers résultats auxquels nous conduit l'étude des transcendentes définies par les équations (B) ou (B'). Les autres équations de MM. Painlevé et Gambier donnent lieu à une analyse toute semblable; nous n'avons donc pas cru nécessaire d'en faire un exposé détaillé; d'ailleurs les démonstrations de notre sixième Partie s'appliquent indistinctement à toutes les équations de M. Painlevé.

Par contre, il était opportun de prolonger nos recherches d'un autre côté. J'ai dit plus haut que pour étudier les fonctions asymptotes à un type donné, par exemple aux intégrales de $Y'' = 6Y^2 - 6$, il était utile, et même nécessaire, de sortir du cadre des fonctions uniformes. Il importait donc, pour donner à notre travail toute sa signification, d'expliquer d'une manière précise en quoi consiste l'étude asymptotique des fonctions non uniformes, définies par une équation différentielle. Mais peut-être convient-il, au préalable, d'expliquer un peu notre point de vue en faisant quelques remarques et donnant quelques définitions d'ordre général.

II.

Déterminer et étudier une classe de fonctions analytiques qui possède quelques propriétés choisies *a priori*, c'est le problème ordinaire de la théorie des fonctions. Les propriétés d'où l'on part ne s'imposent pas, il est vrai, d'une manière nécessaire; le plus souvent, on ne sait pas à l'avance, lorsqu'on se pose une question nouvelle, si elle est purement artificielle ou si elle étendra le champ de nos connaissances. Il semble permis cependant de ranger dès maintenant, parmi les caractères fonctionnels susceptibles de fournir un point de départ avantageux, ceux qui ont trait à l'allure d'une fonction au voisinage d'un point singulier transcendant.

Ces caractères peuvent être rangés sous deux chefs : 1^o allure ou mode de croissance de la fonction le long des rayons qui aboutissent au point singulier transcendant (la fonction suivie sur l'ensemble de ces rayons à partir d'une valeur initiale donnée sera appelée *branche de fonction*); 2^o mécanisme des permutations qui échangent entre elles plusieurs branches de fonction. Il conviendra d'ailleurs d'étudier simultanément à ce double point de vue la fonction proposée et son inverse.

Notre définition de la branche de fonction est arbitraire : mais il est commode de fixer une fois pour toutes la nature des chemins sur les-

quels le prolongement analytique d'une fonction sera regardé comme constituant une *branche*, et le plus simple est évidemment d'imposer à ces chemins la condition d'être rectilignes.

Moyennant cette convention, l'étude des *branches de fonctions* se présente comme une application et une suite de la théorie de la *croissance* dont les bases ont été posées par M. Borel.

Supposons, en particulier, que le point, transcendant ou non, au voisinage duquel on étudie une fonction $\gamma(x)$ soit à l'infini, et considérons une *branche* de cette fonction sur l'ensemble des rayons issus d'un point arbitraire. La croissance de la branche peut être qualifiée, suivant les cas ⁽¹⁾, de rationnelle au sens étroit, d'exponentielle, de rationnelle au sens large. Nous allons préciser cette classification dont nous aurons à faire un fréquent usage.

1° Désignons par $\gamma(x)$ la branche considérée, supposons qu'on puisse trouver un exposant réel λ , positif ou nul, et une constante a telle que la différence $\gamma(x) - ax^\lambda$ tende vers zéro ou ⁽²⁾ que le rapport $\gamma(x)/ax^\lambda$ tendent vers 1 sur les rayons considérés. Nous dirons que la branche $\gamma(x)$ est *asymptote à la fonction ax^λ* . Dans le cas particulier où λ est rationnel, nous ajouterons que la *branche $\gamma(x)$* est *algébroides*. Dans le cas particulier où λ est entier, nous dirons que la branche est *rationaloïde*. Si λ est nul ou entier positif, la branche sera dite *holomorphoïde*.

Ces définitions s'étendent d'elles-mêmes au cas d'un point x_0 quelconque situé à distance finie; les rayons sur lesquels on suit la branche de fonction convergent alors vers x_0 . Toutefois, nous conviendrons de n'appliquer l'épithète *asymptote* qu'aux branches de fonctions suivies sur un ensemble de rayons indéfiniment prolongés.

Nous remarquerons qu'une *branche de fonction $\gamma(x)$* peut être, d'après notre définition, algébroides en x_0 sans que la *fonction $\gamma(x)$* soit une fonction algébroides au voisinage de x_0 .

2° Supposons que, sur les rayons infinis considérés plus haut, la

⁽¹⁾ Cf. mes *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, 1908, Chap. II.

⁽²⁾ Lorsque λ est positif, il n'y a asymptotisme au sens ordinaire du mot que dans la première des deux hypothèses indiquées ici. Nous prendrons toutefois la liberté d'employer la même terminologie dans les deux cas, leur distinction étant sans intérêt pour notre étude.

branche $\gamma(x)$, à partir d'une certaine valeur de $|x|$, ne cesse pas d'être holomorphe. Nous dirons que la branche (si elle n'est pas fonction entière) est *entiéroïde* ou *asymptote à une fonction entière*.

Si la branche, toujours finie sur les rayons considérés, présente une infinité de points critiques convergeant vers $x = \infty$, on démontre qu'elle a encore une *croissance* ou *allure exponentielle* ⁽¹⁾, mais elle n'est pas asymptote à une fonction entière, sauf toutefois dans un cas particulier :

Soit x_j un point critique arbitrairement éloigné. Parmi les rayons sur lesquels est définie notre branche de fonction, considérons celui qui passe par x_j , et appelons \bar{x} un point quelconque situé sur ce rayon au delà de x_j . Au point \bar{x} nous obtenons une détermination différente de la branche $\gamma(x)$ suivant que sur le rayon considéré (supposé infiniment peu déformé), nous passons à droite ou à gauche de x_j . Mais supposons que, quel que soit \bar{x} (sur le rayon considéré), la différence des deux déterminations tende vers zéro lorsque x_j est arbitrairement éloigné. Alors la branche $\gamma(x)$, suivie sur un rayon quelconque indéfiniment prolongé, est asymptote à une fonction entière : nous dirons en ce cas que la *branche* est *semi-entiéroïde*.

3° Supposons, en dernier lieu, que le long des rayons sur lesquels elle est suivie, la branche $\gamma(x)$, à partir d'une certaine valeur de $|x|$, ne cesse pas d'être méromorphe. Nous dirons que la branche (si elle n'est pas fonction méromorphe) est *méromorphoïde* ou *asymptote à une fonction méromorphe*.

Si la branche présente des points critiques x_j en nombre infini, elle n'est pas, en général, asymptote à une fonction méromorphe. Cependant, comme ci-dessus, nous dirons que la branche est *semi-méromorphoïde* dans le cas particulier où la différence des deux déterminations permutées par x_j tend vers zéro avec x_j^{-1} et tout point \bar{x} du rayon passant par x_j .

*
* *

C'est de branches de fonctions méromorphoïdes et semi-méromorphoïdes que nous avons à nous occuper dans ce travail.

Pour caractériser d'une manière précise une branche de fonction

(1) *Loc. cit.* Chap II, § 1.

méromorphoïde, il faudrait savoir comment sont distribués les *zéros* et les *infinis* de cette branche $f(x)$; ou, mieux encore, il faudrait résoudre le problème fondamental suivant : *Décomposer le champ de la variable x en un ensemble de régions \mathfrak{A} , juxtaposées, dans chacune desquelles la « branche » $f(x)$ prend une fois et une seule, ou un nombre fini de fois, toute valeur donnée.* (Le champ de la variable sera ici le domaine extérieur à un contour fermé.)

Ce problème comporte une solution complète lorsque la fonction admet des périodes ou un groupe de transformations simple. Dans le cas général, on ne peut le résoudre que partiellement en se plaçant à un point de vue qualitatif. Il convient, semble-t-il pour définir les régions \mathfrak{A} relatives à une certaine fonction $f(x)$, de fixer son attention, non point sur la forme et sur le contour de ces régions, mais sur le mécanisme des permutations de la fonction inverse $x(f)$, qui font passer d'une région à la voisine. Les régions \mathfrak{A} se laisseront alors répartir entre un certain nombre de familles, nombre qui paraît devoir être toujours fini pour une branche $f(x)$ asymptote à une fonction méromorphe de genre fini; pour échanger les déterminations de $x(f)$, situées dans deux régions contiguës d'une même famille, on devra faire tourner le point f autour d'un même point transcendant ou autour de points critiques algébriques appartenant à un même système ⁽¹⁾ (ces points, rangés dans l'ordre où ils opèrent, formeront une série linéaire ou une série à double entrée); les diverses familles de région \mathfrak{A} qui correspondent à une même fonction $f(x)$ seront rattachées par des régions-raccords spéciales (en nombre fini si les familles sont elles-mêmes en nombre fini).

Telles sont les conclusions auxquelles paraît devoir conduire l'étude générale des fonctions méromorphes de genre fini ou des branches de fonctions *méromorphoïdes* ⁽²⁾. Dans le cas d'une branche de fonction *semi-méromorphoïde*, la décomposition du champ de la variable en régions \mathfrak{A} n'est possible que si l'on rend la branche uniforme en traçant dans ce champ un nombre infini de coupures; cette décomposition n'offre plus d'intérêt; par contre, on pourra toujours caractériser la fonction

(1) Nous verrons, à l'occasion des divers types de fonctions étudiés dans ce travail, ce qu'il faut entendre par là. Nous ne pouvons aborder ici le cas général.

(2) Cf. mes articles, publiés dans les *Actes du Congrès de Rome*, 1909, et dans les *Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1909.

par le mécanisme des permutations de la fonction inverse (*cf.* deuxième Partie, p. 316 et suiv.).

L'étude que nous allons entreprendre nous permettra d'effectuer la décomposition en régions \mathfrak{A} dans un cas particulièrement facile à saisir : le cas où les fonctions étudiées ont même structure qu'une fonction méromorphe élémentaire, ou sont, plus particulièrement, *asymptotes* à une telle fonction.

*
* *

Partant d'une fonction méromorphe connue, nous pouvons nous demander *a priori* s'il existe des *branches de fonctions* $f(x)$ qui aient une structure semblable sans être cependant réductibles aux transcendentes classiques.

Prenons pour exemple la fonction $y = \sin x$. La structure de cette fonction est déterminée par les caractères suivants : on peut décomposer le plan x en une série de *bandes* contiguës (séparées par des lignes simples allant de l'infini à l'infini) dans chacune desquelles $\sin x$ prend deux fois et deux fois *seulement* (exception faite pour les valeurs situées sur les frontières des bandes) toute valeur donnée. Lorsque x s'éloigne indéfiniment à l'intérieur d'une bande, au-dessus ou au-dessous de l'axe réel, y tend vers l'infini. Pour passer d'une détermination de $x = \arcsin y$ figurée dans une bande donnée à une détermination située dans une bande contiguë, il faut faire tourner successivement y autour de deux points critiques algébriques. Du point de vue où nous nous plaçons, ces caractères seuls sont essentiels. Le fait que deux points correspondants de deux bandes contiguës quelconques soient séparés par une distance constante, le fait que les points critiques algébriques qui permutent la suite des déterminations de $\arcsin y$ coïncident tous avec les points ± 1 , ces deux propriétés capitales de la fonction *sinus* n'interviennent qu'au point de vue quantitatif, et elles pourraient disparaître sans que la structure de la fonction entière et de son inverse se trouvent affectées.

Ainsi, il sera facile de construire une infinité de fonctions, ou *branches de fonctions*, semblables, quant à leur structure, à la fonction *sinus*.

Prenons par exemple

$$Y = x \Pi \left(1 - \frac{x}{\alpha_n n \pi} \right) e^{\frac{x}{\alpha_n n \pi}},$$

où les α_n sont des nombres voisins de 1. Nous pouvons donner à ces nombres des valeurs assez rapprochées de 1 pour que la fonction $Y(x)$ ait même allure que $\sin x$. Les régions \mathfrak{A} relatives à $Y(x)$ (dans chacune desquelles Y prend deux fois toute valeur donnée) seront des bandes s'étendant de l'infini au-dessous de l'axe réel à l'infini au-dessus; pour x s'éloignant vers l'infini à l'intérieur d'une bande, le module $|Y|$ croîtra indéfiniment et sera de l'ordre de grandeur de $e^{|x|}$; enfin, pour passer d'une bande à la voisine, il faudra faire tourner le point Y autour de deux points critiques respectivement voisins des points $+1$ et -1 .

Moyennant un choix convenable des α_n (*que nous ferons tendre vers 1 pour n infini*), nous pourrons nous rapprocher plus encore de la fonction *sinus*. Nous pouvons faire en somme que le rapport $Y/\sin x$ tende vers 1 pour x arbitrairement grand (les zéros de $\sin x$ exclus). Numérotions alors les régions \mathfrak{A} dans l'ordre où nous les rencontrons dans le plan x ; les frontières de ces régions seront asymptotiquement parallèles à l'axe imaginaire; les points critiques de la fonction inverse correspondant à \mathfrak{A}_n tendront vers $+1$ et -1 lorsque n croîtra indéfiniment. Une fonction $Y(x)$ ainsi constituée sera *asymptote à la fonction $\sin x$* .

Nous définirons d'une manière semblable des fonctions méromorphes *asymptotes à $\tan x$* . Soit

$$Y = \frac{x \prod \left(1 - \frac{x}{\alpha_n n \pi}\right) e^{\frac{x}{\alpha_n n \pi}}}{\prod \left(1 - \frac{2x}{\beta_n n \pi}\right) e^{\frac{2x}{\beta_n n \pi}}},$$

où α_n, β_n désignent des nombres voisins de 1 et tendent vers la limite 1 lorsque n augmente indéfiniment. Nous pouvons donner aux nombres α_n, β_n des valeurs assez rapprochées de 1 pour que la fonction $Y(x)$ ait même structure que $\tan x$ et que la différence $Y(x) - \tan x$ tende vers zéro lorsque $|x|$ croît indéfiniment (le voisinage des pôles de $\tan x$ étant exclus). Les régions \mathfrak{A} relatives à $Y(x)$ seront des bandes dont les frontières sont asymptotiquement parallèles à l'axe imaginaire; pour passer d'une bande à la voisine, il faudra faire tourner le point Y autour d'un point critique qui (s'il n'est pas transcendant et voisin de $\pm i$) appartiendra à un système de points cri-

tiques algébriques convergeant vers les limites $+i$ et $-i$ (*vide infra*, première Partie, p. 286-287).

Considérons pareillement la fonction $p(x)$ de Weierstrass. Nous pouvons décomposer le plan x en une série de *cases* \mathcal{A} dans chacune desquelles $p(x)$ prend deux fois et deux fois seulement toute valeur donnée. Pour faire passer x d'une case donnée à une case nouvelle, ayant avec la première un côté commun, il faut faire tourner y autour de deux points critiques déterminés : α , β , ou β , α , ou β , γ , ou γ , β . Imaginons maintenant que nous fassions subir de légers déplacements aux pôles doubles de $p(x)$, déplacements qui seront infiniment petits pour les pôles infiniment éloignés. Nous pouvons ainsi former une fonction méromorphe $Y(x)$ qui aura même structure que $p(x)$. Aux parallélogrammes des périodes de $p(x)$ correspondront, pour $Y(x)$, des *cases* (extérieures les unes aux autres) affectant approximativement la forme de parallélogrammes, dans chacune desquelles $Y(x)$ présentera un pôle double et prendra deux fois toute valeur finie et deux fois seulement, sauf pour les valeurs situées sur les frontières des cases. Les points critiques de $x(Y)$ seront tous algébriques et pourront être répartis, sans ambiguïté, entre trois séries 1, 2, 3 qui, lorsqu'on fait tendre les α_n et β_n vers zéro, convergent respectivement vers trois points fixes α , β , γ . On peut donner aux cases la forme de quadrilatères curvilignes aux quatre sommets desquels y prend une même valeur η . Pour faire passer x d'un sommet à un autre (le long d'un côté d'une case), il faut faire tourner Y autour de deux points critiques appartenant à des séries déterminées : point de la série 1 et point de la série 2; ou bien : point de la série 2 et point de la série 3, etc.

A l'occasion des fonctions $Y(x)$ qui ont même structure que $p(x)$, nous devons faire quelques remarques qui vont nous obliger à allonger encore la liste de nos définitions.

1° Une fonction méromorphe qui donne lieu, comme $p(x)$ à une division du plan en *cases* \mathcal{A} peut être dite *fonction du type bipériodique*. Plus généralement, je dirai qu'une fonction méromorphe $y(x)$ est du *type pluripériodique* si toute *branche* $x(y)$ de la fonction inverse suivie (sur un ensemble de rayons convergents du plan y) à partir de

conditions initiales finies, ne prend que des valeurs intérieures à un contour fermé du plan x : on peut, dans ces conditions, définir une *case* \mathcal{R} à l'intérieur de ce contour. La qualification *pluripériodique* indique que, pour la fonction considérée, toute région \mathcal{R} (simplement connexe) est nécessairement contiguë à plus de deux autres régions \mathcal{R} .

Généralisant encore cette définition, nous dirons qu'une *branche de fonction* $y(x)$ est du type pluripériodique ⁽¹⁾ si toute branche de $x(y)$ qui est, au voisinage de ses conditions initiales, inverse de la *branche* $y(x)$ considérée, satisfait aux conditions énoncées ci-dessus.

2° En formant la fonction $Y(x)$ définie ci-dessus, on peut évidemment imprimer aux pôles doubles de $p(x)$ des déplacements assez petits pour que la différence $Y - p(x)$ soit arbitrairement petite avec $|x|^{-1}$ [excepté aux pôles de $p(x)$]. En ce cas, $Y(x)$ sera *asymptote* à $p(x)$. Mais il est un autre cas notable auquel nous aurons affaire dans la suite de ce travail.

Considérons une famille de fonctions $Y(x)$ construites comme il a été dit plus haut et dépendant d'un paramètre. Envisageons, d'autre part, l'ensemble des fonctions $p(x - x_0)$ qui vérifient une même équation différentielle telle que $p'' = 6p^2 - 6$. Si dans toute *case* \mathcal{R} , arbitrairement éloignée, relative à l'une quelconque des fonction Y , cette fonction diffère arbitrairement peu d'une fonction $p(x - x_0)$, nous dirons que la famille des fonctions Y est *asymptote à la famille des fonctions* $p(x - x_0)$. Si les $Y(x)$ sont, comme les $p(x - x_0)$, définies par une équation différentielle, nous dirons que *les deux équations différentielles sont asymptotes* ⁽²⁾.

Considérons, plus généralement, deux familles de branches de fonctions semi-méromorphoïdes définies par deux équations différentielles et donnant lieu, chacune, à une décomposition du plan en cases \mathcal{R} . Si, dans toute case arbitrairement éloignée, relative à une branche de

⁽¹⁾ Nous rencontrerons, dans la suite de ce travail, de telles branches de fonctions et nous donnerons de leurs périodes une définition précise.

⁽²⁾ Dans ces conditions, une fonction $Y(x)$ ne sera asymptote à aucune fonction p déterminée, sur les chemins x qui s'éloignent indéfiniment dans une direction *quelconque* : mais il y aura en général asymptotisme entre $Y(x)$ et une fonction p déterminée *sur les chemins qui s'éloignent dans la direction d'une ligne de pôles* (*vide supra*, p. 265).

la première famille, il existe une branche de la seconde famille, arbitrairement voisine de cette branche, nous dirons que *les deux équations différentielles* ou *les deux familles de branches de fonctions sont asymptotes*.

*
* *

Les remarques et les définitions qui précèdent nous permettent d'aborder d'une manière systématique l'étude asymptotique des branches de fonctions et, en particulier, des branches méromorphes, méromorphoïdes ou semi-méromorphoïdes.

Cette étude ne sera faite ici que dans des cas particuliers. Je considère, dans la cinquième Partie de ce travail, l'équation du second ordre

$$(e) \quad y'' = L(x, y)y'^2 + M(x, y)y' + N(x, y)$$

rationnelle en y , équation d'où est parti M. Painlevé, et je me propose d'étudier les branches d'intégrales de cette équation au voisinage du point $x = \infty$, que nous supposons être point transcendant.

Dans le cas où l'équation ne dépend pas de x , elle s'écrit

$$z \frac{dz}{dy} = L(y)z^2 + M(y)z + N(y) \quad (z = y');$$

or cette équation a été l'objet de travaux ⁽¹⁾ dont les résultats peuvent être appliqués ici. Nous saurons déterminer, par exemple, l'allure des *branches d'intégrales* $y(z)$ (suivies sur un ensemble de rayons convergents du plan y) et le mécanisme des permutations qui échangent ces branches. De là nous déduirons la solution de divers problèmes tel que le suivant : Trouver toutes les équations (e), indépendantes de x , dont les branches d'intégrales sont *rationaloïdes* en tous leurs points; parmi ces équations (e) se trouvent celles qui ont leurs intégrales uniformes.

Si maintenant l'on a affaire à une équation (e) dont le second membre (en tant que fonction de x) a ses branches algébroides ⁽²⁾ pour $x = \infty$, on pourra toujours effectuer un changement de variable $y = x^q Y$, $x = t^{-1} X^t$, tel que la nouvelle équation (E) en X, Y , ne

⁽¹⁾ Posant $z = u^{-1}$, l'équation s'écrit $u' + Lu + Mu^2 + Nu^3 = 0$.

⁽²⁾ *Vide supra*, p. 267.

contienne, comme termes dépendant de X , que des termes qui tendent vers zéro avec $|X|$, et soit *asymptote* à une ou à plusieurs équations indépendantes de X (*voir* ci-dessus le sens que nous attachons à cette locution). Telle est la proposition qui me paraît dominer l'étude des branches d'intégrales des équations (e) ou, plus généralement, des équations $y'' = R(x, y, y')$ algébriques en x, y, y' . Cette proposition, toutefois, n'est pas démontrée dans le présent travail où il n'est question que des équations (E) asymptotes à des équations dont les intégrales sont uniformes.

La méthode qui permet d'étudier ces dernières équations (E) [et, par conséquent, les équations (e) correspondantes] est cette méthode même qui, appliquée aux équations de M. Painlevé, conduit aux résultats dont j'ai parlé plus haut; et, tant que nous ne nous occupons que des propriétés asymptotiques des intégrales, nous n'avons point de raison de limiter notre étude à ces équations très particulières dont les intégrales sont uniformes ou ont leurs points critiques fixes. C'est ainsi que, dans la seconde Partie de ce travail, voulant étudier l'asymptotisme des équations $Y'' = 6Y^2 - 6$ et (B') (*vide supra*), nous ferons porter nos raisonnements sur l'équation rationnelle la plus générale (du second ordre et du premier degré) qui est asymptote à $Y'' = 6Y^2 - 6$, à savoir sur l'équation

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = 6Y^2 - 6 + q_1 Y' + p_1 Y + p_0,$$

où p_0, p_1, q_1 , sont des fonctions de X qui tendent vers zéro avec X^{-1} .

Pareillement, les conclusions auxquelles conduit l'étude asymptotique de l'équation (A) de Bessel s'appliquent à l'équation plus générale

$$Y' = Y^2 + 1 + p_1 Y + p_0,$$

où p_1 et p_0 sont des fonctions de X qui tendent vers zéro avec X^{-1} .

PREMIÈRE PARTIE.

L'ÉQUATION DE RICCATI. FONCTIONS DU TYPE MONOPÉRIODIQUES.

1. L'équation de Riccati rationnelle : allure des branches d'intégrales.

Considérons l'équation rationnelle ⁽¹⁾ du premier ordre et du premier degré

$$(1) \quad y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont des polynômes en x et y . Si l'on connaît les degrés de P et Q, il est possible de déterminer ⁽²⁾ *a priori* l'allure des diverses branches d'intégrales de (1). [Je répète ⁽³⁾ que j'appelle *branche d'intégrale* définie par les conditions initiales x_0, y_0 , l'ensemble des caractéristiques suivies (à partir de la valeur y_0) le long des rayons issus du point x_0 .] En général, les branches présentent des points critiques arbitrairement éloignés. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, et pour que nous puissions avoir des *intégrales asymptotes à des fonctions uniformes* (voir l'Introduction), il faut que l'équation (1) soit une équation de Riccati. Plaçons-nous dans cette hypothèse et, après avoir fait disparaître le terme du premier degré en ajoutant à y une fonction rationnelle, considérons l'équation

$$(2) \quad y' = A_2 y^2 + A_0,$$

où A_0, A_2 sont des fonctions rationnelles de x . Nous allons examiner l'allure des branches $y(x)$ pour les grandes valeurs de $|x|$. Nous devons, pour cela, distinguer ⁽⁴⁾ divers cas suivant les valeurs relatives des degrés (positifs ou négatifs) p_0 et p_2 de A_0 et A_2 .

⁽¹⁾ L'équation de premier ordre n'étant étudiée ici qu'en manière d'introduction, j'en viendrai tout de suite à l'énoncé des résultats qui offrent de l'intérêt pour la suite de mon travail.

⁽²⁾ Cf. mes *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre*, Chap. II.

⁽³⁾ Cf. Introduction, *supra*, p. 267.

⁽⁴⁾ Pour la méthode de démonstration, voir *loc. cit.*

I. Soit $p_0 + p_2 < -2$.

Si $A_0 \neq 0$, l'équation (2) admettra, pour les grandes valeurs de $|x|$, deux sortes de branches d'intégrales rationaloïdes [à croissance ⁽¹⁾ rationnelle] : les premières seront de l'ordre de grandeur de $|x|^{p_0+1}$, et les secondes de l'ordre de grandeur de $|x|^{-1-p_2}$.

Plus précisément, pour les premières, l'inégalité

$$|y' - A_0| < |x|^{p_0+\alpha},$$

où α est positif arbitrairement petit, est satisfaite à partir d'une certaine valeur de $|x|$: on en conclut que le rapport $\frac{y}{\int A_0 dx}$ tend vers 1

lorsque x s'éloigne indéfiniment dans une direction quelconque.

Les branches de la deuxième sorte satisfont, à partir d'une certaine valeur de $|x|$, à l'inégalité

$$\left| \frac{y'}{y^2} - A_2 \right| < |x|^{-2-p_2+\alpha} \quad (\alpha \text{ arbitrairement petit});$$

on en déduit que leur produit par $-\int A_2 dx$ tend vers l'unité quand x devient infini.

Toute branche d'intégrale de l'équation (2) est nécessairement *rationaloïde* au voisinage de $x = \infty$, et appartient à l'une des deux sortes que nous venons de définir.

II. Soit maintenant $p_0 + p_2 > -2$.

Posons

$$A_0 = x^{p_0}(a_0 + \mathfrak{A}_0), \quad A_2 = x^{p_2}(a_2 + \mathfrak{A}_2),$$

$\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_2$ étant deux fonctions rationnelles de degrés négatifs, et a_0, a_2 deux constantes. Le double changement de variables

$$(3) \quad y = x^{\frac{p_0-p_2}{2}} Y, \quad x^{2+p_0+p_2} = X^2,$$

où l'exposant $2 + p_0 + p_2$ est positif par hypothèse, mettra l'équation (2) sous la forme

$$(4) \quad \frac{2 + p_0 + p_2}{2} \frac{dY}{dX} = (a_2 + \mathfrak{A}'_2) Y^2 + (a_0 + \mathfrak{A}'_0) + \frac{p_2 - p_0}{2 X} Y,$$

(1) Cf. Introduction, *supra*, p. 267.

où $\mathfrak{A}'_0, \frac{p_2 - p_0}{X}$ et \mathfrak{A}'_2 tendent vers 0 avec X^{-1} comme des puissances négatives de X .

Cette transformation faite, on peut démontrer que *les intégrales $Y(X)$ de l'équation (4) sont des fonctions asymptotes aux fonctions périodiques définies par l'équation*

$$(4 \text{ bis}) \quad \frac{2 + p_0 + p_2}{2} Y' = a_2 Y^2 + a_0,$$

que l'on obtient en supprimant dans (4) les termes qui tendent vers zéro avec X^{-1} .

C'est là un fait que nous étudierons en détail dans les paragraphes suivants. Retenons-en dès maintenant ceci : *Les plus simples des fonctions asymptotes aux fonctions trigonométriques sont fournies par l'équation de Riccati rationnelle où $p_0 + p_2 > -2$* . On passe de ces fonctions asymptotes aux intégrales de l'équation de Riccati en opérant le changement de variables (3). Ainsi, dans le cas où les intégrales $y(x)$ sont des fonctions méromorphes, elles ont pour ordre $\frac{2 + p_0 + p_2}{2}$; à l'une quelconque de ces fonctions correspond un réseau de régions ⁽¹⁾ \mathfrak{R} uniformément distribuées (en forme de bandes), dont la largeur est de l'ordre de grandeur ⁽²⁾ de leur distance à l'origine élevée à la puissance $\frac{-(p_0 + p_2)}{2 + p_0 + p_2}$.

III. Soit enfin $p_0 + p_2 = -2$.

Le changement de variables

$$y = x^{\frac{p_0 - p_2}{2}} u, \quad x = t^{-1}$$

met l'équation (2) sous la forme

$$(5) \quad -t \frac{du}{dt} = a_0 + \frac{p_2 - p_0}{2} u + a_2 u^2 + \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_2 u^2,$$

⁽¹⁾ Voir l'Introduction, p. 269, et, en particulier, l'exemple de fonction asymptote à tang x étudié p. 271.

⁽²⁾ D'une manière générale, si $Y(X)$ est asymptote à une fonction trigonométrique et si l'on pose $x = X^{\frac{1}{\lambda}}$, λ étant un nombre rationnel positif, la fonction $Y(x)$ présente un réseau de bandes \mathfrak{R} dont la largeur est de l'ordre de grandeur de leur distance à l'origine élevée à la puissance $\frac{1 - \lambda}{X}$; l'ordre de $Y(x)$, si elle est méromorphe, est λ .

où \mathfrak{A}_0 et \mathfrak{A}_2 sont fonctions holomorphes de t au voisinage de $t = 0$, et nulles pour $t = 0$. On voit alors que, pour les intégrales $u(t)$, l'origine, si elle n'est pas point d'holomorphisme, est un point transcendant ordinaire isolé. Les branches d'intégrales (suivies sur un ensemble de rayons convergeant vers $t = 0$) tendent ⁽¹⁾ vers *une* racine, u_1 , du trinome $a_2 u_2 + \frac{p_2 - p_0}{2} u + a_0$ (celle qui rend négative l'expression $2a_2 u + \frac{p_2 - p_0}{2}$) et sont développables par rapport aux puissances de t et de $t^{\frac{p_0 - p_2}{2} - 2a_2 u_1}$. (Si ce dernier exposant est entier, le développement procédera, exceptionnellement, par rapport aux puissances de t et de $\log t$.)

Ainsi, lorsque x tend vers l'infini sur l'ensemble des rayons issus d'un point x_0 , $y(x)$ est *rationaloïde* comme il arrivait pour

$$p_0 + p_2 < -2 \text{ (cas I);}$$

mais il n'y a plus cette fois qu'une sorte ou famille de branches d'intégrales.

L'analyse qui vient d'être résumée nous fait connaître l'allure des fonctions méromorphes nouvelles (irréductibles aux fonctions rationnelles ou trigonométriques) que définit l'équation de Riccati. Ces fonctions sont, à la transformation (3) près, des fonctions asymptotes aux fonctions circulaires. L'intérêt de ce fait apparaîtra plus loin lorsque nous constaterons que les fonctions méromorphes nouvelles définies par les équations du second ordre (fonctions de M. Painlevé) sont, à une transformation (3) près, des fonctions asymptotes aux fonctions doublement périodiques.

Dans les paragraphes qui vont suivre, je prendrai comme type d'équation (2) l'équation

$$(6) \quad Y' + 2p \frac{Y}{X} = Y^2 + 1,$$

qui définit les fonctions de Bessel. Quoique ces fonctions aient été l'objet de nombreux travaux, les faits qui vont nous occuper n'ont

(1) Une seule branche d'intégrale tend vers la seconde racine du trinome. Cf. *loc. cit.* (*Leçons*, etc.), p. 50 et suiv.

guère attirer l'attention des analystes; ils ne sont pas, en effet, en rapport direct avec les propriétés fondamentales de l'équation linéaire qui correspond à l'équation (6); leur importance se manifesterait lorsque nous étudierons des équations du second ordre analogues à (6), mais non réductibles à des équations linéaires.

2. Les fonctions de Bessel et l'équation (Λ).

Considérons l'équation

$$(6) \quad Y' + 2p \frac{Y}{X} = Y^2 + 1,$$

que nous écrirons aussi

$$(6 \text{ bis}) \quad Y' + \frac{\mu}{\mu + 2} \frac{Y}{X} = Y^2 + 1, \quad \frac{\mu}{\mu + 2} = 2p.$$

L'équation (6) est intégrable au moyen des fonctions de Bessel. On pose $Y = -\frac{u'}{u}$, et l'on a

$$(7) \quad u'' + 2p \frac{u'}{X} + u = 0.$$

Les intégrales se réduisent, comme on sait, à des fonctions élémentaires lorsque p est entier. D'une manière générale, si p n'est pas un entier négatif, on a les deux intégrales particulières

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - \frac{X^2}{2(2p+1)} + \frac{X^4}{2 \cdot 4(2p+1)(2p+3)} - \dots, \\ u_2 &= X^{1-2p} \left[1 + \frac{X^2}{2(2p-3)} + \frac{X^4}{2 \cdot 4(2p-3)(2p-5)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Faisons, d'autre part, le changement de variables

$$(8) \quad y = x^{\frac{\mu}{2}} Y, \quad X = \frac{2}{\mu + 2} x^{\frac{\mu+2}{2}},$$

nous obtenons l'équation

$$(9) \quad y' = y^2 + x^{\mu},$$

équation dont les intégrales sont méromorphes pour toute valeur positive de μ .

