

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI VILLAT

**Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal  
renfermant un obstacle**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 29 (1912), p. 127-197

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1912\\_3\\_29\\_\\_127\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__127_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LE

# MOUVEMENT DISCONTINU D'UN FLUIDE

DANS UN  
CANAL RENFERMANT UN OBSTACLE;

PAR M. HENRI VILLAT.

---

## Introduction.

Il est superflu d'indiquer l'intérêt qui s'attache à l'étude du mouvement permanent discontinu des fluides, considéré comme on le fait depuis les travaux d'Helmholtz. On sait que les méthodes pour aborder cette étude ont été récemment perfectionnées par MM. T. Levi-Civita et M. Brillouin; elles ont fait depuis l'objet de nombreux et importants travaux, entre lesquels il convient de citer ceux de MM. U. Cisotti, G. Colonnetti, T. Boggio <sup>(1)</sup>.

Le présent Mémoire <sup>(2)</sup> a pour but la détermination du mouvement plan discontinu le plus général que peut prendre un fluide dans un canal donné, contenant un obstacle donné. Ce problème a déjà été traité par M. U. Cisotti [*Sul moto di un solido in un canale* (*Rendiconti del Circ. di Palermo*, 1909)], dans le cas particulier d'un canal rectiligne contenant un obstacle symétrique par rapport à l'axe de ce canal; le mouvement est alors aussi symétrique. Aux élégantes formules de M. Cisotti, il suffit d'adjoindre une formule générale que j'ai indiquée (*Comptes rendus*, t. CLII, 6 février 1911, p. 306) <sup>(3)</sup>,

---

<sup>(1)</sup> Cf. les *Rendiconti del Circ. di Palermo*, 1909 et suiv., et les *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, id.

<sup>(2)</sup> Dont la rédaction et le dépôt remontent à janvier 1911.

<sup>(3)</sup> Les développements relatifs à ce sujet sont contenus dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique*, 1912, fasc. 3.

pour obtenir dans le cas symétrique la solution du problème pour un obstacle, dont l'allure est donnée à l'avance. Je me suis proposé ici de résoudre complètement le cas général, ce qui fait l'objet de la première Partie, où sont établies les formules nécessaires, ramenant à des quadratures la détermination totale du mouvement. A une forme générale de l'obstacle et des parois du canal, supposée connue, correspondent pour les deux fonctions arbitraires, dont dépendent les équations, des propriétés qui les caractérisent qualitativement. La mise en marche de cette théorie s'effectue comme dans les diverses questions d'hydrodynamique basées sur les méthodes introduites par Kirchhoff et Helmholtz et Levi-Civita. Elle présente donc des analogies inévitables avec celle que j'ai employée dans mon Mémoire *Sur la résistance des fluides* (*Annales de l'École Normale*, 1911).

La seconde Partie de ce travail est relative plus spécialement aux mouvements doués de symétrie par rapport à l'axe du canal, dont la forme reste quelconque (mais symétrique). On y établit quelques ensembles de formules qui s'appliquent à de tels mouvements.

A part les obstacles rectilignes ou formés de segments rectilignes, je me suis borné à indiquer sommairement un exemple d'obstacle courbe. Des exemples variés trouveront plus naturellement leur place dans un prochain travail.

Le Mémoire actuel est le développement partiel d'une Note publiée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 6 février 1911, t. CLII, p. 303.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

### CAS GÉNÉRAL. ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

---

Considérons un fluide plan, dont la densité sera prise pour unité; et supposons que ce fluide soit limité par deux parois fixes quelconques indéfinies, constituant un canal, entre les parois duquel le fluide s'écoule. En outre, nous supposons que dans ce canal soit immergé un obstacle fixe. Imaginons qu'on ait atteint un état permanent irrotationnel, avec sillage étendu à l'infini à l'arrière de l'obstacle et

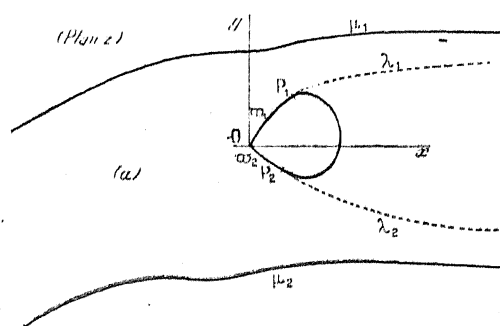
faisant corps avec lui. Nous admettons, pour simplifier la notation, qu'à l'infini, du côté du sillage, la vitesse du fluide qui coule soit égale à 1 (de ce qui suivra résultera que, si elle est égale à 1 sur l'un des bords du sillage, elle a la même valeur sur l'autre). En avant de l'obstacle, la vitesse du fluide à l'infini sera désignée par  $V_\infty$ .

Soit O le point du profil de l'obstacle, où le courant se divise pour venir entourer celui-ci. Ce point O (proue), qui pourra être un point anguleux, sera pris comme origine des coordonnées, l'axe des  $x$  ayant une direction qu'on peut prendre quelconque, et l'axe des  $y$  lui étant perpendiculaire.

La portion  $\mathcal{A}$  du fluide en mouvement sera séparée du solide et du sillage par une ligne L formée : d'une partie  $\varpi_1 + \varpi_2$  du profil de l'obstacle et de deux lignes de discontinuité (lignes libres)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Sur chacune de ces portions, nous admettrons l'existence d'une tangente partout continue, sauf peut-être en O; et sur la paroi (sauf toujours en O), le rayon de courbure variera continuellement; on fera les mêmes hypothèses sur les parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  du canal.

En désignant par  $u, v$  les projections, sur les axes, de la vitesse

Fig. 1.



d'une molécule fluide, il résulte particulièrement, de ce qui précède, qu'à l'infini on a (voir la figure), à droite,

$$\begin{aligned} u &= \cos \theta_1 & \text{ou} & & u &= \cos \theta'_1 \\ v &= \sin \theta_1 & & & v &= \sin \theta'_1 \end{aligned}$$

selon qu'on se place entre  $\lambda_1$  et  $\mu_1$ , ou entre  $\lambda_2$  et  $\mu_2$ ; et, à gauche,

$$\begin{aligned} u &= V_\infty \cos \theta_2, \\ v &= V_\infty \sin \theta_2, \end{aligned}$$

$\theta_1, \theta'_1, \theta_2$  désignant les angles que font avec  $Ox$  les directions asymptotiques des parois  $\mu_1$  (en aval),  $\mu_2$  (en aval) et des mêmes parois en amont. Le cas, évidemment le plus intéressant pour la pratique, est celui où les deux premières de ces directions coïncident; on peut alors supposer  $\theta_1 = \theta'_1 = 0$ .

Cela étant, le filet fluide, qui tombe sur le corps solide en  $O$ , s'y arrête momentanément, puis se divise en deux, suivant les lignes  $\varpi_1 + \lambda_1$  et  $\varpi_2 + \lambda_2$ , qui sont des lignes de courant. Les autres filets ne subissent pas d'arrêt. Par suite, la vitesse  $V$  dans le fluide est partout positive, sauf en  $O$ , où elle est nulle (et aux points des parois du canal, où l'orientation de la paroi changerait brusquement de sens, — points où la vitesse s'annulerait également si la paroi ne présente pas en ce point vers le fluide un angle saillant).

Désignons par  $\varphi$  et  $\psi$  le potentiel et la fonction de courant, lesquels donnent lieu aux relations

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Comme  $\varphi$  et  $\psi$  ne sont définis qu'à une constante près, nous choisissons ces constantes de sorte qu'on ait  $\varphi = 0$  et  $\psi = 0$  au point  $O$ . Alors  $\psi$  sera nul tout le long de la ligne  $L = \varpi_1 + \lambda_1 + \varpi_2 + \lambda_2$  qui est une ligne de courant. Pour une raison analogue,  $\psi$  sera constant le long de chacune des deux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , qui sont visiblement aussi des lignes de courant.

On sait maintenant que la pression hydrodynamique  $p$  est déterminée en chaque point par l'équation

$$(1) \quad p = - \frac{1}{2} V^2 + \text{const.}$$

Dans le sillage, la pression est constante; soit  $p_1$  sa valeur; cela ne détermine pas de suite la valeur de la constante de l'équation précédente, valable dans  $\mathfrak{A}$ , à cause de la discontinuité des vitesses en traversant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Mais, le long de ces dernières lignes, l'égalité des pressions sur les deux côtés (égalité nécessaire pour l'existence de l'état permanent) nous donne

$$p_1 = - \frac{1}{2} V^2 + \text{const.}$$

La vitesse est donc constante dans  $\mathfrak{A}$  le long des lignes libres et, par suite, égale à 1, qui est sa valeur à l'infini sur ces lignes. (Observons ici que si la valeur 1 de la vitesse n'avait été supposée que d'un côté du sillage, par exemple à l'infini entre  $\lambda_1$  et  $\mu_1$ , la considération de  $\lambda_1$  aurait comme ci-dessus déterminé la constante de l'équation (1), et la constante de la pression  $p_1$  dans le sillage aurait indiqué l'égalité  $V = 1$  à l'infini entre  $\lambda_2$  et  $\mu_2$ .)

