

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. VERGNE

**Sur un cas particulier de développement d'une fonction en
série de fonctions données à l'avance**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 29 (1912), p. 199-208

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__199_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN CAS PARTICULIER
DE
DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION
EN
SÉRIE DE FONCTIONS DONNÉES A L'AVANCE ⁽¹⁾;

PAR M. H. VERGNE.



I. LEMME. — Je considère une suite de fonctions

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_i(x), \dots,$$

périodiques, de période 1, ainsi que de leurs dérivées premières et secondes; les dérivées secondes $\varphi_i''(x)$ sont supposées développables en séries de Fourier uniformément convergentes.

Je suppose de plus que les fonctions $\varphi_i(x)$ forment un système *fermé* : j'entends par là qu'il n'existe aucune fonction intégrable et de carré intégrable (autre que zéro), orthogonale à tous les φ_i dans l'intervalle 0 — 1. Je dis qu'alors *toute fonction de carré intégrable, orthogonale à toutes les dérivées secondes φ_i'' , est une constante.*

Avec les fonctions $\varphi_i(x)$ je forme, suivant un procédé bien connu, des combinaisons linéaires $\psi_i(x)$ en posant

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \nu_0 \varphi_0, \\ \psi_1 &= \nu_1 \varphi_1 + \lambda_{1,0} \psi_0, \\ \psi_2 &= \nu_2 \varphi_2 + \lambda_{2,1} \psi_1 + \lambda_{2,0} \psi_0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \psi_i &= \nu_i \varphi_i + \lambda_{i,i-1} \psi_{i-1} + \lambda_{i,i-2} \psi_{i-2} + \dots + \lambda_{i,0} \psi_0, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

(¹) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Note du 8 mai 1911 (t. 152, p. 1231).

les fonctions $\psi_i(x)$ ainsi formées sont, comme les $\varphi_i(x)$, périodiques et de période 1, et admettent, comme elles, des dérivées premières et secondes; et l'on pourra déterminer les constantes λ et ν , de façon que la suite des ψ_i forme un système *orthogonal et normal* ⁽¹⁾ (aucune des constantes ν n'étant nulle). Puisque la suite des φ_i est fermée, la suite des ψ_i l'est aussi évidemment; et il suffira de montrer que toute fonction de carré intégrable orthogonale à tous les ψ_i'' est une constante.

Je développe $\psi_i(x)$ en série de Fourier sous la forme

$$(A) \quad \psi_i(x) = \frac{a_i^0}{2} + a_i^1 \cos 2\pi x + b_i^1 \sin 2\pi x + \dots + a_i^k \cos 2k\pi x + b_i^k \sin 2k\pi x + \dots;$$

puisque les fonctions ψ_i forment un système orthogonal et normal, on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_i^0 a_j^0}{2} + \sum_k a_i^k a_j^k + b_i^k b_j^k = 0 \quad (i \neq j), \\ \frac{(a_i^0)^2}{2} + \sum_k (a_i^k)^2 + (b_i^k)^2 = 2. \end{array} \right.$$

Les dérivées secondes ψ_i'' , qui sont par hypothèse développables en séries de Fourier, s'obtiendront en différentiant deux fois, terme à terme, les formules (A)

$$(B) \quad -\frac{1}{4\pi^2} \psi_i''(x) = a_i^1 \cos 2\pi x + b_i^1 \sin 2\pi x + \dots + a_i^k k^2 \cos 2k\pi x + b_i^k k^2 \sin 2k\pi x + \dots$$