Ainsi la fonction $Y(x)$, si μ est un entier pair, ou la fonction $Y^2(x)$,

si μ est un entier impair, est une fonction méromorphe d'ordre $\frac{\mu+2}{2}$ (cf. § I, cas II, p. 278). La fonction $\gamma(x)$ est également d'ordre $\frac{\mu+2}{2}$.

Nous nous attacherons spécialement, dans la suite, au cas où $\mu = 1$, c'est-à-dire à l'équation

$$(A) \quad y' = y^2 + x,$$

que le changement de variables

$$(10) \quad X = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad y = \sqrt{x}Y$$

transforme en

$$(A') \quad Y' + \frac{1}{3} \frac{Y}{X} = Y^2 + 1.$$

Montrons d'abord comment les intégrales de (A') et de (6) sont asymptotes aux fonctions $\text{tang}(X - X_0)$ et comparons-les à ces fonctions.

3. Distribution approximative des zéros et pôles de grand module d'une intégrale $Y(X)$.

Plaçons-nous dans l'un des demi-plans limités par l'axe réel du plan X , et, dans ce demi-plan, considérons les régions éloignées où $|X^{-1}| < \varepsilon$, ε étant donné arbitrairement petit. Nous allons voir que, dans ces régions, les zéros et les pôles des intégrales $Y(X)$ de l'équation (6) sont approximativement distribués comme ceux des fonctions $\text{tang}(X - X_0)$. En joignant ces zéros ou ces pôles deux à deux, on obtient une ligne brisée asymptotiquement parallèle à l'axe réel, et, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur cette ligne brisée, la distance de deux zéros ou pôles consécutifs tend vers π .

Vérifions ces faits en ce qui concerne les zéros. On raisonnera de même sur les pôles en faisant le changement de variable $Y = Z^{-1}$.

Partons d'un point X_0 (de module supérieur à ε^{-1}) où $Y = 0$. Au voisinage de ce point la fonction $Y(X)$ varie approximativement comme $\text{tang}(X - X_0)$, puisque, dans l'équation (6), le terme en $\frac{Y}{X}$ est très petit. Or comment se comporte la fonction $Y = \text{tang}(X - X_0)$ pour X

variant de X_0 à $X_0 + \pi^2$? Le point représentatif de cette fonction décrit un lacet fermé issu de l'origine et entourant l'un des points $Y = \pm i$. Appelons Λ ce lacet que, pour fixer les idées, nous supposons tracé autour du point $+i$ et tout entier à distance finie (bornée) de ce point; soient l la longueur du lacet, h une limite supérieure de $|\tan(X - X_0)|$ sur ce contour, et k une limite inférieure de $|\tan' |$ ou $|\tan^2 + 1|$.

Le lacet Λ étant ainsi défini, faisons circuler sur ce lacet le point Y qui représente l'intégrale $Y(X)$ de (6). Tant que l'on a, pour Y variant sur (Λ) ,

$$(11) \quad |Y'| > \frac{k}{2}, \quad |Y^2 + 1| > \frac{k}{2}, \quad |X| > \frac{1}{2\varepsilon},$$

l'équation (6) donne (1)

$$\left| \frac{Y'}{Y^2 + 1} - 1 \right| < \frac{8ph\varepsilon}{k} \quad \text{ou} \quad \left| \frac{1}{Y^2 + 1} - \frac{dX}{dY} \right| < \frac{16ph\varepsilon}{k^2},$$

d'où l'on déduit, pour un point Y quelconque du lacet Λ ,

$$(12) \quad |\text{arc tang } Y - X + X_0| < \frac{16phl\varepsilon}{k^2}.$$

Or, on peut toujours prendre ε assez petit pour que l'inégalité (12) entraîne comme conséquence les diverses inégalités (11). Donc elle ne cesse pas d'être vérifiée tout le long du lacet Λ . A l'extrémité du lacet, X prend une valeur X_1 qui est un zéro de la fonction $Y(X)$, et l'on a

$$|(X_1 - X_0) - \pi| < \frac{16phl\varepsilon}{k^2}.$$

Le rapport $\frac{X_1 - X_0}{\pi}$ tend vers l'unité lorsque ε^{-1} , ou X_0 , augmente indéfiniment.

Ayant ainsi défini le point X_1 , nous définirons semblablement des

(1) Pour étudier les propriétés asymptotiques des intégrales de (6), on peut aussi faire le changement de variable $Y = H + \frac{P}{X}$. La fonction $H(X)$ satisfait à l'équation

$$H' - H^2 - 1 = p(1 - p)X^{-2},$$

dont le second membre est de l'ordre de grandeur de $|X|^{-2}$, quelle que soit la valeur de H .

points $X_2, X_3, \dots, X_{-1}, X_{-2}, \dots$ tels que les différences

$$X_2 - (X_0 + 2\pi), \quad X_3 - (X_0 + 3\pi), \quad \dots, \quad X_{-1} - (X_0 - \pi)$$

soient de l'ordre de grandeur de ε . Ces points sont les sommets d'une ligne brisée qui s'éloigne indéfiniment dans les deux directions réelles.

Ces conclusions s'appliquent, nous l'avons dit, aux pôles de $Y(X)$ comme à ses zéros. Nous allons désormais, au lieu des zéros, envisager les pôles, qui sont les zéros de la fonction entière u dont $(-Y)$ est la dérivée logarithmique.

Ligne de pôles. — Considérons le demi-plan situé au-dessus de l'axe réel, et partons, en particulier, d'un pôle \bar{X}_0 (de module supérieur à ε^{-1}) voisin de l'axe imaginaire. Si nous définissons comme il vient d'être dit les pôles $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{-1}, \bar{X}_{-2}, \dots$ en faisant décrire au point Y^{-1} le lacet Λ (dans un sens ou dans l'autre), nous constatons que, si $|X_0|$ est assez grand, tous ces pôles ont un module supérieur à ε^{-1} ; on peut donc leur appliquer, à tous, les calculs faits plus haut. Ainsi, la ligne brisée $\dots, \bar{X}_{-1}, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots$ qui joint ces pôles est une ligne, indéfinie dans les deux sens, asymptote à deux droites parallèles à l'axe réel : nous appellerons cette ligne *ligne de pôles*.

La ligne de pôles, construite comme il vient d'être dit, est composée de segments rectilignes. On peut la construire autrement en la définissant comme le *chemin indéfini décrit par X lorsque le point Y^{-1} tourne indéfiniment (dans l'un ou l'autre sens) sur le lacet Λ défini plus haut*.

Je dis que, lorsque X s'éloigne indéfiniment au-dessus de la ligne de pôles, la fonction $Y(X)$ [celle qui est infinie en X_0] ne peut plus présenter de pôles et tend vers la limite $Y = i$, comme il arrive pour la fonction $\tan(X - X_0)$.

Pour démontrer cette proposition, nous ferons d'abord la remarque suivante. Appelons γ, γ' les cercles du plan Y qui ont pour centres les points $Y = \pm i$ et pour rayon une petite longueur donnée α . Amenons le point Y de l'infini au contour γ le long d'un rayon et faisons-lui décrire indéfiniment ce contour dans l'un ou l'autre sens. Quel est le chemin correspondant décrit par X à partir de \bar{X}_0 ? Le ⁽¹⁾ point X ,

(1) La méthode de calcul exposée plus haut conduira directement à ce résultat.

s'éloignant de \bar{X}_0 , prend, lorsque Y atteint le contour γ , une position X' qui est sûrement *au-dessus* de la ligne de pôles si α est assez petit. Il décrit ensuite une ligne \mathfrak{L} , que l'on peut indéfiniment prolonger dans les deux sens et qui est nécessairement tout entière située au-dessus de la ligne de pôles. En faisant franchir cette ligne à X, on rapprocherait Y de i . Opérant de même avec γ' , nous obtiendrions une ligne \mathfrak{L}' , tout entière située *au-dessous* de la ligne de pôles, ligne \mathfrak{L}' qui est décrite par le point X lorsque Y tourne indéfiniment sur γ' . Si X franchissait cette ligne, Y se rapprocherait de $-i$.

De ces remarques je conclus tout d'abord que $Y(X)$ n'a pas de pôles au-dessus de la ligne de pôles définie plus haut. Supposons en effet qu'elle en ait : $Y(X)$ admettra alors une *seconde* ligne de pôles, située au-dessus de la première, telle qu'il n'y ait aucun pôle entre elle et la première ligne de pôles; si l'on s'élève alors de la première à la seconde ligne de pôles, on franchira successivement une ligne \mathfrak{L} sur laquelle $|Y - i| = \alpha$, puis une ligne \mathfrak{L}' , sur laquelle $|Y + i| = \alpha$; mais, d'après les remarques faites ci-dessus, il y a nécessairement entre \mathfrak{L} et \mathfrak{L}' des points où Y est infini; on en déduit l'existence d'une ligne de pôles située entre \mathfrak{L} et \mathfrak{L}' , et, par conséquent, située entre la première et la seconde ligne de pôles : conclusion qui est en contradiction avec nos hypothèses.

J'ajoute que Y *tend vers i lorsque X s'éloigne indéfiniment au-dessus de la ligne de pôles* ⁽¹⁾. En effet, au-dessus de la ligne \mathfrak{L} qui correspond à la ligne de pôles considérée, Y se rapproche de i . Supposons alors que, pour des valeurs arbitrairement grandes, X' , de X, la différence $|Y - i|$ surpasse un nombre donné β . En faisant varier Y^{-1} de $|Y(X')|^{-1}$ à 0, puis le long du lacet Λ défini plus haut (p. 282), on définira une nouvelle ligne de pôles située tout entière au-dessus de \mathfrak{L} et, par conséquent, au-dessus de la première ligne de pôles : or nous venons d'établir qu'une telle ligne de pôles ne saurait exister.

Déplacement de la ligne de pôles. — Ayant ainsi déterminé l'allure de la fonction $Y(X)$ au-dessus de la ligne de pôles qui passe par \bar{X}_0 ,

⁽¹⁾ La réciproque n'est pas vraie. Lorsque le point Y tend vers i , le point X ne s'éloigne pas nécessairement vers l'infini comme il arrive pour la fonction $\tan(X - X_0)$. Voir à ce sujet la fin du paragraphe 3 bis.

voyons maintenant ce que devient cette ligne lorsque le pôle initial se déplace avec continuité.

D'après les théorèmes relatifs à la continuité des intégrales, toute la ligne se déplace d'une manière continue lorsque \bar{X}_0 varie.

Si \bar{X}_0 tend vers l'infini dans une direction non parallèle à l'axe réel (et au-dessus de cet axe), *tous les sommets de la ligne de pôles tendent vers l'infini en même temps.*

Supposons au contraire que \bar{X}_0 descende au-dessous de la ligne de pôles initialement considérée. Les calculs que nous avons faits plus haut ne sont, on se le rappelle, applicables au voisinage de \bar{X}_0 qu'autant que $|\bar{X}_0| > \varepsilon^{-1}$. Lors donc que \bar{X}_0 se rapproche de l'axe réel, la détermination des pôles $\dots, \bar{X}_{-1}, \dots, \bar{X}_1, \dots$ ne peut plus être faite comme tout à l'heure. Par contre, les pôles \bar{X}_{-n}, \bar{X}_n de grand indice auront sûrement un module supérieur à ε^{-1} , et nous pourrons toujours en déduire la suite des pôles $\bar{X}_{-(n+1)}, \bar{X}_{-(n+2)}, \dots$ et $\bar{X}_{n+1}, \bar{X}_{n+2}, \dots$. En d'autres termes, *notre ligne de pôles initiale se décompose en deux demi-lignes de pôles, asymptotiquement parallèles à l'axe réel, s'éloignant indéfiniment, l'une vers la droite, l'autre vers la gauche.* Entre ces deux demi-lignes de pôles, il y a une lacune que les calculs effectués plus haut ne nous permettent pas de combler.

Développement des intégrales par rapport aux puissances de p . — Les intégrales $Y(X)$ de l'équation (6) sont développables par rapport aux puissances de p , sous la forme $Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + \dots$, les coefficients étant définis par des équations différentielles linéaires, et le développement convergeant sur tout chemin où les intégrales sont holomorphes.

Faisons en particulier $Y_0 = i$, et supposons que X s'éloigne indéfiniment au-dessus de la ligne de pôles considérée ci-dessus. Dans ces conditions, Y est holomorphe au voisinage de l'infini et tend vers i ; donc le développement en puissances de p est convergent, quel que soit p , pour les grandes valeurs de $|X|$, et les coefficients Y_1, Y_2, \dots sont des fonctions de X qui tendent vers zéro sur le chemin considéré.

Cette conclusion s'étend immédiatement aux intégrales de l'équation

$$Y' = Y^2 + 1 + p\varphi(X),$$

où $\varphi(X)$ est une fonction rationnelle ou algébrique de degré négatif. L'étude asymptotique de cette équation est identique à l'étude asymptotique de l'équation (6).

Les diverses propositions qui précèdent s'appliquent au demi-plan X situé *au-dessus* de l'axe réel. *Au-dessous* de l'axe réel, les choses se passent de la même manière. Si \bar{X}_0 a une partie imaginaire de grand module, on peut définir une ligne de pôles qui s'éloigne indéfiniment de part et d'autre de \bar{X}_0 : pour X tendant vers l'infini *au-dessous* de cette ligne de pôles, Y [c'est-à-dire l'intégrale $Y(X)$ qui admet \bar{X}_0 comme pôle] tend vers $-i$. Si ensuite \bar{X}_0 se rapproche de l'axe réel, la ligne de pôles se décompose en deux demi-lignes de pôles.

3 bis. Définition d'un réseau de bandes \mathcal{B} .

De la construction des lignes de pôles résulte immédiatement, à droite et à gauche de l'axe imaginaire du plan X , la construction d'un réseau de régions \mathcal{A} , en forme de bandes, dans chacune desquelles Y prend une fois toute valeur donnée (voir Introduction, p. 270 et suiv.).

Plaçons-nous d'abord dans la région (limitée par une parallèle à l'axe imaginaire) où ⁽¹⁾ la partie réelle $R(X) > \varepsilon^{-1}$. A partir d'un point quelconque, \bar{X}_0 , situé dans cette région, nous pouvons définir une demi-ligne de pôles qui s'éloigne indéfiniment vers la droite. Appliquant alors à cette demi-ligne de pôles le raisonnement développé plus haut : nous voyons que si le point X (sans sortir de la région où $R(X) > \varepsilon^{-1}$) s'éloigne indéfiniment *au-dessus* ou *au-dessous* de la demi-ligne de pôles, Y reste fini et tend vers $+i$ ou $-i$. Mais de quelle manière ? Il est facile de voir que si Y tend vers $\pm i$ suivant un rayon ou suivant un chemin qui ne s'enroule qu'un nombre fini de fois autour de $\pm i$, X ne devient pas infini, mais tend vers une limite finie. *Lors donc que X s'éloigne indéfiniment, Y tend vers $\pm i$ en s'enroulant autour d'un ensemble infini de points critiques η convergeant vers $\pm i$.* Ces points critiques correspondent aux valeurs Y pour

(1) Sur la définition du nombre ε , voir le paragraphe précédent.

lesquelles $Y^2 + 1 - 2p \frac{Y}{X} = 0$ [voir l'équation (6)]. Ils sont tous algébriques et chacun d'eux permute deux déterminations [car on ne peut avoir simultanément $\frac{dY}{dX} = \frac{d^2Y}{d^2X} = 0$]. Ils forment d'ailleurs, dans l'ordre où ils permutent la suite des pôles $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots$, une série unilinéaire $\dots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots$. Ainsi, d'après une terminologie que j'ai proposée ailleurs ⁽¹⁾, les points $\pm i$ sont, pour la fonction $X(Y)$ des *points transcendants indirectement critiques de la première espèce et de la première sorte*.

Menons alors, dans le plan de la variable $Z = Y^{-1}$, une coupure en spirale passant par $Y^{-1} = 0$ et allant vers $+i$ et $-i$ en s'enroulant, à ses extrémités, autour des deux suites de points $\dots, \eta_{-n}^{-1}, \eta_{-(n+1)}^{-1}, \dots$ et $\dots, \eta_n^{-1}, \eta_{n+1}^{-1}, \dots$ [points critiques de $X(Z)$] qui convergent vers $+i$ et $-i$. On constate qu'à ce chemin du plan Z correspond, dans le plan X , une série de lignes $\dots, L_0, L_1, L_2, \dots$ qui vont de l'infini (au-dessous de l'axe réel) à l'infini (au-dessus de l'axe réel) en passant par les divers points $\dots, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$. Ces lignes ne se coupent pas entre elles et sont asymptotiquement parallèles à l'axe imaginaire. Elles délimitent ⁽²⁾ une série de bandes \mathfrak{A} dans chacune desquelles la fonction $Y(X)$ prend une fois et une seule toute valeur donnée.

4. Description complète des intégrales des équations (A) et (A').

Lorsque $\mu = 1$, l'équation (6 bis) devient l'équation (A') transformée de (A) par le changement de variables (10) (voir § 2, p. 281). Envisageons les fonctions $Y(x)$ et $y(x)$ correspondantes et proposons-nous d'étudier leur allure dans tout le plan de la variable X ou x .

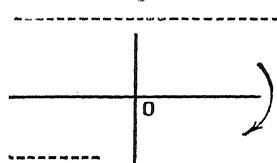
Soit d'abord $Y(X)$ une intégrale de (A') qui présente une ligne de pôles arbitrairement éloignée au-dessus de l'axe réel. Nous avons vu que si X tend vers l'infini au-dessus de cette ligne de pôles, Y tend vers i et ne peut plus présenter de pôles. D'autre part, si X tend vers

⁽¹⁾ Cf. mes *Leçons*, etc., Chap. III, et le Mémoire cité à la note suivante.

⁽²⁾ Sur cette décomposition du plan en bandes \mathfrak{A} , voir P. BOUTROUX, *Ann. Scient. de l'École Normale supérieure*, 1908, et *Actes du Congrès de Rome*.

l'infini au-dessous de l'axe réel sans que sa partie réelle devienne inférieure à ε^{-1} (voir p. 285), Y tend vers $-i$ et ne peut non plus présenter de pôles. Ainsi, à supposer que nous fassions varier X d'une manière continue à partir d'un point de notre ligne de pôles pris à droite de l'axe imaginaire, et suivions notre intégrale $Y(X)$, nous ne pouvons rencontrer une nouvelle ligne de pôles, ou, plus exactement, une nouvelle *demi-ligne* de pôles, qu'à gauche de l'axe imaginaire et

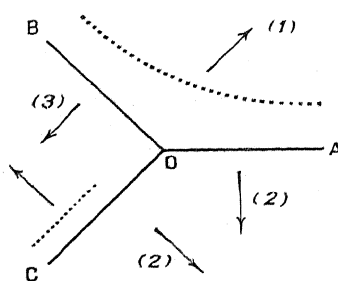
Fig. 2.



après avoir tourné autour de l'origine (Fig. 2). Si nous partions par la gauche, la conclusion serait la même.

Transportons-nous maintenant dans le plan x (en posant $X = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$) et considérons la fonction méromorphe $y(x)$ qui a, en dehors de l'origine, les mêmes pôles que $Y(x)$. Appelons OA l'axe réel positif du plan x , OB et OC les demi-axes qui font avec OA les angles $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ (Fig. 3). A l'intégrale $Y(X)$ considérée tout à l'heure,

Fig. 3.



présentant une ligne de pôles arbitrairement éloignée au-dessus de l'axe réel, correspond une intégrale $Y(X)$ ou $y(x)$ qui présente une *ligne de pôles arbitrairement éloignée dans l'angle \widehat{ABO} et est asymptotiquement parallèle aux axes OA, OB*. En dehors de cette ligne, $y(x)$

ne peut plus avoir qu'une demi-ligne de pôles asymptotiquement parallèle à OC.

Lorsque x tend vers l'infini au-dessus de la première ligne de pôles [direction de la flèche (1)], Y tend vers i et y vers $i\sqrt{x}$, la détermination du radical étant arbitrairement choisie (on a deux intégrales différentes suivant que l'on affecte le radical d'un signe ou de l'autre). Lorsque x tend vers l'infini dans la direction des flèches (2) ou (3), y tend vers $\mp i\sqrt{x}$, le signe du radical changeant chaque fois que l'on franchit une demi-ligne de pôles.

Lorsque dans l'angle \widehat{AOB} , la première ligne de pôles s'éloigne indéfiniment, la fonction $y(x)$ devient, à la limite, une fonction MÉROMORPHE QUI N'ADMET, EN TOUT ET POUR TOUT, QU'UNE DEMI-LIGNE DE PÔLES ASYMPTOTIQUEMENT PARALLÈLE A OC. Nous appellerons cette fonction : *intégrale tronquée* de l'équation (A) (*vide infra*, § 5, p. 291).

Lorsque la ligne de pôles initiale se rapproche de l'origine, elle se décompose, comme nous l'avons vu plus haut (§ 3), en deux demi-lignes de pôles. Considérons en particulier la demi-ligne de pôles asymptotiquement parallèle à OA et faisons-la pénétrer dans l'angle \widehat{AOC} : lorsqu'elle s'abaisse dans cet angle, la demi-ligne rejoint la demi-ligne de pôles asymptotiquement parallèle à OC ; elle forme avec elle une *ligne de pôles*, tout entière située dans l'angle \widehat{AOC} , et dont tous les points tendent ensemble vers l'infini ; à la limite, on a une *intégrale tronquée*, $y(x)$, qui n'admet, en tout et pour tout, qu'une demi-ligne de pôles asymptotiquement parallèle à OB.

En faisant tendre vers l'infini, dans l'angle \widehat{BOC} , les deux demi-lignes de pôles parallèles à OB et OC, on aura une troisième intégrale tronquée.

5. Intégrales réelles; intégrales symétriques et intégrales tronquées.

Lorsque p est réel ⁽¹⁾ dans l'équation

$$(6) \quad Y' + 2p \frac{Y}{X} = Y^2 + 1,$$

⁽¹⁾ μ est alors réel dans l'équation (6 bis).

toute intégrale $Y(X)$ qui présente un pôle sur le demi-axe réel positif du plan X est réelle sur tout ce demi-axe. Il en est de même de la transformée $\gamma(x)$, intégrale de (9), sur tout l'axe réel.

L'équation (6) admet, en particulier, deux intégrales réelles remarquables qui sont méromorphes dans tout le plan X . Ce sont, au signe près, les dérivées logarithmiques des fonctions entières $u_1(X)$, $u_2(X)$ définies plus haut (§ 3, p. 280) comme solutions de l'équation linéaire (7). Nous les appellerons $Y_{1(p)}$, $Y_{2(p)}$, et les écrirons :

$$Y_{1p} = a_{1p}X + a_{3p}X^3 + \dots,$$

$$Y_{2p} = \frac{2p-1}{X} + b_{1p}X + b_{3p}X^3 + \dots,$$

les coefficients a et b étant définis par les égalités

$$\begin{array}{ll} \alpha_{1p}(1+2p) = 1, & b_{1p}(1+2-2p) = 1, \\ \alpha_{3p}(3+2p) = \alpha_{1p}^2, & b_{3p}(3+2-2p) = b_{1p}^2, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \end{array}$$

qui montrent que l'on a l'identité

$$Y_{2p} = Y_{1(1-p)} + \frac{2p-1}{X}.$$

Tous les pôles des intégrales Y_{1p} et Y_{2p} sont situés sur l'axe réel. Ces intégrales sont asymptotes à des fonctions $\text{tang}(X - X_0)$ où X_0 est réel.

Appelons, en particulier, Y_1 et Y_2 les intégrales méromorphes de l'équation (A') correspondant aux valeurs $\mu = 1$, $p = \frac{1}{6}$. Effectuons le changement de variables (10) et considérons les fonctions $\gamma_1(x)$ et $\gamma_2(x)$ transformées de Y_1 , Y_2 . Ces fonctions sont symétriques par rapport aux trois demi-droites OA, OB, OC (*fig. 2*, p. 288); leurs pôles sont tous situés sur le demi-axe réel positif OA et sur les demi-axes OB, OC.

Désignons donc par $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ (*fig. 4*) les pôles de l'intégrale γ_2 (qui est, en outre, infinie à l'origine); puis déplaçons le pôle a_1 avec continuité sur l'axe réel en le rapprochant de l'origine : nous allons nous demander *ce que devient l'intégrale réelle $\gamma(x)$ qui varie d'une manière continue à partir de l'intégrale $\gamma_2(x)$.*

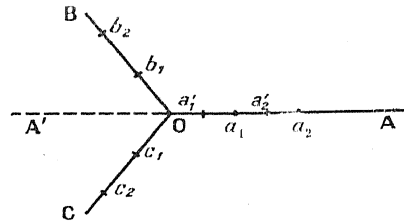
Nous avons

$$(13) \quad \gamma = -\frac{du}{dx} / u \quad (u = k_1 u_1 + k_2 u_2),$$

k_1 et k_2 étant deux constantes, et u_1, u_2 étant les fonctions entières qui ont pour dérivées logarithmiques γ, γ_2 . A toute position réelle du pôle a_1 correspond une valeur réelle de $\frac{k_1}{k_2}$ et, par conséquent, une intégrale $\gamma(x)$ dont tous les pôles sont réels ou imaginaires conjugués.

Lorsque a_1 se rapproche de l'origine, l'intégrale γ présente, au voi-

Fig. 4.



sinage de l'origine, sur l'axe réel négatif OA' , un pôle a_0 , pôle qui coïncide avec l'origine pour $\gamma(x) = \gamma_2(x)$. Ce pôle s'éloigne indéfiniment sur OA' sans jamais rétrograder. D'ailleurs, lorsque a_1 devient nul, $\gamma(x)$ coïncide de nouveau avec $\gamma_2(x)$. On en conclut qu'il y a, entre la position initiale du pôle a_1 (correspondant à l'intégrale γ_2) et l'origine, une position intermédiaire, a'_1 , de ce pôle pour laquelle a_0 est rejeté à l'infini sur le demi-axe OA' . Pour cette position intermédiaire (qui est unique) tous les pôles $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ sont simultanément rejetés à l'infini : l'intégrale $\gamma(x)$ n'a plus que des pôles réels positifs, a'_1, a'_2, \dots ; elle est tronquée (voir § 4).

Nous définirons de même une *intégrale tronquée* $\gamma_b(x)$ dont tous les pôles sont sur le demi-axe OB et une *intégrale tronquée* $\gamma_c(x)$ dont tous les pôles sont sur le demi-axe OC .

On déduira facilement de l'égalité (13) qu'il n'y a pas d'autres intégrales tronquées que l'intégrale réelle $\gamma_a(x)$ et les intégrales γ_b, γ_c . A ces trois intégrales correspondent trois valeurs du rapport $\frac{k_1}{k_2}$.

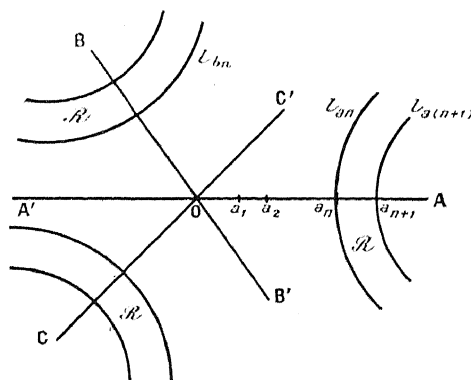
6. Le réseau des bandes \mathcal{R} .

Nous allons maintenant pouvoir achever, pour les intégrales des équations (A') et (A) la détermination du réseau de bandes \mathcal{R} (voir § 3 bis) dans lesquelles Y (ou y) prend une fois toute valeur donnée.

Considérons, par exemple, une fonction $Y(x)$ ou $y(x)$ qui a une demi-ligne de pôles a_1, a_2, \dots sur le demi-axe réel OA et une ligne de pôles éloignée dans l'angle \widehat{OBC} .

Prolongeons, suivant OA' , OB' , OC' les demi-droites OA , OB , OC (fig. 5). L'analyse faite au paragraphe 3 bis établit l'existence d'un

Fig. 5.



réseau de bandes \mathcal{R} situées dans l'angle $\widehat{B'OC'}$. Ces bandes sont limitées par des lignes infinies $\dots, l_{an}, l_{a(n+1)}, \dots$ qui ne se coupent pas entre elles et sont asymptotiquement parallèles à OC' et OB' (voir au § 3 bis la définition des lignes L du plan X qui se transforment en lignes l du plan x). Nous aurons un second réseau de bandes \mathcal{R} (limitées par des lignes $\dots, l_{bn}, l_{b(n+1)}, \dots$) dans l'angle $\widehat{A'OC'}$ et un troisième réseau dans l'angle $\widehat{A'OB'}$.

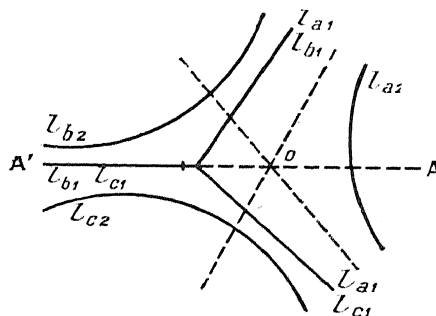
Cela posé, déplaçons comme tout à l'heure le pôle a_1 sur l'axe réel vers l'origine et au delà. Les pôles a_2, \dots, a_n, \dots restent tous réels et se déplacent simultanément vers la gauche. Les autres pôles, deux à deux imaginaires conjugués, continuent à former une ligne de pôles

dans l'angle \widehat{BOC} . De là, et des résultats obtenus au paragraphe précédent, nous tirons les conclusions suivantes :

1° Les lignes $\dots, l_{a(n-1)}, l_{an}, l_{a(n+1)}, \dots$ se déplacent et se déforment avec continuité tout en conservant leurs propriétés ; *elles ne se coupent jamais entre elles* et restent *asymptotiquement parallèles* à OB' , OC' (Y tendant vers $\pm i$ sur leurs extrémités) ; elles délimitent toujours (quelles que soient les positions réelles de a_{n-1}, \dots, a_{n+1}) des bandes \mathfrak{A} où y prend une fois toute valeur donnée.

2° Donnons à a_1 une grande valeur négative. Il résulte de ce qui précède que les pôles a_2, \dots, a_3 sont tous positifs. Appelons l_{a_1} la ligne l_a qui passe par a_1 ; cette ligne se compose de deux parties que nous pouvons prendre imaginaires conjuguées (fig. 6). Considérons,

Fig. 6.



d'autre part, la demi-ligne supérieure l_{a_1} , prolongée le long de l'axe réel négatif, comme une ligne l_{b_1} ; au-dessus de cette ligne nous pouvons construire un réseau de bandes \mathfrak{A} limitées par des lignes l_{b_2}, l_{b_3}, \dots . La demi-ligne inférieure l_{a_1} , prolongée suivant a_1, A' , fournira de même une ligne l_{c_1} au-dessous de laquelle nous avons un troisième réseau de bandes \mathfrak{A} . Le plan x se trouve ainsi, dans sa totalité, décomposé en régions \mathfrak{A} .

Cela dit, supposons que a_1 (cessant d'être réel) se déplace avec continuité d'une manière quelconque : les trois réseaux de régions \mathfrak{A} , en se déformant, resteront toujours agencés et rattachés de la même manière ; d'ailleurs les régions \mathfrak{A} éloignées et leurs frontières seront

toujours disposées comme il a été dit au paragraphe 3 *bis* et jouiront des propriétés énoncées dans ce paragraphe.

Lorsque a_i occupe la position a'_i (*fig. 3*) γ coïncide avec l'intégrale tronquée γ_a , et les lignes l_b et l_c sont toutes rejetées à l'infini : en ce cas, il n'y a plus aucune ligne l à gauche de l_{a_i} ; les régions \mathfrak{A} situées à droite de cette ligne subsistent seules.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTIONS DU TYPE BIPÉRIODIQUE OU ASYMPTOTES AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES.
PREMIÈRE ÉQUATION DE M. PAINLEVÉ.

7. Équation asymptote à l'équation $Y'' = 6Y^2 - 6$.

Après les fonctions du type monopériodique qui sont asymptotes à des fonctions circulaires, il convient d'étudier les fonctions du type bipériodique dont l'allure et la structure sont celles des fonctions elliptiques (*voir* Introduction, p. 272 et suiv.). Nous ferons tout d'abord porter notre analyse sur les plus simples de ces fonctions, et, en particulier, sur celles qui se ramènent (moyennant un changement de variables algébriques) aux premières fonctions de M. Painlevé, intégrales de l'équation $y'' = 6y^2 + x$.

Partons de la fonction $p(X)$ comme nous sommes partis de la fonction $\tan X$ aux paragraphes 2 et suivants. Je supposerai, pour fixer les idées et simplifier l'écriture, qu'on ait choisi les périodes de $p(X)$ de manière que cette fonction vérifie l'équation différentielle

$$(14) \quad \frac{d^2 Y}{dX^2} = 6Y^2 - 6.$$

En ajoutant au second membre de cette équation certaines fonctions de X , Y , Y' qui tendent vers zéro avec $|X|^{-1}$, nous pourrions former des équations différentielles dont les intégrales $Y(X)$ seront asymptotes ⁽¹⁾ aux intégrales de (14) pour les grandes valeurs de X .

(1) Voir à l'Introduction, p. 273-274, la définition des familles de fonctions asymptotes.

Des considérations que nous développerons dans la cinquième Partie de ce travail montrent qu'en effectuant au besoin une transformation, homographique en Y , algébrique en X ,

$$Y_1 = Y + \varphi(X, Y), \quad X_1 = X + \psi(X),$$

où les fonctions φ et ψ sont, par rapport à X , de degré négatif, on peut toujours ramener la fonction complémentaire [ajoutée au second membre de (14)] à un polynôme du second degré en Y, Y' ; ce polynôme ne peut contenir ni terme en Y'^2 , ni terme en YY' ; il est donc de la forme $p_2 Y^2 + p_1 Y' + q_1 Y + p_0$, où p_0, p_1, p_2, q_1 sont des fonctions algébriques de X qui tendent vers zéro avec $|X|$. D'ailleurs, en effectuant la transformation $Y = \frac{6}{6 + p_2} Y_1$ (qui définit les Y_i comme asymptotes aux Y), nous pouvons annuler le coefficient p_2 .