De ce qui précède résulte qu'on a, pour l'équation (1) qui convient dans  $\mathfrak{A}$ ,

$$\text{const} = \frac{1}{2} + p_1,$$

et, par suite, la pression dans ce domaine est

$$(2) \quad p = p_1 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Ceci étant, posons

$$(3) \quad \begin{cases} z = x + iy, \\ w = u - iv, \\ f = \varphi + i\psi. \end{cases}$$

On a évidemment

$$(4) \quad \frac{df}{dz} = w,$$

$w$  et  $f$  sont deux fonctions analytiques de  $z$ ; régulières dans le champ  $\mathfrak{A}$ ; toutefois, les formules

$$(5) \quad \begin{cases} d\varphi = u dx + v dy, \\ d\psi = -v dx + u dy \end{cases}$$

montrent que  $f$  est infini pour  $z$  infini (dans le champ  $\mathfrak{A}$ ), tandis que  $w$  reste fini.

#### Domaine du plan $f$ correspondant au champ $\mathfrak{A}$ .

A la ligne  $L$  correspondent pour  $f$  des valeurs réelles. Quand on parcourt  $\varpi_1 + \lambda_1$  ou  $\varpi_2 + \lambda_2$  en partant du point  $O$ ,  $f$  part de zéro et croît constamment jusqu'à l'infini : en effet,  $s$  désignant l'arc d'une de

ces lignes, compté positivement dans le sens du courant, on a de suite

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V}$$

et

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = V > 0.$$

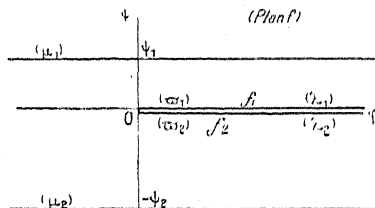
Donc  $\varphi$  part de zéro et croît; il croît indéfiniment, d'après (5).

A la paroi fixe  $\mu_1$  correspond une valeur fixe  $\psi_1$  de  $\psi$ , comme on l'a déjà dit; cette valeur  $\psi_1$  est positive, comme cela résulte immédiatement de (5) ( $u$  étant égal à 1, et  $y$  allant en croissant, lorsqu'on se déplace pour aller de  $\lambda_1$  à  $\mu_1$  en suivant une ordonnée placée très loin à droite).

De même, à la paroi fixe  $\mu_2$  correspond une valeur fixe  $-\psi_2$  de  $\psi$ , et cette valeur sera négative, c'est-à-dire que  $\psi_2$  sera positif.

De là nous concluons le champ  $\mathfrak{B}$  du plan  $f$ , correspondant au

Fig. 2.



champ  $\mathfrak{A}$  : ce champ  $\mathfrak{B}$  est limité par les deux droites  $\psi = \psi_1$  et  $\psi = -\psi_2$ , et par la coupure le long de l'axe  $O\varphi$ . Nous appellerons  $f_1$  et  $f_2$  les valeurs de  $\varphi$  qui correspondent aux deux points  $P_1$  et  $P_2$  où les lignes libres se détachent de l'obstacle. [Y a-t-il besoin de dire que les deux droites  $\psi = \psi_1$  et  $\psi = -\psi_2$  conviennent en entier, car l'équation (5) montre que si le point  $z$  décrit  $(\mu_1)$ , par exemple,  $\varphi$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .]

Il résulte maintenant, d'un raisonnement classique, que l'équation

$$f = f(z)$$

effectue la représentation conforme de l'aire  $\mathfrak{A}$  sur le domaine  $\mathfrak{B}$ . Nous avons donc le droit de considérer maintenant  $z$  comme une fonc-

tion de  $f$ , régulière et finie dans le domaine  $\mathfrak{B}$ , sauf pour  $f$  infini, qui correspond à  $z$  infini.

**La fonction  $\varpi(f)$  et son logarithme  $-i\Omega$ .**

La fonction  $\varpi$ , qui était une fonction de  $z$  régulière dans le champ  $\mathfrak{A}$ , devient, d'après ce qui précède, une fonction de  $f$ , finie et continue dans le champ  $\mathfrak{B}$ . En observant que  $|\varpi| = V$ , et en posant

$$(6) \quad \varpi = e^{-i\Omega},$$

et en convenant que  $\Omega$  soit nul pour  $|\varpi| = 1$ , on a de suite les résultats suivants : pour  $f$  réel et supérieur à  $f_1$  ou  $f_2$  (suivant le bord de la coupure que l'on considère), on a  $|\varpi| = 1$ , et par conséquent  $\Omega$  est réel; pour  $\psi = \psi_1$  ou  $-\psi_2$ , la vitesse est tangente à la paroi correspondante; dans le cas d'un canal *rectiligne*,  $v$  serait nul, la vitesse étant horizontale,  $\varpi$  serait donc réel, et  $\Omega$  imaginaire pure.

Dans ces conditions,  $\Omega$  sera une fonction uniforme de  $f$ , régulière dans tout le champ  $\mathfrak{B}$ , exception faite du point  $f = 0$ , pour lequel on a  $i\Omega = +\infty$ ,  $\varpi$  devant être nul.

Nous allons maintenant, au moyen de changements de variables appropriés, remplacer le champ  $\mathfrak{B}$  par un domaine intérieur à une certaine demi-couronne circulaire dans le plan d'une certaine variable  $z$ , la représentation (conforme) du plan  $f$  sur le plan  $z$  étant faite de telle manière que les lignes libres correspondent dans le plan  $z$  aux bords de la demi-couronne situés sur l'axe réel.

**Introduction d'une variable auxiliaire  $t$ .**

Effectuons tout d'abord la représentation conforme de l'aire  $\mathfrak{B}$  sur un demi-plan. A cet effet, posons

$$(7) \quad f = -A \log(t-a) - B \log(t-b) + D + iD_1,$$

$A, B, D, D_1, a, b$  étant des constantes réelles, dont les deux premières soient positives. Cette relation équivaut à

$$(8) \quad df = -\left(\frac{A}{t-a} + \frac{B}{t-b}\right) dt = -\left[\frac{(A+B)t - (Ab + Ba)}{(t-a)(t-b)}\right] dt.$$



Nous supposons que les déterminations choisies des logarithmes soient celles dont la partie imaginaire est nulle pour  $t$  réel et plus grand que  $a$  et  $b$ , respectivement.

Ceci posé, faisons décrire à  $t$ , l'axe réel de son plan, et posons

$$t - a = r e^{i\varepsilon}, \quad t - b = r_1 e^{i\varepsilon_1},$$

$\varepsilon$  et  $\varepsilon_1$  étant nuls lorsque  $t$  est supérieur à  $a$  ou  $b$ , comme on vient de le dire. Posons encore

$$(9) \quad c = \frac{A b + B a}{A + B}$$

( $c$  est évidemment entre  $a$  et  $b$ ). Les résultats suivants apparaissent alors d'eux-mêmes :

Si  $t$  croît de  $-\infty$  à  $a$ , on a

$$f = -A(\log r + i\pi) - B(\log r_1 + i\pi) + D + iD_1,$$

la partie réelle varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , le coefficient de  $i$  est  $D_1 - \pi(A + B)$  (car  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_1$  sont tous deux égaux à  $\pi$ ).

Si  $t$  croît de  $a$  à  $c$ , on a

$$f = -A \log r - B(\log r_1 + i\pi) + D + iD_1,$$

la partie réelle de  $f$  décroît de  $+\infty$  à un certain minimum, le coefficient de  $i$  est  $D_1 - \pi B$  (car  $\varepsilon = 0$ , et  $\varepsilon_1 = \pi$ ).

Si  $t$  croît de  $c$  à  $b$ , le coefficient de  $i$  reste le même, mais la partie réelle croît depuis le minimum ci-dessus jusqu'à  $+\infty$ .

Si  $t$  croît de  $b$  à  $+\infty$ , on aura

$$f = -A \log r - B \log r_1 + D + iD_1,$$

la partie réelle décroîtra de  $+\infty$  à  $-\infty$ , le coefficient de  $i$  sera  $D_1$  ( $\varepsilon$  et  $\varepsilon_1$  sont nuls).

De là résulte que le contour décrit par le point  $f$  dans son plan, lorsque  $t$  parcourt l'axe réel, coïncide avec le contour du domaine  $\mathfrak{W}$  du paragraphe précédent, si l'on pose tout d'abord

$$(10) \quad \begin{cases} D_1 - \pi(A + B) = -\psi_2, \\ D_1 - \pi B = 0, \\ D_1 = \psi_1 \end{cases}$$

et si l'on s'arrange de façon que le minimum de la partie réelle de  $f$ , pour  $t$  compris entre  $a$  et  $b$ , soit égal à zéro; ce qui donne (on a alors  $r = c - a, r_1 = b - c$ )

$$(11) \quad 0 = -A \log(c - a) - B \log(b - c) + D.$$

Cette partie réelle passe alors une fois par la valeur  $f_2$  (pour  $t$  entre  $a$  et  $c$ ); nous supposons que cela a lieu pour  $t = -1$  <sup>(1)</sup>, ce qui entraînera naturellement les inégalités

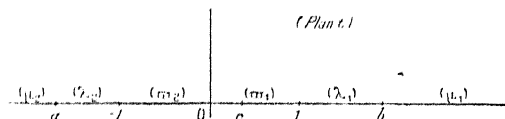
$$a < -1 < c,$$

et ce qui donnera naissance à la relation

$$(12) \quad f_2 = -A \log(-1 - a) - B \log(b + 1) + D.$$

De même, pour  $t$  compris entre  $c$  et  $b$ , la partie réelle passe une fois

Fig. 3.



par la valeur  $f_1$ , nous supposons que cela se produit pour  $t = 1$  <sup>(2)</sup>, ce qui donne naissance comme ci-dessus aux inégalités

$$c < 1 < b$$

et à la relation

$$(13) \quad f_1 = -A \log(1 - a) - B \log(b - 1) + D.$$

Observons que des équations (10) on tire immédiatement

$$(13') \quad D_1 = \psi_1, \quad A = \frac{\psi_2}{\pi}, \quad B = \frac{\psi_1}{\pi},$$

et que A et B sont bien positifs, comme nous l'avions supposé,

Moyennant les conditions susénoncées, la relation (7) effectue la représentation conforme du champ  $w$  sur le demi-plan positif  $z$ . Le

<sup>(1)</sup> Ce choix n'a d'ailleurs rien d'indispensable; il nous sera seulement commode.