La suite des ψ_i est supposée fermée : alors les équations en nombre infini

$$(A)' \quad 0 = \frac{a_i^0 x_0}{2} + a_i^1 x_1 + b_i^1 y_1 + \dots + a_i^k x_k + b_i^k y_k + \dots,$$

n'admettront pas d'autre solution que $x_k = y_k = 0$; en effet, d'après

(1) C'est-à-dire de façon qu'on ait

$$\int_0^1 \psi_i(x) \psi_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j), \quad \int_0^1 [\psi_i(x)]^2 dx = 1.$$

les formules (1), ces équations rentrent dans le type étudié par M. Riesz (*Comptes rendus*, 18 mars 1907), et elles admettent au moins une solution telle que la série $\Sigma(x_k^2 + y_k^2)$ soit convergente; si cette solution n'était pas l'unique solution $x_k = y_k = 0$, ces quantités x_k, y_k définiraient, d'après un théorème connu de M. Riesz (*loc. cit.*), les coefficients de Fourier d'une fonction de carré intégrable, qui serait orthogonale à tous les ψ_i ; la suite des ψ_i ne serait donc pas fermée, contrairement à l'hypothèse. Les équations (A)' entraînent donc des valeurs nulles pour tous les x_k, y_k .

Si maintenant il existait une fonction $g(x)$ non constante, orthogonale à tous les ψ_i'' , en multipliant les équations (B) par $g(x)dx$, et intégrant de 0 à 1, on conclurait que les équations

$$(B)' \quad 0 = a_i^1 x_1 + b_i^1 y_1 + \dots + a_i^k k^2 x_k + b_i^k k^2 y_k + \dots$$

admettent une solution n'annulant pas tous les x_k et les y_k ; ce qui est manifestement en contradiction avec ce qui vient d'être dit pour les équations (A)'.

Donc toute fonction orthogonale à tous les ψ_i'' (c'est-à-dire à tous les φ_i'') est une constante.

Remarque. — J'ai raisonné sur les dérivées secondes φ_i'' ; mais j'aurais aussi bien pu raisonner sur les dérivées premières φ_i' , ou sur les dérivées d'un ordre quelconque (pourvu qu'elles existent et soient développables en séries de Fourier uniformément convergentes).

II. THÉORÈME. — Je reprends la suite de fonctions

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \dots, \quad \varphi_i(x), \quad \dots,$$

toujours supposées périodiques et de période 1, ainsi que leurs dérivées premières et secondes et formant un système fermé. Et je suppose en outre maintenant que la suite des *dérivées premières* $\varphi_i'(x)$ forme un système orthogonal et normal.

Dans ces conditions, un théorème bien connu de M. Schmidt

(*Mathematische Annalen*, t. LXIII) nous apprend que la série

$$(1) \quad \sum_v [\varphi_v(x) - \varphi_v(0)] \int_0^1 \varphi'_v(\xi) f'(\xi) d\xi$$

est absolument et uniformément convergente quel que soit x ; $f'(\xi)$ désigne une fonction arbitraire, intégrable et de carré intégrable, définie entre 0 et 1.

Intégrant cette série (1) terme à terme entre 0 et 1, j'obtiens la nouvelle série (à termes constants) absolument convergente

$$(2) \quad \sum_v [\bar{\varphi}_v - \varphi_v(0)] \int_0^1 \varphi'_v(\xi) f'(\xi) d\xi,$$

dans laquelle je désigne par $\bar{\varphi}_v$ la valeur moyenne de $\varphi_v(x)$ dans l'intervalle (0 — 1). Retranchant la série (2) de la série (1), je vois que la série

$$S(x) = \sum_v [\varphi_v(x) - \bar{\varphi}_v] \int_0^1 \varphi'_v(\xi) f'(\xi) d\xi$$

converge absolument et uniformément.

Si je prends pour $f(x)$ [fonction primitive de $f'(x)$] une fonction périodique, c'est-à-dire telle que

$$f(1) = f(0),$$

je constate immédiatement, par des intégrations par parties, que la fonction

$$f(x) - S(x)$$

est orthogonale à toutes les dérivées secondes φ''_i . Il en résulte, d'après le lemme, que cette fonction est une constante, c'est-à-dire que la série $S(x)$ représente $f(x)$ à une constante additive près.

Nous énonçons donc ce théorème, modifiant légèrement celui donné par M. Schmidt (*loc. cit.*) :

Étant donnée une suite fermée de fonctions périodiques de périodes 1,

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \dots, \quad \varphi_v(x), \quad \dots,$$

possédant en tout point des dérivées premières et secondes ⁽¹⁾, si le système des dérivées premières $\varphi'_\nu(x)$ est orthogonal, toute fonction périodique $f(x)$ de même période 1, admettant une dérivée première (de carré intégrable), est développable suivant les fonctions

$$[\varphi_\nu(x) - \bar{\varphi}_\nu],$$

en une série absolument et uniformément convergente.