Nous plaçant, pour simplifier l'exposition, dans le cas où les fonctions p_0, p_1, q_1 sont rationnelles ⁽¹⁾, nous allons montrer qu'effectivement les intégrales de l'équation

$$(15) \quad \frac{d^2 Y}{dX^2} = 6Y^2 - 6 + q_1 Y' + p_1 Y + p_0$$

sont asymptotes aux intégrales de l'équation (14). Plus précisément (cf. Introduction, p. 274-275) :

1° Les *branches d'intégrales* $Y(X)$, suivies sur un ensemble de rayons convergeant vers l'infini sont *semi-méromorphoïdes* ⁽²⁾; exceptionnellement elles peuvent être *méromorphoïdes* ou *méromorphes*.

2° Soit X_0 un point de grand module où une intégrale $Y(X)$ prend une valeur η (la dérivée Y' ayant une valeur η'). La branche de fonction inverse $X(Y)$ suivie, à partir des conditions initiales η, X_0 sur un ensemble de rayons convergents quelconque du plan Y , se rapproche arbitrairement d'une intégrale elliptique lorsque $|X_0|$ devient arbitrairement grand. Il ne peut en être autrement que pour une classe particulière d'intégrales que nous étudierons à part, les intégrales tronquées (*voir* la fin du présent paragraphe).

⁽¹⁾ Les démonstrations sont les mêmes si p_0, p_1, q_1 sont des *branches de fonctions algébroides en $x = \infty$* comme il sera supposé dans la cinquième Partie.

⁽²⁾ Voir le sens de ces termes, Introduction, p. 268.

Plaçons-nous à l'*extérieur* d'une circonférence qui a son centre à l'origine et un rayon égal à ε^{-1} ; ε étant donné arbitrairement petit. Nous allons étudier les intégrales de l'équation (15) à l'extérieur de cette circonférence.

Les fonctions rationnelles p_0, p_1, q_1 de X étant de degré au plus égal à -1 , on peut trouver un nombre positif a tel qu'on ait à l'extérieur de la circonférence considérée

$$|p_0| < a|X^{-1}|, \quad |p_1| < a|X^{-1}|, \quad |q_1| < a|X^{-1}|.$$

Partons d'un point X_0 où Y prend une valeur η ; nous supposons cette valeur bornée en module, tandis que ε (et par conséquent $|X_0|^{-1}$) peut être arbitrairement petit.

Appelons η' la valeur initiale de Y' et posons $\eta'^2 - 4\eta^3 + 12\eta = D$. Nous supposons le module $|\eta'|$ non nul et, plus précisément, pour fixer les idées, supérieur à $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Désignons, d'autre part, par $p_{0,D}$ la fonction elliptique, intégrale de l'équation $Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D$, qui prend la valeur η en X_0 .

Nous allons étudier sur un chemin quelconque issu de X_0 l'intégrale $Y(X)$ de (15) que définissent les conditions initiales X_0, η, η' .

Multipliant l'équation (15) par $2Y'$ et intégrant, nous avons

$$(16) \quad Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D + 2 \int_{X_0}^X (q_1 Y' + p_1 Y Y' + p_0 Y') dX,$$

ou encore

$$(16 \text{ bis}) \quad Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D + 2 \int_{\eta}^Y (q_1 Y' + p_1 Y + p_0) dY.$$

Dans cette équation, considérons Y comme la variable indépendante, et faisons-lui décrire, à partir de la valeur η , un chemin arbitraire L , de longueur l . Désignons par h une limite supérieure du module $|Y|$ sur ce chemin, par h' et par h'' une limite inférieure et une limite supérieure du module $|\sqrt{4Y^3 - 12Y + D}|$.

Suivant l'intégrale de (15) sur le chemin L , à partir de η et des conditions initiales données, on voit que, tant qu'on a

$$(17) \quad \frac{k}{2} < |Y'| < 2h', \quad \frac{h''^2}{4} < |4Y^3 - 12Y + D| < 4h'^2, \quad |X| > \varepsilon^{-1},$$

l'équation (16 *bis*) donne

$$(17 \text{ bis}) \quad |Y'^2 - 4Y^3 + 12Y - D| < (2h' + h + 1)al\varepsilon$$

ou

$$(17 \text{ ter}) \quad \left| \frac{Y'^2}{4Y^3 - 12Y + D} - 1 \right| < \frac{8h' + 4h + 4}{k'^2} al\varepsilon.$$

Divisant par Y' et intégrant, nous obtenons

$$(18) \quad |\arg. p_{0,b}(Y) - X| < \frac{8(2h' + h + 1)}{k'^3} al^2\varepsilon.$$

Cela dit, supposons le chemin L (que décrit Y) tracé de telle sorte qu'on ait sur ce chemin

$$(19) \quad \frac{8(2h' + h + 1)}{k'^3} al^2 < \varepsilon^{-\frac{1}{2}};$$

l'inégalité (18) s'écrit alors

$$(18 \text{ bis}) \quad |\arg. p_{0,b}(Y) - X| < \sqrt{\varepsilon},$$

et elle entraîne comme conséquences les diverses inégalités (17) sur le chemin L ; mais elle est elle-même conséquence de (17) : donc *elle ne cesse pas d'être vérifiée tout le long du chemin L .*

Interprétons cette inégalité en supposant, comme nous l'avons dit plus haut, que la valeur initiale $|\eta|$ est bornée pour ε arbitrairement petit, et que $|\eta'| > \varepsilon^{\frac{1}{8}}$. Supposons en outre, pour commencer, que $D \mp 8$ soit supérieur à $\varepsilon^{\frac{2}{7}} \log \varepsilon$ et que $|D| < \log \varepsilon$.

Appelons a, b, c les racines du trinôme $4\eta^3 - 12\eta + D$ et entourons-les (dans le plan Y) de trois petits cercles ⁽¹⁾ α, β, γ ayant pour rayon la longueur $\varepsilon^{\frac{1}{7}}$. Puis faisons décrire à Y , à partir de η , un chemin L quelconque, ne pénétrant pas dans α, β, γ , sur lequel la limite supérieure h de $|Y|$ soit inférieure à $\log \varepsilon$, et dont la longueur l soit inférieure à $4h$. Étant donnée l'hypothèse faite sur D et h , on voit que, sur le chemin L , la limite supérieure h' de $|p'_{x,b}|$ sera (pour les petites valeurs de ε) inférieure à $3(\log \varepsilon)^{\frac{3}{2}}$; la limite inférieure k' sera d'un ordre de grandeur supérieur ou égal à $\varepsilon^{\frac{1}{7}}$.

(1) Étant donnée la valeur de D , ces cercles sont extérieurs les uns aux autres quand ε est arbitrairement petit.

Dès lors, étant données les valeurs de h, h', k' on voit que, si ε est suffisamment petit, l'inégalité (19) et, par conséquent l'inégalité (18 bis), sera vérifiée le long du chemin L considéré.

Périodes de la fonction $Y(X)$. — Prenons, en particulier, pour chemin L un lacet fermé Λ issu de η et entourant deux racines a, b du trinome $4\eta^3 - 12\eta + D$. Cela est toujours permis *pourvu que la distance des deux points a et b au point c soit supérieure à $\varepsilon^{\frac{1}{7}}$* . Nous supposons d'abord qu'il en est ainsi (voir p. 297). Lorsque Y décrit le lacet Λ , le point représentatif de la fonction $\arg. p_{0,b}$ va de X_0 en $X_0 + \omega$, ω désignant une période de la fonction elliptique $p_{0,b}$. Appelons, d'autre part, X_{10} la valeur prise par l'inverse de l'intégrale de (15) à l'extrémité du lacet. L'inégalité (18 bis) étant vérifiée le long de Λ , on a

$$|X_{10} - X_0 - \omega| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Ainsi, pour des conditions initiales η, η' données, LE RAPPORT $\frac{X_{10} - X_0}{\omega}$ TEND VERS L'UNITÉ LORSQUE ε^{-1} , OU X_0 , AUGMENTE INDÉFINIMENT.

Nous pouvons, bien entendu, choisir arbitrairement le contour du lacet Λ pourvu que nous ne le fassions pas aller trop loin (nous avons, en effet, assigné des limites supérieures à $|Y|$ et à la longueur du lacet) et que nous ne pénétrions pas dans les petits cercles α, β, γ . Nous prendrons d'ordinaire pour lacet Λ le chemin décrit par le point $Y = p_{0,b}(X)$ lorsque X décrit le segment rectiligne $X_0, X_0 + \omega$. Si toutefois ce segment passe trop près d'un pôle de $p_{0,b}$ ou d'un zéro de $p'_{0,b}$, nous déformerons légèrement Λ de manière à contourner ces points par de petits arcs de cercles dont les rayons seront (d'après les conditions posées plus haut) arbitrairement petits avec ε .

Mouvons maintenant X sur le segment $X_0, X_0 + \omega'$ (je désigne par ω' la seconde période de la fonction $p_{0,b}$) en contournant encore par de petits arcs de cercles les pôles de $p_{0,b}$ et les zéros de $p'_{0,b}$ qui pourraient se trouver sur ce segment : le point Y décrira un lacet Λ' qui contourne deux racines du trinome $4\eta^3 - 12\eta + D$, soit les racines b et c . Puisque la distance des points b et c à a est supérieure ⁽¹⁾

(1) Il en est ainsi à cause de l'hypothèse faite sur D (c'est-à-dire sur η'), voir la note de la p. 297.

à $\varepsilon^{\frac{1}{7}}$, nous pouvons tracer le contour Λ' de manière à satisfaire aux conditions énoncées plus haut. L'inégalité (18 *bis*) est alors satisfaite le long de Λ' comme le long de Λ , et l'on a, en appelant X_{01} la valeur prise par l'inverse de l'intégrale de (15) à l'extrémité du lacet,

$$|X_{01} - X_0 - \omega'| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Comme nous avons défini les points X_{10} , X_{01} , nous définirons ensuite, en faisant toujours mouvoir Y sur les contours Λ et Λ' , une série de points X_{20} , X_{11} , ..., $X_{0,-1}$, ... tels que les différences

$$\begin{aligned} X_{20} &= (X_{10} + \omega), & X_{11} &= (X_0 + \omega + \omega'), & \dots, \\ X_{-1,0} &= (X_0 - \omega), & \dots \end{aligned}$$

soient d'un ordre de grandeur inférieur à $\sqrt{\varepsilon}$.

Nous appelons en particulier X_{10} , X_{01} , $X_{-1,0}$, $X_{0,-1}$ les quatre points qu'on obtient lorsqu'on fait décrire à Y , à partir de η , le lacet Λ ou le lacet Λ' dans le sens positif ou dans le sens négatif; et nous poserons

$$\begin{aligned} X_{10} - X_0 &= \omega_+, & X_{01} - X_0 &= \omega'_+, \\ X_{-1,0} - X_0 &= \omega_-, & X_{0,-1} - X_0 &= \omega'_-. \end{aligned}$$

Nous dirons que $\omega_+(X_0)$, ..., $\omega'_-(X_0)$ sont les *périodes* de la fonction $Y(X)$ au point X_0 . Ces *périodes* ⁽¹⁾ sont entièrement déterminées lorsqu'on se donne le point X_0 et les valeurs η , D de Y et $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ en ce point : ce sont des fonctions analytiques de X_0 , η et D , fonctions qui, pour une valeur fixe de D , tendent vers des nombres constants lorsque X_0 augmente indéfiniment.

Nous poserons, d'autre part,

$$\begin{aligned} \omega_+[X_0 + \omega_+(X_0)] &= \omega_+^{(2)}(X_0), \\ \omega_+[X_0 + \omega_+^{(j-1)}(X_0)] &= \omega_+^{(j)}(X_0), \\ \omega_+^{(j)}[X_0 + \omega_+^{(j')}(X_0)] &= \omega_+^{(j)}\omega_+^{(j')}(X_0), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Nous sommes convenus plus haut de tracer les contours Λ , Λ' de manière que les chemins correspondants décrits par $\arg p_{0,n}$ soient

(1) Cette extension du sens du mot *période* facilite beaucoup l'exposition qui va suivre (*cf.* Introduction); elle est d'ailleurs conforme à l'étymologie du mot.

rectilignes, sauf toutefois au voisinage des pôles ou infinis de $p'_{0,n}$ que l'on contourne (si on les rencontre) par de petits arcs de cercles. Faisons alors décrire à Y , dans le sens positif : d'une part, les lacets Λ , puis Λ' ; d'autre part, les lacets Λ' , puis Λ . Le point X représentant l'intégrale de (15) va : d'une part, du point X_0 au point $X_0 + \omega_+(X_0)$, puis au point $X_0 + \omega_+ \omega'_+(X_0)$, et, d'autre part, du point X_0 au point $X_0 + \omega'_+(X_0)$, puis au point $X_0 + \omega'_+ \omega_+(X_0)$. Il n'est pas certain que ce dernier point coïncide avec $X_0 + \omega_+ \omega'_+(X_0)$, mais il résulte de l'inégalité (18 bis) que la distance des deux points est une quantité comparable à $\sqrt{\varepsilon}$ au plus. Complétons alors le dernier côté du contour décrit par X en joignant par un segment rectiligne le point $X_0 + \omega_+ \omega'_+(X_0)$ au point $X_0 + \omega'_+ \omega_+(X_0)$. Nous formons ainsi un *quadrilatère curviligne*, Q , qui se rapproche d'autant plus d'un parallélogramme que X_0^{-1} et, par conséquent, ε sont plus petits.

Étude de la fonction $Y(X)$ à l'intérieur du quadrilatère Q . — Il résulte de ce qui précède que l'intégrale $Y(X)$ est holomorphe⁽¹⁾ sur les côtés du quadrilatère Q . Pour étudier cette intégrale à l'intérieur de Q , il suffit évidemment de faire décrire à Y un chemin quelconque, soit tout entier extérieur aux lacets Λ , Λ' , soit tout entier intérieur à l'un de ces lacets, et d'étudier la variation correspondante de la fonction inverse $X(Y)$.

Considérons d'abord un chemin L , issu de η , et intérieur à Λ ou à Λ' . Tant que ce chemin ne pénètre pas dans les petits cercles α, β, γ qui entourent les points a, b, c , l'inégalité (18 bis) est applicable sur L ; la fonction $X(Y)$ et son inverse $Y(X)$ sont toutes deux holomorphes.

Lorsque Y pénètre dans le petit cercle α , l'inégalité (17 ter) cesse d'être utilisable, mais nous pouvons encore appliquer l'inégalité (17 bis) d'où nous avons déduit (18). Cette inégalité montre que $|Y'|$ reste très petit et est au plus de l'ordre de grandeur du rayon de α , soit $\varepsilon^{\frac{1}{7}}$; donc $X(Y)$ reste déterminé; la fonction $Y(X)$ est holomorphe, et l'on a, pour Y intérieur à α , un *zéro* de Y' auquel correspond un *point*

(1) Le théorème de Cauchy est applicable à l'équation (15) pour toutes conditions initiales finies pour lesquelles les coefficients p_0, p_1, q_1 sont eux-mêmes holomorphes.

critique algébrique simple de $X(Y)$. Les deux déterminations permutées par ce point critique sont obtenues en appliquant l'inégalité (18 bis) sur le contour du cercle α .

Nous rencontrerons pareillement un zéro de $Y'(X)$ lorsque Y pénétrera dans le cercle β ou dans le cercle γ .

Considérons maintenant un chemin L , issu de η , et *extérieur* aux lacets Λ , Λ' [on tracera toujours ce chemin de manière que sa longueur soit inférieure au quadruple de la limite supérieure de $|Y|$ sur L (*vide supra*, p. 297)]. Tant que, sur ce chemin, $|Y|$ reste inférieur à $\log \varepsilon$, l'inégalité (18 bis) est applicable; la fonction $X(Y)$ et son inverse sont holomorphes.

Supposons, d'autre part, qu'on atteigne un point $Y = \bar{Y}$ ayant pour module $\log \varepsilon$. Appelons \bar{Y}' la valeur correspondante de Y' , \bar{X} la valeur de X . L'inégalité (18 bis), étant encore applicable au point \bar{Y} , montre (étant donné qu'on a supposé $D < \log \varepsilon$) que \bar{Y}'^2 a pour valeur principale $4\bar{Y}^3$. Plus précisément, la différence $\frac{\bar{Y}'^2}{4} - 1$ est un infiniment petit en même temps que ε : nous désignerons cette différence par ε_1 .

Cela posé, faisons décrire à Y (à partir du point \bar{Y}) le prolongement du rayon qui joint l'origine à \bar{Y} . L'équation (16 bis) [où l'on fait $\eta = \bar{Y}$, $D = \bar{Y}'^2 - 4\bar{Y}^3 + 12\bar{Y}$] donne

$$(20) \quad \frac{Y^{-3}Y'^2}{4} - 1 = +\varepsilon_1 \frac{\bar{Y}^3}{Y^3} + 3 \frac{\bar{Y} - Y}{Y^3} + \frac{1}{2} Y^{-3} \int_{\bar{Y}}^Y (q_1 Y' + p_1 Y + p_0) dY.$$

En revenant à notre méthode de calcul ordinaire, nous voyons que, tant qu'on a, par exemple ⁽¹⁾,

$$(21) \quad \left| \frac{Y^{-3}Y'^2}{4} - 1 \right| < 2\varepsilon_1 + 10 \frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{\log \varepsilon}} \quad (\text{voir, p. 296, la définition de } \alpha),$$

l'équation (20) entraîne (si $|\bar{Y}|$ est assez grand) l'inégalité

$$(22) \quad \left| \frac{Y^{-3}Y'^2}{4} - 1 \right| < 10\alpha\varepsilon |Y|^{-\frac{1}{2}} + 2\varepsilon_1 \left| \frac{\bar{Y}^3}{Y^3} \right|$$

(1) Il faut force à dessein les coefficients numériques, leur détermination exacte n'offrant point ici d'intérêt. On remarquera que, pour les grandes valeurs de $|Y|$ le terme prépondérant de l'équation (20) est le terme $Y^{-3} \int q_1 Y' dY$ où Y' est de l'ordre de grandeur de $|Y|^{\frac{3}{2}}$.

et *a fortiori* l'inégalité (21). Donc l'inégalité (22) ne cesse pas d'être vérifiée lorsque Y décrit le rayon infini considéré. Elle montre que le point X tend vers une valeur finie déterminée \bar{X}_0 suivant une courbe qui admet en \bar{X}_0 une tangente déterminée.

Remarque. — On observera que le calcul qui précède est applicable lors même que le module de \bar{X} n'est pas supposé très grand. Si, en \bar{X} , on a, par exemple, $\left| \frac{Y^{-3}Y^{1/2}}{4} - 1 \right| > \frac{1}{2}$, et si les modules $|p_0|$, $|p_1|$, $|q_1|$ restent bornés lorsque Y va vers l'infini en ligne droite, c'est-à-dire si X ne tend pas vers un pôle des fonctions p_0 , p_1 , q_1 , la différence $\frac{Y^{-3}Y^{1/2}}{4} - 1$ tend toujours vers zéro et X tend vers une valeur \bar{X}_0 .

Mais revenons à l'intégrale $Y(X)$ étudiée dans le quadrilatère Q , et supposons maintenant qu'à partir d'un point \bar{Y} de module arbitrairement grand [où X a une valeur \bar{X} voisine de \bar{X}_0 et où $Y' = 2(1 + \varepsilon')\bar{Y}^{\frac{3}{2}}$, ε' étant arbitrairement petit avec \bar{Y}^{-1}], Y quitte le rayon ci-dessus considéré et décrit une circonférence de centre $Y = 0$. *Quelque grand que soit \bar{Y}* , l'inégalité (21) sera vérifiée sur le contour de cette circonférence, et X tournera autour du point \bar{X}_0 . Ainsi, *le point \bar{X}_0 est un infini isolé de l'intégrale $Y(X)$* , à condition toutefois que l'on ne fasse pas tourner X une infinité de fois autour de \bar{X}_0 (ce qui aurait lieu si Y décrivait une infinité de tours sur la circonférence passant par \bar{Y}); *l'intégrale reste déterminée lorsque X tend vers \bar{X}_0 sur un rayon quelconque.*

Résumons les conclusions auxquelles nous conduit l'analyse que nous venons de faire. Considérons, sur l'ensemble des rayons issus de X_0 , et à l'intérieur du quadrilatère Q , la *branche d'intégrale $Y(X)$* définie par les conditions initiales X_0 , η , η' .

Tant que nous ne rencontrons aucun infini de la branche suivie, $Y(X)$ reste holomorphe; $Y(X)$ est encore holomorphe aux points où Y' s'annule; ces points sont, pour la branche considérée (dans Q), au nombre de trois, et sont respectivement situés au voisinage de a , b , c dans les petits cercles α , β , γ .

Lorsque nous rencontrons un infini, \bar{X}_0 , de notre branche, ce point

est un infini isolé et $Y(X)$ γ est rationaloïde [il résulte de l'inégalité (22) que, sur tout rayon du plan X convergeant vers \bar{X}_0 , le rapport $Y \sqrt{\frac{1}{(X - \bar{X}_0)^2}}$ tend vers l'unité]. Il n'y a d'ailleurs, pour notre branche, à l'intérieur du quadrilatère Q , qu'un seul infini \bar{X}_0 . En effet, lorsqu'à partir de \bar{X}_0 , le point X s'éloigne sur un rayon quelconque à l'intérieur de Q , $p_{0,D}$ reste fini et l'inégalité (18 bis) redevient et ne cesse plus d'être applicable.

Dans tout le quadrilatère Q (le voisinage de \bar{X}_0 exclus), la différence $Y - p_{0,D}$ est arbitrairement petite avec ε .

Intégrales pour lesquelles D est voisin de ± 8 . — Pour construire dans le plan Y les lacets Λ , Λ' , nous avons supposé plus haut que les trois racines a , b , c du trinôme $4\eta^3 - 12\eta + D$ étaient séparées par des distances supérieures à $\varepsilon^{\frac{4}{7}}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la différence $D \mp 8$ soit supérieure à un certain multiple de $\varepsilon^{\frac{2}{7}}$. Pour $D = \pm 8$, le trinôme $4\eta^3 - 12\eta + D$ a une racine double et la fonction elliptique $p_{0,D}$ dégénère en fonction circulaire.

Que se passera-t-il donc si l'ordre de grandeur de $D \mp 8$ devient égal ou inférieur à $\varepsilon^{\frac{2}{7}}$? Soient a et b les deux racines qui se rapprochent l'une de l'autre. Si $|\eta'|$ est supérieur à $\varepsilon^{\frac{4}{7}}$, comme nous l'avons supposé au début du paragraphe ($|\eta|$ restant borné pour ε arbitrairement petit), nos calculs restent applicables à partir de $Y = \eta$ sur tout chemin qui ne pénètre pas dans un petit cercle α , de rayon $2\varepsilon^{\frac{4}{7}}$, décrit autour de l'un ou l'autre des points a , b , et qui satisfait, d'ailleurs, aux autres conditions posées plus haut. En particulier, nos calculs ne cessent pas d'être applicables le long du lacet Λ correspondant à la période ω ; mais ils ne sont plus applicables sur le contour Λ' , lequel est désormais forcé de passer à l'intérieur de α , entre les points a et b .

On voit alors ce que devient le quadrilatère Q lorsque le module $|D - 8|$ (ou $|D + 8|$), partant d'une valeur finie quelconque, décroît avec continuité. La seconde période ω' devient de plus en plus

grande et le quadrilatère Q , qui se déforme avec continuité et dont un côté reste borné, s'allonge de plus en plus. En tous les points intérieurs à Q l'inégalité (18 bis) est valable dans les mêmes conditions que précédemment, exception faite pour les valeurs Y intérieures au petit cercle α , qui contient deux racines de $4\eta^3 - 12\eta + D$ très rapprochées l'une de l'autre, c'est-à-dire très voisines de ± 1 . Pour ces valeurs de Y et pour Y' voisin de zéro, l'intégrale $Y(X)$ est sûrement holomorphe; il en résulte que la déformation des côtés du quadrilatère Q ne cesse pas d'être continue là même où l'inégalité (18 bis) n'est plus applicable (c'est-à-dire sur les portions de ces côtés qui correspondent à la portion du lacet A' intérieure au petit cercle α_1); le quadrilatère Q subsiste toujours, et dans tout ce quadrilatère (le voisinage de l'infini \bar{X}_0 exclus) la différence $Y - p_{0D}$ est toujours arbitrairement petite avec ε .

Remarque. — Lorsque D se rapproche de ± 8 , nous ne sommes plus assurés que la distance des points $X_0 + \omega'_+ \omega_+(X_0)$ et $X_0 + \omega_+ \omega'_+(X_0)$, que nous avons joints pour fermer le quadrilatère Q , reste très petite et comparable à une puissance positive de ε . Nous continuerons cependant à joindre ces points par le plus court, en évitant (comme il a été dit plus haut) les *infinis* et les *zéros* de $Y'(X)$.

Pourra-t-il arriver que la période ω' devienne infinie en sorte que l'un des côtés du quadrilatère Q soit rejeté à l'infini? Nous verrons plus loin que cela est possible, et nous étudierons en détail, sous le nom d'*intégrales tronquées*, les intégrales fort remarquables pour lesquelles cette circonstance se présente. Il est clair que, sur un chemin qui s'éloigne indéfiniment dans un quadrilatère Q infini, Y' reste très voisin de zéro, et Y très voisin de ± 1 ; donc l'intégrale $Y(X)$ est holomorphe.

Intégrales pour lesquelles η' est voisin de zéro. — Nous avons supposé au début de nos calculs que le module $|\eta'|$ était supérieur à $\varepsilon^{\frac{1}{8}}$. Cette hypothèse ne nous gêne en rien. En effet, étant donné que $|\eta|$ est borné, l'inégalité $|\eta'| < \varepsilon^{\frac{1}{8}}$ exige que le module $|D|$ soit lui-même borné quand ε est arbitrairement petit. L'intégrale $Y(X)$ sera alors holomorphe dans un certain domaine entourant X_0 . Appelant X'_0 le

point le plus rapproché de X_0 où $|Y'|$ surpasse $\varepsilon^{\frac{1}{8}}$, nous pourrons appliquer nos calculs à partir de ce point X'_0 (dont le module sera supérieur à ε^{-1} si $|X_0|$ est assez grand).

Intégrales $Y(X)$ pour lesquelles D est très grand. — Levons enfin la dernière restriction imposée à nos conditions initiales. Nous avons supposé que $|D| < \log \varepsilon$. Qu'advierait-il s'il en était autrement?

Remarquons que, si D est très grand ($|\eta|$ étant borné), η' sera de l'ordre de grandeur de \sqrt{D} . Revenons alors à l'inégalité (18). Entourons les points a, b, c de cercles α', β', γ' ayant pour rayon la longueur $\left(\frac{\varepsilon}{|D|}\right)^{\frac{1}{7}}$; puis traçons, dans le plan Y , à partir de η , un chemin L quelconque, ne pénétrant pas dans α', β', γ' , sur lequel la limite supérieure h de $|Y|$ soit inférieure à $\log \varepsilon$, et dont la longueur l soit inférieure à $4h$; sur ce chemin, la limite h' (*vide supra*, p. 297) sera, pour les petites valeurs de ε , inférieure à $\sqrt{D}(\log \varepsilon)^{\frac{3}{2}}$; la limite inférieure k' sera d'un ordre de grandeur supérieur ou égal à $\left(\frac{\varepsilon}{|D|}\right)^{\frac{1}{7}}$. Il résulte de ces valeurs que, si ε est suffisamment petit, l'inégalité (18) entraînera (18 bis) tout le long du chemin L .

En particulier, l'inégalité (18 bis) sera vérifiée le long de lacets arbitraires Λ, Λ' (ne pénétrant pas dans α', β', γ' et sur lesquels $|Y| < \log \varepsilon$) qui enveloppent, l'un les points a et b , l'autre les points b et c . On pourra donc définir, comme on l'a fait plus haut, les périodes ω, ω' et le quadrilatère Q . Les périodes tendront vers zéro lorsque $|D|$ croîtra indéfiniment, puisqu'il en est ainsi pour la fonction elliptique p_{0D} asymptote à $Y(X)$.

La branche de fonction $Y'(X)$, suivie à partir de X_0 , présentera comme tout à l'heure, à l'intérieur de Q , un infini et trois zéros. Dans tout le quadrilatère Q (voisinage de l'infini exclus), la différence $Y - p_{0D}$ sera arbitrairement petite avec ε .

La branche d'intégrale $Y(X)$ est partout holomorphe sauf en ses infinis. — Suivons la branche d'intégrale $Y(X)$, à partir des conditions initiales η, η' , sur l'ensemble des rayons issus de X_0 et considé-

rons tout d'abord les portions de ces rayons où le module $|X|$ surpasse ε^{-1} . Sur ces rayons, les calculs qui précèdent sont applicables lorsque ε est petit. Nous pouvons donc construire le quadrilatère Q , défini plus haut, dont un sommet est en X_0 . A partir d'un sommet quelconque de Q , nous pouvons construire un nouveau quadrilatère Q_1 , et ainsi de suite. Les quadrilatères ainsi formés recouvrent toute la portion du plan X que nous considérons : la branche $Y(X)$ est holomorphe en tous les points rencontrés ⁽¹⁾, exception faite pour ses *infinis* (un par quadrilatère) où elle est *rationaloïde*.

Ce résultat étant établi dans les régions du plan X où $|X| > \varepsilon^{-1}$, nous l'étendrons facilement au plan X tout entier (les pôles des fonctions rationnelles p_0, p_1, q_1 exceptés).

Écrivons, en effet, l'équation auxiliaire

$$(15 \text{ bis}) \quad Y'' = 6Y^2 - 6 + \lambda(q_1 Y' + p_1 Y + p_0),$$

où λ est un paramètre variable entre 0 et 1, et considérons la portion du plan X où l'on a $|p_0| < H, |p_1| < H, |q_1| < H$, H étant un nombre positif quelconque. Il est clair que, si λ est suffisamment petit, les calculs effectués plus haut pourront être appliqués à cette région du plan : il suffira de remplacer, dans les seconds membres des inégalités (17 bis), (18), (18 bis), la quantité $a\varepsilon$, limite supérieure des modules $|p_0|, |p_1|, |q_1|$, par la nouvelle limite supérieure λH . La *branche d'intégrale* de (15 bis) définie par des conditions initiales arbitraires, sera partout holomorphe, sauf en ses infinis, points isolés où elle est rationaloïde. Par continuité, nous pouvons étendre ces conclusions aux branches d'intégrales de toutes les équations (15 bis) où $\lambda \leq 1$. En effet, toute intégrale de (15 bis) définie par des conditions initiales déterminées, est fonction continue de λ : elle sera donc toujours holomorphe pour $\lambda \leq 1$, sauf au voisinage de ses infinis. D'ailleurs, si l'intégrale présente un infini isolé, \bar{X}_0 , pour $\lambda = \lambda_1$, elle présentera, pour λ voisin de λ_1 , un infini isolé \bar{X}'_0 , voisin de \bar{X}_0 ; en vertu de la remarque faite page 302, la différence $\frac{Y^{-3} Y'^2}{4} - 1$ tendra

(1) Il en serait encore ainsi, nous l'avons vu, si certains quadrilatères avaient un côté rejeté à l'infini.

vers zéro lorsque X convergera vers \bar{X}_0 sans tourner une infinité de fois autour de ce point.

Développement des intégrales au voisinage de leurs infinis. — Considérons les intégrales $Y(X)$ qui sont infinies en un point $X = \bar{X}_0$.

On peut satisfaire formellement à l'équation (15) par un développement de la forme suivante

$$(23) \quad Y = \frac{1}{(X - \bar{X}_0)^2} + \frac{1}{5q_1(\bar{X}_0)} \frac{1}{X - \bar{X}_0} + b_0 + b_1(X - \bar{X}_0) + \dots \\ + [C + \gamma \log(X - \bar{X}_0)](X - \bar{X}_0)^4 + \dots,$$

$b_0, b_1, b_2, b_3, \gamma$ étant des fonctions rationnelles de degré négatif en \bar{X}_0 , C étant un paramètre arbitraire et les termes non écrits étant des puissances de $(X - \bar{X}_0)$ dont les coefficients sont rationnels en \bar{X}_0 et polynômes en $[C + \gamma \log(X - \bar{X}_0)]$.

Le développement (23) est d'un type qui nous a été rendu familier par l'étude de l'équation du premier ordre

$$xy' = c_{01}y + c_{10}x + c_{20}x^2 + \dots,$$

dans laquelle le coefficient c_{10} est supposé entier positif. La convergence du développement, au voisinage de \bar{X}_0 , sur l'ensemble des rayons issus de ce point, peut être établie dans le cas de l'équation du second ordre comme dans le cas de l'équation du premier ordre. Nous envisageons ⁽¹⁾ l'équation auxiliaire

$$(15 \text{ ter}) \quad Y'' = 6Y^2 + \lambda_1(-6 + q_1 Y' + p_1 Y + p_0).$$

Sur l'ensemble des rayons considérés (leur origine commune \bar{X}_0 exceptée), les intégrales infinies en \bar{X}_0 sont fonctions holomorphes de λ_1 . Si on les développe par rapport à λ_1 , on obtient comme coefficients des puissances de λ_1 des polynômes en $[C + \gamma \log(X - \bar{X}_0)^4]$ dont les coefficients sont fonctions holomorphes de $(X - \bar{X}_0)$. Il en résulte que, pour λ_1 voisin de zéro, les intégrales sont bien développables sous la forme (23). Le développement est convergent, sur l'ensemble

⁽¹⁾ Cf. P. BOUTROUX, *Leçons*, etc., p. 124 et suiv.

des rayons considérés, jusqu'à rencontre d'une singularité de l'intégrale représentée. Or nous avons vu tout à l'heure que, pour λ_1 quelconque entre 0 et 1, le point \bar{X}_0 est une singularité isolée pour une infinité d'intégrales $Y(X)$. Il en résulte, de proche en proche, que le développement (23) représentant ces intégrales est convergent pour $\lambda_1 \leq 1$.