<sup>(2)</sup> Même remarque que ci-dessus.

fait que la correspondance est bien biunivoque résulte, par un raisonnement classique (*Cf.* PICARD, *Analyse*, t. II, p. 280), de ce que  $t$  prend une suite de valeurs toutes différentes, lorsque  $f$  décrit le contour limite du champ  $\mathfrak{B}$ .

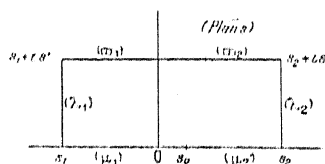
#### Introduction d'une nouvelle variable $Z$ .

Posons maintenant tout d'abord,  $s$  représentant une nouvelle variable,

$$(14) \quad ds = \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t^2-1)(t-b)}},$$

Faisons alors décrire à  $t$  l'axe réel de son plan. Alors le point  $s$  dans son propre plan décrira le contour d'un rectangle qu'indique la figure,

Fig. 4.



dans des conditions sur lesquelles il nous paraît inutile d'insister, et que la figure indique suffisamment.

On aperçoit maintenant sans peine qu'une transformation de la forme

$$(15) \quad s = \frac{1}{iB'} \log \left( \frac{-P}{e^{i\theta} \zeta} \right),$$

où  $\theta$  désigne un certain angle fixe, et où  $B'$  et  $P$  sont des constantes positives, fait correspondre à notre rectangle une demi-couronne, les lignes libres (ou les côtés verticaux du rectangle) correspondant aux bords rectilignes de la demi-couronne.

En effet, en posant

$$(16) \quad Z = \rho e^{i\sigma},$$

la relation (15) s'écrit de suite

$$s = \frac{\pi - \theta - \sigma}{B'} - \frac{i}{B'} \log \frac{P}{\rho}.$$

Cela étant, on voit que (en appelant  $s_1$  et  $s_2$  les sommets inférieurs du rectangle de tout à l'heure, et  $s_2 + is'$  le sommet supérieur à droite) :

Si  $s$  varie de  $s_0$  à  $s_2$ ,  $\rho$  est constamment égal à  $P$ ;  $\sigma$  varie de  $\gamma_0$ , défini par la relation

$$(17) \quad s_0 = \frac{\pi - \theta - \gamma_0}{B'},$$

à une valeur  $\gamma$  définie par  $s_2 = \frac{\pi - \theta - \gamma}{B'}$ , valeur qui sera nulle si nous posons

$$(18) \quad s_2 = \frac{\pi - \theta}{B'};$$

Si  $s$  varie de  $s_2$  à  $s_2 + is'$ ,  $\rho$  varie de  $P$  à une certaine valeur que nous prendrons égale à 1 en posant

$$(19) \quad -\frac{1}{B'} \log P = s'$$

et  $\sigma$  restera nul;

Si  $s$  varie de  $s_2 + is'$  à  $s_1 + is'$ , en passant par  $s_3 + is'$  (qui correspond à  $t = c$ , c'est-à-dire à la séparation entre  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ ),  $\rho$  reste égal à 1;  $\sigma$  varie depuis zéro, passe par  $\gamma_1$ , défini par

$$(20) \quad s_3 = \frac{\pi - \theta - \gamma_1}{B'}$$

et arrive à une valeur que je ferai égale à  $\pi$  en posant

$$(21) \quad s_1 = \frac{-\theta}{B'};$$

Si  $s$  varie de  $s_1 + is'$  à  $s_1$ ,  $\rho$  variera de 1 à  $P$ ,  $\sigma$  restera égal à  $\pi$ ;

Si  $s$  varie de  $s_1$  à  $s_0$ ,  $\rho$  reste égal à  $P$ ,  $\sigma$  varie de  $\pi$  à  $\gamma_0$ .

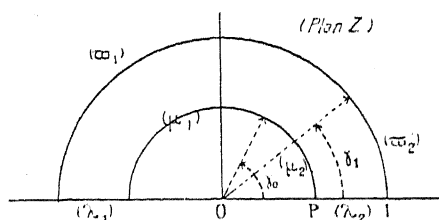
De tout ceci résulte que le champ  $\mathfrak{U}$  du plan  $f$  est maintenant représenté de façon conforme sur la demi-couronne qu'indique la figure ci-après.

La représentation est effectivement conforme, à cause de ce fait que,

lorsqu'on fait décrire au point  $z$  l'axe réel de son plan, la variable  $Z$  prend une succession de valeurs toutes distinctes.

Nous observerons que les conditions énoncées précédemment déter-

Fig. 5



minent  $P$ ,  $B'$  et  $\theta$ , dès que le rectangle du plan  $s$  est donné ; on tire en effet sans peine de (18), (19), (21)

$$(22) \quad \begin{cases} B' = \frac{\pi}{s_2 - s_1}, \\ \theta = \frac{-\pi s_1}{s_2 - s_1}, \\ P = e^{\frac{-\pi s'}{s_2 - s_1}} < 1. \end{cases}$$

Nous voulons maintenant exprimer effectivement  $f$  en fonction de  $Z$ , c'est-à-dire en somme  $t$  en fonction de  $s$ . Il nous faut donc effectuer l'inversion de la formule (14). Cette inversion peut s'obtenir de bien des manières. *Dans le cas général*, celle qui nous paraît la plus appropriée à notre sujet est la suivante :

#### Intervention des fonctions elliptiques de Weierstrass.

La théorie des fonctions elliptiques (*Cf.*, par ex., APPELL et LACOUR, *Fonct. ellip.*, p. 256) montre qu'on réalise l'inversion cherchée, en posant

$$(23) \quad t = + \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p's - p'\gamma}{ps - p\gamma},$$

où  $p$  représente la fonction de Weierstrass, construite avec des inva-

riants  $g_2$  et  $g_3$ , ayant pour valeurs

$$(24) \quad \begin{cases} g_2 = S = -ab + \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(ab-1)^2}{12}, \\ g_3 = T = -\frac{ab(ab-1)}{6} - \frac{(a+b)^2(ab-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ \quad - \frac{(ab-1)^3}{6^3} - \frac{(a+b)^2}{4^2} + ab \frac{(a+b)^2}{4^2}, \end{cases}$$

et où  $\gamma$  est un argument constant défini par les égalités

$$(25) \quad \begin{cases} p\gamma = \frac{(a+b)^2}{16} - \frac{ab-1}{6}, \\ p'\gamma = \frac{a+b}{4} + \frac{3}{4}(a+b)(ab-1) - \frac{(a+b)^3}{32}. \end{cases}$$

Cet argument  $\gamma$  est réel; et, les quatre racines du polynome

$$F(t) = (t^2 - 1)(t - a)(t - b)$$

étant réelles, il est facile de voir (*Cf.* APPELL et LACOUR, *loc. cit.*, p. 85), qu'on peut prendre  $\gamma$  entre  $-\omega$  et  $+\omega$ , ou, si l'on préfère, entre 0 et  $2\omega$ , en désignant les périodes de la fonction  $p$  par  $2\omega$  (réelle) et  $2\omega'$  (imaginaire pure).

Dans ces conditions, le radical  $\sqrt{F(t)}$  s'exprime par

$$(26) \quad \sqrt{(t^2 - 1)(t - a)(t - b)} = ps - p(s + \gamma),$$

et les racines  $F(t)$  correspondent à

$$ps - p(s + \gamma) = 0,$$

d'où l'on tire bien facilement

$$s + \gamma = \pm s + 2m\omega + 2n\omega' \quad (m \text{ et } n \text{ entiers}).$$

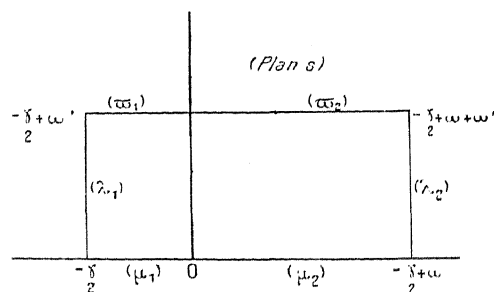
En négligeant le signe  $-$ , puisque  $\gamma$  n'est pas multiple des périodes, il suffit de considérer les valeurs suivantes

$$s = -\frac{\gamma}{2} + \omega, \quad -\frac{\gamma}{2} + \omega + \omega', \quad -\frac{\gamma}{2} + \omega', \quad -\frac{\gamma}{2},$$

qui correspondront aux valeurs  $a, -1, +1, b$ , de  $t$ .