III. APPLICATION. — Faisons l'application du théorème précédent au problème suivant de Physique mathématique, qui se pose dans la théorie des ondes liquides par émission ⁽²⁾. Il s'agit de déterminer une fonction $\varphi(x, y, t)$, dépendant du point (x, y) et du temps t , définie à l'intérieur d'un contour C, et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Équation indéfinie...} & \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \\ \text{Condition à la frontière.....} & \frac{d\varphi}{dn} = c(s) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \text{État initial (pour } t=0) \dots & \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(s) \quad (\text{sur le contour C}); \end{array} \right.$$

s désigne l'abscisse curviligne d'un point quelconque du contour frontière C, et $c(s)$ et $f(s)$ sont deux fonctions données sur ce contour; $\frac{d}{dn}$ désigne la dérivée normale intérieure.

Ce problème, on le sait, est complètement déterminé et n'admet qu'une solution, lorsque la fonction $c(s)$ n'est jamais négative, ce que nous supposons.

Cherchons à satisfaire aux deux premières équations (1) par des

(1) Les dérivées secondes sont supposées développables en séries de Fourier uniformément convergentes.

(2) H. VERGNE, *Contribution à la théorie des ondes liquides* (Thèse Gauthier-Villars, 1909, p. 53 et suivantes). Quand on étudie les oscillations d'un liquide dans un vase, le contour C à considérer présente des points anguleux, et la fonction non négative $c(s)$ dont il va être question est discontinue précisément en ces points. Nous laissons ici complètement de côté la grave difficulté qui résulte de ces singularités. Notre contour C et la fonction $c(s)$ seront supposés *suffisamment réguliers*.

solutions simples de la forme

$$(2) \quad \sin(\sqrt{k}t) U(x, y);$$

si nous substituons cette valeur (2) de φ dans les deux premières équations (1), il vient pour déterminer la fonction $U(x, y)$ les conditions suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Équation indéfinie} \dots\dots\dots \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \\ \text{Condition au contour} \dots\dots\dots \frac{dU}{dn} = -k c(s) U. \end{array} \right.$$

Si le paramètre k est quelconque, il est clair que ces conditions entraînent $U = 0$ identiquement. Mais on peut établir l'existence effective d'une *infinité* de valeurs de k ,

$$k_0 = 0, \quad k_1, \quad k_2, \quad \dots, \quad k_i, \quad \dots,$$

qui sont toutes positives (sauf la première), et auxquelles correspondent respectivement des solutions non nulles (déterminées à un facteur constant près),

$$U_0 = 1, \quad U_1, \quad U_2, \quad \dots, \quad U_i, \quad \dots,$$

pour le système (3). De plus, si l'on appelle $U_i(s)$ la valeur que prend $U_i(x, y)$ au contour C , la suite de fonctions périodiques

$$U_0(s) = 1, \quad U_1(s), \quad U_2(s), \quad \dots, \quad U_i(s), \quad \dots,$$

forme un système *fermé* ⁽¹⁾. Et, si le contour C et la fonction $c(s)$ sont *suffisamment réguliers*, il est clair que ces fonctions $U_i(s)$ posséderont des dérivées premières et secondes ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Ces points se trouvent établis dans ma Thèse (p. 55 à 71).

⁽²⁾ En particulier, et pour ne citer qu'un exemple beaucoup trop restrictif, cela aura certainement lieu si le contour C et la fonction $c(s)$ sont régulièrement analytiques. Montrons, en effet, qu'étant donnée une fonction harmonique U définie à droite, par exemple, d'un arc régulier de courbe analytique $\alpha\beta$, et satisfaisant, le long de cet arc,

Cela posé, revenons au problème (1). Si la fonction donnée $f(s)$ est précisément $U_i(s)$, il est évident que la solution du problème (1)

à la condition

$$\frac{dU}{dn} = -kc(s)U - g'(s),$$

c et g étant des fonctions analytiques du paramètre (l'arc s par exemple) qui fixe la position du point sur l'arc $\alpha\beta$; cette fonction U est prolongeable analytiquement à gauche de l'arc $\alpha\beta$ (fig. 1).