Les *branches d'intégrales* Y représentées par le développement (23) sont infinies en \bar{X}_0 et admettent ce point comme *point transcendant directement critique*. Le rapport $\frac{Y'^2}{4Y^3}$ tend vers 1 sur tout rayon aboutissant en \bar{X}_0 .

Convenons en particulier de prendre en un point \bar{X} , donné au voisinage de \bar{X}_0 , une *détermination fixe* de $\log(X - \bar{X}_0)$: alors le coefficient C peut être regardé comme un paramètre déterminant sans ambiguïté une intégrale $Y(X)$, et une seule, infinie en \bar{X}_0 .

Réciproquement, considérons l'intégrale $Y(X)$ étudiée plus haut, intégrale suivie, à partir de conditions initiales finies X_0, η, η' , le long d'un chemin aboutissant en \bar{X}_0 sur lequel Y tend vers l'infini en ligne droite. Nous avons vu que Y reste déterminée au voisinage de \bar{X}_0 et que $Y' = 2(1 + \varepsilon')Y^{\frac{3}{2}}$, ε' tendant vers zéro avec Y^{-1} . Il en résulte qu'on peut toujours déterminer le paramètre C du développement (23) de manière que ce développement représente $Y(X)$ au voisinage de \bar{X}_0 .

Considérons alors, sur l'ensemble des rayons issus d'un point X_0 , une *branche d'intégrale* définie par des conditions initiales arbitraires. Nous avons vu que cette branche a des *infinis* en nombre illimité qui convergent vers $X = \infty$. Au voisinage de tous ces infinis, la branche sera représentée par des développements (23); or le coefficient γ de ce développement tend vers zéro avec $|X_0^{-1}|$; il en résulte que la branche d'intégrale est *semi-méromorphe* ⁽¹⁾ lorsque $|X|$ augmente indéfiniment.

Les intégrales $Y(X)$ sur un chemin où $|X|$ croît indéfiniment. — Soient X_0 un point de grand module, $Y(X)$ l'intégrale définie par les condi-

(1) Voir Introduction, p. 268.

tions initiales X_0, η, η' . Posons, comme plus haut,

$$D = \eta'^2 - 4\eta^3 + 12\eta.$$

Nous avons vu que l'intégrale $Y(X)$ est (si $|X_0|$ est très grand) très voisine d'une fonction elliptique $p_{0,D}$ sur tout chemin issu de X_0 . Il en est ainsi du moins tant que la longueur du chemin parcouru reste inférieure à une certaine fonction croissante de $|X_0|$ (par exemple, il en est ainsi, à partir d'une certaine valeur de $|X_0|$, tant que la longueur du chemin est inférieure à $\log|X_0|$). Mais qu'arrive-t-il lorsque X décrit un chemin infini le long duquel le module $|X|$ est croissant?

Cette question, qui a dans l'étude asymptotique des fonctions $Y(X)$ une importance capitale, peut encore être posée dans les termes suivants :

Sur un chemin infini où le module $|X|$ est croissant (l'argument restant fini) considérons l'intégrale $Y(X)$ définie par les conditions initiales X_0, η, η' . En tout point, \bar{X} , du chemin parcouru (où Y prend une valeur quelconque \bar{Y}), nous savons définir les périodes de l'intégrale. Ces périodes sont (si $|\bar{X}|$ est très grand) arbitrairement voisines des périodes d'une fonction elliptique vérifiant une équation différentielle

$$Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D,$$

où D est une fonction de \bar{X} , ainsi que de X_0, η, η' . Nous devons alors nous demander : *Que deviennent les périodes de $Y(X)$ lorsque \bar{X} s'éloigne indéfiniment sur le chemin considéré?* Ou, en d'autres termes, comment se comporte la fonction D (ou la fonction $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$) de X , lorsque $|X|$ croît indéfiniment?

Nous devons ici distinguer deux cas :

1° *La fonction rationnelle $q_1(X)$ qui figure dans le second membre de l'équation (15) est de degré -2 au plus.*

Remarquons que l'équation (16) peut s'écrire (en intégrant, par parties, à partir de X_0)

$$(24) \quad Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D - p_1(X_0)\eta^2 - 2p_0(X_0)\eta + p_1(X)Y^2 + 2p_0(X)Y \\ + \int_{X_0}^X (q_1 Y'^2 - p_1' Y^2 - 2p_0' Y) dX.$$

Supposons alors qu'on trace le chemin décrit par X de manière à éviter les infinis de l'intégrale (cela est toujours possible d'après ce qui précède), en sorte que les modules $|Y|$, $|Y'|$ restent bornés et inférieurs à un nombre positif H . Les fonctions q_1 , p'_1 , p'_0 étant toutes trois de degré -2 au plus en X , il est certain que l'intégrale du second membre reste, en module, inférieure à un nombre fixe, lorsque $|X|$ croît indéfiniment. Il en résulte que *la fonction $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ de X tend vers une limite finie*, et l'on voit que cette limite est la même, quelle que soit la direction suivant laquelle X s'éloigne. Appelons D_0 cette limite. La branche d'intégrale $Y(X)$, suivie sur un ensemble de rayons convergeant vers l'infini, est *asymptote à une fonction elliptique p déterminée qui vérifie l'équation*

$$Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D_0.$$

2° Soit maintenant le degré de la fonction rationnelle q_1 égal à -1 . — Les choses se passent alors différemment, et il est facile de voir que l'intégrale $Y(X)$ ne saurait être asymptote à une fonction elliptique unique lorsque X s'éloigne indéfiniment dans des directions différentes. Pour étudier l'allure de $Y(X)$ sur les chemins infinis, il faudra entreprendre une étude spéciale que nous ferons plus loin en détail dans le cas où les fonctions $Y(X)$ sont (à un changement de variable près) les transcendentes méromorphes de M. Painlevé. Les conclusions auxquelles nous aboutirons subsistent d'ailleurs, ainsi que nous le ferons remarquer chemin faisant, pour les intégrales de l'équation générale (15).

Bornons-nous pour l'instant à énoncer la proposition suivante dont nous donnerons plus loin une démonstration (voir § 10): Lorsqu'à partir de X_0 , le point X s'éloigne indéfiniment (en conservant un argument fini) sur un chemin quelconque qui ne traverse aucun *infini* de la fonction, *le module de l'expression $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ reste borné*.

Il en résulte *qu'en tout point traversé, \overline{X} , les périodes sont voisines des périodes d'une fonction elliptique de module borné*. D'où cette conséquence à laquelle d'ailleurs on aurait pu parvenir par d'autres voies : une branche d'intégrale $Y(X)$, défini sur un ensemble arbitraire de rayons convergeant vers l'infini, présente une infinité de zéros et de pôles dont la densité est celle des zéros d'une fonction elliptique.

Ainsi, si la fonction $Y(X)$ était méromorphe, *elle serait d'ordre 2 et de genre 2.*

8. L'équation (B) de M. Painlevé. Équations connexes.

Parmi les équations (15) asymptotes à l'équation $Y'' = 6Y^2 - 6$ dont nous venons de faire l'étude, il en est une fort remarquable qui se ramène à la première équation découverte par M. Painlevé. C'est celle dont tous les infinis sont des pôles.

Pour que les infinis soient des pôles, il faut et il suffit que le coefficient γ du développement (23) soit nul pour toute valeur de \bar{X}_0 . En calculant ce coefficient et l'annulant, on constate que l'équation doit être [au changement de variable : X, lX ; Y, mY (l et m constantes) près]

$$(B') \quad Y'' = 6Y^2 - 6 - \frac{Y'}{X} + \frac{4}{25} \frac{Y}{X^2}.$$

Effectuant, sur cette équation, le changement de variables

$$(25) \quad y = x^{\frac{1}{2}} Y, \quad X = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} \quad (\text{comparer p. 281}),$$

nous obtenons l'équation

$$(B) \quad y'' = 6y^2 - 6x.$$

On sait comment M. Painlevé a démontré que les intégrales de cette équation sont méromorphes. M. Painlevé démontre en premier lieu que les équations à points critiques fixes de la forme

$$y'' = b(x)y' + B(x)y^2 + C(x)y + D(x)$$

doivent être réductibles à l'équation (B). Après quoi, il établit que les intégrales de (B) sont *effectivement* méromorphes. Cette seconde partie de l'analyse de M. Painlevé est la plus délicate. C'est pourquoi il est intéressant de remarquer qu'au point où nous en sommes, elle nous est plus nécessaire. En déterminant, comme nous l'avons fait, l'allure des intégrales, nous nous trouvons avoir démontré par surcroît que, *si tous les infinis des intégrales $y(x)$ sont des pôles*, ces intégrales sont méromorphes.

L'ordre des fonctions $y(x)$ sera égal à $\frac{5}{2}$. — En effet, nous avons dit (p. 310) qu'une *branche d'intégrale* quelconque de (B') présente une infinité de pôles dont la densité est celle des pôles d'une fonction elliptique. Dès lors, lorsqu'on pose $X = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}}$, la fonction Y^2 de x se trouve être méromorphe et d'ordre $\frac{5}{2}$. La fonction $y = \sqrt{x} Y$ est du même ordre que Y^2 .

En même temps que l'équation (B') il me sera commode d'étudier une équation plus générale, par exemple (1)

$$(26) \quad Y'' = 6Y^2 - 6 - 10\rho \frac{Y'}{X} + 4\rho(1 - 6\rho) \frac{Y}{X^2},$$

que nous écrirons aussi

$$(26 \text{ bis}) \quad Y'' = 6Y^2 - 6 - \frac{5\mu}{\mu + 4} \frac{Y'}{X} + \frac{4\mu(3 - \mu)}{(\mu + 4)^2} \frac{Y}{X^2}, \quad 2\rho = \frac{\mu}{\mu + 4}.$$

Cette équation coïncide avec l'équation (B') pour $\mu = 1$ et avec l'équation élémentaire $Y'' = 6Y^2 - 6$ pour $\mu = 0$.

Il y a entre les équations (26), (26 bis) et les équations (6), (6 bis) du paragraphe 2 une analogie remarquable que nous verrons se manifester de plus en plus.

Opérant le changement de variables

$$(27) \quad y = x^{\frac{\mu}{2}} Y, \quad X = \frac{4}{\mu + 4} x^{\frac{\mu + 4}{4}} \quad (\text{comparer p. 280}),$$

nous transformons (26) en l'équation

$$(28) \quad y'' = 6y^2 - 6x^\mu,$$

qui fait pendant à l'équation (9) du paragraphe 2.

Les branches d'intégrales de (26) ou de (28) sont, d'après les paragraphes précédents, *rationaloïdes* en leurs infinis; mais elles y sont singulières si l'on n'a pas $\mu = 0$ ou $\mu = 1$; elles sont *semi-méromorphoïdes* sur un ensemble de rayons arbitraires convergeant vers $X = \infty$ ou $x = \infty$ (*vide supra*, p. 308).

(1) Tout ce que nous dirons de l'équation (26) s'appliquera d'ailleurs à l'équation générale (15).

Pôles des intégrales de l'équation (B). — Quel que soit α , l'équation (B) a une infinité d'intégrales pour lesquelles α est pôle double. Ces intégrales sont données par le développement

$$(29) \quad y = \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{3\alpha}{5}(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)^3 + c(x-\alpha)^4 + \dots,$$

les coefficients de la série de Taylor ⁽¹⁾, à partir du cinquième, étant des fonctions de α et de la constante arbitraire c , que nous appellerons *paramètre de l'intégrale au pôle α* .

On détermine complètement une intégrale $y(x)$ de l'équation (B) si l'on s'en donne un pôle α avec le coefficient c du développement (29) relatif à ce pôle.

Aux pôles doubles (*non nuls*) α , des intégrales $y(x)$ de (B) correspondent des pôles doubles $\left[\beta = \frac{4}{5}\alpha^{\frac{5}{4}}\right]$ des intégrales $Y(X)$ de (B'). Ces dernières intégrales sont représentées au voisinage de leur pôle β par le développement

$$(30) \quad Y = \frac{1}{(X-\beta)^2} - \frac{1}{5\beta} \frac{1}{X-\beta} + b_0 + \dots + C(X-\beta)^4 + \dots,$$

où b_0, \dots, b_3 sont des fonctions de β , C un paramètre arbitraire et b_5, b_6, \dots des fonctions de β et de C . Nous dirons que C est le *paramètre* de l'intégrale $Y(X)$ au pôle β . Ce paramètre est déterminé par le paramètre c de l'intégrale $y(x)$ correspondant à $Y(X)$: c'est une fonction de c et α (ou c et β) facile à calculer; on trouve, toutes réductions faites,

$$(31) \quad C = \star \alpha^{-\frac{15}{2}} + \star \alpha^{-\frac{5}{2}} + \star c \alpha^{-\frac{3}{2}},$$

où les signes \star tiennent place de coefficients numériques que nous nous

⁽¹⁾ On peut, si l'on ne suppose pas connues les propriétés de l'équation (15) du paragraphe 7, établir directement la convergence de la série (29) en observant qu'il est toujours possible de choisir le nombre positif H de telle sorte que l'équation $y'' = 6y^2 - H$ ait une intégrale polaire en α dont le développement en série ait tous ses coefficients plus grands que les coefficients correspondants de (29). Mais il ne faut pas oublier qu'après avoir établi l'existence des intégrales (29), nous ne sommes nullement assurés qu'il n'existe pas d'autres intégrales infinies en α . La non-existence de ces intégrales est une conséquence de l'analyse faite plus haut au paragraphe 7.

dispensons de calculer. Ainsi, C est une *fonction linéaire* de c . A un paramètre fini c correspond un paramètre fini C , à moins que le pôle α ne soit à l'origine.

Les choses se passent différemment pour les infinis des équations (28) où $\mu \neq 1$. En leur voisinage, on peut satisfaire à l'équation (28) en posant

$$(32) \quad y = \frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{3\alpha^\mu}{5}(x-\alpha)^2 + \mu\alpha^{\mu-1}(x-\alpha)^3 \\ + \left[c + \frac{\mu(1-\mu)}{24}\alpha^{\mu-2}\log(x-\alpha) \right] (x-\alpha)^4 + \dots,$$

c étant un paramètre arbitraire et les termes non écrits étant des puissances de $(x-\alpha)$ dont les coefficients sont des polynômes en

$$\left[c + \frac{\mu(1-\mu)}{24}\alpha^{\mu-2}\log(x-\alpha) \right].$$

A l'infini α de $y(x)$ correspond un infini β de $Y(X)$ au voisinage duquel $Y(X)$ est représentable par un développement (23) (où l'on remplace \bar{X}_0 par β). La convergence du développement (23) (*vide supra*, p. 307) entraîne celle du développement (32). D'ailleurs, un calcul facile montre que C est une fonction linéaire de c : on a, comme plus haut,

$$C = * c \alpha^{-\frac{3}{2}} + \dots,$$

les termes non écrits, qui sont des puissances positives de $\alpha^{-\frac{1}{2}}$, étant en nombre fini.

La forme des coefficients du développement (32) montre bien que pour $\mu = 0$ ou 1 , les termes logarithmiques disparaissent.

9. Quadrilatères des périodes des intégrales de (B') . Points critiques des fonctions inverses pour (B') et (26).

Considérons d'abord l'équation (B') , c'est-à-dire l'équation (26) où $\mu = 1$.

Partons, comme au paragraphe 7, du point X_0 de grand module (supérieur à ε^{-1}) et donnons à D (valeur initiale de $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$

au point X_0) une valeur distincte de ± 8 (telle que $D \mp 8$ soit d'un ordre de grandeur supérieur à $\varepsilon^{\frac{4}{7}}$).

Puis considérons (voir p. 298-299) les points

$$X_{10} = X_0 + \omega_+(X_0), \quad \dots, \quad X_{jj'} = \omega_+^{(j)} \omega_+^{(j')}(X_0), \quad \dots,$$

qui ont un module supérieur à ε^{-1} et sont situés dans un même demi-plan limité par une droite passant par l'origine.

Du fait que $Y(X)$ est méromorphe dans ce demi-plan, il résulte que l'on a

$$\omega_+^{(j)} \omega_+^{(j')} = \omega_+^{(j')} \omega_+^{(j)},$$

égalité qui exprime que les périodes de la fonction $Y(X)$ sont commutables.

Ainsi, les points $X_0, X_{10}, X_{01}, \dots$, où Y reprend une même valeur, sont les sommets d'un réseau de quadrilatères curvilignes (*quadrilatère des périodes*) dont les côtés sont les chemins décrits par X lorsque Y décrit les contours des lacets Λ, Λ' (*vide supra*, p. 300). Ces quadrilatères tendent à devenir parallélogrammes lorsqu'ils s'éloignent indéfiniment de l'origine.

D'ailleurs, lorsque X (restant supérieur à ε^{-1}) se meut d'une manière quelconque dans le demi-plan où nous nous sommes placés, $Y(X)$ ne peut prendre la valeur η en aucun point autre que les points X_0, X_{01}, \dots .

Chaque quadrilatère des périodes contient, nous l'avons vu, un pôle (double) et un seul de $Y(X)$. Quel est le paramètre de l'intégrale en ce pôle? Si nous portons le développement (30) dans l'équation de forme (16), déduite de (B'), c'est-à-dire dans l'équation

$$(34) \quad Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D - 2 \int_{X_0}^X \frac{Y'^2}{X} dX + \frac{8}{25} \int_{X_0}^X \frac{YY'}{X^2} dX,$$

nous trouvons que

$$-4C = \frac{D}{16} + \star \beta^{-2} + \star \beta^{-3},$$

D étant la valeur de l'expression $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ au point X_0 . Appliquons cette égalité à un pôle β situé dans un quadrilatère des périodes dont un sommet est en X_0 : nous voyons que la différence $C - \left(\frac{-D}{4}\right)$

est de l'ordre de grandeur de X_0^{-1} , en sorte que le rapport $C/\frac{-D}{4}$ tend vers 1 lorsque X_0 s'éloigne indéfiniment.

REMARQUE. — Il résulte de cette valeur de C que, pour que les inégalités (18) et (22) soient applicables dans le quadrilatère des périodes Q , il suffira que $|C \mp 2| > |\bar{X}|^{-\frac{1}{2}}$. Si l'on a seulement $|C + 2| > |\bar{X}|^{-\frac{1}{2}}$, les calculs relatifs à l'addition de l'une des périodes seront encore applicables (*cf.* p. 303).

Périodes des intégrales de l'équation (26). — Considérons maintenant, au lieu de l'équation (B'), l'équation (26) où μ a une valeur différente de 1. Nous pouvons, à partir du point X_0 , construire, comme il a été dit au paragraphe 7 (p. 300), un quadrilatère Q qui se rapproche arbitrairement d'un parallélogramme si l'on prend X_0 suffisamment grand. Mais ce quadrilatère ne sera fermé que si l'on joint les points $X_0 + \omega_+ \omega'_+(X_0)$ et $X_0 + \omega'_+ \omega_+(X_0)$ comme il a été dit page 300. En effet, à l'intérieur de Q , la *branche* $Y(X)$ définie par les conditions initiales X_0, η, D , présente, nous l'avons vu, un infini \bar{X}_0 (et un seul) qui est point critique transcendant pour $Y(X)$. Il en résulte que, lorsque X décrit (autour de \bar{X}_0) le contour de Q (supposé fermé), Y ne peut revenir à sa valeur initiale η . Ainsi, la ligne brisée $X_0, X_0 + \omega_+, X_0 + \omega_+ \omega'_+, X_0 + \omega_+ \omega'_+ \omega_{-1}, X_0 + \omega_+ \omega'_+ \omega_- \omega'_-$ ne se referme pas; les périodes ω et ω' ne sont plus commutables.

Points critiques de la fonction inverse. — Les théorèmes relatifs à la continuité des intégrales permettent de situer les points critiques de la fonction $X(Y)$ qui opèrent les permutations $X_0, X_0 + \omega_+$, etc.

Reportons-nous, en effet, aux notations du paragraphe 7 (p. 298 et suiv.) et, donnant à X_0 une valeur quelconque, appelons a, b, c les points critiques de l'intégrale elliptique $\int \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - 12Y + D}}$, inverse de la fonction $p_{0,b}$. Pour les petites valeurs de μ , la fonction $X(Y)$ [intégrale de (26) définie par les conditions initiales η, X_0, D], suivie sur l'ensemble des rayons issus de $Y = \eta$, présente trois points critiques, et trois seulement, respectivement voisin de a, b, c . Nous les désigne-

rons par les lettres $a_{x_0, D}$, $b_{x_0, D}$, $c_{x_0, D}$. Si l'on trace, dans le plan Y, trois coupures joignant ces trois points à l'infini (les coupures seront, par exemple, les prolongements des rayons $Oa_{x_0, D}$, ..., $Oc_{x_0, D}$), la branche de fonction $X(Y)$ considérée sera uniforme dans le plan ainsi coupé.

Faisons maintenant varier μ de 0 à 1 par valeurs réelles. Les points $a_{x_0, D}$, $c_{x_0, D}$, et les coupures correspondantes, se déplacent avec continuité; ces points ne cessent pas d'être des points critiques simples (tant que les positions correspondantes de X sont distinctes de l'origine), et $X(Y)$ est toujours uniforme dans le plan Y armé de trois coupures; d'ailleurs il résulte des calculs du paragraphe 7 (p. 300-301) que les trois points critiques restent d'autant plus voisins de a, b, c que $|X_0|$ est plus grand.

Ainsi, à tout système de valeurs initiales X_0 (de module supérieur à ε^{-1}), η , D, il correspond trois points critiques simples, et trois seulement, de la branche $X(Y)$ respectivement voisins de a, b, c : nous dirons que ces points appartiennent respectivement aux séries a, b, c .

Ils ne peuvent se confondre que lorsque $D \mp 8$ devient inférieur à $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire lorsque l'intégrale devient très voisine d'une intégrale tronquée (à ce sujet, voir *infra*, troisième Partie).

Cela posé, il résulte de la définition des lacets Λ, Λ' (p. 298) que les points $X_0, X_0 + \omega_+$ sont échangés par une permutation de la série a suivie d'une permutation de la série b ; les points $X_0, X_0 + \omega'_+$ sont échangés par une permutation de la série b suivie par une permutation de la série c , et ainsi de suite ⁽¹⁾.

Le mécanisme des permutations qui correspondent aux périodes ω, ω' est, on le voit, exactement celui de la fonction $\arg p(Y)$; il est le même pour les équations (B') où $\mu = 1$ et (26) où $\mu \neq 1$, à une circonstance près que nous allons signaler.

Les fonctions inverses des intégrales de (B') jouissent, comme les fonctions $\arg p(Y)$, de la propriété suivante: Si, partant de $Y = \eta$, $X = X_0$, on opère successivement six permutations autour des points critiques appartenant respectivement aux séries a, b, c, a, b, c , le point X_0 se permute avec lui-même. Cette propriété exprime que les périodes ω

(1) Cf. P. BOUTROUX, *Leçons*, etc., p. 79 et suiv., p. 97 et suiv., et *supra*, Introduction, p. 272.

et ω' sont commutables et que le point $Y = \infty$ est, pour la fonction $X(Y)$, un point critique algébrique permutant deux déterminations. Elle ne subsiste pas lorsque, dans l'équation (26), μ est différent de 0 et 1.

A la commutabilité des périodes près, les fonctions $X(Y)$ définies par les équations (26) et (B') ont la même structure exactement.

10. Lignes périodiques. Lignes d'infinis.

Donnons-nous un point X_0 , de grand module supérieur à ε^{-1} (voir § 7) et une valeur D_0 : nous pouvons déterminer (voir § 7 et § 9) un ensemble de points $X_{10}, X_{20}, \dots, X_{-1,0}, \dots$ où l'intégrale de (B') ou de (26) définie par les conditions initiales $X_0, Y = \eta, Y'^2 - 4Y^3 + 12Y = D_0$, reprend la même valeur η . Menons par l'origine la parallèle Δ au segment $X_{10} - X_0$, et prolongeons cette droite indéfiniment dans les deux sens : les différences $X_{20} - X_{10}, X_0 - X_{-1,0}$ se rapprocheront d'autant plus de segments parallèles à Δ que ε sera plus petit.

Les points $\dots X_{-1,0}, X_0, X_1, \dots$ peuvent être considérés comme les sommets d'une ligne dont les côtés sont les chemins parcourus par X , lorsque Y décrit, à partir de η , dans un sens ou dans l'autre, *un*, puis *deux*, \dots , puis n lacets Λ (voir p. 317) entourant, chacun, deux points critiques de $X(Y)$. Nous appellerons cette ligne *ligne périodique*.

Il est clair que, si la distance du point initial X_0 à la droite Δ est suffisamment grande, les points $X_{-n,0}, \dots, X_0, \dots, X_{n,0}$ ont tous des modules supérieurs à tel nombre ε^{-1} que l'on voudra : les calculs du paragraphe 7 permettent dès lors de définir ces points pour des valeurs *arbitrairement grandes*, positives ou négatives, de l'indice n , et *la ligne périodique est indéfiniment prolongeable dans les deux sens*.

Considérons, en effet, l'équation (26) où nous ferons varier μ de 0 à 1. Pour μ arbitrairement petit, l'intégrale de (26) que définissent les conditions initiales X'_0, η, D'_0 ($|X'_0| > \varepsilon^{-1}$) présente des lignes périodiques qui, à distance finie, se rapprochent arbitrairement de parallèles à une même droite et qui sont indéfiniment prolongeables dans les deux sens ; appelons ξ'_0 l'une d'elles ; la même intégrale $Y(X)$ possède une infinité de lignes périodiques tout entières situées au delà de ξ'_0 , aux sommets desquelles Y prend la même valeur η ; pour passer d'une de

ces lignes à la suivante, il faut faire décrire à Y un lacet Λ' (voir p. 298). Il résulte alors de l'inégalité (18 bis), appliquée sur Λ' , que, quel que soit μ entre 0 et 1, il y a toujours, au delà de la ligne fixe appelée \mathcal{L}'_0 , une infinité de lignes périodiques de $Y(X)$ dont tous les points sont arbitrairement éloignés.

Nous allons nous proposer d'étudier l'allure de l'intégrale $Y(X)$ le long d'une ligne périodique indéfiniment prolongée. Nous savons déjà, en vertu des calculs du paragraphe 7, comment se comporte $Y(X)$ autour d'un sommet quelconque de la ligne, où la valeur de $D = Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ nous est connue. Tout revient à voir comment varie l'expression $D = Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ lorsqu'on ajoute à X_0 un nombre arbitrairement grand de périodes ω_+ ou ω_- (cf. *supra*, p. 309).

Effet de l'addition d'une période sur le paramètre D. — Partant du point X_0 avec $Y = \eta$, $D = D_0$, faisons décrire à Y le lacet Λ . Nous avons [voir l'équation (34), p. 315], au retour en X_0 :

$$D = D_1 = Y'^2 - 4Y^3 + 12Y = D_0 - 2 \int_{\Lambda} \frac{Y'}{X} dY + \frac{8}{25} \int_{\Lambda} \frac{Y dY}{X^2} dX.$$

Pour avoir une valeur approchée du second membre, posons

$$\int Y' dY = U(X),$$

il vient

$$D_1 = D_0 - 2 \left(\frac{U(X)}{X} \right)_{X_0} + \frac{2}{25} \int_{\Lambda} \frac{4Y - 25U}{X^2} dY.$$

Appelons alors ϖ_0 celle des périodes de l'intégrale elliptique

$$\int \sqrt{4Y^3 - 12Y + D_0} dY$$

qui correspond au lacet Λ . Nous constatons que nous aurons

$$(35) \quad D_1 - D_0 = -2 \frac{\varpi_0}{X_0} + \text{terme de l'ordre de grandeur de } |X_0^{-2}|.$$

Ainsi, l'accroissement que subit D (à partir de $D = D_0$) lorsque Y décrit le lacet Λ a pour valeur principale $-\frac{2\varpi_0}{X_0}$ (si toutefois cette expression est d'un ordre de grandeur supérieur à $|X_0|^{-2}$).

Limitation du module $|D|$ sur une ligne périodique où $|X|$ est croissant.

— Considérons la demi-ligne périodique $X_0, X_{1,0}, \dots$ et appelons D_0, D_1, \dots les valeurs du paramètre $D = Y^2 - 4Y^3 + 12Y$ aux sommets de cette ligne. A partir d'une certaine valeur de l'indice j , les modules $|X_{j,0}|, |X_{j+1,0}| \dots$ vont sûrement en croissant. Nous avons dès lors toujours le droit de choisir X_0 de manière qu'il en soit ainsi à partir de $j = 1$. D'ailleurs les calculs du paragraphe 7 étant applicables au voisinage de chacun des segments $X_{j,0}, X_{j+1,0}$, il est clair (*cf.* p. 297) que nous pouvons toujours tracer les lacets Λ de manière que le module de X soit croissant, à partir de $|X_0|$, sur la demi-ligne périodique \mathcal{L} considérée. D'autre part, la distance à $Y = 0$ d'un quelconque des points du contour Λ correspondant à l'intervalle $X_{j,0}, X_{j+1,0}$ sera bornée et de l'ordre des grandeurs des points critiques (racines du trinôme $4Y^3 - 12Y + D_j$) intérieurs à ce contour.

Je vais montrer que, dans ces conditions, $|D_j|$ reste nécessairement borné (*cf.* p. 310).

Remarquons, en effet, que si $|D_j|$ est très grand, la différence $X_{j+1,0} - X_{j,0}$ a pour valeur principale l'intégrale $\int_{\Lambda} \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - 12Y + D_j}}$ et est, par conséquent, de l'ordre de grandeur de $|D_j|^{-\frac{1}{6}}$. D'ailleurs, le long du contour Λ correspondant (tracé, comme il a été dit ci-dessus), le module $|Y|$ est au plus de l'ordre de grandeur de $|D_j|^{\frac{1}{3}}$ et $|Y'|$ de l'ordre de grandeur de $|D_j|^{\frac{1}{2}}$. En d'autres termes, soit H un nombre positif très grand : on peut trouver un nombre l (qui reste borné lorsque H augmente indéfiniment) tel que, si $|D_j| < H$, le module $|Y|$ reste inférieur à $lH^{\frac{1}{3}}$ et $|Y'|$ inférieur à $lH^{\frac{1}{2}}$ le long du lacet Λ correspondant à l'intervalle $X_{j,0}, X_{j+1,0}$.

Ces remarques conduiront immédiatement à la proposition énoncée lorsqu'on aura mis l'équation (B') sous la nouvelle forme que nous allons indiquer.

Nous savons que l'équation (B') est équivalente à l'équation

$$(B) \quad y'' = 6y^2 - 6x,$$

qu'on en déduit en faisant $y = \sqrt{x} Y, X = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}}$. Or l'équation (B)

donne par intégration

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^3 - 12xy + 12 \int y dx;$$

d'où l'on déduit l'équation équivalente à (B') et (34) :

$$(36) \quad Y'^2 = 4Y^3 - 12Y - \frac{4}{5} \frac{YY'}{X} - \frac{16}{25} \frac{Y^2}{X^2} + 12 \left(\frac{5X}{4}\right)^{-\frac{6}{5}} \int^X \left(\frac{5X}{4}\right)^{\frac{1}{5}} Y dX.$$

Considérons, en particulier, cette égalité sur la demi-ligne périodique \mathcal{L} définie ci-dessus. La valeur initiale \mathfrak{O}_0 (pour $X = X_0$) de l'intégrale définie qui figure dans le second membre de (36) sera donnée par l'égalité

$$D_0 = -\frac{4}{5} \frac{\eta Y'_0}{X_0} - \frac{16}{25} \frac{\eta^2}{X_0^2} + 12 \left(\frac{5X_0}{4}\right)^{-\frac{6}{5}} \mathfrak{O}_0,$$

où $Y'_0 = \sqrt{4\eta^3 - 12\eta + D_0}$.

Appelons, d'autre part, H la limite supérieure de $|Y'^2 - 4Y^3 + 12Y|$ entre les points X_0 et X sur la ligne considérée. Étant donnée la limite supérieure $(lH^{\frac{1}{3}})$ de $|Y|$, nous voyons que le module de l'intégrale définie $\int_{X_0}^X X^{\frac{1}{3}} Y dX$ sera moindre que $\frac{5}{6} lH^{\frac{1}{3}} |X^{\frac{6}{5}} - X_0^{\frac{6}{5}}|$. Le module $|Y'|$ étant lui-même moindre que $lH^{\frac{1}{2}}$, l'inégalité (36) montre que $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ sera d'un ordre de grandeur inférieur à $l_1 H^{\frac{1}{3}}$, où l_1 reste borné (pour $|X|$ arbitrairement grand) et indépendant de H et de $|X|$. L'hypothèse d'après laquelle la limite supérieure H de $|Y'^2 - 4Y^3 + 12Y|$ augmenterait indéfiniment avec $|X|$ est donc inadmissible. Cette limite, qui est la limite supérieure de D_1, D_2, \dots , est nécessairement bornée.

Remarque I. — Ainsi que nous l'avons déjà dit plus haut (p. 310), la proposition qui précède peut être étendue à l'équation générale asymptote à $Y'' = 6Y^2 - 6$, c'est-à-dire à l'équation

$$(15) \quad Y'' = 6Y^2 - 6 + q_1 Y' + p_1 Y + p_0,$$

où q_1, p_1, p_0 sont des fonctions rationnelles de degré négatif en X .

Supposons q_1 de degré -1 (le cas où q_1 aurait un degré inférieur à -1 a déjà été traité p. 309-310), développons q_1 par rapport aux puissances de X^{-1} , et désignons par \bar{q}_1 le premier coefficient

$$q_1 = \bar{q}_1 X^{-1} + \dots$$

Le double changement de variables

$$X = \frac{1}{\rho} x^l, \quad Y = x^m y, \quad \text{où} \quad l = \frac{5}{5+\rho}, \quad m = 2 - 2l,$$

met l'équation (15) sous la forme

$$y'' = 6y^2 - 6x^{-2m} + Qy'x^{-1-l} + P_1yx^{l-2} + P_0 + x^{-m+l-2},$$

Q , P_1 et P_0 étant des fonctions rationnelles de degré *zéro* en x .