La correspondance est indiquée par la figure ci-dessous, où nous avons supposé  $\omega > \gamma > 0$ , pour fixer les idées. Comme on a  $a < -1$ ,

Fig. 6.



et  $b > 1$ , les formules (25) montrent sans peine que

$$p\gamma > 0, \quad p'\gamma = -\text{Sgn}(a+b).$$

Si  $(a+b)$  est donc positif ou négatif,  $\gamma$  sera compris entre 0 et  $\omega$ , ou entre  $\omega$  et  $2\omega$ .

Le rectangle précédent constitue le domaine rectangle déjà considéré dans le paragraphe précédent, et nous voyons par suite que les constantes, appelées antérieurement  $s_1, s_2, s'$ , ont ici les valeurs suivantes :

$$(27) \quad \begin{cases} s_1 = -\frac{\gamma}{2}, \\ s_2 = -\frac{\gamma}{2} + \omega, \\ s' = \frac{\omega'}{i}. \end{cases}$$

Les formules (22), qui déterminent le changement de variable effectuant la représentation sur la demi-couronne, nous donnent par conséquent

$$(28) \quad \begin{cases} B' = \frac{\pi}{\omega}, \\ \theta = \frac{\pi\gamma}{2\omega}, \\ P = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}}. \end{cases}$$

Observons que la valeur ( $< 1$ ) de  $P$ , n'est autre que la quantité désignée habituellement par  $q$  dans la théorie des fonctions elliptiques; nous la désignerons aussi désormais par cette lettre.

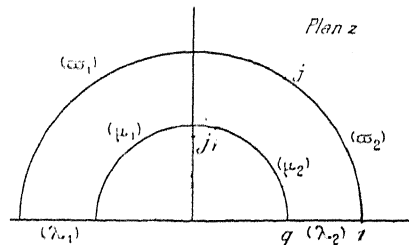
D'après ce qui précède, la relation entre  $s$  et  $Z$  peut désormais s'écrire [éq. (15)]

$$(29) \quad \begin{cases} s = \frac{1}{iB'} \log \left( \frac{-P}{e^{i\theta} Z} \right) = \frac{1}{i\frac{\pi}{\omega}} \left[ i\pi - \frac{\pi\omega'}{i\omega} - i\theta - \log Z \right], \\ \text{c'est-à-dire} \\ s = \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z. \end{cases}$$

Je reproduis ci-dessous la demi-couronne correspondante, dont les rayons extrêmes ont pour valeurs 1 et  $q$ .

Les points  $z = j$  et  $z = j_1$ , qui constituent la séparation des arcs de

Fig. 7.



circonférence correspondant à  $\varpi_1$ ,  $\varpi_2$ , d'une part, à  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , d'autre part, sont définis comme il suit :

*Point j.* — La séparation entre  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  a lieu pour  $f = 0$ , c'est-à-dire pour  $t = c$ . La formule (23) devient alors pour  $t = c$

$$c = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p's - p'\gamma}{ps - p\gamma},$$

et elle définit une valeur et une seule de  $s$ , de la forme

$$(29') \quad s = -\frac{\gamma}{2} + \omega' + \nu \quad (0 < \nu < \omega).$$



Puis la formule (29) donne

$$\log j = \frac{i\pi}{\omega} (\omega - \nu),$$

c'est-à-dire

$$(30) \quad j = e^{\frac{i\pi}{\omega} (\omega - \nu)}.$$

On saura donc calculer l'argument  $\frac{\pi}{\omega} (\omega - \nu)$  du point  $j$ .

*Point  $j_1$ .* — La séparation entre  $\mu_1$  et  $\mu_2$  a lieu pour  $t$  réel et infini. La valeur correspondante de  $s$ , entre  $-\frac{\gamma}{2}$  et  $\frac{\gamma}{2} + \omega$ , est visiblement  $s = 0$ . La formule (29) donne donc

$$0 = \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log j_1,$$

c'est-à-dire

$$(31) \quad j_1 = e^{\frac{i\pi}{\omega} (\omega - \frac{\gamma}{2})}.$$

L'argument du point  $j_1$  est donc  $\frac{\pi}{\omega} (\omega - \frac{\gamma}{2})$ .

En résumé, on a pour passer de  $f$  à  $Z$ , les relations suivantes

$$(7') \quad f = -A \log(t - a) - B \log(t - b) + D + iD_1,$$

$$(32) \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p' \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p' \gamma}{p \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p \gamma}.$$

Calcul de la différentielle  $df$  en fonction de  $Z$ .

On a, d'après (8) et (9),

$$(33) \quad df = -(A + B) \frac{t - c}{(t - a)(t - b)} dt;$$

puis, d'après (14) et (26),

$$(34) \quad dt = \sqrt{F(t)} ds = [p s - p(s + \gamma)] ds,$$

c'est-à-dire, en se rappelant la relation (29) entre  $s$  et  $Z$ ,

$$(35) \quad dt = \left[ p \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) \right] \frac{-\omega}{i\pi} \frac{dZ}{Z}.$$

Maintenant, la théorie des fonctions elliptiques fournit les relations

$$\begin{aligned} p(\alpha + \beta) &= p\alpha - \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{p'\alpha - p'\beta}{p\alpha - p\beta} \right), \\ p(\alpha - \beta) &= p\alpha - \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{p'\alpha + p'\beta}{p\alpha - p\beta} \right), \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux arguments quelconques. (*Cf.*, par ex., TANNERY et MOLK, *Fonct. ellipt.*, form. VII).

D'où

$$p(\alpha - \beta) - p(\alpha + \beta) = \frac{p'\alpha p'\beta}{(p\alpha - p\beta)^2}.$$

Revenant à  $dt$ , nous voyons qu'il peut s'écrire

$$(36) \quad dt = -\frac{\omega}{i\pi} \frac{dZ}{Z} \frac{p' \frac{\gamma}{2} p' \left( \omega + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right)}{\left[ p \left( \omega + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\gamma}{2} \right]^2}.$$

Je veux ici faire voir que la *différentielle*  $df$ , qui résulte de (32), (33), (36), *reste invariable par l'échange de  $Z$  en  $\frac{1}{Z}$* . Ce point sera capital par la suite.

Occupons-nous d'abord du coefficient de  $dt$  dans  $df$ , et, par suite de l'expression (32), de  $\iota$ . Si l'on change  $Z$  en  $\frac{1}{Z}$ ,  $\frac{\omega}{i\pi} \log Z$  change de signe (en négligeant au besoin un multiple de  $2\omega$  sans importance). Je dis qu'alors  $\iota$  ne change pas. Pour mettre ce fait en évidence, observons qu'on peut écrire (*Cf.* TANNERY et MOLK, form. VII)

$$(37) \quad \iota = \frac{a+b}{4} + \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \gamma.$$

Par la transformation indiquée,  $\iota$  devient

$$\iota' = \frac{a+b}{4} + \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} + \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} + \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \gamma,$$

ou, comme  $\zeta$  est impaire,

$$t' = \frac{a+b}{2} + \zeta \left( -\omega - \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \left( -\omega - \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \gamma.$$

Or, on a (TANNERY et MOLL, formule VI)

$$\zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) = \zeta \left( -\omega - \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) + 2\eta + 2\eta',$$

$$\zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) = \zeta \left( -\omega - \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) + 2\eta + 2\eta'.$$

D'où immédiatement

$$t = t'.$$

Donc le coefficient de  $dt$  dans  $df$  ne change pas.

Envisageons maintenant  $dt$ , sous sa forme (36) par exemple.  $p$  étant paire, et  $p'$  impaire, on a de suite

$$p \left( \omega + \omega' + \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) = p \left( -\omega - \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) = p \left( \omega + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right),$$

$$p' \left( \omega + \omega' + \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) = -p' \left( -\omega - \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) = -p' \left( \omega + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right),$$

donc l'expression  $\frac{p' \left( \omega + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right)}{\left[ p \left( \omega + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\gamma}{2} \right]^2}$  change de signe simplement; et comme il en est de même de  $\frac{dZ}{Z}$  quand on permute  $Z$  avec  $\frac{1}{Z}$ , on voit bien qu'en fin de compte,  $df$  n'a pas changé.

**Remarque sur le cas où le mouvement serait symétrique par rapport à l'axe du canal supposé lui-même symétrique.**

On s'aperçoit immédiatement que, si l'on suppose le mouvement symétrique, par rapport à l'axe du canal (l'obstacle aussi par conséquent), il faut faire

$$(38) \quad a = -b, \quad \psi_1 = \psi_2, \quad A = B, \quad c = 0,$$

et [ $Cf.$ , form. (12), (13)]  $f_1 = f_2$ .