Au moyen d'un petit arc $\alpha'\gamma\beta'$ se raccordant aux deux points α' et β' avec l'arc $\alpha\beta$,

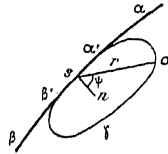


Fig. 1.

formons un contour $\alpha'\gamma\beta'\alpha'$ présentant avec l'arc $\alpha\beta$ une partie commune $\alpha'\beta'$, et à l'intérieur duquel la fonction U est bien définie: nous pouvons dire que le long de ce contour nous avons

$$\frac{dU}{dn} = -kc'(s)U - g'(s),$$

c' et g' étant certaines fonctions de l'arc s , qui se confondent avec c et g sur $\alpha'\beta'$. Si nous cherchons à représenter U par le potentiel d'une simple couche de densité ρ , étalée sur le contour $\alpha'\gamma\beta'\alpha'$, nous trouvons, pour déterminer la densité ρ , l'équation de Fredholm

$$\rho(s) - \frac{1}{\pi} \int \left[\frac{\cos \psi}{r} + kc'(s) \log \frac{1}{r} \right] \rho(\sigma) d\sigma = \frac{1}{\pi} g'(s),$$

dans laquelle r et ψ ont les significations marquées sur la figure, et où l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\sigma$ du contour $\alpha'\gamma\beta'\alpha'$. Or, en tant que fonctions de s , le second membre $\frac{1}{\pi} g'(s)$, et le noyau $\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \psi}{r} + kc'(s) \log \frac{1}{r} \right]$, sont des fonctions analytiques lorsque le point s est entre α' et β' , et cela quelle que soit la position du point σ : on en conclut que la solution ρ de l'équation de Fredholm est analytique dans le même intervalle. Donc U , étant le potentiel d'une simple couche dont la densité le long de $\alpha'\beta'$ est une fonction analytique de l'arc, est prolongeable analytiquement à gauche de $\alpha'\beta'$, d'après une propriété connue des potentiels.

Cette remarque rappelle, et généralise en quelque sorte, le théorème dû à M. Schwarz sur la possibilité du prolongement analytique d'une fonction harmonique qui prend le long d'un arc analytique une succession de valeurs fonction analytique de l'arc (E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, 2^e édition, Chap. X, p. 298).

sera

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \sin(\sqrt{k_i} t) U_i(x, y) \quad (1);$$

de même, si $f(s)$ est la somme d'un nombre fini de fonctions $U_i(s)$,

$$f(s) = \sum c_i U_i(s),$$

la solution du problème (1) sera

$$\varphi = \sum \frac{c_i}{\sqrt{k_i}} \sin(\sqrt{k_i} t) U_i(x, y).$$

Passons au cas où la fonction $f(s)$ n'est pas susceptible de cette forme. Avec nos fonctions $U_i(s)$, nous pouvons, employant un procédé bien connu, former des combinaisons linéaires $V_i(s)$ en posant

$$\begin{aligned} V_0 &= U_0, \\ V_1 &= U_1 + \lambda_{1,0} V_0, \\ V_2 &= U_2 + \lambda_{2,1} V_1 + \lambda_{2,0} V_0, \\ &\dots\dots\dots, \\ V_i &= U_i + \lambda_{i,i-1} V_{i-1} + \lambda_{i,i-2} V_{i-2} + \dots + \lambda_{i,0} V_0, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

les fonctions $V_i(s)$ ainsi formées sont périodiques, comme les $U_i(s)$, et admettent comme elles des dérivées premières et secondes; et nous pouvons, de proche en proche, déterminer les constantes λ de façon que la suite des dérivées $V'_i(s)$ forme un système orthogonal; et même, V_0 étant une constante, les λ d'indice 0 ne sont pas déterminés par cette condition et restent arbitraires; nous les choisirons de façon que tous les V_i (sauf V_0) aient une valeur moyenne nulle. Il est évident d'ailleurs que les $V_i(s)$ forment, comme les $U_i(s)$, un système fermé.