Intégrant cette équation à partir de conditions initiales données, nous avons

$$y'^2 = 4y^3 - 12x^{-2m}y + P_1y^2x^{l-2} + 2P_0yx^{-m+l-2} \\ - 24m \int^x x^{-2m-1}y dx + \int^x (Qx^{-1-l}y'^2 + R_1x^{l-3}y^2 + R_0x^{-m+l-3}y) dx,$$

les fonctions rationnelles R_0 et R_1 étant de degré *zéro* en x . Revenant maintenant aux variables X , Y , nous obtenons

$$(37) \quad Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + a \frac{YY'}{X} + b \frac{Y^2}{X^2} + c \frac{Y}{X} + eX^{\frac{6}{l}-6} \int^x X^{-\frac{6}{l}+5} Y dX \\ + X^{\frac{6}{\rho}-6} \int^x X^{-4-\frac{6}{\rho}} (QY'^2 + R_1Y^2 + R_0Y) dX,$$

a , b , c , e étant des constantes, et Q , R_0 , R_1 des fonctions rationnelles de degré *zéro* en X .

On pourra faire sur l'équation (37) le raisonnement fait plus haut sur l'équation (36).

Remarque II. — Remarquons, d'autre part, que le résultat obtenu plus haut est valable, non seulement sur une ligne périodique, mais SUR TOUT CHEMIN DU PLAN X (issu de X_0) où X a un module croissant. Considérons alors une intégrale quelconque $Y(X)$ de l'équation (B') et

envisageons l'ensemble des points ⁽¹⁾ X_j où $Y = \eta$ et les valeurs correspondantes D_j du paramètre $D = Y^2 - 4Y^3 + 12Y$: on peut trouver un nombre positif a tel que, pour tous les points X_j , on ait

$$|D_j| < a |D_1| \quad (\text{on suppose } X_1 \neq 0, D_1 \neq 0).$$

Mais la réciproque n'est pas vraie : il peut arriver que D_1 soit arbitrairement grand, alors que, pour certains points X_j arbitrairement éloignés, $|D_j|$ reste inférieur à une limite donnée.

Limite du paramètre D_j sur une ligne périodique. — Revenons à la ligne périodique qui passe par la suite des points $-X_0, \dots, X_{j_0}, \dots$, où $Y = \eta$ et $D = D_0, \dots, D_j$. Il résulte de ce qui précède que, lorsque l'indice j augmente indéfiniment, D_j tend vers une limite ou est indéterminé mais borné. Je dis que cette dernière circonstance ne peut pas se présenter.

En effet, appelons δ_j la différence $D_{j+1} - D_j$ dont la valeur approchée est (*vide supra*, p. 320) $\frac{-2\varpi_j}{X_j}$, (ϖ_j est une période de l'intégrale elliptique $\int \sqrt{4Y^2 - 12Y + D_j} dY$), et supposons d'abord que les nombres $|\varpi|, |\varpi_2|, \dots, |\varpi_j|, \dots$ soient bornés inférieurement et supérieurs à un nombre α indépendant de j .

Les modules $|X_1|, |X_2|, \dots$ étant par hypothèse croissants (*vide p.* 320) et tous supérieurs à ε^{-1} , et les $|D_j|$ étant bornés, la différence $\frac{\varpi_{j+1}}{X_{j+1}} - \frac{\varpi_j}{X_j}$ sera, *quels que soient j et ϖ_j* , de l'ordre de grandeur de $\frac{\varpi_j}{X_j^2}$. Soit, d'autre part, le module $|\varpi_j|$ supérieur à $|X_j^{-1}| \log |X_j|$; la différence $\delta_j - (-2\varpi_j X_j^{-1})$ sera d'un ordre de grandeur inférieur ou égal à $|X_j^{-2}| \log |X_j|$; d'ailleurs la différence $\frac{\varpi_{j+1}}{X_{j+1}} \times \frac{X_j}{\varpi_j} - 1$ sera de l'ordre de grandeur de ε (ou $|X_j^{-1}|$); en conséquence, les segments δ_j, δ_{j+1} d'indices consécutifs feront entre eux un angle de l'ordre de grandeur de ε . Il en résulte qu'on pourra trouver un nombre n tel que la suite $|D_n|, |D_{n+1}|, \dots, |D_j|, \dots$ soit une suite toujours croissante. La différence des modules $|D_{j+1}| - |D_j|$ sera de l'ordre de grandeur de δ_j ; par con-

(1) Pour avoir l'ensemble total des points X_j , il faudra tourner autour de l'origine, puisque X_0 est point critique algébrique d'ordre 4 pour l'intégrale $Y(X)$ de (B') .

séquent, dans l'hypothèse où tous les $|\varpi_j|$ sont supérieurs à α , elle sera de l'ordre de grandeur de $\frac{\alpha}{|X_j|}$. Or, cette conclusion est inacceptable : elle donne, en effet, pour le module $|D_j|$ d'indice arbitrairement grand, une valeur de l'ordre de grandeur de $\log |D_j|$; or, nous avons vu plus haut que la suite des $|D_j|$ est bornée supérieurement.

Ainsi, il n'est pas possible que la suite des nombres $|\varpi|, \dots, |\varpi_j|, \dots$ soit bornée inférieurement. Je vais montrer plus précisément que cette suite admet une limite égale à zéro et qu'en conséquence la suite des D_j admet une limite, qui est l'une des valeurs pour lesquelles l'intégrale

$\int \sqrt{4Y^3 - 12Y + D_j}$ a une période nulle.

Supposons, en effet, qu'il en soit autrement. Alors, il existera nécessairement des indices n arbitrairement grands pour lesquels $|\varpi_n|$ surpassera un nombre positif α , les suites $|D_{n-1}|, |D_n|, |D_{n+1}|, \dots$ et $|\varpi_{n-1}|, |\varpi_n|, |\varpi_{n+1}|, \dots$ étant croissantes.

Considérons ces suites pour $j > n$. D'après ce qui précède, tant que l'on a $|\varpi_j| > |X_j|^{-1} \log |X_j|$, *a fortiori* tant que $|\varpi_j| > \frac{\alpha}{2}$, la suite $|D_n|, |D_{n+1}|, \dots, |D_j|$ est toujours croissante. Il est facile de voir qu'il en est de même de la suite $|\varpi_n|, \dots, |\varpi_j|$. En effet, étant donnée la définition de ϖ_j , on voit que, tant que $|\varpi_j| > \frac{\alpha}{2}$, la valeur principale de $\varpi_{j+1} - \varpi_j$ (pour X_j arbitrairement grand) est

$$(D_{j+1} - D_j) \int \frac{dY}{2\sqrt{4Y^3 - 12Y + D_j}}$$

ou

$$\varpi_{j+1} - \varpi_j = \frac{-\varpi_j}{X_j} (X_{j+1} - X_j) + \dots$$

Le raisonnement de la page 323 prouve alors (1) que les différences $|\varpi_{j+1}| - |\varpi_j|$ et $|\varpi_j| - |\varpi_{j-1}|$ ont le même signe. Ainsi les hypothèses faites sur l'indice n entraîneront cette conséquence que les deux suites $|D_n|, |D_{n+1}|, \dots, |\varpi_n|, |\varpi_{n+1}|, \dots$, indéfiniment prolongées, ne

(1) Remarquons que de l'égalité asymptotique $\frac{\varpi_{j+1} - \varpi_j}{\varpi_j} = \frac{X_j - X_{j+1}}{X_j}$, il résulte immédiatement que sur la ligne périodique où la suite des $|X_j|$ est croissante, la suite des $|\varpi_j|$ est décroissante.

cesseront pas de croître. Conclusion inacceptable, parce que la suite des $|\varpi_j|$ ne peut pas être bornée inférieurement.

La proposition énoncée ci-dessus est donc démontrée : LE PARAMÈTRE D_j TEND VERS L'UNE DES VALEURS POUR LESQUELLES L'INTÉGRALE

$$\int \sqrt{4Y^3 - 12Y + D_j} dY$$

A UNE PÉRIODE NULLE.

C'est là un trait capital de l'anatomie des fonctions définies par l'équation (B'). Ces fonctions, prises individuellement, ne sont pas asymptotes à des fonctions elliptiques déterminées (1). Si l'on suit, en effet, une fonction $Y(X)$ sur un rayon arbitraire, la quantité $D = Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ devient en général indéterminée. Si, par contre, on s'éloigne le long d'une ligne périodique, D admet une limite qui est nécessairement ± 8 ou la valeur *imaginaire* D , pour laquelle l'intégrale $\int \sqrt{4Y^3 - 12Y + D_1} dY$ a une période nulle (voir *infra*, p. 334); la fonction $Y(X)$ est alors asymptote à l'une des fonctions

$$1 - \frac{3}{\sin^2 i \sqrt{3}(X - \bar{X})}, \quad -1 + \frac{3}{\sin^2 \sqrt{3}(X - \bar{X})}, \quad \int \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - 12Y + D_1}}.$$

Nous verrons plus loin comment on peut définir les lignes périodiques de manière que sur ces lignes D tende toujours vers ± 8 ; les $Y(X)$ seront alors toujours (sur ces lignes) asymptotes à des fonctions circulaires. Ce résultat sera retrouvé par une autre voie dans la sixième Partie de notre travail.

Remarquons enfin que les démonstrations qui précèdent et les conclusions obtenues s'étendent immédiatement à l'équation (15) asymptote à $Y'' = 6Y^2 - 6$.

Ligne d'infinis. — Nous avons supposé, dans l'étude qui précède, que la valeur η prise par $Y(X)$ aux sommets de la ligne périodique était une valeur finie. Lorsque η tend vers l'infini, la ligne périodique tend vers une position limite que nous appellerons *ligne d'infinis*.

Désignons par $\bar{X}_{-n,0}, \dots, \bar{X}_0, \dots, \bar{X}_{n,0}, \dots$ les sommes de cette ligne.

(1) Cf. Introduction, p. 273.

En chacun d'eux, l'intégrale est représentée par un développement (23) [développement (30) dans le cas de l'équation (B') pour laquelle $\mu = 1$]. Entre deux sommets consécutifs \bar{X}_n , \bar{X}_{n+1} , la ligne d'infinis est le chemin décrit par X lorsque Y décrit un lacet dont l'origine est rejetée à l'infini.

Il résulte de ce qui précède que, si l'infini \bar{X}_0 est suffisamment éloigné de la droite Δ (parallèle menée par l'origine au segment $\bar{X}_{1,0} - \bar{X}_0$, voir p. 318), les infinis $\bar{X}_{-n,0}, \dots, \bar{X}_{n,0}, \dots$ ont tous des modules supérieurs à ε^{-1} . La ligne d'infinis qui passe par \bar{X}_0 est alors infiniment prolongeable dans les deux sens.

D'ailleurs nous avons vu que, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur une ligne périodique, l'expression $D = Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ tend vers l'une des limites $+8, -8, D_1$. Il en résulte (voir p. 315) que, sur la ligne d'infinis, le paramètre C correspondant aux infinis $\bar{X}_{n,0}, \bar{X}_{n+1,0}, \dots$ ou $\bar{X}_{-n,0}, \bar{X}_{-(n+1),0}, \dots$ tend vers une limite égale à $-2, +2$, ou $-\frac{D_1}{4}$.

Dans le cas de l'équation (B'), la ligne d'infinis est une *ligne de pôles* (cf. première Partie, p. 283).

Effet de l'addition d'une période sur le paramètre C. — Proposons-nous d'évaluer la différence $C_{n+1} - C_n$ du paramètre d'une même intégrale de (B') en deux pôles consécutifs $\bar{X}_{n,0}, \bar{X}_{n+1,0}$ d'une ligne de pôles.

Des formules de la page 315, nous déduisons

$$4(C_{n+1} - C_n) = 2 \int_{\bar{X}_n}^{\bar{X}_{n+1}} \frac{Y'^2}{X} dX - \frac{8}{25} \int_{\bar{X}_n}^{\bar{X}_{n+1}} \frac{Y Y'}{X^2} dX,$$

les intégrales étant prises le long de la ligne de pôles, ou encore

$$2(C_{n+1} - C_n) = \int_{\Lambda_1} \left(\frac{Y'}{X} - \frac{4}{25} \frac{Y}{X^2} \right) dY,$$

le chemin d'intégration, Λ_1 , étant ainsi composé : 1° rayon R allant de l'infini à un point arbitraire $Y = \eta$; 2° lacet fermé Λ issu de η et entourant deux points critiques de $X(Y)$; 3° même rayon R qu'à l'aller parcouru en sens inverse.

Appelons X'_n, D_n les valeurs de X et de $D = Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$ au

premier passage en η . L'intégrale prise le long de Λ a (nous l'avons vu plus haut) pour valeur principale la quantité $\frac{\varpi_n}{\bar{X}_n}$, où ϖ_n est une période de l'intégrale elliptique $\int \sqrt{4Y^3 - 12Y + D_n} dY$. Il en est ainsi du moins (voir p. 323) lorsque $|\varpi_n|$ est d'un ordre de grandeur égal ou supérieur à $|X_n^{-1}| \log |X_n|$. Or, appelons ϖ'_n la période de l'intégrale $\int \sqrt{4Y^3 - 12Y + 4C_n} dY$ qui (d'après la relation liant C_n à D_n) tend vers ϖ_n lorsque $|\bar{X}_n|$ augmente indéfiniment. Si nous avons

$$|\varpi'_n| > |\bar{X}_n^{-1}| \log |\bar{X}_n|,$$

le nombre ϖ_n satisfera à la condition requise ci-dessus et aura pour valeur principale ϖ'_n .

Considérons, d'autre part, les valeurs prises par Y' à l'aller et au retour en un même point $Y = \eta_1$ du rayon R . Appelons Y'_1, Y'_2 ces valeurs, nous aurons

$$Y_2'^2 - Y_1'^2 = 2 \int \left(\frac{Y'}{X} - \frac{4}{25} \frac{Y}{X^2} \right) dY,$$

l'intégrale étant prise de η_1 en η , puis le long de Λ , et enfin de η en η_1 ; l'accroissement que subit Y' lorsque Y décrit Λ étant de l'ordre de grandeur de $\left| \frac{\varpi'_n}{\bar{X}_n} \right|$, la différence $Y'_2 - Y'_1$ sera de l'ordre de grandeur de $|\varpi'_n \bar{X}_n^{-2}|$.

Ainsi, nous constatons finalement que si $|\varpi'_n|$ est supérieur à $|\bar{X}_n^{-1}| \log |\bar{X}_n|$, la différence $C_{n+1} - C_n$ aura pour valeur principale $\frac{\varpi'_n}{2\bar{X}_n}$.

Déplacement de la ligne d'infinis lorsque $|\bar{X}_0|$ varie. — Nous sommes partis, pour définir notre ligne d'infinis, d'un *infini* initial \bar{X}_0 , situé au-dessus de la droite Δ (voir p. 326) à une distance supérieure à ε^{-1} . Supposons que nous déplaçons cet *infini*, tout en laissant fixe la valeur C_0 du paramètre qui définit en \bar{X}_0 l'intégrale $Y(X)$ considérée, et demandons-nous comment va se déplacer la ligne d'infinis qui passe par \bar{X}_0 .

En premier lieu, si \bar{X}_0 s'éloigne de la droite Δ , tous les sommets de

la ligne d'*infinis* s'en éloignent de plus en plus *et tendent simultanément vers l'infini*.

Si, au contraire, \bar{X}_0 se rapproche de Δ , il se pourra qu'à partir d'une certaine valeur de $|\bar{X}_0|$ la détermination des *infinis* $\bar{X}_{1,0}$, $\bar{X}_{1,0}$ ne puisse plus être faite au moyen des calculs du paragraphe 7. Par contre, les *infinis* $\bar{X}_{n,0}$, $\bar{X}_{-n,0}$ de grands indices auront toujours un module supérieur à ε^{-1} , et nous pourrons toujours en déduire la suite des *infinis* $\bar{X}_{n+1,0}$, $\bar{X}_{n+2,0}$, ... et $\bar{X}_{-(n+1),0}$, $\bar{X}_{-(n+2),0}$, En d'autres termes (*comparer* première Partie, p. 284-285), *notre ligne d'infinis initiale se décompose en deux demi-lignes d'infinis qui s'éloignent indéfiniment dans deux directions opposées*. Entre ces deux demi-lignes d'infinis, il y a une lacune que les calculs effectués plus haut ne nous permettent pas de combler.

Les deux demi-lignes d'infinis subsistent évidemment lorsque les pôles $\bar{X}_{n,0}$, $\bar{X}_{-n,0}$ franchissent la droite Δ et s'éloignent indéfiniment au-dessous, tout en conservant un module supérieur à ε^{-1} .

Remarque. — Si, en effectuant la transformation (27), on passe de l'équation (26) ou (B') à l'équation (28) ou (B), il est clair qu'à toute *ligne périodique* et à toute *ligne d'infinis* d'une intégrale $Y(X)$ correspondra une *ligne périodique* et une *ligne d'infinis* de l'intégrale $\gamma(x)$ correspondant à $Y(X)$. La disposition et les propriétés de ces lignes nous seront connues si nous avons étudié les lignes correspondantes dans le plan X .

11. Intégrales réelles. Allure des lignes périodiques.

Il est des intégrales réelles qui ont une ligne périodique particulièrement simple. Ce sont les intégrales réelles dont une ligne périodique, ou, plus exactement, une demi-ligne périodique coïncide avec l'axe réel.

L'équation (26) (p. 312) admet deux sortes d'intégrales réelles. Les unes restent finies pour toutes valeurs réelles de X , les autres deviennent infinies sur l'axe réel.

Intégrales finies. — Considérons d'abord les premières. Pour $\mu = 0$,

ce sont des fonctions elliptiques, solutions de l'équation

$$Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D,$$

où D a une valeur réelle comprise entre -8 et $+8$. Envisageons, en particulier, ces intégrales à droite d'un point réel positif X_0 où Y prend la valeur zéro, et appelons D_0 la valeur de Y'^2 en ce point initial X_0 . L'équation (26), où μ varie à partir de zéro, possède une intégrale, et une seule, qui satisfait à ces conditions initiales; cette intégrale est réelle sur l'axe réel positif; elle se déforme d'une manière continue quand μ varie; elle reste donc finie et oscille en présentant une succession de maxima et de minima dont les valeurs sont nécessairement comprises entre les branches positive et négative de la courbe

$$6Y^2 - 6 + \frac{4\mu(2-\mu)}{(\mu+4)^2} \frac{Y}{X^2} = 0.$$

(En effet, si la valeur de Y au zéro de Y' passait, par exemple, au-dessus de la branche positive de cette courbe, on aurait $Y'' > 0$ avec $Y' = 0$, ce qui ne donnerait plus un maximum.)

Lorsque μ va croissant, l'intégrale réelle définie par les conditions initiales $X_0, 0, D_0$ ne pourrait cesser pour une certaine valeur μ , d'être finie et oscillante que si, pour cette valeur, elle présentait un pôle réel positif infiniment éloigné. Mais il résulte, en tout cas, des calculs du paragraphe 7 que si X_0 est suffisamment grand et si $D_0 - 8$ est d'un ordre de grandeur supérieur à $\left| X_0^{-\frac{1}{2}} \right|$ (voir § 7, p. 297 et 303), l'intégrale réelle présente à droite de X_0 , quel que soit μ entre 0 et 1, une succession de maxima et de minima correspondant à l'addition répétée de l'une des périodes ⁽¹⁾, soit de la période ω_+ (voir p. 299). Il s'agit de voir si les oscillations de l'intégrale sont en nombre illimité et de déterminer la limite ⁽²⁾ du paramètre D (c'est-à-dire de l'expression $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$) pour X croissant indéfiniment sur l'axe réel.

Appelons X_1, X_2, \dots les points successifs, situés à droite de X_0 où l'intégrale $Y(X)$ reprend la valeur 0, et D_1, D_2, \dots les valeurs de D en

⁽¹⁾ La période ω_+ ne pourrait devenir infinie que si D_0 s'approchait de la valeur 8.

⁽²⁾ Nous avons établi au paragraphe 10 l'existence de cette limite, et nous avons déterminé les nombres auxquels elle peut être égale. Il s'agit de retrouver ce résultat et de le compléter dans le cas où l'intégrale est réelle.

ces points. On a, nous le savons (*voir* p. 124), en vertu de (34)

$$D_1 - D_0 = -2 \int_{X_0}^{X_1} \frac{Y'^2}{X} dX + \frac{8}{25} \int_{X_0}^{X_1} \frac{YY'}{X^2} dX.$$

Si $D_0 \mp 8$ est supérieur à $X_0^{-\frac{4}{7}}$, la première intégrale est, pour les grandes valeurs de X_0 , le terme principal du second membre, et elle est essentiellement positive. Ainsi l'on aura, si X_0 est assez grand, $D_1 < D_0$, et la différence $D_0 - D_1$ sera d'un ordre de grandeur supérieur ou égal à $X_0^{-\frac{4}{7}}$. On aura de même $D_2 < D_1$, et ainsi de suite. D'une manière générale, si $D_n \mp 8$ est supérieur à $X_n^{-\frac{4}{7}}$, on aura $D_{n+1} < D_n$.

Je conclus de là, en premier lieu, que les oscillations de la fonction $Y(X)$ sur l'axe réel sont en nombre illimité. En effet, les nombres D_1, \dots, D_n, \dots ne peuvent s'approcher de la valeur 8; donc les calculs du paragraphe 7, toujours applicables, donnent pour chaque période ω_+ une valeur bornée.

D'ailleurs, l'intégrale $Y(X)$ étant toujours oscillante, D_n ne peut descendre au-dessous de -8 . Donc la suite illimitée D_1, \dots, D_n tend nécessairement vers la valeur -8 .

Ainsi, pour la fonction $Y(X)$ considérée, l'axe réel positif est une demi-ligne périodique; sur cette demi-ligne, le paramètre D tend vers -8 ; la période ω_+ tend vers $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; la fonction $Y(X)$ est asymptote à une fonction $-1 + \frac{3}{\sin^2 \sqrt{3}(X - \bar{X}'_{n0})}$ dont un pôle \bar{X}'_{n0} se rapproche arbitrairement du pôle \bar{X}_{n0} de $Y(X)$ d'indice n arbitrairement grand.

Intégrales réelles de (B') présentant des pôles. — Considérons maintenant les intégrales réelles $Y(X)$ qui présentent des infinis sur l'axe réel. Nous observons que ces intégrales ne peuvent être réelles tout le long de l'axe réel positif que si l'on a, dans (26),

$$\mu = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = 1.$$

Pour $\mu = 0$, les intégrales sont des fonctions elliptiques, solutions de l'équation $Y'^2 = 4Y^3 - 12Y + D$, où D a une valeur réelle *quelconque*. Voyons ce que deviennent ces fonctions pour $\mu = 1$, c'est-à-dire pour l'équation (B').

Considérons en particulier l'intégrale $Y(X)$ à droite d'un de ses pôles réels positifs, \bar{X}_0 , et appelons C_0 la valeur du paramètre C qui la définit en ce point. Appliquant encore les inégalités du paragraphe 7, nous constatons (*voir la Remarque de la page 316*) que, si \bar{X}_0 est assez grand, et si C_{0+2} est supérieur à $\bar{X}_0^{-\frac{1}{7}}$, l'intégrale présente, à droite de \bar{X}_0 , une suite de pôles $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$, obtenus par addition répétée de la période ω_+ . Appelons C_1, C_2, \dots les valeurs que prend le paramètre C de l'intégrale en ces pôles successifs. D'après la page 327, si l'on a $|\varpi'_n| > |\bar{X}_n^{-1}| \log |\bar{X}_n|$, la valeur principale de $C_{n+1} - C_n$ est $\frac{\varpi'_n}{\bar{X}_n}$, ϖ'_n étant une période de l'intégrale elliptique $\int \sqrt{4Y^3 - 12Y - 4C_n} dY$.

Or, on vérifie sans peine que, si $C_n > 2$ ($C_n - 2$ étant d'un ordre de grandeur supérieur à $\bar{X}_n^{-\frac{1}{7}}$), on a $\varpi'_n < 0$, donc $C_{n+1} < C_n$; si $C_n < -2$, on a $\varpi'_n > 0$, donc $C_{n+1} > C_n$. Je dis qu'il en est encore ainsi lorsque C_n devient égal ou supérieur à -2 . En effet, pour $-2 < C_n < 2$, le trinôme $4Y^3 - 12Y - 4C_n$ a trois racines réelles; soit, par ordre de grandeur, Y_{1n}, Y_{2n}, Y_{3n} ($Y_{1n} < 0, Y_{3n} > 0$); la valeur principale de $\bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n$ est

$$\int_{Y_{1n}}^{Y_{2n}} \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - 12Y - 4C_n}},$$

et l'on a

$$\varpi'_n = \int_{Y_{1n}}^{Y_{2n}} \sqrt{4Y^3 - 12Y - 4C_n} dY;$$

on voit que, lorsque C_n tend vers 2, les points Y_{1n}, Y_{2n} tendent à se confondre; lorsque C_n tend vers -2 , ϖ'_n conserve une valeur finie et un signe constant.

Ainsi, dans l'hypothèse où $C_0 < -2$ ou $-2 < C_0 < 2$, on a (si X_0 est assez grand)

$$C_0 < C_1 < \dots < C_n, \quad \dots,$$

la différence $C_{n+1} - C_n$ étant de l'ordre de grandeur de $|\bar{X}_n^{-1}|$. D'ailleurs, C_n ne pourrait dépasser 2 (d'une quantité dont l'ordre de grandeur fût supérieur à $|\bar{X}_n^{-1}|$) sans que l'on eût $C_{n+1} < C_n, \dots$. Donc *la suite des C_n tend vers la limite 2*. La valeur correspondante de l'expression

$Y^2 - 4Y^3 + 12Y$ (prise en un point où Y a une valeur finie) *tend vers* -8 , comme il arrivait dans le cas des intégrales finies oscillantes.

Bien entendu, les C_n n'admettent effectivement la limite 2 que *s'ils forment une suite illimitée*. S'il n'y avait, à droite de \bar{X}_0 , qu'un nombre limité, n , de pôles, nous pourrions seulement affirmer que

$$C_0 < C_1 \dots < C_n.$$

Nous aurions alors affaire à l'une des *intégrales tronquées* qui seront étudiées aux paragraphes suivants. C_n serait (pour \bar{X}_n très grand) voisin de 2. À droite du dernier pôle \bar{X}_n , l'expression D tendrait vers 8 et Y vers 1.

Si $C_0 > 2$, on a

$$C_0 > C_1 > \dots > C_n > \dots;$$

la suite des C_n est nécessairement illimitée et tend encore vers 2.

Ainsi, nous pouvons énoncer, finalement, la proposition suivante :

Toutes les intégrales réelles sur l'axe réel positif (et non tronquées dans la direction de cet axe) sont asymptotes, sur cet axe, à une fonction circulaire $-1 + \frac{3}{\sin^3 \sqrt{3}(X - \bar{X}_{n0})}$ (vide p. 330); leur période tend vers la limite $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; les paramètres D_1, \dots, D_n, \dots ou C_1, \dots, C_n, \dots , correspondant à la suite des zéros ⁽¹⁾ ou des pôles présentés par l'intégrale sur l'axe réel positif, vont sans cesse se rapprochant de -8 ou $+2$ à partir d'une certaine valeur de n .

Ayant ainsi étudié les intégrales réelles, nous allons pouvoir préciser les résultats que nous avons déjà obtenus relativement à la disposition des lignes de pôles et des lignes périodiques des intégrales $Y(X)$ de (B').

Soit $Y(X)$ une intégrale de (B') qui est définie par les conditions initiales X_0, η, D . Pour X_0 réel positif, η et D réels, $Y(X)$ est l'une des intégrales réelles étudiées ci-dessus. Lorsque ensuite, X_0, η et D varient avec continuité d'une manière quelconque, l'intégrale pré-

⁽¹⁾ Ou, plus généralement, des zéros de $Y - \eta$ (η quelconque).

sente une demi-ligne périodique (aux sommets de laquelle $Y = \eta$) qui se déforme et se déplace d'une manière continue à partir de l'axe réel positif. Sur cette demi-ligne périodique, D tend vers une limite qui, devant être fonction continue de η et D , reste nécessairement égale à -8 en vertu des résultats du paragraphe 10; *la demi-ligne périodique est, dès lors, asymptotiquement parallèle à l'axe réel positif, puisque la période ω_+ correspondante tend vers $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, et $Y(X)$ est, le long de cette ligne, asymptote à la fonction $-1 + \frac{3}{\sin^2 \sqrt{3}(X - \bar{X})}$. L'intégrale présente une infinité de lignes périodiques et une infinité de lignes de pôles, asymptotiquement parallèles entre elles, qui jouissent des mêmes propriétés.*

Cela posé, étant donné que l'équation (B') n'est pas altérée par le changement de variables $X = iX_1$, $Y = -Y_1$, il est clair que nous pouvons appliquer à l'axe réel négatif et aux deux demi-axes imaginaires du plan X tous les résultats obtenus relativement à l'axe réel. Nous démontrerons ainsi, par exemple, que *toute intégrale $Y(X)$ présente une infinité de lignes périodiques et une infinité de lignes de pôles asymptotiquement parallèles à l'axe imaginaire positif; sur ces lignes, indéfiniment prolongées, D_n (défini comme plus haut) tend vers $+8$; l'intégrale est asymptote à une fonction circulaire $1 - \frac{3}{\sin^2 i\sqrt{3}(X - \bar{X})}$.*

Interprétons ces résultats en nous transportant dans le plan x , c'est-à-dire en effectuant le changement de variables (25) qui transforme (B') en

$$(B) \quad y'' = 6y^2 - 6x.$$

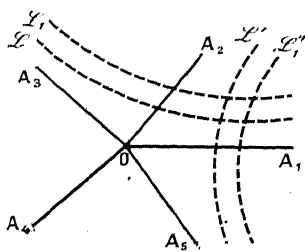
Appelons OA_1 l'axe réel positif du plan x , et OA_2 , OA_3 , OA_4 , OA_5 les demi-axes qui font respectivement avec OA_1 les angles $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$.

A toute ligne périodique ou ligne de pôles d'une intégrale $Y(X)$ correspondra une ligne périodique ou une ligne de pôles de l'intégrale $y(x)$ (voir la Remarque finale du paragraphe 10, p. 328). Ainsi, toute intégrale $y(x)$ aura une infinité de lignes périodiques et une

infinité de lignes de pôles asymptotiquement parallèles à chacune des droites OA_1, \dots, OA_5 .

Plaçons-nous, en particulier, dans l'angle $\widehat{A_1OA_3}$ (fig. 7) dont les côtés correspondent à l'axe réel du plan X indéfiniment prolongé dans les deux sens. Il résulte de l'analyse du paragraphe 10 que $\gamma(x)$ a une infinité de lignes de pôles dont *tous les points* sont arbitrairement

Fig. 7.



éloignés dans l'angle $\widehat{A_1OA_3}$; les deux extrémités de l'une quelconque, ξ , de ces lignes sont alors, nécessairement, asymptotiquement parallèles à OA_1 et à OA_3 ; au-dessus de ξ se trouvent une infinité de lignes de pôles, telles que ξ_1 , qui sont asymptotiquement parallèles aux mêmes demi-droites OA_1, OA_3 ; sur chacune de ces lignes (décrites dans un sens ou dans l'autre), $\gamma(x)$ est asymptote à une fonction élémentaire que le changement de variable (25) ramène à l'une ou à l'autre des fonctions circulaires écrites plus haut.

De la même manière nous décelons l'existence d'une infinité de lignes de pôles de $\gamma(x)$, telles que ξ', ξ'_1, \dots , qui sont asymptotiquement parallèles à OA_2 et à OA_5 , ou à deux quelconques des droites OA_1, \dots, OA_5 d'indices non consécutifs.

Si maintenant nous faisons varier d'une manière continue un pôle de ξ ou de ξ' , la ligne de pôles se déplace et nos calculs cessent d'être applicables aux portions de ces lignes qui sont voisines de l'origine (cf. § 10, p. 328), c'est-à-dire intérieures à un certain cercle G , de centre $x = 0$; mais les deux extrémités de ξ ou de ξ' , extérieures à G , constituent toujours deux *demi-lignes de pôles* (cf. p. 328) dont chacune est asymptotiquement parallèle à une droite OA_j .

L'ensemble des lignes ou demi-lignes de pôles $\xi, \xi_1, \dots, \xi', \xi'_1, \dots$

forme, à l'extérieur du cercle G , un réseau de *quadrilatères curvilignes*. Ces quadrilatères, dont les dimensions sont d'autant plus petites qu'ils sont plus éloignés de l'origine ⁽¹⁾, ont pour correspondants, dans le plan X , des quadrilatères Q qui se rapprochent arbitrairement de parallélogrammes lorsqu'ils sont arbitrairement éloignés.

Le réseau de quadrilatères ainsi défini recouvre *toute la portion du plan x extérieure au cercle G* (cercle à l'extérieur duquel tous les calculs du paragraphe 7 sont applicables). Nous compléterons, au prochain paragraphe, la définition du réseau en pénétrant à l'intérieur du cercle G .

Autres lignes de pôles d'une intégrale $y(x)$ ou $Y(X)$. — Il importe de remarquer qu'aux termes de notre définition des lignes de pôles, il existe, pour l'intégrale $y(x)$ considérée ci-dessus, d'autres lignes de pôles que les lignes $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}', \dots, \mathfrak{L}', \mathfrak{L}', \dots$.