Les formules (25) qui définissent l'argument  $\gamma$ , deviennent

$$\begin{aligned} p\gamma &= \frac{b^2 + 1}{6}, \\ p'\gamma &= 0 \end{aligned}$$

et donnent

$$(39) \quad \gamma = \omega,$$

puisque  $\gamma$  est entre 0 et  $2\omega$ . Alors, en appelant comme d'ordinaire  $e_1, e_2, e_3$ , les trois racines, par ordre de grandeur décroissante, du trinôme

$$G(x) = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

il viendra

$$p\gamma = e_1 = \frac{b^2 + 1}{6},$$

D'ailleurs [Cf. (24)], on a actuellement

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{(b^2 + 1)^2}{12} + b^2, \\ g_3 &= \frac{b^2 + 1}{6} \left[ \frac{(b^2 + 1)^2}{6^2} - b^2 \right]. \end{aligned}$$

Le trinôme  $G(x)$  admet visiblement la racine  $\frac{b^2 + 1}{6}$ , et un calcul facile permet d'écrire

$$G(x) = \left(x - \frac{b^2 + 1}{6}\right) \left(2x + \frac{b^2 + 1}{6} - b\right) \left(2x + \frac{b^2 + 1}{6} + b\right).$$

Les trois racines  $e_i$  sont donc

$$(40) \quad e_1 = \frac{b^2 + 1}{6}, \quad e_2 = -\frac{b^2 + 1}{12} + \frac{b}{2}, \quad e_3 = -\frac{b^2 + 1}{12} - \frac{b}{2},$$

qu'on s'assure, sans peine, être rangées dans l'ordre de grandeur voulu.

Ceci posé, le calcul de  $df$  dans le cas actuel, peut se déduire du cas général, en remarquant qu'on a (TANNERY et MOLK, form. XVI)

$$p \frac{\omega}{2} = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}.$$

On peut aussi remarquer que l'expression de  $df$  peut s'écrire, en conservant, pour simplifier l'écriture, la lettre  $s$  comme argument de la fonction  $p$ ,

$$df = -2\Lambda \frac{t}{t^2 - b^2} [ps - p(s + \omega)] \frac{-\omega}{i\pi} \frac{dZ}{Z}$$

avec

$$t = \frac{1}{2} \frac{p's}{ps - e_1}.$$

Or (TANNERY et MOLK, form. VII)

$$\begin{aligned} ps - p(s + \omega) &= ps - \left[ e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{ps - e_1} \right] \\ &= \frac{(ps - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{ps - e_1}. \end{aligned}$$

D'où finalement

$$(41) \quad df = \frac{2\Lambda\omega}{i\pi} \frac{dZ}{Z} \frac{\frac{1}{2}p's [(ps - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)]}{\frac{1}{4}p'^2s - b^2(ps - e_1)^2}$$

avec

$$s = \frac{\omega}{2} + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log Z.$$

Enfin, voyons ici les positions particulières des points  $Z = j$ , ou  $j_1$ .

L'argument du point  $j_1$  étant dans le cas général  $\frac{\pi}{\omega} \left( \omega - \frac{\gamma}{2} \right)$ , on aura immédiatement, pour  $\gamma = \omega$ ,

$$j_1 = q e^{i\frac{\pi}{2}} = iq.$$

Le point  $j$  était défini par la relation (30), qui se réduit à

$$\frac{p's}{ps - e_1} = 0,$$

la racine  $s$  de cette équation, placée entre  $\omega' - \frac{\gamma}{2}$  et  $\omega' - \frac{\gamma}{2} + \omega$ , est  $s = \omega'$ , ce qui donne par la relation (29')  $v = \frac{\omega}{2}$  et, par suite,

$$j = e^{i\frac{\pi}{\omega}(\omega - v)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Au surplus, ces deux résultats étaient à prévoir, et la disposition

des éléments de la demi-couronne, dans le plan Z, devait être symétrique, par rapport à l'axe imaginaire de ce plan. Dans le cas actuel, on a, en effet, les trois résultats suivants :

1° A deux points Z de la demi-couronne, symétriques par rapport à l'axe imaginaire, correspondent deux points  $s$  symétriques, par rapport à l'axe imaginaire du plan  $s$ .

En effet, en posant  $Z = \rho e^{i\sigma}$ , on a

$$s = \frac{\omega}{2} + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} (\log \rho + i\sigma) = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log \rho.$$

Le point Z symétrique du premier est

$$\rho e^{i(\pi - \sigma)};$$

le point S correspondant est

$$S = \frac{\omega}{2} + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} [\log \rho + i(\pi - \sigma)] = -\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{\pi} \sigma + \omega' - \frac{\omega}{i\pi} \log \rho,$$

$s$  et S sont bien dans la relation indiquée.

2° A deux points  $s$  et S symétriques, par rapport à l'axe imaginaire, correspondent deux points  $t$  et T symétriques, par rapport à l'axe imaginaire du plan  $t$ .

On a vu en effet que

$$t = \frac{1}{2} \frac{p's}{ps - e_1}.$$

Alors, en posant

$$s = \alpha + i\beta, \quad S = -\alpha + i\beta,$$

il vient

$$t = \frac{1}{2} \frac{p'(\alpha + i\beta)}{p(\alpha + i\beta) - e_1},$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{p'(-\alpha + i\beta)}{p(-\alpha + i\beta) - e_1} = -\frac{1}{2} \frac{p'(\alpha - i\beta)}{p(\alpha - i\beta) - e_1},$$

T étant opposé au conjugué de  $t$ , cela démontre la liaison voulue.

3° A deux points  $t$  et T symétriques, par rapport à l'axe imaginaire, correspondent deux points  $f$  imaginaires conjugués.

En effet, des relations (7), (10), (11), (12) on déduit très aisément

dans le cas actuel

$$(42) \quad f = A [-\log(t^2 - b^2) + 2 \log b + \log(-1)] = A \log \frac{b^2}{b^2 - t^2}.$$

Et comme, dans les conditions susdites,  $t^2$  et  $T^2$  sont imaginaires conjugués, on en conclut sans peine que les valeurs de  $f$  le seront aussi.

De la formule (4) et de (6) résulte qu'on a

$$(43) \quad dz = e^{i\Omega} df.$$

En exprimant tout au second membre en fonction de  $Z$ , et observant que  $z = 0$  pour  $Z = j$  ( $= i$  dans le cas actuel), on aura

$$z = \int_i^x e^{i\Omega} df,$$

équation sur laquelle nous reviendrons plus loin, et qui montre aisément que, à deux points  $Z$  symétriques, par rapport à l'axe imaginaire, correspondront deux points  $z$  symétriques, par rapport à l'axe du canal (supposé pris comme axe des  $x$ ).

#### Sur la détermination des constantes.

La figure primitive du plan  $f$  était caractérisée par quatre constantes :  $f_1, f_2, \psi_1, \psi_2$ , toutes  $> 0$ ; nous avons été amenés par la suite à faire apparaître un certain nombre de nouvelles constantes :  $a, b, A, B, c, \omega, \omega', \gamma, \nu$ , et d'autres s'exprimant immédiatement au moyen de celles-là. Avant d'aller plus loin, il nous faut voir quelles sont les constantes *caractéristiques* que nous garderons en fin de compte, et étudier la détermination de toutes les autres en fonction de celles-là.

Observons d'abord que, dans le second groupe signalé ci-dessus, les quatre premières constantes :  $a, b, A, B$ , permettent de calculer les suivantes. En effet, on a  $c$  par l'équation (9); les relations (24) donnent les invariants  $g_2$  et  $g_3$ , d'où  $e_1, e_2, e_3$ ; après quoi les périodes sont, comme il est bien connu (Cf., APPELL et LACOUR, *Fonct. ellipt.*,

p. 249),

$$(44) \quad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \quad \omega' = i \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Puis  $\gamma$  est déterminé par les relations compatibles (25), et  $\nu$  par la relation (29').

Cela étant, je vais faire voir que la donnée des quatre constantes :  $f_1, f_2, \psi_1, \psi_2$ , est exactement équivalente à la donnée de  $a, b, A, B$ , avec les restrictions suivantes,

$$\begin{aligned} f_1 > 0, \quad f_2 > 0, \quad \psi_1 > 0, \quad \psi_2 > 0, \\ A > 0, \quad B > 0, \quad a < -1, \quad b > 1, \quad |c| = \left| \frac{Ab + Ba}{A + B} \right| < 1. \end{aligned}$$

Pour démontrer ce point, nous partirons des équations (11), (12), (13), (13'), que nous récrivons sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= -A \log(c - a) - B \log(b - c) + D, \\ f_2 &= -A \log(-1 - a) - B \log(b + 1) + D, \\ f_1 &= -A \log(-1 - a) - B \log(b - 1) + D, \\ A &= \frac{\psi_2}{\pi}, \quad B = \frac{\psi_1}{\pi}. \end{aligned}$$

L'élimination de  $D$  fournit de suite

$$(45) \quad f_1 = -A \log \frac{1-a}{c-a} - B \log \frac{b-1}{b-c}.$$

$$(46) \quad f_2 = -A \log \frac{-1-a}{c-a} - B \log \frac{b+1}{b-c}.$$

$$(47) \quad \psi_1 = \pi B, \quad \psi_2 = \pi A.$$

Le premier groupe de constantes s'exprime donc immédiatement en fonction du second, et il est visible que les inégalités imposées sont bien satisfaites, si elles le sont en ce qui concerne  $a, b, A, B$ .