(1) On peut dire que cette formule n'est pas en défaut même pour l'indice 0; car si $f(s) = U_0 = 1$, la solution est $\varphi = t$, qui rentre bien dans la formule, si l'on convient de poser $\frac{\sin \sqrt{k_0} t}{\sqrt{k_0}} = t$ pour $k_0 = 0$. Ce terme séculaire $\varphi = t$, indépendant de x et y , n'offre pas d'intérêt dans le problème hydrodynamique où φ représente le potentiel des vitesses.

Alors nous sommes dans les conditions d'application du théorème. Si nous supposons que la fonction donnée $f(s)$, qui est évidemment périodique, admet une dérivée première (de carré intégrable), cette fonction sera représentable par une série

$$f(s) = \sum c_i V_i(s),$$

absolument et uniformément convergente.

Nous savons résoudre le problème (1) pour chaque terme de cette série, puisque $V_i(s)$ est la somme d'un nombre *fini* de fonctions $U_i(s)$; la solution pour la série complète s'obtiendra en faisant la somme des solutions correspondant à ses différents termes, puisque toutes les équations du problème sont linéaires.

IV. REMARQUE SUR LA REPRÉSENTATION APPROCHÉE D'UNE FONCTION DONNÉE. — On sait, d'après un théorème bien connu de Weierstrass, qu'une fonction $f(s)$ de la variable réelle s , *continue et périodique* (la période étant par exemple 2π), peut être représentée, avec telle approximation qu'on veut, par une suite limitée de Fourier, c'est-à-dire par un développement ne contenant qu'un nombre limité des fonctions suivantes

$$(1) \quad 1, \quad \cos s, \quad \sin s, \quad \dots, \quad \cos ns, \quad \sin ns, \quad \dots$$

Je me propose de généraliser ce théorème : au lieu de la suite (1) des fonctions trigonométriques, j'envisage une suite de fonctions *quelconques*

$$(2) \quad U_0 = 1, \quad U_1(s), \quad U_2(s), \quad \dots, \quad U_i(s), \quad \dots,$$

périodiques de période 2π , ainsi que leurs dérivées premières et secondes ⁽¹⁾; et je fais l'hypothèse que *la suite des fonctions (2) forme un système fermé*. Je dis *qu'une fonction quelconque $f(s)$, continue et de même période 2π , peut être représentée, avec telle approximation*

(1) Les dérivées secondes sont supposées développables en séries de Fourier uniformément convergentes. Ces fonctions (2) pourront, par exemple, être les fonctions V du numéro précédent.

qu'on veut, par un développement ne contenant qu'un nombre limité des fonctions (2).

Démontrons d'abord la chose en supposant que la fonction $f(s)$ possède une dérivée première intégrable et de carré intégrable. Avec les fonctions $U_i(s)$, je forme, comme au numéro précédent, des combinaisons linéaires $V_i(s)$, telles que la suite des dérivées premières $V'_i(s)$ forme un système orthogonal. Dans ces conditions, la fonction $f(s)$ est représentable par une série

$$f(s) = \sum c_i V_i(s)$$

absolument et uniformément convergente. C'est dire *qu'on peut représenter $f(s)$, avec telle approximation qu'on veut*, par une suite limitée de fonctions $V_i(s)$, ou encore *par une suite limitée de fonctions $U_i(s)$* , ce que nous voulions établir.

Nous avons fait l'hypothèse que la fonction donnée $f(s)$, continue et périodique, admettait une dérivée première de carré intégrable. Or cette hypothèse n'est nullement restrictive, car si elle n'était pas réalisée, on pourrait commencer, d'après le théorème de Weierstrass, par remplacer $f(s)$ par une suite limitée de Fourier qui en diffère aussi peu qu'on veut.