Revenons, en effet, aux intégrales $Y(X)$. Nous avons étudié ci-dessus les lignes de pôles de $Y(X)$ qui ont pour sommets les points $\dots, \bar{X}_0, \bar{X}_0 + \omega_+(\bar{X}_0), \bar{X}_0 + \omega_+^{(2)}(\bar{X}_0), \dots$ ou $\dots, \bar{X}_0, \bar{X}_0 + \omega'_+, \bar{X}_0 + \omega_+^{(2)}, \dots$ (voir p. 299). Considérons semblablement une ligne de pôles ayant pour sommets les points $\dots, \bar{X}_0, \bar{X}_0 + \omega_+ \omega'_+(\bar{X}_0), \bar{X}_0 + \omega_+^{(2)} \omega_+^{(2)}(\bar{X}_0), \dots$. La suite des paramètres C_n qui définissent l'intégrale aux sommets de cette ligne de pôles tendent vers une limite d'après le paragraphe 10 (p. 326) et cette limite est différente de ± 2 . Pour la déterminer on pourra partir encore des intégrales réelles de l'équation (B) en les considérant, cette fois, sur l'axe réel négatif. A ces intégrales correspondent des intégrales purement imaginaires de (B'). On les étudie en effectuant la transformation $X_1 = i^{\frac{3}{2}} X$, $Y_1 = i Y$, qui change (B') en

$$Y_1'' = 6 Y_1^2 + 6 - \frac{Y_1'}{X_1} + \frac{4}{25} \frac{Y_1}{X_1^2}$$

et considérant les intégrales Y_1 réelles sur l'axe réel positif du plan X_1 . Pour ces intégrales $Y_1(X_1)$, l'axe réel positif est *ligne de pôles*, et les paramètres D_1, \dots, D_n, \dots (valeurs de $Y_1'^2 - 4 Y_1^3 - 12 Y_1$ aux points

(1) Les dimensions d'un quadrilatère très éloigné sont de l'ordre de grandeur de sa distance à l'origine ($x = 0$) élevée à la puissance $-\frac{1}{4}$.

réels positifs où Y_1 prend une même valeur finie) tendent vers la valeur réelle \bar{D} pour laquelle l'intégrale $\int \sqrt{4Y_1^3 + 12Y_1 + \bar{D}} dY_1$ a une période nulle.

12. Intégrales symétriques des équations (26), (B'), (B). Réseaux de quadrilatères des périodes définis par (B') et (B).

Considérons, à l'origine $X = 0$, les intégrales de l'équation

$$(26) \quad Y'' = 6Y^2 - 6 - 10p \frac{Y'}{X} + 4p(1 - 6p) \frac{Y}{X^2},$$

et, plus généralement, celles de l'équation

$$(44) \quad Y'' + m \frac{Y'}{X} + n \frac{Y}{X^2} = 6Y^2 - 6.$$

L'origine est, en général, pour ces intégrales, une singularité transcendante dont on ferait facilement l'étude complète en employant les modes de raisonnement qui ont servi à étudier l'équation du premier ordre :

$XY' = \text{fonction holomorphe nulle pour } X = Y = 0.$

Mais je n'entreprendrai point cette étude, et je me bornerai à signaler deux intégrales particulières de (44) qui sont méromorphes à l'origine. Il y a, entre ces intégrales et les dérivées logarithmiques de Bessel $Y_{1(p)}$, $Y_{2(p)}$ méromorphes à l'origine (voir § 5, p. 290), une analogie remarquable.

Les intégrales méromorphes, que nous appellerons $Y_{1(m,n)}$, $Y_{2(m,n)}$, s'écrivent

$$Y_{1(m,n)} = a_{2(m,n)} X^2 + a_{6(m,n)} X^6 + a_{10(m,n)} X^{10} + \dots,$$

$$Y_{2(m,n)} = \frac{6 + n - 2m}{6X^2} + b_{2(m,n)} X^2 + b_{6(m,n)} X^6 + \dots,$$

les coefficients a et b étant définis par les égalités

$$\begin{aligned} a_{2(m,n)} (2.1 + 2m + n) &= -6, \\ a_{6(m,n)} (6.5 + 6m + n) &= 6a_{2(m,n)}^2, \\ a_{10(m,n)} (10.9 + 10m + n) &= 12a_{2(m,n)} a_{6(m,n)}, \\ &\dots; \\ b_{2(m,n)} (2.1 + 2m + 4m - n - 12) &= -6, \\ b_{6(m,n)} (6.5 + 6m + 4m - n - 12) &= 6b_{2(m,n)}^2, \end{aligned}$$

les seconds membres étant les mêmes que dans le cas des fonctions de Bessel.

La convergence de $Y_{1(m,n)}$ est évidente pour des valeurs finies quelconques de m et de n *n'annulant aucune des parenthèses*.

Les Y_2 , d'autre part, sont reliées aux Y_1 , comme il arrivait pour les fonctions de Bessel $Y_{1(p)}$, $Y_{2(p)}$, par une identité qui s'écrit

$$(45) \quad Y_{2(m,n)} = Y_{1(m,4m-n-12)} + \frac{6+n-2m}{6X^2}.$$

Faisons en particulier $m=1$, $n=-\frac{4}{25}$. Les deux fonctions $Y_{1(1,-\frac{4}{25})}$, $Y_{2(1,-\frac{4}{25})}$, *intégrales de l'équation (B')*, sont *méromorphes dans tout le plan* X . Elles sont réelles sur tout l'axe réel et prennent des valeurs égales et de signes contraires aux points correspondants X , iX . Elles sont purement imaginaires sur les bissectrices des axes de coordonnées.

A ces *intégrales symétriques* de l'équation (B'), que nous écrirons (en supprimant les seconds indices)

$$Y_1 = a_2 X^2 + a_6 X^6 + \dots, \quad Y_2 = \frac{16}{25 X^2} + b_2 X^2 + b_6 X^6 + \dots,$$

correspondent (lorsqu'on fait $X = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}}$, $y = \sqrt{x} Y$) deux *intégrales symétriques* de l'équation (B). Ce sont les intégrales

$$(46) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{4^2}{5^2} a_2 x^3 + \frac{4^6}{5^6} a_6 x^8 + \frac{4^{10}}{5^{10}} a_{10} x^{13} + \dots, \\ \gamma_2 = \frac{1}{x^2} + \frac{4^2}{5^2} b_2 x^3 + \frac{4^6}{5^6} b_6 x^8 + \dots \end{cases}$$

La forme des coefficients des intégrales $Y_{1(m,n)}$, $Y_{2(m,n)}$ de (44) et leur analogie avec les coefficients des dérivées logarithmiques des fonctions de Bessel donneraient matière à plusieurs remarques intéressantes concernant les développements possibles de ces fonctions, les relations qu'il y a entre elles pour diverses valeurs de m et de n (en particulier pour les valeurs entières), la situation du pôle de $Y_{1(m,n)}$ ou $Y_{2(m,n)}$ le plus rapproché de l'origine. Pour l'instant, je me bornerai à déterminer l'allure des intégrales symétriques de (B') et à en tirer

quelques conclusions relatives à la structure des autres intégrales $Y(X)$ ou $Y(x)$ de (B') ou de (B).

Figurons les lignes de pôles de la fonction elliptique $Y_{1(0,0)}$, qui sont les axes réel et imaginaire et des parallèles à ces axes. Pour les valeurs arbitrairement petites de m et de n , la fonction $Y_{1(m,n)}$ présente des « lignes d'infinis » ⁽¹⁾ arbitrairement rapprochées de ces lignes de pôles de $Y_{1(0,0)}$. On peut donc faire correspondre à $Y_{1(m,n)}$ un réseau de lignes d'infinis qui seront (voir p. 333, § 11) asymptotiquement parallèles aux axes, et qui décomposeront le *plan X tout entier* en quadrilatères curvilignes.

Faisons maintenant croître m et n jusqu'aux valeurs 1 et $-\frac{4}{25}$. Les lignes d'infinis se déforment et se déplacent avec continuité, et le plan X est toujours décomposé, dans sa totalité, en quadrilatères curvilignes. Pour $m = 1$, $n = -\frac{4}{25}$, l'équation (44) devient (B'); les quadrilatères deviennent des « quadrilatères des périodes » (voir § 9). L'origine $X = 0$ se trouve à l'intérieur du quadrilatère qui a pour sommets les pôles réels, positif et négatif, \bar{X}_r , \bar{X}_{-r} , et les pôles purement imaginaires \bar{X}_i , \bar{X}_{-i} les plus rapprochés de l'origine; elle est centre de symétrie pour ce quadrilatère (à condition qu'on prenne pour lacets Λ , Λ' , définissant les périodes $\bar{X}_i - \bar{X}_r$, $\bar{X}_r - \bar{X}_{-i}$, des lacets sur lesquels Y prend des valeurs respectivement égales et de signes contraires). Dans chaque quadrilatère, $Y(X)$ est uniforme et prend deux fois toute valeur donnée ⁽²⁾.

Cela posé, si nous effectuons le changement de variable $X = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, les quadrilatères des périodes tracés dans le plan X se transforment tous en quadrilatères curvilignes du plan x , exception faite pour le quadrilatère contenant l'origine, lequel se transforme en *pentagone*. Ce pentagone a pour sommets les cinq pôles $\bar{x}_{a_1}, \dots, \bar{x}_{a_5}$, respectivement situés sur les droites OA_1, \dots, OA_5 de la figure 7 (p. 334) qui sont le plus rapprochés de l'origine $x = 0$. On peut toujours choisir

⁽¹⁾ Voir page 325. Dans le cas où les infinis ne sont pas des pôles, la *ligne d'infinis* doit être définie comme limite d'une ligne périodique.

⁽²⁾ Et deux fois seulement toute valeur Y non située sur l'un des contours Λ , Λ' .

arbitrairement l'un des côtés du pentagone; prenons donc le côté $\overline{x_{a_1} x_{a_2}}$ rectiligne; tous les autres côtés seront alors rectilignes par raison de symétrie, et le pentagone sera un pentagone régulier de centre $x = 0$.

A l'extérieur de ce pentagone, le plan x tout entier sera sillonné par un réseau de quadrilatères des périodes; le réseau sera symétrique, naturellement, par rapport à chacun des cinq demi-axes OA_1, \dots, OA_5 .

Ainsi sera défini d'une manière complète le réseau de lignes périodiques qui correspond à l'intégrale symétrique y_1 . Supposons maintenant que nous fassions varier d'une manière continue les conditions initiales qui définissent cette intégrale. A toute nouvelle intégrale correspond un réseau de lignes de pôles qui conserve toujours la même disposition. Les lignes de pôles sont asymptotiquement parallèles aux axes OA_1, \dots, OA_5 (voir § 11) : elles décomposent la totalité du plan x en un ensemble de quadrilatères des périodes, plus un pentagone de raccord.

Mais il est une autre manière de rattacher les quadrilatères des périodes qui recouvrent le plan x . Nous serons conduits à cet autre mode de raccordement en considérant la seconde intégrale symétrique y_2 .

En raisonnant sur $Y_2(X)$ comme sur $Y_1(X)$, nous constatons qu'à cette intégrale correspond un réseau de quadrilatères des périodes dont l'origine $X = 0$ est un sommet. Le réseau correspondant du plan x décompose le plan tout entier en un ensemble de quadrilatères des périodes; mais, tandis qu'un sommet quelconque du réseau, distinct de $x = 0$, n'appartient qu'à quatre quadrilatères, l'origine est sommet de cinq quadrilatères des périodes.

Cela posé, faisons varier les conditions initiales qui définissent l'intégrale $y_2(x)$. Le réseau de lignes de pôles se déplace en conservant sa disposition. La totalité du plan x est toujours décomposée en quadrilatères des périodes, dont cinq ont un sommet commun.

Ainsi, quelle que soit l'intégrale $y(x)$ de l'équation (B) que l'on considère, on pourra toujours lui faire correspondre un réseau de pôles qui sont rattachés de l'une ou de l'autre des deux manières indiquées ci-dessus (nous avons le choix).

La décomposition du plan x ainsi réalisée nous fait connaître fort exactement la structure de la transcendante $y(x)$. Nous avons, en effet, appris à étudier $y(x)$ dans un quadrilatère des périodes (§ 9) et nous avons vu que, dans les quadrilatères arbitrairement éloignés, $y(x)$, ou plutôt sa transformée $Y(X)$, se rapproche arbitrairement d'une fonction elliptique. Nous avons déterminé la direction asymptotique des lignes de pôles qui forment les côtés des quadrilatères (§ 10-11); nous avons trouvé la limite du paramètre C qui définit l'intégrale aux pôles successifs d'une même intégrale (*ibid.*). Nous avons décrit, d'autre part, et interprété le mécanisme des permutations de la fonction $Y(X)$ qui fait passer X dans un quadrilatère contigu, c'est-à-dire qui ajoute à X une période ω_+ , ω_- , ω'_+ ou ω'_- .

Nous reviendrons d'ailleurs ultérieurement sur la définition des *périodes* et leur nature analytique (*voir* troisième Partie, § 17 et sixième Partie).

TROISIÈME PARTIE.

INTÉGRALES TRONQUÉES. FONCTIONS ASSOCIÉES A L'ÉQUATION (B).

13. Intégrales tronquées.

Considérons une intégrale $Y(X)$ de l'équation

$$(B') \quad Y'' = 6Y^2 - 6 - \frac{Y'}{X} + \frac{4}{25} \frac{Y}{X^2},$$

qui présente une certaine ligne de pôles $\dots, \bar{X}_{-1,0}, \bar{X}_0, \bar{X}_{1,0}, \dots$. Nous avons vu que l'intégrale admet en général, de part et d'autre de cette ligne de pôles, une infinité d'autres lignes de pôles. Il ne peut en être autrement que si le paramètre de l'intégrale aux pôles $\dots, \bar{X}_{-1,0}, \bar{X}_0, \dots$ est très voisin de ± 2 (lorsque les modules de ces pôles sont très grands). Nous allons nous placer maintenant dans cette dernière hypothèse et établir l'existence d'une infinité d'intégrales exceptionnelles

(*intégrales tronquées*) pour lesquelles toutes les lignes de pôles situées d'un même côté de la ligne ... $\bar{X}_{-1,0}$, \bar{X}_0 , $\bar{X}_{1,0}$... sont rejetées ensemble à l'infini.

Existence d'une infinité d'intégrales tronquées dans la direction de l'axe réel positif. — Ces intégrales existent pour l'équation $Y'' = 6Y^2 - 6$. Ce sont les fonctions

$$Y = Y_0 = 1 - \frac{3}{\sin^2 i \sqrt{3} (X - \bar{X}_0)} \quad (\bar{X}_0 \text{ quelconque}).$$

Nous allons établir leur existence pour l'équation

$$(49) \quad Y'' = 6Y^2 - 6 + \lambda \left(-\frac{Y'}{X} + a \frac{Y}{X^2} \right),$$

qui coïncide avec l'équation (B') pour $\lambda = 1$, $a = \frac{4}{25}$.

Nos conclusions s'appliqueront, par conséquent, non seulement à l'équation (B'), mais à l'équation plus générale (26) du paragraphe 8. *Il serait aisé de les étendre à l'équation générale (15) du paragraphe 7 (p. 295).*

L'intégrale générale de l'équation (49) peut être développée par rapport aux puissances de λ sous la forme

$$(50) \quad Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \dots$$

Faisons, en particulier, $Y_0 = 1$, et voyons s'il est possible de choisir les conditions initiales de manière que les coefficients Y_1 , Y_2 , ... du développement (50) tendent tous vers zéro dans la direction de l'axe réel positif.

Considérons d'abord Y_1 qui est défini par l'équation

$$(51) \quad Y_1'' = 12Y_1 + \frac{a}{X^2}.$$

Nous avons

$$Y_1 = -\frac{a}{2} \left(e^{\sqrt{12}X} \int^X \frac{e^{-\sqrt{12}X}}{X} dX + e^{-\sqrt{12}X} \int^X \frac{e^{\sqrt{12}X}}{X} dX \right).$$

Je dis qu'on peut déterminer les limites inférieures des intégrales qui figurent dans Y_1 de manière que, pour X tendant vers l'infini par

valeurs réelles positives, on ait

$$\lim_{X \rightarrow \infty} e^{\sqrt{12}X} \int^X \frac{e^{-\sqrt{12}X}}{X} dX = 0, \quad \lim_{X \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{12}X} \int^X \frac{e^{\sqrt{12}X}}{X} dX = 0.$$

On pourrait établir ce fait directement. On peut aussi remarquer que les expressions dont on cherche les limites sont respectivement coefficients de λ dans les développements en puissance de λ des intégrales des deux équations de Riccati

$$Y' = \sqrt{3} Y^2 - \sqrt{3} + \lambda \frac{Y}{X}, \quad Y' = -\sqrt{3} Y^2 + \sqrt{3} + \lambda \frac{Y}{X}.$$

Or ces deux équations appartiennent au type que nous avons étudié dans notre première Partie; leurs intégrales sont des fonctions de Bessel; elles admettent, en particulier, des intégrales tronquées dans la direction de l'axe réel positif, intégrales développables par rapport à λ et dont les coefficients satisfont à la condition requise (tendent vers zéro sur l'axe réel positif) (*voir* § 3, p. 285).

Nous établissons ainsi l'existence d'une première fonction Y_1 qui tend vers zéro. Pour nous rendre compte de la forme de cette fonction, remarquons que nous avons

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{12}X} \int \frac{e^{-\sqrt{12}X}}{X} dX &= e^{\sqrt{12}X} \log X + f_1(X^2) + X f_2(X^2) + h e^{\sqrt{12}X}, \\ e^{-\sqrt{12}X} \int \frac{e^{\sqrt{12}X}}{X} dX &= e^{-\sqrt{12}X} \log X + f_1(X^2) - X f_2(X^2) + h_1 e^{-\sqrt{12}X}, \end{aligned}$$

f_1 et f_2 étant des fonctions entières de X^2 , h et h_1 deux constantes. Les deux expressions étant supposées tendre vers zéro dans la direction de l'axe réel positif, on voit qu'il en sera de même de l'expression

$$(e^{\sqrt{12}X} + e^{-\sqrt{12}X}) \log X + 2 f_1(X^2) + h e^{\sqrt{12}X},$$

ou encore de l'expression

$$-a [\log X \cdot \text{ch } \sqrt{12} X + f_1(X^2) + h \cdot \text{ch } \sqrt{12} X],$$

que nous pouvons prendre pour fonction Y_1 .

En d'autres termes, nous avons une fonction Y_1 , intégrale de (51),

$$(52) \quad Y_1 = -a \log X \cdot \text{ch } \sqrt{12} X + g_1(X^2) \quad (g_1 \text{ fonction entière}),$$

qui tend vers zéro dans la direction voulue. Nous en aurions une infinité d'autres en ajoutant à \bar{Y}_1 l'exponentielle $h_1 e^{-\sqrt{12}X}$, où h_1 est arbitraire.

Faisant, en particulier, $Y_1 = \bar{Y}_1$, nous allons montrer qu'on peut déterminer les fonctions Y_2, Y_3, \dots de manière qu'elles tendent toutes vers zéro, dans la direction de l'axe réel positif, et soient de la forme

$$(53) \quad Y_j = \bar{Y}_j = g_{j0}(X^2) + g_{j1}(X^2) \log X + \dots + g_{jg}(X^2) \log^j X,$$

les g étant des fonctions entières de X^2 .

Supposant ces résultats établis pour les indices $1, \dots, j-1$, montrons qu'ils subsistent pour l'indice j .

Le coefficient Y_j du développement (50) sera défini par l'équation linéaire

$$(54) \quad Y_j'' - 12Y_j = -\frac{\bar{Y}_{j-1}'}{X} + a \frac{\bar{Y}_{j-1}}{X^2}.$$

Posant le second membre égal à $\psi_j'(X)$, nous aurons

$$(54 \text{ bis}) \quad Y_j = \frac{1}{2} \left(e^{\sqrt{12}X} \int^X e^{-\sqrt{12}X} \psi_j' dX + e^{-\sqrt{12}X} \int^X e^{\sqrt{12}X} \psi_j' dX \right).$$

D'ailleurs

$$\psi_j = -\frac{\bar{Y}_{j-1}(X) - \bar{Y}_{j-1}(X_0)}{X} + (a-1) \int_{X_0}^X \frac{\bar{Y}_{j-1}}{X^2} dX + c_j,$$

où X_0 et c_j sont des constantes qu'on peut toujours choisir de manière que ψ_j tende vers zéro lorsque X s'éloigne dans la direction indiquée.

Cela posé, je dis, comme plus haut, qu'on peut, dans (54 bis), déterminer les limites inférieures des deux intégrales de manière que, pour X tendant vers l'infini réel positif, on ait

$$\lim e^{\sqrt{12}X} \int^X e^{-\sqrt{12}X} \psi_j' dX = 0, \quad \lim e^{-\sqrt{12}X} \int^X e^{\sqrt{12}X} \psi_j' dX = 0.$$

Ces expressions sont, en effet, respectivement coefficients de λ dans les développements en puissances de λ des intégrales des deux équations

tions de Riccati

$$Y' = \sqrt{3} Y^2 - \sqrt{3} + \lambda Y \psi_j, \quad Y' = -\sqrt{3} Y^2 + \sqrt{3} + \lambda Y \psi_j.$$

Or ces équations admettent des intégrales tronquées pour lesquelles les coefficients des puissances de λ tendent vers zéro dans la direction réelle positive (*vide supra*, p. 285).

On voit ainsi qu'il existe une fonction ⁽¹⁾ $Y_j = \bar{Y}_j$ qui tend vers zéro dans la direction voulue. Je dis que cette fonction est de la forme (53).

Supposant \bar{Y}_{j-1} mis sous la forme (53), nous voyons que ψ'_j , second membre de (54), s'écrira

$$\begin{aligned} \psi'_j(X) = & -2(g'_{j-1,0} + g'_{j-1,1} \log X + \dots) - \frac{g'_{j-1,1} + g'_{j-1,2} \log X + \dots}{X^2} \\ & + \frac{a}{X^2}(g_{j-1,0}, \dots), \end{aligned}$$

les dérivées des g étant prises par rapport à X^2 . J'en conclus que ψ_j est le quotient par X d'un polynôme de degré $j-1$ en $\log X$ dont les coefficients sont des fonctions entières de X^2 . Il en résulte

$$e^{\sqrt{12}X} \int e^{-\sqrt{12}X} \psi_j dX = [f_{10}(X^2) + X f_{20}(X^2)] + \log X \cdot (f_{11} + X f_{21}) + \dots$$

$$+ \log^j X \cdot (f_{1j} + X f_{2j}) + h e^{\sqrt{12}X}$$

et

$$e^{-\sqrt{12}X} \int e^{\sqrt{12}X} \psi_j dX = (f_{10} - X f_{20}) + \dots + \log^j X \cdot (f_{1j} - X f_{2j}) + h' e^{-\sqrt{12}X},$$

les f étant des fonctions entières de X^2 . Nous pouvons alors prendre pour Y_j la fonction

$$Y_j = \bar{Y}_j = f_{10}(X^2) + f_{11} \log X + \dots + f_{1j} \log^j X + h \operatorname{ch} \sqrt{12} X,$$

ce qui revient à faire, dans la formule (53),

$$g_{j0} = f_{10} + h \operatorname{ch} \sqrt{12} X, \quad g_{j1} = f_{11}, \quad \dots$$

Les fonctions \bar{Y}_j étant ainsi déterminées, observons que la suite de ces fonctions est *bornée sur l'axe réel positif*; plus précisément, à par-

(1) Le même raisonnement prouve que \bar{Y}_j tend vers zéro dans la direction réelle positive.

tir d'un certain point X_0 de cet axe, *indépendant de j , les modules $|\bar{Y}_j|$ admettent des limites supérieures respectives qui sont de plus en plus petites lorsque l'indice j va en croissant.*

En effet, appelons l_{j-1} une limite supérieure de $|\bar{Y}_{j-1}|$ sur le demi-axe réel positif à droite de X_0 . Étant donnée l'expression de ψ_j (p. 343), le module $|\psi_j|$ restera, sur le demi-axe considéré, inférieur à un multiple de l_{j-1} , soit (si $|X_0|$ est assez grand) à $3 l_{j-1} |\bar{X}_0^{-1}|$. On en conclut que l'on a, entre deux points positifs quelconques \bar{X} , X (à droite de X_0),

$$\left| \int_{\bar{X}}^X e^{\sqrt{12}X} \psi_j dX \right| < \frac{3 l_{j-1}}{\bar{X}^{1-\alpha}} \left| \int_{\bar{X}}^X \frac{e^{\sqrt{12}X}}{X^\alpha} dX \right|,$$

α étant un nombre positif arbitrairement petit, et de même

$$\left| \int_{\bar{X}}^X e^{-\sqrt{12}X} \psi_j dX \right| < \frac{3 l_{j-1}}{\bar{X}^{1-\alpha}} \left| \int_{\bar{X}}^X \frac{e^{-\sqrt{12}X}}{X^\alpha} dX \right|.$$

Mais notre raisonnement de tout à l'heure, appliqué à l'expression

$$e^{\sqrt{12}X} \int_{\bar{X}}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{12}X}}{X^\alpha} dX + e^{-\sqrt{12}X} \int_{\bar{X}}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{12}X}}{X^\alpha} dX,$$

prouve que, dans le cas où les constantes d'intégration sont celles qui rendent l'expression nulle à l'infini, l'expression tend vers zéro avec \bar{X}^{-1} : on en conclut que l'on peut trouver un point réel positif X_0 et un nombre K indépendant de j , tels que l'on ait, en tout point \bar{X} de l'axe réel à droite de X_0 ,

$$\text{limite supérieure } l_j \text{ de } |\bar{Y}_j| < \frac{K l_{j-1}}{\bar{X}^{1-\alpha}},$$

α étant un nombre positif donné arbitrairement petit.

Cela posé, considérons le développement

$$(56) \quad Y = 1 + \bar{Y}_1 \lambda + \dots + \bar{Y}_j \lambda^j + \dots;$$

ce développement représente une intégrale de l'équation (49) et il converge, au voisinage de $\lambda = 0$, sur tout chemin qui ne passe par aucun point singulier (aucun *infini*) de l'intégrale. En particulier, lorsque X s'éloigne indéfiniment dans la direction réelle positive, le dévelop-

pement (56) ne peut cesser de converger pour λ borné (en particulier pour $\lambda \leq 1$); *l'intégrale qu'il représente est holomorphe et tend vers la limite 1*; nous dirons que cette intégrale est une INTÉGRALE TRONQUÉE DANS LA DIRECTION DE L'AXE RÉEL POSITIF.

Il est facile, d'ailleurs, de former une infinité d'autres intégrales de (49) qui sont tronquées dans la même direction. En effet, au lieu de prendre $Y_1 = \bar{Y}_1$, faisons $Y_1 = \bar{Y}_1 + h_1 e^{-\sqrt{12}x}$, h_1 étant une constante arbitraire (*vide supra*, p. 168) : nous pourrons, en raisonnant comme plus haut, former une fonction Y_2 , intégrale de l'équation

$$Y_2'' = 12 Y_2 - \frac{Y_1'}{X} + a \frac{Y_1}{X^2}$$

qui tend vers zéro dans la direction réelle positive ; plus précisément, nous aurons une infinité de telles fonctions obtenues en ajoutant à l'une d'entre elles l'exponentielle $h_2 e^{-\sqrt{12}x}$ (h_2 arbitraire). A partir de Y_2 , nous définirons une fonction Y_3 qui tend vers zéro, et ainsi de suite. Comme tout à l'heure, la suite des modules $|Y_2|, |Y_3|, \dots$ sera bornée sur l'axe réel à droite d'un point X_0 .

Nous formerons ainsi, en les développant par rapport à λ , une infinité d'intégrales tronquées dans la direction de l'axe réel positif.

Nous obtiendrons de même une infinité d'intégrales tronquées dans la direction de l'axe réel négatif ou de l'axe imaginaire positif ou négatif.

14. Intégrales tritronquées.

Parmi les intégrales tronquées dans la direction de l'axe réel positif que nous venons d'obtenir, en existe-t-il qui soient également tronquées dans la direction de l'axe réel négatif? S'il existe de telles intégrales, nous les appellerons *intégrales bitronquées*.

Je ne me suis pas arrêté à l'étude des intégrales bitronquées qui (si elles existent) n'offrent qu'un intérêt secondaire. Par contre, je vais établir l'existence d'une intégrale $Y(X)$ particulière fort remarquable : *intégrale tronquée dans la direction de l'axe réel positif et qui ne présente aucun infini (de grand module) au-dessous de l'axe réel*. Cette

intégrale, nous le verrons, est *tronquée* suivant trois directions rectangulaires.

Considérons *une* intégrale tronquée développée sous la forme $Y = 1 + \lambda Y_1 + \dots$, et voyons si nous pouvons la déterminer de manière qu'elle soit tronquée et tende vers 1 lorsque X s'éloigne indéfiniment dans la direction de l'axe réel négatif *au-dessous* de cet axe : il faut, pour cela, que Y_2, \dots, Y_j, \dots tendent vers zéro dans la direction indiquée.

Nous avons vu que $Y_1 = \bar{Y}_1 + h_1 e^{-\sqrt{12}X}$, \bar{Y}_1 étant de la forme (52) et h_1 une constante. Il résulte de l'expression (52) de \bar{Y}_1 que, lorsque X s'éloigne indéfiniment comme il a été spécifié ci-dessus, la somme $\bar{Y}_1 + ai\pi e^{-\sqrt{12}X}$ tend vers zéro : ainsi, pour que Y_1 tende vers zéro, *il faut et il suffit que l'on prenne* $h_1 = + ai\pi$. Si, par contre, X s'éloignait dans la direction réelle négative *au-dessus* de l'axe réel, il faudrait prendre $Y_1 = \bar{Y}_1 - ai\pi e^{-\sqrt{12}X}$.

Ainsi, il y a une manière et une seule de déterminer Y_1 de façon que cette fonction tende vers zéro dans les deux directions réelles *au-dessous* de l'axe réel. A partir de Y_1 , nous pourrions ensuite déterminer une infinité de Y_2 tronquées dans la direction positive, et une infinité de Y_2 tronquées dans la direction négative. Soit $Y_{2,d}$ l'une des premières ; les secondes seront données par la formule

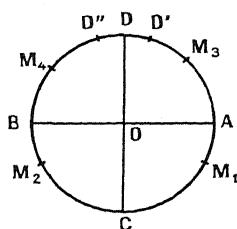
$$Y_{2,g} = Y_{2,d} + k e^{-\sqrt{12}X} + h_2 e^{\sqrt{12}X},$$

k ayant une valeur déterminée et h_2 étant quelconque ; on voit que $Y_{2,g}$ *tendra vers zéro dans les deux directions si l'on a* $h_2 = 0$ *et dans ce cas seulement* ; nous prendrons donc $h_2 = 0$. Nous pourrions alors, à partir de Y_2 , déterminer d'une et d'une seule manière une Y_3 qui tende vers zéro dans les deux directions considérées, et ainsi de suite.

Je dis que les fonctions Y_1, Y_2, \dots , déterminées comme il vient d'être dit, *tendent vers zéro sur tout rayon issu de l'origine et situé au-dessous de l'axe réel*. Plus précisément, suivons ces fonctions sur un rayon qui, coïncidant d'abord avec l'axe imaginaire négatif OC, tourne autour de OC dans un sens ou dans l'autre (*fig. 7*) ; *sur ce rayon, tant que l'angle dont il a tourné est inférieur à π , — les fonctions* Y_1, Y_2, \dots *tendront vers zéro*.

Considérons, en effet, un cercle de centre O et de grand rayon R qui coupe les demi-axes de coordonnées aux points A, B, C, D (fig. 8). Sur

Fig. 8.



le contour de ce cercle, posons $\sqrt{12} X = Re^{i\theta}$. Nous aurons, d'après l'expression de Y_1 donnée plus haut,

$$Y_1 = -\frac{ia}{2\sqrt{12}} e^{iR \sin \theta} \left(e^{R \cos \theta} \int e^{-R \cos \theta - iR \sin \theta} d\theta + e^{-R \cos \theta} \int e^{R \cos \theta + iR \sin \theta} d\theta \right).$$

Je dis que Y_1 reste fini sur les arcs, inférieurs à π , CAD' , CBD'' , et reste d'autant plus voisin de 0 que R est plus grand.

En effet, suivons d'abord Y_1 entre C et A jusqu'à un point quelconque M_1 d'argument (négatif) θ_1 . Nous avons, sur l'arc CM_1 ,

$$|e^{-R \cos \theta - iR \sin \theta}| < \frac{-1}{R \sin \theta_1} (-R \sin \theta e^{-R \cos \theta})$$

et, par conséquent,

$$\left| \int_{CM_1} e^{-R \cos \theta - iR \sin \theta} d\theta \right| < \frac{-1}{R \sin \theta_1} e^{-R \cos \theta_1},$$

et pareillement

$$\left| \int_{CM_1} e^{R \cos \theta + iR \sin \theta} d\theta \right| < \frac{-1}{R \sin \theta_1} e^{R \cos \theta_1}.$$

Nous obtiendrons des inégalités semblables pour un arc quelconque CM_2 pris sur CB , pour un arc quelconque $D'M_3$ pris sur $D'A$ et pour un arc quelconque $D''M_4$ pris sur $D''B$. On en conclut qu'on peut écrire

$$Y_1 = \frac{-ia}{2\sqrt{12}} e^{iR \sin \theta} (ce^{R \cos \theta} + c_1 e^{-R \cos \theta} + \varphi(\theta)),$$

c et c_1 étant des constantes, et $|\varphi(\theta)|$ restant limité et de l'ordre de

grandeur de R^{-1} lorsque θ , à partir de $-\frac{\pi}{2}$, varie d'un angle compris entre $-\pi$ et π . Or, nous savons que la fonction Y_1 , actuellement considérée, tend vers zéro dans les directions OA et OB; donc on a $c = c_1 = 0$.