Donnons-nous maintenant les constantes  $f_1, f_2, \psi_1, \psi_2$ . On aura de suite  $A$  et  $B$ , et il restera à déterminer  $a$  et  $b$ , par les deux équations

$$(48) \quad \begin{cases} f_1 = -\frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{1-a}{c-a} - \frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{b-1}{b-c}, \\ f_2 = -\frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{-1-a}{c-a} - \frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{b+1}{b-c}, \end{cases}$$



dans lesquelles, d'après (47), on a

$$(49) \quad c = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}.$$

Débarrassons-nous de  $c$ ; pour cela, observons les égalités évidentes

$$\begin{aligned} \frac{1-a}{c-a} &= \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_2} \frac{1-a}{b-a}, & \frac{-1-a}{c-a} &= \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_2} \frac{-1-a}{b-a}, \\ \frac{b-1}{b-c} &= \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_1} \frac{b-1}{b-a}, & \frac{b+1}{b-c} &= \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_1} \frac{b+1}{b-a}. \end{aligned}$$

Les équations (48) peuvent alors prendre la forme

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} F_1 &= \pi f_1 + \psi_2 \log \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_2} \\ &\quad + \psi_1 \log \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_1} = -\psi_2 \log \frac{1-a}{b-a} - \psi_1 \log \frac{b-1}{b-a}, \\ F_2 &= \pi f_2 + \psi_2 \log \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_2} \\ &\quad + \psi_1 \log \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_1} = -\psi_2 \log \frac{-1-a}{b-a} - \psi_1 \log \frac{b+1}{b-a}. \end{aligned} \right.$$

Or, on a

$$\frac{1-a}{b-a} + \frac{b-1}{b-a} = 1, \quad \frac{-1-a}{b-a} + \frac{b+1}{b-a} = 1.$$

Donc, en posant

$$(51) \quad X = \frac{1-a}{b-a}, \quad Y = \frac{-1-a}{b-a},$$

les équations ci-dessus peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} F_1 &= -\psi_2 \log X - \psi_1 \log(1-X), \\ F_2 &= -\psi_2 \log Y - \psi_1 \log(1-Y). \end{aligned}$$

On voit de suite que les conditions d'inégalité imposées à  $a, b$ , reviennent à

$$0 < X < 1; \quad 0 < Y < 1,$$

et l'on a alors forcément

$$X > Y.$$

Ceci posé, si l'on étudie la fonction

$$\Phi(X) = -\psi_2 \log X - \psi_1 \log(1 - X),$$

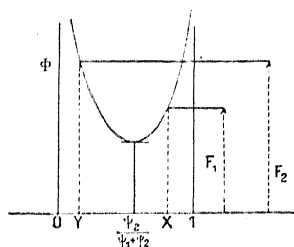
on constate élémentairement que la courbe qui la représente a la forme ci-dessous (*fig. 8*); la fonction est toujours  $> 0$  ( $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont supposés  $> 0$ ), et le minimum est

$$m = -\psi_2 \log \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} - \psi_1 \log \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2},$$

et il est atteint pour  $X = \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}$ .

Pour avoir les nombres cherchés  $X$  et  $Y$ , nous devons maintenant couper la courbe précédente par les horizontales d'ordonnées  $F_1$  et  $F_2$ .

Fig. 8.



Comme ces ordonnées sont justement supérieures à  $m$ , il y a deux points d'intersection pour chacune.

Mais on doit avoir d'abord  $X > Y$ , et d'autre part le nombre  $c$  doit être compris entre  $-1$  et  $+1$ ; à cause de la définition de  $X$  et  $Y$ , cette dernière condition est évidemment équivalente à celles-ci

$$Y < \frac{c-a}{b-a} < X.$$

Et comme  $\frac{c-a}{b-a} = \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}$ , il s'ensuit que le point dont l'abscisse est  $X$  est à droite de l'ordonnée du minimum, tandis que le point dont l'abscisse est  $Y$ , est à gauche de la même ordonnée. Par suite,  $X$  et  $Y$  sont définis d'une manière unique, comme il est indiqué sur la figure.

$X$  et  $Y$  étant connus, on a ensuite  $a$  et  $b$  par les relations (51), d'où

l'on tire

$$a = -\frac{X+Y}{X-Y} < -1, \quad b = \frac{2-X-Y}{X-Y} > 1.$$

On peut donc dire que les constantes  $a, b, A, B$ , définissent complètement la configuration du champ  $\mathfrak{B}$  du plan  $f$ .

Dans ce qui suivra, nous ne conserverons généralement pas les constantes  $a$  et  $b$ , mais nous les exprimerons au moyen de  $\gamma$  et de la fonction  $p$ ; cela revient au fond à résoudre les équations (25) par rapport à  $a$  et  $b$ . Observons à cet effet que les valeurs  $a$  et  $b$  de  $t$  correspondent à  $Z = q$  et  $Z = -q$  respectivement. Alors la formule (32) permet d'écrire les deux relations

$$(52) \quad \begin{cases} a = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p' \left( \omega - \frac{\gamma}{2} \right) - p' \gamma}{p \left( \omega - \frac{\gamma}{2} \right) - p \gamma}, \\ b = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p' \left( -\frac{\gamma}{2} \right) - p' \gamma}{p \frac{\gamma}{2} - p \gamma}, \end{cases}$$

qui donnent de suite  $a$  et  $b$ , et par suite  $(t-a)$  et  $(t-b)$ , ces dernières sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} t-a &= \frac{1}{2} \frac{p' \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p' \gamma}{p \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p \gamma} - \frac{1}{2} \frac{p' \left( \omega - \frac{\gamma}{2} \right) - p' \gamma}{p \left( \omega - \frac{\gamma}{2} \right) - p \gamma}, \\ t-b &= \frac{1}{2} \frac{p' \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p' \gamma}{p \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p \gamma} - \frac{1}{2} \frac{p' \left( -\frac{\gamma}{2} \right) - p' \gamma}{p \frac{\gamma}{2} - p \gamma}, \end{aligned}$$

ce qu'il est possible d'écrire plus commodément, en utilisant les propriétés de la fonction  $\zeta$  (cf. TANNERY et MOLK, form. VII),

$$\begin{aligned} t-a &= \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \left( \omega + \frac{\gamma}{2} \right) + \zeta \left( \omega - \frac{\gamma}{2} \right), \\ t-b &= \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - 2\zeta \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Nous voyons alors de suite que l'expression (33) de  $\frac{df}{dt}$  est équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= -\frac{A}{t-a} - \frac{B}{t-b} \\ &= \frac{-A}{\zeta\left(\omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z\right) - \zeta\left(\omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z\right) - \zeta\left(\omega + \frac{\gamma}{2}\right) + \zeta\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right)} \\ &\quad + \frac{-B}{\zeta\left(\omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z\right) - \zeta\left(\omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{i\pi} \log Z\right) - 2\zeta\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

Ceci étant, nous garderons souvent comme paramètres dans la suite : les demi-périodes  $\omega$ ,  $\omega'$ , et les quantités  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$ . Cela fait cinq paramètres que nous conserverons pour la commodité des calculs; mais il est facile de voir qu'il y a une relation entre les trois premiers, permettant de déterminer  $\gamma$ . En effet, il doit y avoir correspondance entre les points  $t = -1$ ,  $Z = +1$ , et  $t = 1$ ,  $Z = -1$  des plans  $t$  et  $Z$  (voir fig. 3 et 7); par conséquent on a, en utilisant la formule (32) et la valeur de  $a + b$  donnée par les formules de tout à l'heure :

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{p'\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) - p'\gamma}{p\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) - p\gamma} + \frac{p'\left(-\frac{\gamma}{2}\right) - p'\gamma}{p\frac{\gamma}{2} - p\gamma} \right] + \frac{1}{2} \frac{p'\left(\omega + \omega' - \frac{\gamma}{2}\right) - p'\gamma}{p\left(\omega + \omega' - \frac{\gamma}{2}\right) - p\gamma}, \\ 1 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{p'\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) - p'\gamma}{p\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) - p\gamma} + \frac{p'\left(-\frac{\gamma}{2}\right) - p'\gamma}{p\frac{\gamma}{2} - p\gamma} \right] + \frac{1}{2} \frac{p'\left(\omega' - \frac{\gamma}{2}\right) - p'\gamma}{p\left(\omega' - \frac{\gamma}{2}\right) - p\gamma}. \end{aligned}$$

Ces deux relations entre  $\omega$ ,  $\omega'$  et  $\gamma$  se réduisent à une seule. En effet, si nous les ajoutons membre à membre, il viendra (TANNERY et MOLK, VII, 3)

$$\begin{aligned} &\left[ \zeta\left(\omega + \frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\gamma \right] + \left[ \zeta\frac{\gamma}{2} - \zeta\left(-\frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\gamma \right] \\ &\quad + \left[ \zeta\left(\omega + \omega' + \frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\left(\omega + \omega' - \frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\gamma \right] \\ &\quad + \left[ \zeta\left(\omega' + \frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\left(\omega' - \frac{\gamma}{2}\right) - \zeta\gamma \right] = 0, \end{aligned}$$

ce qui se laisse mettre facilement sous la forme élégante (TANNERY et MOLK, XI, 2)

$$(53) \quad \zeta \frac{\gamma}{2} + \zeta_1 \frac{\gamma}{2} + \zeta_2 \frac{\gamma}{2} + \zeta_3 \frac{\gamma}{2} = 2\zeta\gamma.$$

Utilisant les relations connues

$$\zeta_\alpha \frac{\gamma}{2} = \zeta \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \frac{p' \frac{\gamma}{2}}{p \frac{\gamma}{2} - e_\alpha},$$

il viendra, après réductions,

$$2\zeta \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{p' \frac{\gamma}{2}} \left( 3p^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{g^2}{4} \right) = \zeta\gamma,$$

ou enfin

$$4\zeta \frac{\gamma}{2} + \frac{p'' \frac{\gamma}{2}}{p' \frac{\gamma}{2}} = 2\zeta\gamma.$$

C'est là une formule classique (*cf.*, par exemple, APPELL et LACOUR, p. 63, f. 16).