Ainsi la fonction Y_1 considérée *tendra vers zéro* sur tout rayon issu de l'origine et faisant avec OC un angle inférieur à π . Il en est de même de sa dérivée que l'on pourra étudier de la même manière (*voir ci-dessous*).

La démonstration ainsi faite pour Y_1 s'applique aux fonctions Y_2, \dots, Y_j, \dots , d'indices quelconques.

Supposons, en effet, établi que la fonction Y_{j-1} et sa dérivée tendent vers zéro sur tous les rayons considérés ci-dessus. Posant

$$-Y'_j + a \frac{Y_{j-1}}{X} = \omega_j(X),$$

nous pourrons écrire comme il suit ⁽¹⁾ l'intégrale générale de l'équation (54)

$$Y_j = \frac{a}{2\sqrt{12}} \left(e^{\sqrt{12}X} \int^X e^{-\sqrt{12}X} \frac{\omega_j}{X} dX - e^{-\sqrt{12}X} \int^X e^{\sqrt{12}X} \frac{\omega_j}{X} dX \right);$$

nous aurons dès lors, sur les arcs CAD', CBD'',

$$Y_j = \frac{ai}{24} e^{iR \sin \theta} \left(e^{R \cos \theta} \int e^{-R \cos \theta - iR \sin \theta} \omega_j d\theta - e^{-R \cos \theta} \int e^{R \cos \theta + iR \sin \theta} \omega_j d\theta \right),$$

ω_j étant arbitrairement petit avec R^{-1} . Dérivant par rapport à X, il vient

$$Y'_j = \frac{a}{2} \left(e^{\sqrt{12}X} \int^X e^{-\sqrt{12}X} \frac{\omega_j}{X} dX + e^{-\sqrt{12}X} \int^X e^{\sqrt{12}X} \frac{\omega_j}{X} dX \right)$$

ou

$$Y'_j = \frac{ai}{2\sqrt{12}} e^{iR \sin \theta} \left(e^{R \cos \theta} \int e^{-R \cos \theta - iR \sin \theta} \omega_j d\theta - e^{-R \cos \theta} \int e^{R \cos \theta + iR \sin \theta} \omega_j d\theta \right).$$

Nous en concluons, en raisonnant comme plus haut, que Y_j tend vers zéro dans les deux directions OA et OB (comme il arrive pour Y_j

(1) On passe immédiatement de cette formule à la formule (54 bis) donnée plus haut.

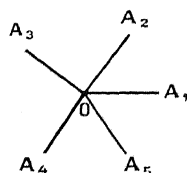
définie plus haut), cette fonction et sa dérivée sont de l'ordre de grandeur de R^{-1} sur les arcs CAD' et CBD'' .

L'intégrale $Y = 1 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \dots$, où Y_1, Y_2, \dots sont les fonctions ci-dessus déterminées, est donc une intégrale qui ne présente aucun infini et tend vers 1 lorsque X s'éloigne indéfiniment dans l'une des trois directions OA, OB, OC : c'est pourquoi j'appelle cette intégrale *intégrale tritronquée*.

Intégrales tritronquées de l'équation (B'). — Considérons, en particulier, les intégrales de l'équation (B') [équation (49) où $\lambda = 1, \alpha = \frac{4}{25}$] et voyons comment se présentent les intégrales tritronquées de cette équation ou de l'équation équivalente (B).

Faisant $X = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, appelons (fig. 9) OA , l'axe réel positif du plan x ,

Fig. 9.



OA_2, OA_3, OA_5 les demi-droites qui font avec OA les angles $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \dots, \frac{8\pi}{5}$. A l'intégrale $Y(X)$ tronquée, *au-dessous* de l'axe réel, dans les directions réelles positive et négative, correspond une intégrale $y(x)$ (fonction méromorphe) qui est tronquée dans les directions OA_1 et OA_4 . Cette intégrale est tronquée sur tous les rayons issus de l'origine et intérieurs aux angles $\widehat{A_2OA_3}, \widehat{A_5OA_4}$; sur ces rayons, Y tend vers 1; donc le rapport $(1) \frac{y}{\sqrt{x}}$ tend vers 1; *l'intégrale ne présente des*

(1) En prenant pour \sqrt{x} la détermination qui est positive pour x réel positif. La seconde détermination de \sqrt{x} interviendrait si l'on considérait l'équation $y'' = 6x - 6y^2$ qui admet la même transformée (B') que l'équation (B).

pôles et ne devient indéterminée pour x croissant indéfiniment que sur les rayons situés dans l'angle $\widehat{A_2 O A_3}$.

Nous désignerons par $y_{1,5,4}(x)$ l'intégrale tritronquée ainsi obtenue (intégrale tronquée dans les directions OA_1 , OA_5 , OA_4). Nous définirons de la même manière quatre autres intégrales tritronquées, et quatre seulement, les intégrales $y_{5,4,3}$, $y_{4,3,2}$, $y_{3,2,1}$, $y_{2,1,5}$. Ces intégrales se déduisent les unes des autres par l'effet des substitutions $(x, e^{\frac{2i\pi}{5}}x)$, $(y, e^{\frac{6i\pi}{5}}y)$ qui n'altèrent pas l'équation (B) : on a, par exemple,

$$y_{2,1,5}(x) = e^{\frac{6i\pi}{5}} y_{1,5,4}\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}x\right).$$

Les cinq intégrales tritronquées de l'équation (B) jouent dans la théorie de cette équation un rôle semblable à celui des trois intégrales tronquées qui interviennent dans la théorie de l'équation de Bessel étudiée dans notre première Partie.

15. Intégrale tronquée infinie en un point donné.

Revenons à l'équation

$$(49) \quad Y'' = 6Y^2 - 6 + \lambda \left(-\frac{Y'}{X} + a \frac{Y}{X^2} \right)$$

du paragraphe 13. Nous avons montré que cette équation admet une infinité d'intégrales tronquées dans la direction réelle positive. Nous allons maintenant déterminer et étudier plus en détail une intégrale tronquée particulière que nous assujettissons à admettre comme *infini* un point donné arbitraire \bar{X}_0 .

Développons comme plus haut (§ 13) l'intégrale de (49) sous la forme

$$(58) \quad Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \dots;$$

mais faisons cette fois

$$(59) \quad Y_0 = \bar{Y}_0 = 1 - \frac{3}{\sin^2 i \sqrt{3}(X - \bar{X}_0)} \quad \text{ou} \quad Y_0 = 1 + \frac{\gamma^2}{\sin^2 \gamma t},$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$t = X - \bar{X}_0, \quad \gamma = i = \sqrt{3}.$$

Le coefficient Y_j de λ^j sera défini par l'équation linéaire

$$(60) \quad Y_j'' = {}_{12} \bar{Y}_0 Y_j = - \frac{Y_{j-1}'}{X} + a \frac{Y_{j-1}}{X^2} = \varphi_j(X),$$

équation qui s'intègre comme il suit :

L'équation sans second membre admet une intégrale particulière Π_1 , qui présente un *pôle triple* en $t = X - \bar{X}_0 = 0$; c'est la fonction

$$\Pi_1 = - \frac{\bar{Y}_0'}{2\gamma^3} = \cot \gamma t + \cot^3 \gamma t = \frac{\cos \gamma t}{\sin^3 \gamma t};$$

elle admet aussi une intégrale particulière Π_2 , qui est holomorphe en $t = 0$, son développement de Taylor commençant par le terme $(^1)$ en t^4 : c'est la fonction

$$\Pi_2 = \Pi_1 \int \frac{dX}{\Pi_1^2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{15(\sin \gamma t - \gamma t \cos \gamma t)}{8 \sin^3 \gamma t} - \frac{7}{8} - \frac{\cos^2 \gamma t}{4} \right) = \star t^4 + \dots$$

Cela posé, la fonction Y_j , intégrale de (60), est donnée par la formule

$$(61) \quad Y_j = \Pi_2 \int \Pi_1 \varphi_j dX - \Pi_1 \int \Pi_2 \varphi_j dX.$$

Proposons-nous de *déterminer les fonctions Y_1, \dots, Y_j, \dots de manière qu'elles soient toutes holomorphes en \bar{X}_0 (exception faite pour Y_1 , dont \bar{X}_0 sera pôle simple) et tendent vers zéro lorsque X s'éloigne indéfiniment, à partir de \bar{X}_0 , dans la direction réelle positive.*

Détermination de Y_1 . — Nous avons

$$\varphi_1(X) = - \bar{Y}_0' X^{-1} + a \bar{Y}_0 X^{-2};$$

(¹) En effet, il résulte du développement (23) du paragraphe 7 que deux intégrales différentes de (49), infinies toutes deux en \bar{X}_0 , ne diffèrent qu'à partir du terme en $(X - \bar{X}_0)^4$.

cette fonction a un pôle triple en \bar{X}_0 ; H_2 ayant un zéro quadruple, nous voyons que l'intégrale $\int^x H_2 \varphi_1 dX$ est holomorphe; en particulier, la fonction $\int_{\bar{X}_0}^x H_2 \varphi_1 dX$, qui s'annule en \bar{X}_0 , y a un *zéro double*; d'où résulte que la fonction $H_1 \int_{\bar{X}_0}^x H_2 \varphi_1 dX$ admet \bar{X}_0 comme *pôle simple*. D'autre part, la fonction $H_2 \int H_1 \varphi_1 dX$ a un *pôle simple* en \bar{X}_0 quelle que soit la constante d'intégration. Je conclus de là qu'il existe *une infinité de fonctions* Y_1 qui ont un *pôle simple* en $X = \bar{X}_0$: ce sont les fonctions (')

$$(61 \text{ bis}) \quad Y_1 = H_2 \int^x H_1 \varphi_1 dX - H_1 \int_{\bar{X}_0}^x H_2 \varphi_1 dX,$$

qui dépendent d'une constante arbitraire. Parmi ces fonctions, je dis qu'il y en a une et une seule, \bar{Y}_1 , qui tend vers zéro dans la direction réelle positive.

La démonstration se fera comme au paragraphe 13 dès qu'on aura isolé les parties principales de H_1 , H_2 , φ , pour les valeurs de X dont la partie réelle augmente indéfiniment par valeurs positives.

On a, en effet,

$$\bar{Y}_0 = 1 - 12 e^{-\sqrt{12}(\bar{X}-\bar{X}_0)} + \dots, \quad \bar{Y}'_0 = 12 \sqrt{12} e^{-\sqrt{12}(\bar{X}-\bar{X}_0)} + \dots$$

et, par suite,

$$H_1 = -4 e^{-\sqrt{12}(X-\bar{X}_0)} + \dots, \quad H_2 = \frac{1}{16i\sqrt{3}} e^{\sqrt{12}(X-\bar{X}_0)} + \dots,$$

$$\varphi_1 = -\frac{\bar{Y}'_0}{X} + \alpha \frac{\bar{Y}_0}{X^2} = \frac{a}{X^2} + e^{-\sqrt{12}(X-\bar{X}_0)} \left(\frac{-12\sqrt{12}}{X} - \frac{12a}{X^2} \right) + \dots,$$

les termes non écrits étant de l'ordre de petitesse de $e^{-2\sqrt{12}(X-\bar{X}_0)}$, ou d'ordre inférieur. On démontre alors, comme au paragraphe 13, qu'on peut déterminer les constantes d'intégration dans les expres-

(') Toutes les autres fonctions Y_1 ont, comme H_1 , un *pôle triple* en \bar{X}_0 .

sions

$$H_2 \int^X H_1 \varphi_1 dX, \quad H_1 \int^X H_2 \varphi_1 dX,$$

de manière que ces expressions tendent vers zéro lorsque la partie réelle de X augmente indéfiniment par valeurs positives. La deuxième expression se trouve dès lors tendre vers zéro quelle que soit la constante d'intégration (puisque H tend vers zéro). La première expression ne tend vers zéro que *pour une valeur unique de la constante*; pour toute autre valeur, elle augmente indéfiniment comme H_2 .

Ainsi nous obtenons une fonction (61 bis), et une seule, qui satisfait aux conditions voulues. Nous la désignerons par \bar{Y}_1 . Sa dérivée

$$\bar{Y}'_1 = H'^2 \int^X H_1 \varphi_1 dX - H'_1 \int^X H_2 \varphi_1 dX$$

tend évidemment vers zéro en même temps qu'elle.

Détermination de $\bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_j$. — La fonction \bar{Y}_1 , étant ainsi déterminée, nous voyons que $\varphi_2(X)$ a un pôle double en \bar{X}_0 ; nous en concluons que la fonction $\int_{\bar{X}_0}^X H_2 \varphi_2 dX$, qui s'annule en \bar{X}_0 , y a un zéro triple; la fonction $H_1 \int_{\bar{X}_0}^X H_2 \varphi_2 dX$ est donc holomorphe en \bar{X}_0 , et il en est de même de $H_2 \int_{\bar{X}_0}^X H_1 \varphi_2 dX$, quelle que soit la limite inférieure de l'intégrale. Ainsi il existe une infinité de fonctions Y_2 holomorphes en \bar{X}_0 : en raisonnant comme tout à l'heure, on constate que, parmi ces fonctions, une, et une seule, soit la fonction \bar{Y}_2 , tend vers zéro dans la direction réelle positive.

Connaissant \bar{Y}_2 , on déterminera Y_3 , puis Y_4, \dots, Y_j . On obtiendra, pour tout indice j , une, et une seule fonction \bar{Y}_j , holomorphe en \bar{X}_0 (à partir de l'indice 6, \bar{Y}_j aura, comme H_2 , un zéro quadruple en \bar{X}_0), et tendant vers zéro dans la direction réelle positive.

La forme (61) de ces fonctions montre d'ailleurs qu'elles sont holomorphes pour toute valeur de X distincte de l'origine $X = 0$: elles

n'ont qu'un point singulier, l'origine, qui est pour elles point critique transcendant isolé.

Dans le cas où le point \bar{X}_0 a sa partie réelle positive, nous pouvons faire en outre une remarque importante relativement à l'ordre de grandeur de $|\bar{Y}_j|$ et $|\bar{Y}'_j|$. Menons, à partir de \bar{X}_0 , une droite Δ quelconque, sur laquelle la partie réelle de X va en croissant; je dis que les modules $|\bar{Y}_j|$, $|\bar{Y}'_j|$ admettent sur la droite Δ une limite supérieure qui tend vers zéro (si $|\bar{X}_0| > 1$) lorsque l'indice j augmente indéfiniment.

Appelons, en effet, l_{j-1} une limite supérieure de $|\bar{Y}_{j-1}|$ et $|\bar{Y}'_{j-1}|$ sur la droite Δ . Sur cette droite, le module $|\varphi_j|$ restera inférieur à

$$(1 + |\alpha|) l_{j-1} |X^{-1}|.$$

On en conclut qu'on a, entre deux points quelconques \bar{X} , X de la droite Δ ,

$$\left| \int_{\bar{X}}^X H_1 \varphi_j dX \right| < \frac{(1 + |\alpha|) l_{j-1}}{|\bar{X}|} \left| \int_{\bar{X}}^X H_1 dX \right|,$$

$$\left| \int_{\bar{X}}^X H_2 \varphi_j dX \right| < \frac{(1 + |\alpha|) l_{j-1}}{|\bar{X}|} \left| \int_{\bar{X}}^X H_2 dX \right|.$$

Remplaçant alors H_1 , H_2 par leurs valeurs principales (p. 353), et raisonnant comme à la page 343-344, on déduit de la formule (61) que le module $|\bar{Y}_j|$ admet, sur la droite Δ , une limite supérieure moindre que $kl_{j-1} |\bar{X}_0^{-1+\alpha}|$, k étant un facteur indépendant de j et de $|\bar{X}_0|$, et α étant positif arbitrairement petit. La conclusion est la même pour le module de la dérivée Y'_j , qui est donnée par l'égalité

$$(62) \quad Y'_j = H'_2 \int^X H_1 \varphi_j dX - H'_1 \int^X H_2 \varphi_j dX.$$

En particulier, lorsque la partie réelle de \bar{X}_0 est positive et très grande, les modules $|Y_j|$, $|Y'_j|$ sont, sur la droite Δ , de l'ordre de petitesse de $|\bar{X}_0^{-j}|$.

Intégrales tronquées de l'équation (49) pour les petites valeurs de λ . —

Ces résultats acquis, prenons d'abord pour \bar{X}_0 un point de *partie réelle positive*, et considérons le développement

$$(63) \quad Y = \bar{Y} = \bar{Y}_0 + \lambda \bar{Y}_1 + \lambda^2 \bar{Y}_2 + \dots$$

Il résulte de ce qui précède : 1° que le développement (63) converge, pour λ voisin de zéro (soit pour $|\lambda| < \lambda_1$) au voisinage de \bar{X}_0 et sur toute droite Δ issue de l'origine sur laquelle la partie réelle de X est croissante; 2° que le développement (63), lorsqu'on l'ordonne par rapport à $X - \bar{X}_0$, prend la forme (23) (p. 307) et représente une intégrale infinie en \bar{X}_0 ; 3° que cette intégrale tend vers la limite 1 sur toutes les droites Δ spécifiées ci-dessus.

Ainsi se trouve mise en évidence *une intégrale (unique) de l'équation (49), infinie en \bar{X}_0 , et tronquée* dans la direction réelle positive.

L'existence de cette intégrale aurait pu être décelée indirectement, et beaucoup plus rapidement, de la manière suivante (1) :

Considérons l'ensemble des intégrales de (49) qui sont infinies au point \bar{X}_0 . Ces intégrales sont représentées par un développement (23) et chacune d'elles, par conséquent, se trouve déterminée par une valeur du paramètre C (à condition qu'on fixe une fois pour toutes la détermination de $\log \bar{X}$ que l'on considérera en un point \bar{X} pris arbitrairement près de \bar{X}_0 (cf. § 7, p. 307-308). A partir de \bar{X}_0 , nous pouvons (2) (comme il a été dit au paragraphe 7) définir les périodes ω_+ , ω_- , ω'_+ , ω'_- qui représentent les différences $\bar{X}_{10} - \bar{X}_0$, $\bar{X}_{01} - \bar{X}_0$, Ces périodes sont holomorphes pour toute valeur de C qui ne les rend pas infinies.

Donnons en particulier à C une valeur voisine de -2 . Pour les petites valeurs de λ , les périodes $\omega_{\pm}(C)$, $\omega'_{\pm}(C)$ sont très voisines des périodes ϖ , ϖ' , des fonctions elliptiques p définies par $Y'' = 6Y^2 - 6$: il y en aura une, soit $\omega_+(C)$, qui sera approximativement parallèle à l'axe réel positif, et très grande. D'ailleurs, lorsque C décrit un petit

(1) Nous reprendrons cette démonstration dans notre sixième Partie.

(2) Les calculs du paragraphe 7 exigent que $|\bar{X}_0|$ soit supérieur à un certain nombre ε^{-1} ; mais ce nombre est arbitrairement petit si le paramètre λ qui figure dans l'équation (49) est lui-même arbitrairement petit.

cercle autour du point $C = -2$, la détermination initiale de $\omega_+(C)$ (voisine de ϖ) se permute avec une nouvelle détermination, voisine de $\varpi \pm \varpi'$. J'en conclus qu'il y a, au voisinage de $C = 2$, au moins une ⁽¹⁾ valeur C_1 de C qui est un point critique pour la fonction $\omega_+(C)$: pour cette valeur, $\omega_+(C)$ devient infini.

Nous avons supposé (p. 356) la partie réelle de \bar{X}_0 positive. L'infini \bar{X}_0 appartient dès lors à une *ligne d'infinis* (voir § 10)

$$\bar{X}_0, \quad \bar{X}_{01} = \bar{X}_0 + \omega'_+, \quad \dots,$$

qui est parallèle à l'axe imaginaire pour $\lambda = 0$, et qui sera, par suite, pour les petites valeurs de λ , tout entière à droite de l'axe imaginaire et asymptotiquement parallèle à cet axe (cf. § 11-12). A droite de cette ligne d'infinis se trouvent d'autres *lignes d'infinis*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots, & \bar{X}_{1,-1}, & \bar{X}_{10} = \bar{X}_0 + \omega_+, & \bar{X}_{11} = \bar{X}_{10} + \omega'_+, & \dots, \\ \dots, & \bar{X}_{2,-1}, & \bar{X}_{20}, & \bar{X}_{21}, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{array}$$

Il est facile de voir que lorsque C prend la valeur \bar{C} (pour laquelle ω_+ devient infinie) tous les sommets de ces diverses *lignes d'infinis* sont rejetés ensemble à l'infini. En effet, si le point \bar{X}_{1j} , par exemple, se trouvait à distance finie, il en serait de même, d'après les calculs du paragraphe 7, des points $\bar{X}_{1,j-1}$, $\bar{X}_{1,j+1}$, ... et, par conséquent, du point \bar{X}_{10} ; si, d'autre part, les points \bar{X}_2 , étaient à distance finie, il devrait en être de même des points \bar{X}_{1j} .

Ainsi, l'intégrale de (49) (infinie au point \bar{X}_0) pour laquelle $C = \bar{C}$, est une intégrale tronquée dans la direction réelle positive. Cette intégrale est holomorphe à droite de la *ligne d'infinis* qui passe par \bar{X}_0 , et elle prend des valeurs voisines de 1 lorsque X s'éloigne indéfiniment dans la direction réelle positive. J'en conclus que cette intégrale tronquée est fonction holomorphe de λ à droite de la ligne d'infinis qui passe par \bar{X}_0 , et qu'elle coïncide, par conséquent, avec l'intégrale \bar{Y} [représentée par le développement (63)].

(1) Il résulte des pages précédentes que cette valeur est unique.

La ligne d'infinis qui passe par \bar{X}_0 sera appelée *ligne d'infinis extrême*. Cette ligne d'infinis est asymptotiquement parallèle à l'axe imaginaire.

Le développement (63) montre d'ailleurs que, lorsque X s'éloigne indéfiniment à droite de la ligne d'infinis extrême, l'intégrale \bar{Y} tend vers la LIMITE 1 EXACTEMENT. Il ne faut pas en conclure, bien entendu, que le point $Y = \bar{Y}$ tende vers le point 1 suivant un rayon du plan Y . La dérivée $Y'(X)$ aura, en effet, en général, une infinité de zéros sur l'ensemble des chemins X considérés. Le point $Y = \bar{Y}$ tendra donc vers 1, en s'enroulant autour d'une infinité de points critiques algébriques de la fonction $X(Y)$, et $Y = 1$ est, pour cette fonction, un point transcendant indirectement critique. Les choses se passent comme pour les fonctions de Bessel, étudiées au paragraphe 3 (p. 286-287).

Le paramètre \bar{C} , qui définit l'intégrale tronquée polaire en \bar{X}_0 , est fonction holomorphe de \bar{X}_0 .

Cas où le point \bar{X}_0 a une partie réelle négative. — Nous avons établi l'existence de l'intégrale tronquée \bar{Y} et, par conséquent, la convergence du développement (63) dans l'hypothèse où la partie réelle $R(\bar{X}_0)$ est positive. Voyons maintenant ce que devient l'intégrale \bar{Y} lorsque nous déplaçons \bar{X}_0 avec continuité et lui donnons une partie réelle négative.

Les coefficients \bar{Y}_j du développement de \bar{Y} en puissances de λ , sont fonctions holomorphes de \bar{X}_0 . Il en résulte que le développement (63) (supposé convergent en un point) est convergent sur tout chemin (issu dudit point) sur lequel l'intégrale qu'il représente est holomorphe. Ainsi, lorsque \bar{X}_0 varie, les infinis ... $\bar{X}_{0,-1}$, $\bar{X}_{0,1}$, ... de la *ligne d'infinis extrêmes* se déplacent avec continuité et restent isolés : ces points ne cessent pas d'être les sommets d'une *ligne d'infinis extrême* à droite de laquelle l'intégrale \bar{Y} est tronquée et son développement (63) convergent.

Faisons alors tendre \bar{X}_0 vers un point quelconque distinct de l'origine. Trois cas peuvent se présenter :

Ou bien les points $\bar{X}_{0n}, \bar{X}_{0,n+1}, \dots$ et $\bar{X}_{0,-n}, \bar{X}_{0,-(n+1)}, \dots$ d'indices arbitrairement grands restent à distance finie (non bornée). La ligne d'infinis extrême peut alors être définie par déformation continue pour toute nouvelle position de \bar{X}_0 . Cette ligne, qui laisse toujours l'origine à sa gauche ⁽¹⁾ joint deux à deux les points $\dots \bar{X}_{0,-1}, \bar{X}_0, \bar{X}_{0,1}, \dots$ dans l'ordre de leurs indices et est asymptotiquement parallèle aux deux demi-axes imaginaires. A droite de cette ligne d'infinis, et sur cette ligne elle-même, exception faite pour les sommets, le développement (63) est convergent. Le paramètre \bar{C} , de l'intégrale \bar{Y} en \bar{X}_0 conserve une valeur finie : car, s'il en était autrement, \bar{Y} viendrait se confondre avec l'intégrale particulière $Y = \infty$ et ne serait plus tronquée ; d'ailleurs, il résulte du développement (63) que \bar{C} est une fonction holomorphe de \bar{X}_0 .

Ces conclusions subsisteront lorsque les points $\bar{X}_{0n}, \bar{X}_{0,n+1}, \dots$ seront rejetés à l'infini dans la *direction réelle négative*. Il est clair que, lorsque cette circonstance se présente pour le point \bar{X}_{0n} situé au-dessous de l'axe réel, tous les points suivants $\bar{X}_{0,n+1}, \bar{X}_{0,n+2}, \dots$ sont simultanément rejetés à l'infini dans la même direction ; il ne saurait en être de même, par contre, des points $\bar{X}_{0,-n}, \bar{X}_{0,-(n+1)}, \dots$ situés au-dessus de l'axe réel ; car, si ces points étaient eux aussi rejetés à l'infini dans la direction réelle négative, l'intégrale \bar{Y} cesserait d'avoir des infinis, ce qui n'est manifestement pas possible. La demi-ligne d'infinis supérieure subsiste donc, et \bar{Y} se retrouve être l'une des *intégrales tritronquées que nous avons définies au paragraphe 14*.

Mais il y a lieu, lorsqu'on fait tendre \bar{Y}_0 vers un point quelconque, d'envisager une troisième hypothèse : hypothèse suivant laquelle les points $\bar{X}_{0n}, \bar{X}_{0,n+1}, \dots$ d'indices élevés seraient rejetés à l'infini dans la *direction réelle positive*. Il en serait alors de même des points $\bar{X}_{0,-n}, \bar{X}_{0,-(n+1)}, \dots$ d'indices négatifs élevés : en effet, lorsque les points $\bar{X}_{0n}, \bar{X}_{0,n+1}, \dots$ s'approchent de l'infini positif, ils peuvent être considérés

(1) Pour passer de la demi-ligne d'infinis supérieure à la demi-ligne inférieure qui lui fait suite, il faut toujours passer à droite de l'origine.

comme appartenant à une *ligne d'infinis extrême* tout entière située à droite de l'axe imaginaire, et cette ligne, d'après ce que nous avons vu plus haut, peut être indéfiniment prolongée dans les deux sens. Suivant l'hypothèse actuelle, cette ligne d'infinis se trouverait rejetée à l'infini *sans entraîner à sa suite le point* \bar{X}_0 ; l'intégrale \bar{Y} (infinie en \bar{X}_0), ayant des infinis arbitrairement éloignés dans la direction de l'axe réel positif, *cesserait dès lors d'être tronquée*.

Intégrales tronquées de l'équation (B'). — Les conclusions énoncées ci-dessus dans l'hypothèse où λ est voisin de zéro s'étendent immédiatement à l'équation (B') où $\lambda = 1$ (*cf.* fin du paragraphe 13). En effet, lorsque λ varie d'une manière continue, le développement (63) est convergent sur tout chemin sur lequel l'intégrale \bar{Y} qu'il représente est holomorphe. On en conclut, en raisonnant comme ci-dessus que, quel que soit \bar{X}_0 , l'intégrale tronquée \bar{Y} est toujours unique et ne peut cesser d'exister que *si les extrémités de la ligne d'infinis extrême sont rejetées à l'infini dans la direction réelle positive*.

Il nous reste à voir si, et dans quelles conditions, cette circonstance peut se présenter.

16. Familles d'intégrales tronquées définies par l'équation (B).

Nous allons désormais nous attacher aux équations (B') et (B), et chercher à compléter le plus possible les résultats déjà obtenus.

Nous avons établi que l'équation (B') ou l'équation (B) possède une infinité d'intégrales tronquées dans la direction réelle positive. Il s'agit d'étudier la famille constituée par l'ensemble de ces intégrales.

Nous allons considérer d'abord les intégrales réelles de l'équation (B') [intégrales $Y(X)$ réelles sur l'axe réel positif] : à ces intégrales correspondent des intégrales $y(x)$ de (B) réelles sur tout l'axe réel.

Intégrales réelles de (B') tronquées dans la direction réelle positive. — Considérons une intégrale $Y(X)$ infinie (ayant un pôle) en un point réel positif \bar{X}_0 . Cette intégrale, caractérisée par le paramètre C

du développement (30) relatif au point \bar{X}_0 , est réelle si C est réel. Plaçons-nous dans cette hypothèse, et envisageons la courbe réelle qui représente la variation de $Y(X)$ à droite du point \bar{X}_0 .

Si C est positif et très grand, la courbe a un *infini* \bar{X}_1 très rapproché de \bar{X}_0 : entre \bar{X}_0 et \bar{X}_1 , elle présente un seul minimum dont la valeur est positive et très grande.

Si C est négatif et très grand, la courbe a encore un infini \bar{X}_1 très rapproché de \bar{X}_0 , et elle présente, entre \bar{X}_0 et \bar{X}_1 , un seul minimum dont la valeur est négative et très grande.

Ces remarques nous amènent à distinguer deux catégories d'intégrales réelles polaires en \bar{X}_0 : les intégrales de la première catégorie restent positives entre le pôle \bar{X}_0 et le pôle suivant \bar{X}_1 ; les intégrales de la seconde catégorie présentent un minimum négatif entre \bar{X}_0 et \bar{X}_1 .

Cela posé, faisons décroître C d'une manière continue à partir de $+\infty$. Nous obtenons une série de courbes asymptotes à la droite $X = \bar{X}_0$. Je dis que *ces courbes s'emboîtent les unes dans les autres sans se couper*.

Considérons en effet la courbe $y(x)$ [relative à l'équation (B)] qui correspond à la courbe $Y(X)$. Soient $y_1(x)$, $y_2(x)$ deux courbes, asymptotes à la droite $x = \bar{x}_0$, la seconde étant *au-dessous* de la première au voisinage de l'asymptote : on aura, pour les valeurs x très rapprochées de \bar{x}_0 ,

$$y_2 < y_1, \quad y'_2 < y'_1.$$

Mais on a $y''_1 = 6y_1^2 - 6x$, $y''_2 = 6y_2^2 - 6x$. Ainsi, lorsque x croît à partir de \bar{x}_0 , tant qu'on a $0 < y_2 < y_1$, on a aussi $y''_2 < y''_1$, donc $y'_2 < y'_1$, $y_2 < y_1$. Ainsi l'inégalité $y_2 < y_1$ ne cesse pas d'être vérifiée entre \bar{x}_0 et le pôle suivant, du moins si y_2 reste positif, ce qui a lieu, nous l'avons dit, pour les grandes valeurs de C : cette inégalité entraîne $Y_2 < Y_1$.

Ainsi, pour chaque nouvelle valeur de C (plus petite que la précédente), la courbe représentative de $Y(X)$ enveloppe sa position précédente, et le pôle \bar{X}_1 s'éloigne vers la droite. D'ailleurs, le minimum

de la courbe (entre \bar{X}_0 et \bar{X}_1) reste nécessairement unique et positif. Plus précisément, il reste au-dessus de la branche positive de la courbe

$$6Y^2 - 6 + \frac{4}{25} \frac{Y}{X^2} = 0.$$

En effet, si le point où $Y' = 0$ franchissait cette courbe, il ne donnerait plus un minimum puisqu'on y aurait $Y'' < 0$.

Comment donc les intégrales de la première catégorie rejoignent-elles lorsque C décroît, les intégrales de la seconde catégorie qui ont un minimum négatif? La jonction ne peut avoir lieu que si, pour une valeur intermédiaire de C , le pôle \bar{X}_1 est rejeté à l'infini. Ainsi, les intégrales de la première catégorie, représentées, comme nous venons de le voir, par des courbes extérieures les unes aux autres, et situées toutes au-dessus de toutes les intégrales de seconde catégorie, *tendent toutes* vers une intégrale-limite qui ne présente plus aucun infini à droite de \bar{X}_0 . Cette intégrale est tronquée dans la direction réelle positive. Il résulte des paragraphes précédents qu'elle tend vers la limite 1, fait qu'on vérifierait d'ailleurs aisément, sans sortir du domaine réel.

Ainsi se trouve établie l'existence d'une intégrale tronquée réelle (¹) pour toute valeur réelle positive de \bar{X}_0 . Il résulte du paragraphe 15 que cette intégrale est unique. Le pôle \bar{X}_0 est, pour elle, un sommet de la ligne d'infinis extrême définie au paragraphe 15. Nous appellerons ce pôle *pôle extrême* de l'intégrale.

La valeur \bar{C} de C qui correspond à l'intégrale tronquée est très voisine de -2 lorsque \bar{X}_0 est très grand (positif) : la valeur correspondante de D (voir § 9) est voisine de $-4C$ ou 8.

Remarque. — Nous avons trouvé pour l'intégrale tronquée une valeur minimum inférieure à 1 (la valeur du minimum est $Y = 1 - \alpha$,

(¹) L'allure de la courbe-limite qui représente l'intégrale tronquée est facile à déterminer. Décroissant à partir de l'infini, elle présente une valeur minimum comprise entre la courbe $Y'' - 6 + \frac{4}{25} \frac{Y}{X^2} = 0$ et $Y = 0$; elle est ensuite croissante et asymptote à la droite $X = 1$.