En conséquence, il n'existe bien, comme on l'avait annoncé, qu'une seule relation entre  $\omega$ ,  $\omega'$  et  $\gamma$ ; cette relation unique peut prendre la forme

$$1 = \frac{1}{2} \left[ \zeta \left( \omega + \frac{\gamma}{2} \right) - \zeta \left( \omega - \frac{\gamma}{2} \right) - \zeta\gamma + 2\zeta \frac{\gamma}{2} - \zeta\gamma \right] + \zeta \left( \omega' + \frac{\gamma}{2} \right) - \zeta \left( \omega' - \frac{\gamma}{2} \right) - \zeta\gamma$$

ou

$$\zeta_3 \frac{\gamma}{2} - \zeta_2 \frac{\gamma}{2} = 1,$$

comme on s'en assurera facilement.

Or il est très aisé de résoudre cette question par rapport à  $\gamma$ , si l'on se donne  $\omega$  et  $\omega'$ . On peut, en effet, l'écrire (*cf.* TANNERY et MOLK, VII, 9, et XI, 2)

$$\frac{1}{2} p' \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{p \frac{\gamma}{2} - e_3} - \frac{1}{p \frac{\gamma}{2} - e_2} \right) = 1.$$

Mais  $\frac{\gamma}{2}$ , nous l'avons vu, doit être compris entre 0 et  $\omega$ , d'où il résulte que  $p' \frac{\gamma}{2}$  est négatif, fait en évidence sur la formule actuelle. Ceci posé, l'équation élevée au carré nous donne après réductions

$$(54) \quad (e_2 - e_3)^2 \left( p' \frac{\gamma}{2} - e_1 \right) - \left( p' \frac{\gamma}{2} - e_2 \right) \left( p' \frac{\gamma}{2} - e_3 \right) = 0.$$

Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont donnés, il en est de même de  $e_1, e_2, e_3$ , qui sont alors connus, et la détermination de  $\gamma$  revient à la résolution d'une équation du second degré en  $p' \frac{\gamma}{2}$ , dont une racine conviendra si elle est supérieure à  $e_1$ ; le calcul de  $\frac{\gamma}{2}$  ou de  $\gamma$  sera ensuite élémentaire <sup>(1)</sup>.

On pourra donc, en vue de certaines applications, ne conserver que les arbitraires  $\omega, \omega', \gamma, A$  et  $B$ ;  $\gamma$  étant déterminé comme on vient de le dire. Toutes les autres constantes qui interviennent dans les calculs se déterminent à leur tour au moyen des formules qui ont déjà été établies antérieurement. Sans les écrire de nouveau en détail, je signalerai que les équations (52) donnent alors pour  $a$  et  $b$  des expressions explicites extrêmement simples. On a, en effet, presque immédiatement, par addition,

$$a + b = \zeta \frac{\gamma}{2} + \zeta_1 \frac{\gamma}{2} - \zeta \gamma,$$

et ensuite

$$a = \gamma \frac{\gamma}{2} + 3 \zeta_1 \frac{\gamma}{2} - 2 \zeta \gamma,$$

$$b = 3 \gamma \frac{\gamma}{2} + \zeta_1 \frac{\gamma}{2} - 2 \zeta \gamma,$$

ce qui, en vertu de (53), peut encore s'écrire, en conservant seule-

(1) On voit qu'envisagée de ce point de vue, la question peut présenter deux solutions. Il n'y a pas lieu de s'en étonner, car si  $\omega, \omega'$  et  $\gamma$  sont déterminés d'une manière unique quand  $a$  et  $b$  sont donnés (ainsi que cela résulte des considérations antérieures), il n'est pas évident, et en fait il n'est pas vrai, qu'à des valeurs données de  $\omega$  et  $\omega'$ , correspondent des valeurs uniques pour  $a, b, \gamma$ . Il n'en résulte pas d'inconvénient pour les applications.

ment l'argument  $\frac{\gamma}{2}$ ,

$$a = 2\zeta_1 \frac{\gamma}{2} - \zeta_2 \frac{\gamma}{2} - \zeta_3 \frac{\gamma}{2},$$

$$b = 2\zeta \frac{\gamma}{2} - \zeta_2 \frac{\gamma}{2} - \zeta_3 \frac{\gamma}{2}.$$

Sur ces formules, où  $\gamma$  vérifie l'équation (54), il est facile de vérifier qu'on a bien, comme il est nécessaire,  $a < -1$ , et  $b > 1$ . Voyons-le, par exemple, pour ce qui concerne  $b$ . Une nouvelle transformation donne

$$b = -\frac{1}{2} p' \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{p \frac{\gamma}{2} - e_2} + \frac{1}{p \frac{\gamma}{2} - e_3} \right),$$

$b$  est donc positif, et si l'on écrit l'inégalité  $b^2 > 1$ , il vient après réductions

$$\left( p \frac{\gamma}{2} - e_1 \right) \left( 2 p \frac{\gamma}{2} + e_1 \right)^2 - \left( p \frac{\gamma}{2} - e_2 \right) \left( p \frac{\gamma}{2} - e_3 \right) > 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (54),

$$\left( p \frac{\gamma}{2} - e_1 \right) \left[ \left( 2 p \frac{\gamma}{2} + e_1 \right)^2 - (e_2 - e_3)^2 \right] > 0$$

ou

$$\left( p \frac{\gamma}{2} - e_1 \right) \left( p \frac{\gamma}{2} - e_2 \right) \left( p \frac{\gamma}{2} - e_3 \right) > 0,$$

ce qui est évident.

#### Prolongement analytique et propriétés de la fonction $\Omega(Z)$ .

Par suite du changement de variable entre  $f$  et  $Z$ , la fonction  $\Omega$ , régulière dans le champ  $\mathfrak{B}$  du plan  $f$ , peut maintenant être considérée comme une fonction de  $Z$ , régulière dans la demi-couronne circulaire précédemment introduite. Et comme cette fonction  $\Omega$  prend des valeurs réelles sur les bords de la demi-couronne situés sur l'axe réel (ces bords correspondant aux lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ), elle sera prolongeable ana-

lytiquement, suivant le principe de Schwartz, dans la demi-couronne symétrique de la première par rapport à l'axe réel.

De ce qui a été dit au début de ce Chapitre, il résulte que la fonction  $\Omega(Z)$  possède les propriétés suivantes :

- 1° Elle est réelle sur l'axe réel;
- 2° Elle prend des valeurs conjuguées en deux points  $Z$  conjugués;
- 3° Elle est régulière, finie et continue dans toute la couronne comprise entre les circonférences de rayons 1 et  $q$ , limites comprises, exception faite du point  $j$  et du point conjugué, comme aussi des points correspondant à un changement brusque d'orientation des parois du canal, s'il y a de tels points sur ces parois.
- 4° On voit de suite qu'en posant

$$\Omega = \Theta + iT,$$

on aura

$$(55) \quad V = |u - iv| = e^T, \quad \frac{u + iv}{V} = e^{i\Theta},$$

$V$  étant la vitesse, de projections  $u$ ,  $v$ , d'une molécule fluide.  $\Theta$  est donc l'angle de la vitesse avec  $Ox$ . De là, nous concluons que, lorsque le point  $Z$  reste sur la circonférence de rayon 1,  $\Theta$  sera constamment égal à l'angle qui fait avec  $Ox$  la tangente à  $\varpi_1$  ou à  $\varpi_2$ , ces tangentes étant orientées dans le sens du courant.

La vitesse  $V$  étant nulle à la proue  $O$  de l'obstacle, on a au point  $j$  et au point conjugué

$$T = -\infty.$$

5° Sur la circonférence de rayon  $q$ ,  $\Theta$  sera l'angle du courant avec  $Ox$ , le long des parois du canal. En particulier, pour un canal rectiligne,  $\Theta$  sera constamment nul.

Aux points des parois, où il y aurait variation brusque d'inclinaison (sans angle saillant vers le fluide), la vitesse  $V$  serait nulle et  $T$  serait encore égal à  $-\infty$ .

Nous n'avons pas mentionné, dans les conditions précédentes, le point  $j$ , ni son conjugué. En ces points, la fonction  $\Omega$  reste régulière; en effet, à l'infini en amont dans le canal, la vitesse du fluide est égale à  $V_\infty$ , et fait un angle  $\theta_2$  avec  $Ox$ ; quand, dans cette région, on traverse



le canal pour passer d'une paroi sur l'autre, ni  $\Theta$  ni  $T$  n'éprouvent donc de discontinuités.