α étant de l'ordre de grandeur de $|\bar{X}_0^{-2}|$). Il en résulte qu'au minimum le paramètre D (ou $Y'^2 - 4Y^3 + 12Y$) est inférieur à 8 (on a $D = 8 - 3\alpha + \dots$). J'en conclus que, pour les grandes valeurs de \bar{X}_0 , \bar{C} , comparable à $-4D$, est *supérieur* à 2. La fonction continue $\bar{C}(\bar{X}_0)$ décroît vers -2 lorsque \bar{X}_0 croît.

Intégrale tronquée présentant en \bar{X}_0 un pôle pénultième. — Parmi les intégrales réelles infinies en un point réel positif \bar{X}_0 , je dis qu'il en existe une, et une seule, qui ne présente à droite de \bar{X}_0 qu'un pôle réel unique \bar{X}_1 : cette intégrale est l'intégrale tronquée, infinie en \bar{X}_1 , dont l'existence a été établie ci-dessus.

Pour le démontrer, considérons de nouveau une intégrale réelle variable $Y(X)$, polaire en X_0 , et appelons \bar{X}_1 le pôle de cette intégrale qui suit immédiatement \bar{X}_0 , et C_1 le paramètre correspondant. Lorsque C est négatif et très grand, il en est de même de C_1 ; l'intégrale $Y(X)$ est de seconde catégorie (voir ci-dessus) entre \bar{X}_0 et \bar{X}_1 , et à droite de \bar{X}_1 . D'ailleurs, on a, d'après les résultats du paragraphe 11 (p. 332) $C_1 > C$.

Faisons croître C d'une manière continue jusqu'à la valeur \bar{C} qui correspond à l'intégrale tronquée. On ne cessera pas (p. 331-332) d'avoir $C_1 > C$. Or appelons \bar{C}_1 la valeur de C_1 qui correspond à l'intégrale tronquée dont \bar{X}_1 est le dernier pôle réel. On a (si \bar{X}_0 est suffisamment grand) $\bar{C}_1 < \bar{C}$ (*vide supra*). Il en résulte que, pour une valeur \bar{C}' de \bar{C} , comprise entre $-\infty$ et \bar{C} , on aura $C_1 = \bar{C}_1$.

Pour cette valeur \bar{C}' , l'intégrale $Y(X)$ est une intégrale tronquée dont \bar{X}_0 est l'avant-dernier pôle réel : ce pôle appartient à une *ligne de pôles pénultième* asymptotiquement parallèle à la ligne de pôles extrême.

Ce résultat, établi pour les grandes valeurs de \bar{X}_0 , subsiste *a fortiori* lorsque \bar{X}_0 décroît vers zéro.

Le paramètre \bar{C}' de l'intégrale tronquée en son pôle pénultième est, de même que C , fonction continue de \bar{X}_0 ; lorsque \bar{X}_0 augmente indéfiniment, \bar{C}' tend vers -2 .

En raisonnant de même, nous obtiendrons (quelque grand que soit \bar{X}_0) une intégrale tronquée présentant en \bar{X}_0 un *pôle antépénultième*, et ainsi de suite.

De ces résultats, nous pouvons évidemment tirer la conséquence suivante : *Lorsque le pôle extrême de l'intégrale tronquée réelle $\bar{Y}(X)$ tend vers l'infini positif, il en est de même du pôle pénultième, du pôle antépénultième et, plus généralement, du pôle de rang n à partir du dernier pôle à droite.*

Intégrales tronquées réelles de l'équation (B). — A l'intégrale tronquée réelle $\bar{Y}(X)$ qui présente un pôle extrême en un point réel positif \bar{X}_0 correspond une intégrale tronquée $\bar{y}(x)$ de (B), dont \bar{x}_0 [égal à $\left(\frac{5}{4}\bar{X}_0\right)^{\frac{4}{5}}$] est le pôle réel extrême. Voyons ce que devient cette intégrale lorsque \bar{x}_0 se déplace sur l'axe réel.

Il résulte de ce qui précède que, pour toute valeur positive de \bar{x}_0 , l'intégrale tronquée $\bar{y}(x)$ existe. Je dis, par contre, que *pour les grandes valeurs négatives de x_0 , il ne peut pas exister d'intégrale tronquée $\bar{y}(x)$.*

Posons, en effet, dans la transformée (B') de (B),

$$X = \sqrt{i} T, \quad Y = -iH.$$

L'axe réel négatif du plan x a pour transformé dans le plan T le demi-axe réel positif. L'équation (B') devient d'ailleurs

$$(64) \quad \frac{d^2 H}{dT^2} = 6H^2 + 6 - \frac{H'}{T} + \frac{4}{25} \frac{H}{T^2}.$$

Donc toutes les intégrales $H(T)$ qui sont infinies au point réel \bar{T}_0 (correspondant à \bar{x}_0) sont réelles sur tout l'axe réel positif.

Considérons alors l'une quelconque de ces intégrales entre le pôle \bar{T}_0 et le pôle réel précédent \bar{T}_{-1} . La méthode de calcul asymptotique du paragraphe 7 est applicable. Appelons en particulier D la valeur de l'expression $H'^2 - 4H^3 - 12H$ au minimum T' (ou en un minimum T') présenté par l'intégrale entre \bar{T}_{-1} et \bar{T}_0 . Formons la fonction elliptique,

intégrale de l'équation $H'^2 = 4H^3 + 12H + D$, qui présente un minimum en T' , et appelons \bar{T}'_{-1} , \bar{T}'_0 les deux pôles de cette fonction qui sont le plus rapprochés à gauche et à droite de T' . *Quel que soit D, la distance $\bar{T}'_0 - \bar{T}'_{-1}$ est inférieure à un nombre fixe*; en particulier \bar{T}'_{-1} est sûrement positif pour les grandes valeurs de T' . Or les calculs asymptotiques du paragraphe 7 montrent que les différences $\bar{T}_0 - \bar{T}'_0$, $\bar{T}_{-1} - \bar{T}'_{-1}$ sont de l'ordre de grandeur de T'^{-1} (par conséquent de T_0^{-1}). J'en conclus que toutes les intégrales ⁽¹⁾ réelles $H(T)$, infinies en \bar{T}_0 présentent, à gauche de \bar{T}_0 , un second pôle positif \bar{T}_{-1} . A ce pôle correspond, pour l'intégrale $\gamma(x)$, un pôle \bar{x}_1 réel négatif situé à droite de \bar{x}_0 . Donc l'intégrale $\gamma(x)$ ne peut admettre \bar{x}_0 comme pôle extrême (du moins lorsque la valeur absolue de \bar{x}_0 est suffisamment grande).

Ce point éclairci, faisons franchir l'origine au pôle extrême \bar{x}_0 de l'intégrale tronquée $\bar{\gamma}(x)$ (ci-dessus définie pour $\bar{x}_0 > 0$), et déplaçons ce pôle vers la gauche. Il doit exister une position a de \bar{x}_0 à partir de laquelle l'intégrale tronquée cesse d'exister. Mais nous avons vu, au paragraphe 15, que l'intégrale tronquée ne peut s'évanouir que dans un cas : lorsque les extrémités de la ligne d'infinis extrême passant par \bar{x}_0 sont toutes deux rejetées à l'infini dans la direction réelle positive. Donc cette circonstance se présentera nécessairement lorsque \bar{x}_0 s'approchera de a .

(1) Il est facile de voir comment sont disposées les courbes (asymptotes à la droite $T = \bar{T}_0$) qui représentent les intégrales réelles $H(T)$ infinies en \bar{T}_0 . Les intégrales sont toutes données, au voisinage de \bar{T}_0 , par un développement de même forme que (30), savoir

$$H = \frac{1}{(T - \bar{T}_0)^2} + \dots + K(T - \bar{T}_0)^4 + \dots,$$

où K est un paramètre réel arbitraire. Pour les grandes valeurs positives de K , la courbe intégrale a, à gauche de \bar{T}_0 , un pôle \bar{T}_{-1} très rapproché de \bar{T}_0 ; entre \bar{T}_{-1} et \bar{T}_0 , elle présente un seul minimum dont la valeur est positive et très grande (*comparez* p. 361). Lorsque K décroît jusqu'à $-\infty$, la valeur du minimum s'abaisse d'une manière continue, passe par un minimum, puis redevient positive et croît indéfiniment. Il n'y a donc plus ici qu'une seule catégorie d'intégrales.

Pour \bar{x}_0 à gauche et voisin de a , toute intégrale réelle $y(x)$ infinie en \bar{x}_0 admet un pôle *réel positif* \bar{x}_1 , lequel peut être d'ailleurs arbitrairement grand, si \bar{x}_0 est suffisamment rapproché de a . Que devient, dans ces conditions, j'entends : lorsque \bar{x}_0 passe à gauche de a , en contournant au besoin ce point, l'intégrale tronquée que nous avons appelée $\bar{y}(x)$?

Cette intégrale, rappelons-le, est définie par la valeur \bar{c} de son paramètre au pôle \bar{x}_0 . Cette valeur \bar{c} , liée à \bar{C} par la relation (31) du paragraphe 8 (p. 313) est une fonction continue de \bar{x}_0 , réelle sur l'axe réel ; d'ailleurs elle tend vers une valeur déterminée lorsque \bar{x}_0 décrit l'axe réel de $+\infty$ vers a : la valeur du paramètre c pour laquelle l'intégrale $y(x)$, infinie au point fixe a , aura son pôle \bar{x}_1 rejeté à l'infini est, en effet, déterminée. La question se pose alors de savoir si la fonction $\bar{c}(\bar{x}_0)$ sera encore déterminée et continue pour les valeurs de \bar{x}_0 situées à gauche de a , et si elle continuera à définir une intégrale tronquée.

Supposons un instant qu'il en soit ainsi. Si l'intégrale tronquée $\bar{y}(x)$ existe encore pour $\bar{x}_0 < a$, c'est donc que \bar{x}_0 est pôle pénultième de cette intégrale ou, plus généralement, $n^{\text{ième}}$ pôle à partir de la droite ⁽¹⁾.

Mais, si \bar{x}_0 est très voisin de a , le pôle \bar{x}_1 de $\bar{y}(x)$ qui suit \bar{x}_0 (à droite) est positif et arbitrairement grand : il en sera de même *a fortiori* du pôle \bar{x}_{n-1} si $n > 2$. Supposons alors que \bar{x}_{n-1} soit pôle extrême pour $\bar{y}(x)$. D'après une proposition établie plus haut, le pôle de rang n , \bar{x}_0 , devrait être arbitrairement grand (positif) en même temps que \bar{x}_{n-1} : conclusion qui contredit nos hypothèses.

Ainsi, lorsque \bar{x}_0 passe à gauche de a (le paramètre \bar{c} variant avec

(1) D'ailleurs l'intégrale tronquée polaire en un point réel \bar{x}_0 est toujours, nécessairement, une intégrale réelle. En effet, supposons que \bar{c} prenne une valeur imaginaire \bar{c}_1 pour \bar{x}_0 réel ; l'intégrale polaire en \bar{x}_0 avec un paramètre imaginaire conjugué de \bar{c}_1 sera imaginaire conjuguée de l'intégrale tronquée définie par $\bar{c} = \bar{c}_1$; donc elle sera elle-même tronquée. Or nous avons vu qu'il ne peut exister qu'une intégrale polaire en \bar{x}_0 tronquée dans la direction réelle positive.

continuité), non seulement le pôle \bar{x}_0 cesse d'être pôle extrême, mais il est *nécessairement suivi d'une infinité de pôles réels. Il n'y a plus d'intégrale tronquée* $\bar{y}(x)$.

Le même raisonnement prouve que si \bar{x}_0 s'approche par un chemin quelconque d'un point réel situé à gauche de a , l'intégrale tronquée cesse nécessairement d'exister pour ce point réel.

En d'autres termes, *la portion de l'axe réel négatif située à gauche de a est une coupure effective ou ligne singulière pour la fonction* $\bar{c}(\bar{x}_0)$.

La *ligne de pôles extrême*, rejetée à l'infini lorsque \bar{x}_0 atteint a , reste à l'infini pour \bar{x}_0 réel et à gauche de a .

Pôles imaginaires de l'intégrale tronquée. — Nous venons d'envisager ci-dessus le cas d'un pôle extrême \bar{x}_0 réel. Nous allons maintenant porter notre attention sur les pôles imaginaires de l'intégrale tronquée $\bar{y}(x)$.

Donnons tout d'abord à \bar{x}_0 une valeur réelle positive très grande. L'intégrale tronquée $\bar{y}(x)$ présente une ligne d'infinis extrême

$$\dots, \bar{x}_{-n}, \dots, \bar{x}_{-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots$$

dont \bar{x}_0 est un sommet. Les autres sommets $\dots, \bar{x}_{-1}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots$, respectivement situés au-dessus et au-dessous de l'axe réel, sont des fonctions continues de \bar{x}_0 . Figurons les courbes réelles $\dots, \Gamma_{-1}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \dots$ que décrivent ces points lorsque \bar{x}_0 décrit l'axe réel de $+\infty$ jusqu'en a (extrémité de la coupure).

D'après ce que nous savons déjà, les points \bar{x}_{-n}, \bar{x}_n d'indices élevés, décriront des courbes fermées Γ_{-n}, Γ_n , allant ⁽¹⁾ de $+\infty$ à $+\infty$ (puisque pour $\bar{x}_0 = a$, les extrémités de la ligne d'infinis sont rejetées à l'infini). Remarquons en outre que les courbes décrites par les points $\dots, \bar{x}_{-1}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots$ ne sauraient se couper entre elles ni couper l'axe réel; en effet, soient \bar{x}' un point quelconque de l'une de ces courbes et \bar{x}'_0 la position correspondante de \bar{x}_0 ; en \bar{x}' aboutissent deux arcs de

(1) Je veux dire par là que les deux branches de la courbe s'éloignent indéfiniment dans la direction réelle positive.

courbe, et deux seulement, correspondant respectivement à $\bar{x}_0 > \bar{x}'_0$ et $\bar{x}_0 < \bar{x}'_0$.

A tout pôle intérieur aux courbes fermées $\Gamma_n, \Gamma_{n+1}, \dots$ correspond une ligne de pôles extrême déterminée, donc une intégrale tronquée unique $\bar{y}(x)$. Considérons alors, un instant, \bar{x}_0 comme fonction de \bar{x}_n . Il y a nécessairement à l'intérieur de Γ_n un point critique α_n de cette fonction. Mais la fonction $\bar{x}_0(\bar{x}_n)$ est nécessairement holomorphe partout où elle est finie. Donc \bar{x}_0 est rejeté à l'infini pour $\bar{x}_n = \alpha_n$. Or il résulte du paragraphe 15 que le pôle \bar{X}_0 correspondant à $\bar{x}_0 \left(\bar{X}_0 = \frac{4}{5} \bar{x}_0^{\frac{5}{4}} \right)$ ne peut être rejeté à l'infini que dans les directions réelles :

Direction réelle positive, et alors les pôles $X_n, \bar{X}_{n+1}, \dots$ d'indices élevés, et, par conséquent, les pôles correspondants $\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \dots$, seront rejetés à l'infini dans la même direction ;

Direction réelle négative en passant au-dessous de l'origine, et alors la demi-ligne d'infinis $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \dots$ sera tout entière rejetée à l'infini dans la même direction ;

Direction réelle négative en passant au-dessus de l'origine, et alors la demi-ligne d'infinis $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \dots$ est tout entière rejetée à l'infini dans la même direction.

Pour \bar{x}_n fini et égal à α_n (au-dessous de l'axe réel) c'est nécessairement la dernière circonstance qui se présente. Le point \bar{x}_0 est donc rejeté à l'infini, dans le plan x , au-dessus de l'axe imaginaire, suivant la direction qui fait avec l'axe réel positif l'angle $\frac{2\pi}{5}$. L'intégrale $\bar{y}(x)$ coïncide donc pour $\bar{x}_n = \alpha_n$ avec l'intégrale tritronquée dans les directions OA_1, OA_2, OA_3 (voir la figure 6 du paragraphe 14). Cette intégrale est, nous l'avons vu, unique (§ 14). Il n'y a donc à l'intérieur de Γ_n qu'un seul point critique (transcendant), $\bar{x}_n = \alpha_n$, de la fonction $\bar{x}_0(\bar{x}_n)$.

Cela dit, considérons la fonction $\bar{x}_1(\bar{x}_n)$. Lorsque \bar{x}_n se meut d'une manière quelconque à l'intérieur Γ_n , le point \bar{x}_1 ne peut franchir l'axe réel (car une intégrale tronquée qui a un pôle réel a nécessairement un pôle sur le contour Γ_n , mais aucun dans Γ_n). Donc il n'est pas pos-

sible que, pour $\bar{x}_n = \alpha_n$, le point \bar{x}_1 soit, comme \bar{x}_0 , rejeté à l'infini au-dessus de l'axe réel. En conséquence, \bar{x}_1 reste à distance finie et tend vers α_1 lorsque \bar{x}_n tend vers α_n . La fonction $\bar{x}_1(\bar{x}_n)$ est uniforme à l'intérieur de Γ_n , et la courbe Γ_1 est nécessairement une courbe fermée allant de $+\infty$ à $+\infty$ (voir p. 367, note 1) et enveloppant le point α_1 .

La même conclusion s'applique aux courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots$, toutes ces courbes étant d'ailleurs, nous l'avons dit, extérieures les unes aux autres.

Ces remarques vont nous permettre d'établir le fait suivant : Soit \bar{x}'_0 un pôle quelconque de l'intégrale tronquée $\bar{y}(x)$ situé au-dessous de l'axe réel; lorsque \bar{x}'_0 varie d'une manière quelconque sans franchir l'axe réel, l'intégrale tronquée ne cesse pas d'exister.

En premier lieu, nous sommes déjà assurés que, pour toute valeur de \bar{x}'_0 située à l'intérieur de l'une des courbes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \dots$, l'intégrale tronquée existe : en effet, l'intégrale tronquée qui a un pôle \bar{x}'_1 dans Γ_1 a une série de pôles $\bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n, \dots$ respectivement situés dans $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$, et, lorsque ces pôles sont rejetés vers l'infini positif, ils deviennent tous infinis en même temps.

Soit maintenant \bar{x}'_0 extérieur aux courbes Γ . Imaginons une courbe Γ'_1 qui, coïncidant d'abord avec Γ_1 , se déforme et s'agrandit sans jamais avoir aucun point commun avec $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$ et l'axe réel. Lorsque \bar{x}_1 décrit Γ'_1 , les points $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots$ décrivent des courbes $\Gamma'_2, \dots, \Gamma'_n, \dots$ qui enveloppent respectivement les courbes $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$. Ces courbes se correspondent point par point (les extrémités correspondant aux extrémités); elles n'ont aucun point commun avec $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$ et l'axe réel. Faisons en particulier passer le contour Γ'_1 par le point donné \bar{x}'_0 . Lorsque le pôle \bar{x}_1 va de $+\infty$ en \bar{x}'_0 sur le contour Γ'_1 , les pôles $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots$ tendent, sur leurs chemins respectifs $\Gamma'_2, \dots, \Gamma'_n, \dots$, vers des points situés à distance finie. Donc la portion inférieure $\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \dots$ de la ligne d'infinis extrême n'est pas rejetée vers l'infini positif; donc l'intégrale tronquée ne peut cesser d'exister pour la position considérée de \bar{x}'_0 .

Nous aboutirons bien entendu au même résultat en nous plaçant

au-dessus de l'axe réel, et nous serons ainsi conduits aux conclusions suivantes :

Considérons l'intégrale tronquée $\bar{y}(x)$, infinie en un point \bar{x}_0 que nous supposons réel et positif; appelons \bar{c} le paramètre de cette intégrale en \bar{x}_0 . *Lorsqu'à partir de sa position initiale, le point \bar{x}_0 se meut, soit sur l'axe réel jusqu'en a , soit d'une manière quelconque au-dessus ou au-dessous de l'axe réel, l'intégrale tronquée ne cesse d'exister pour aucune des positions traversées par \bar{x}_0 : elle se déforme d'une manière continue; le paramètre \bar{c} est une fonction continue de \bar{x}_0 [fonction holomorphe donnée par le développement (63) pour toutes ces valeurs].* PAR CONTRE L'INTÉGRALE TRONQUÉE N'EXISTE PLUS LORSQUE \bar{x}_0 PREND UNE VALEUR RÉELLE NÉGATIVE INFÉRIEURE A a ; LA POSITION DE L'AXE RÉEL SITUÉ A GAUCHE DE a EST UNE LIGNE SINGULIÈRE POUR LA FONCTION $\bar{c}(\bar{x}_0)$.

Les cinq familles d'intégrales tronquées et les fonctions φ . — La famille des intégrales $\bar{y}(x)$, tronquées dans la direction réelle positive, est ainsi entièrement définie. Nous désignerons dorénavant par $\varphi_1(\bar{x}_0)$ le paramètre \bar{c} correspondant à cette famille. Il résulte de ce qui précède que la fonction φ_1 donne la valeur du paramètre d'une intégrale quelconque $\bar{y}(x)$, de la famille considérée en l'un quelconque des sommets (pôles) de sa ligne de pôles extrême ⁽¹⁾.

Considérons, d'autre part, les directions OA_2, OA_3, OA_5 du plan x (*vide supra*, fig. 6, p. 293) qui font avec l'axe réel positif OA les angles $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \dots, \frac{8\pi}{5}$. Il existe, pour chacune de ces cinq directions, une famille d'intégrales tronquées qu'on déduira immédiatement de la famille ci-dessus obtenue en remarquant que l'équation (B) n'est pas altérée par le changement de variables $x, xe^{\frac{2i\pi}{5}}$; $y, ye^{\frac{6i\pi}{5}}$. Les paramètres des intégrales de ces diverses familles en leurs pôles extrêmes sont donnés respectivement par quatre fonctions $\varphi_2(\bar{x}_0), \varphi_3(\bar{x}_0), \dots, \varphi_5(\bar{x}_0)$, dont chacune présente une coupure rectiligne et est uniforme partout ailleurs.

(1) Cf. sixième Partie.

A tout point \bar{x}_0 non situé sur les coupures correspondent cinq intégrales tronquées indéfinies en ce point.

Les pôles extrêmes des cinq intégrales tronquées (définies au paragraphe 14) sont les points \bar{x}_0 où deux des cinq fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ prennent la même valeur.

Il serait intéressant de poursuivre l'étude de la fonction uniforme φ_1 , qui paraît présenter des particularités remarquables. Dans toute direction dont l'argument est différent de $-\pi$ (c'est-à-dire dans toute direction autre que celle de la coupure) la fonction \bar{C} correspondant à $\bar{c} = \varphi_1(\bar{x}_0)$ tend vers -2 ; donc [voir p. 313 l'égalité (31) liant C à c], le rapport $x^{-\frac{3}{2}}\varphi_1(x)$ tend ⁽¹⁾ vers -2 ; sur les rayons situés de part et d'autre de la coupure, le produit $\varphi_1 x^{-\frac{3}{2}}$ admet donc des limites égales et de signes contraires.

L'inverse de la fonction φ_1 semble jouir, elle aussi, de propriétés intéressantes.

Malheureusement l'étude de la fonction φ_1 , dont nous n'avons aucune définition analytique explicite, présente de grandes difficultés dont l'analyse qui précède a pu donner une idée.

Le paramètre aux sommets de la ligne de pôles pénultième. — Nous avons défini plus haut ce qu'il faut entendre par *ligne de pôles pénultième* d'une intégrale tronquée $Y(X)$ ou $y(x)$, et nous avons démontré qu'à tout point réel positif \bar{X}_0 (ou \bar{x}_0) correspond une valeur du paramètre et une seule pour laquelle \bar{x}_0 est pôle pénultième d'une intégrale réelle. Désignons alors par $\bar{c}_1 = \varphi_{11}(\bar{x}_0)$ le paramètre de l'intégrale pour laquelle \bar{x}_0 est un sommet de la ligne de pôles pénultième. Nous pourrions étudier la fonction $\varphi_{11}(\bar{x}_0)$ comme nous avons étudié la fonction φ_1 .

La fonction φ_{11} a nécessairement la même *coupure* ou *ligne singulière* que la fonction φ_1 . Il paraît très vraisemblable qu'elle est uniforme partout ailleurs.

(1) En prenant comme valeur de \sqrt{x} ou $x^{\frac{1}{2}}$ la détermination positive pour x réel positif. Voir la note de la page 350.

17. Détermination analytique des périodes d'une intégrale quelconque.
Fonctions connexes.

Considérons une intégrale quelconque $y(x)$ de (B) polaire en un point \bar{x}_0 : l'intégrale est définie par la valeur c_0 du paramètre c qui figure dans son développement autour de \bar{x}_0 .

Appelons \bar{x}_1 un autre pôle de $y(x)$, par exemple celui qui est le plus rapproché de \bar{x}_0 , et désignons par c_1 le paramètre de l'intégrale en ce pôle.

L'étude analytique des périodes revient à l'étude des pôles et paramètres $\bar{x}_0, \bar{x}_1, c_0, c_1$ considérés comme fonctions les unes des autres. Nous devons nous contenter d'amorcer cette étude qui nous paraît appelée à jouer un rôle important dans l'étude analytique des transcendentes de M. Painlevé. Certaines considérations *a priori*, que nous développerons dans notre sixième Partie, nous ramèneront d'ailleurs à ces mêmes fonctions dont nous allons signaler ici quelques caractères.

Remarquons d'abord que les fonctions $\bar{x}_1(\bar{x}_0, c_0), c_1(\bar{x}_0, c_0), \bar{x}_0(\bar{x}_1, c_1), c_0(\bar{x}_1, c_1)$ sont nécessairement holomorphes partout où elles sont finies (cf. *infra*, sixième Partie). Ainsi, ces fonctions ne présentent des singularités que lorsque l'intégrale $y(x)$ coïncide avec l'une des intégrales tronquées dont il a été question plus haut. Leur mécanisme et leurs propriétés seront donc faciles à déterminer dès que l'étude des intégrales tronquées aura été faite d'une manière complète.

La fonction $\bar{x}_1(c_0)$. — Cela dit, voyons d'abord comment nous pouvons définir analytiquement les périodes $\omega_+, \omega_-, \omega'_+, \omega'_-$ (voir § 7 et suiv.) qui correspondent aux substitutions faisant passer x (ou X) d'un quadrilatère des périodes dans un quadrilatère contigu. Il faut pour cela savoir déterminer \bar{x}_1 lorsque \bar{x}_0 et c_0 sont connus.

Considérons, par exemple, les pôles \bar{X}_0 et $\bar{X}_1 = \bar{X}_0 + \omega_+(\bar{X}_0)$ du plan X auxquels correspondent les pôles $\bar{x}_0, \bar{x}_1 + \omega_+(\bar{x}_0)$ du plan x [comme il n'y a pas de confusion possible, j'emploie la même lettre ω

pour désigner la période de $Y(X)$ et celle de $y(x)$]. Laissant \bar{X}_0 et \bar{x}_0 fixes, regardons \bar{X}_1 , ou \bar{x}_1 , comme fonction du paramètre C_0 , ou c_0 . Pour $c_0 = C_0 = \infty$, les périodes sont nulles, et $\bar{X}_1 = \bar{X}_0$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_0$. Faisons maintenant décroître C_0 sur un chemin rectiligne quelconque. Il résulte de l'analyse du paragraphe 7 et des propriétés des fonctions elliptiques asymptotes aux $Y(X)$ que \bar{X}_1 reste toujours fini à moins que C_0 ne prenne une certaine valeur isolée qui est voisine de l'une des valeurs ± 2 , mettons, pour fixer les idées, de la valeur -2 ; la valeur correspondante de c_0 est la valeur $\bar{c}_0 = \varphi(\bar{x}_0)$ égale au paramètre de l'une des cinq intégrales tronquées; les fonctions $\bar{x}_1(c_0)$, $c_1(c_0)$ présentent une singularité pour cette valeur isolée de c_0 .

Menons alors dans le plan c_0 une coupure rectiligne joignant à l'infini le point $\bar{c}_0 = \varphi(\bar{x}_0)$. Dans le plan ainsi armé d'une coupure, les fonctions $\bar{x}_1(c_0)$, $c_1(c_0)$ et par conséquent la fonction $\omega_+(c_0) = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$ sont partout uniformes et holomorphes (sauf en \bar{c}_0).

De même, chacune des fonctions $\omega_-(c_0)$, $\omega'_+(c_0)$, $\omega'_-(c_0)$ sera uniforme et holomorphe dans le plan c_0 armé d'une coupure rectiligne unique (il s'agit ici, bien entendu, de coupures artificielles et non plus de coupures effectives comme dans le cas des fonctions φ).

Si c_0 franchit la coupure relative à ω_+ dans un sens ou dans l'autre, ω_+ se change en $\omega_+\omega'_+$ ou $\omega_+\omega'_-$. Et ainsi de suite. Le mécanisme des permutations subies par les périodes est bien connu.

Les fonctions $\omega_+(c_0, \bar{x}_0)$ rendues artificiellement uniformes comme il vient d'être dit, ne sont que des branches de fonctions. Mais il suffit de connaître ces quatre branches de fonctions pour construire entièrement le réseau des quadrilatères des périodes relatif à une intégrale $y(x)$ quelconque et pour définir les substitutions correspondantes.

La fonction $c_1(c_0)$. — Laissant toujours \bar{x}_0 fixe, considérons maintenant c_1 en fonction de c_0 . Cette fonction est évidemment uniforme et holomorphe sur tout chemin décrit par c_0 , aussi longtemps que la fonction $\bar{x}_1(c_0)$ est elle-même holomorphe : donc elle est holomorphe dans le plan c_0 armé d'une coupure rectiligne unique passant par $\bar{c}_0 = \varphi(\bar{x}_0)$. La branche de fonction $c_1(c_0)$, à laquelle nous avons

affaire dans le plan ainsi coupé, présente la particularité suivante : considérons [en revenant à l'intégrale $Y(X)$ transformée en $y(x)$] la fonction ⁽¹⁾ $C_1(C_0)$: lorsque $|\bar{X}_0|$ devient arbitrairement grand, la « branche » $C_1(C_0)$ est arbitrairement voisine de C_0 dans tout le plan C_0 .

Pour $c_0 = \bar{c}_0$, on a

$$C_1 = -2, \quad c_1 = \infty,$$

la fonction $c_1(c_0)$ présente une singularité transcendante.

La fonction $c_1(\bar{x}_1)$. — Laissant toujours \bar{x}_0 fixe, considérons c_1 en fonction de x_1 . Pour $c_0 = \bar{c}_0 = \varphi_1(\bar{x}_0)$, \bar{x}_1 et c_1 deviennent infinis en même temps. Si, d'autre part, c_0 tourne indéfiniment autour de \bar{c}_0 sur une petite circonférence γ , le pôle \bar{x}_1 , partant d'une valeur initiale \bar{x}_{10} , se permute avec une infinité de valeurs nouvelles x_{11}, x_{12}, \dots et $x_{1,-1}, x_{1,-2}, \dots$ qui sont les sommets d'une ligne de pôles; c_1 , partant d'une valeur initiale c_{10} , se permute avec les valeurs c_{11}, c_{12}, \dots et $c_{1,-1}, c_{1,-2}, \dots$ qui sont les paramètres d'une même intégrale aux sommets $\dots, \bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}, \dots$ de la ligne de pôles. D'ailleurs, sur le chemin décrit par \bar{x}_1 pour c_0 tournant sur γ , chemin qui est tout entier très éloigné si le rayon de γ est très petit, la fonction $c_1(\bar{x}_1)$ est holomorphe. Appelons $\psi(\bar{x}_1)$ cette fonction. On voit qu'en tous les sommets $\dots, \bar{x}_{10}, x_{11}, \dots$ de la ligne de pôles considérée, le paramètre de l'intégrale $y(x)$ sera donné par une même fonction $\psi(\bar{x}_1)$ où l'on fera successivement $\bar{x}_1 = \dots, \bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}, \dots$.

D'ailleurs la définition même de la fonction ψ montre que, pour une même ligne de pôles, il existe une infinité de fonctions ψ donnant les valeurs des paramètres aux sommets $\dots, \bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}, \dots$. Ces diverses fonctions reprendront toutes les mêmes valeurs aux points $\dots, \bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}, \dots$.

La fonction $c_1 = \psi(\bar{x}_1)$ présentera d'ailleurs un ensemble de points

⁽¹⁾ Je rappelle [voir la relation (31), p. 313] que C_0 et C_1 sont des fonctions linéaires en c_0 ou c_1 , algébriques en \bar{x}_0 ou \bar{x}_1 . Pour $|\bar{x}_0|$ (ou $|\bar{x}_1|$) très grand, c_0 (ou c_1) a pour valeur principale $C_0 \bar{x}_0^{-\frac{3}{2}}$ (ou $C_1 \bar{x}_1^{-\frac{3}{2}}$).

critiques algébriques qui sera facile à étudier. En effet, considérons la fonction $C_1(\bar{X}_1)$, transformée de $c_1(\bar{x}_1)$. On saurait déterminer les points critiques de cette fonction si l'équation (B') se réduisait à $Y'' = 6Y^2 - 6$ (la fonction considérée se ramène alors à l'expression du module d'une fonction elliptique en fonction d'une période). On aura des points critiques algébriques voisins (arbitrairement voisins si $|\bar{X}_0|$ est arbitrairement grand) pour les branches $C_1(\bar{X}_1)$ relatives à l'équation (B') complète.

Dans le cas où l'on donnerait une valeur fixe, non plus au pôle \bar{x}_0 (ou \bar{X}_0), mais au paramètre correspondant c_0 , on aurait encore, en faisant varier \bar{x}_0 , une fonction $c_1 = g(\bar{x}_1)$ donnant le paramètre de l'intégrale en tous les sommets d'une même ligne de pôles $\dots, \bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}, \dots$. Mais dans ce cas les singularités de la fonction $c_1 = g(\bar{x}_1)$ n'apparaissent pas immédiatement. Il serait intéressant d'étudier cette fonction g dont l'allure paraît curieuse.

(A suivre.)