**Forme générale de  $\Omega$ ; degré de généralité du problème.**

Soit  $\Omega_0$  une fonction particulière satisfaisant à toutes les conditions énoncées dans le paragraphe précédent, et dont la partie réelle prenne sur les frontières, aux points de discontinuité, les mêmes valeurs, de part et d'autre, que la fonction  $\Omega$ . Alors la différence  $\Omega - \Omega_0$  sera une fonction de  $Z$  régulière partout dans la couronne, limites comprises, sans aucune restriction. Cette différence, étant en outre réelle sur l'axe réel, sera développable en série de Laurent à coefficients réels, de la forme

$$(56) \quad \Omega - \Omega_0 = c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \dots + d_1 \frac{1}{Z} + d_2 \frac{1}{Z^2} + \dots,$$

les coefficients étant assujettis à rendre convergents la série écrite.

Il faudra encore que la différence ci-dessus ait sa partie réelle nulle pour  $Z = j$  (ce qui entraîne la même chose pour le point conjugué).

Cela fournit de suite la relation

$$(56') \quad c_0 + (c_1 + d_1) \cos \sigma_0 + \dots + (c_n + d_n) \cos n \sigma_0 + \dots = 0,$$

$\sigma_0$  désignant l'argument du point  $j$ . Et l'on aura une relation analogue en chaque point de discontinuité sur la frontière intérieure du domaine (point correspondant aux changements brusques d'orientation des parois).

Sous cette dernière restriction, nous pouvons donc dire que l'équation

$$\Omega = \Omega_0 + c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \dots + c_n Z^n + \dots + d_1 \frac{1}{Z} + d_2 \frac{1}{Z^2} + \dots + d_n \frac{1}{Z^n} + \dots$$

fournit l'intégrale générale du mouvement d'un fluide dans un canal; et ce qui précède met en évidence le degré de généralité de la question : ce degré de généralité est le même que celui de la série de Laurent susdite.

*Remarque.* — Le raisonnement précédent n'est pas affranchi de tomber sous l'objection suivante : il n'est pas évident que le développement en série de Laurent, de la différence  $\Omega - \Omega_0$ , soit encore valable sur les circonférences de rayon 1 et  $q$ ; cela, du moins, n'est pas une conséquence immédiate de la continuité de cette différence sur toute la circonférence (une fonction continue peut n'être pas développable en série de Fourier).

Je n'insiste pas ici sur la difficulté que je signale, et ceci pour deux raisons :

a. S'il s'agit simplement de déterminer le degré de généralité de notre problème, ce qui précède subsiste, à condition de remplacer peut-être la condition (56') par une autre jouant le même rôle, mais qui pourra être plus difficile à écrire;

b. Cette difficulté sera résolue complètement, *a posteriori*, par la détermination, que nous donnerons plus loin, d'une forme nouvelle tout à fait différente, pour la fonction  $\Omega$  la plus générale qui convient à notre problème.

Avant d'aller plus loin, nous allons maintenant montrer que tous les éléments géométriques et cinématiques du mouvement peuvent s'exprimer au moyen de  $Z$  et de  $\Omega(Z)$ ,

**Expression des éléments du mouvement en fonction de  $Z$  et de  $\Omega(Z)$ .**

*Lignes de courant.* — Ces lignes ayant pour équation  $\psi = \text{const.}$ , on les obtiendra en calculant le coefficient de  $i$  dans l'expression de  $f$  en fonction de  $Z$ , opération facile en utilisant le théorème d'addition de la fonction  $p$ . Il nous paraît inutile d'explicitier l'expression de  $\psi$  qui en résulte.

**Position et vitesse d'une molécule correspondant à  $Z$  donné.**

On a, d'après (4) et (6),

$$dz = e^{i\Omega} df.$$

Par suite, en se rappelant que  $z = 0$  pour  $Z = j$

$$(57) \quad z = \int_j^Z e^{i\Omega} df.$$

Il faut prendre cette intégrale le long d'un chemin quelconque ne sortant pas de la couronne. Dans cette intégrale,  $df$  est égal à l'expression (33) [jointe à (32) et (36)].

Ceci donne la position de la molécule; on a déjà vu que la vitesse est déterminée par

$$(58) \quad V = e^r, \quad \frac{u + iv}{V} = e^{i\Theta}.$$

*Élément d'arc.* — Il est

$$(59) \quad |dz| = e^{-r} |df|.$$

Particulièrement, le long d'une ligne libre, comme on a  $V = e^r = 1$ , l'élément d'arc est  $|df|$ .

*Rayon de courbure d'une ligne de courant.* — L'angle de contingence étant  $d\Theta$ , le rayon de courbure  $R$  est

$$(60) \quad R = e^{-r} \left| \frac{df}{d\Theta} \right|;$$

sur une ligne libre, il prend la forme  $\left| \frac{df}{d\Theta} \right|$ .

*Paroi  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ .* — On les obtient en prenant l'intégrale (57) le long de la demi-circonférence de rayon 1; si nous désignons par  $\sigma_0$  l'argument du point  $j$ , et par  $\sigma$  l'argument du point  $Z$ , il faudra faire varier  $\sigma$  de  $\sigma_0$  à  $\pi$  pour que le point  $z$  décrive la paroi  $\varpi_1$ , et de  $\sigma_0$  à 0 pour qu'il décrive la paroi  $\varpi_2$ .

Pour expliciter les calculs, écrivons, d'après (8),

$$(61) \quad df = - \left( \frac{A}{t-a} + \frac{B}{t-b} \right) dt,$$

où [*cf.* l'équation (37)], puisque  $\log Z = i\sigma$ ,

$$(62) \quad t = \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - \zeta \gamma + \frac{a+b}{4};$$

ou mieux, d'après la valeur de  $a+b$  calculée antérieurement,

$$t = \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) + \zeta \frac{\gamma}{2} + \zeta_1 \frac{\gamma}{2} - 2\zeta \gamma,$$

c'est-à-dire [*cf.* (53)]

$$t = \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - \zeta_2 \frac{\gamma}{2} - \zeta_3 \frac{\gamma}{2}.$$

Puis, d'après (35),

$$(63) \quad dt = -\frac{\omega}{\pi} d\sigma \left[ p \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - p \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right].$$

$\frac{df}{d\sigma}$  est visiblement réel.

Si, maintenant, on se souvient que  $px = -\zeta'x$ , on voit qu'on peut écrire

$$(64) \quad z = -\int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-T+i\Theta} d\sigma \left\{ \begin{aligned} & \Lambda \frac{d}{d\sigma} \log \left[ \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right. \\ & \quad \left. - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta_1 \frac{\gamma}{2} \right] \\ & + B \frac{d}{d\sigma} \log \left[ \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right. \\ & \quad \left. - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta_2 \frac{\gamma}{2} \right] \end{aligned} \right\}$$

et, par suite, en séparant le réel et l'imaginaire,

$$(65) \quad \begin{cases} x = -\int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-T} \cos \Theta d\sigma \left[ \Lambda \frac{d}{d\sigma} \log(\dots) + B \frac{d}{d\sigma} \log(\dots) \right], \\ y = -\int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-T} \sin \Theta d\sigma \left[ \Lambda \frac{d}{d\sigma} \log(\dots) + B \frac{d}{d\sigma} \log(\dots) \right]. \end{cases}$$

L'élément d'arc sur une de ces parois est, d'après (59),

$$d\varpi = e^{-T} |df|,$$

c'est-à-dire

$$(66) \quad d\varpi = e^{-T} |d\sigma| \left\{ A \frac{d}{d\sigma} \log \left[ \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta_1 \frac{\gamma}{2} \right] + B \frac{d}{d\sigma} \log \left[ \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta_2 \frac{\gamma}{2} \right] \right\}.$$

*Lignes libres.* — On les obtient lorsque Z décrit une portion de l'axe réel, de  $-1$  à  $-q$  pour  $\lambda_1$ , de  $+1$  à  $+q$ , pour  $\lambda_2$ .

En appelant  $z_1 = x_1 + iy_1$  l'affixe du point  $P_1$  où se détache la première ligne libre, on a par exemple sur  $\lambda_1$ , d'après (57),

$$z = z_1 + \int_{-1}^z e^{i\Omega} df.$$

Or, sur l'axe réel, du côté négatif, on a  $\log Z = \log \rho + i\pi$ . On en conclut sans peine que, si Z varie entre  $-1$  et  $-q$ , l'expression de  $\frac{df}{dZ}$  est réelle. Par suite, sur  $\lambda_1$  on a

$$(67) \quad x = x_1 + \int_{-1}^z \cos \Omega df, \quad y = y_1 + \int_{-1}^z \sin \Omega df.$$

Et l'on a vu que l'arc serait donné par  $d\lambda = |df|$ .

Les parois du canal s'obtiendront d'une façon analogue, en intégrant le long de la circonférence intérieure.

*Quantité de fluide s'écoulant entre l'obstacle et chaque paroi du canal.*

— Menons une normale  $HH'$  à la paroi  $\mu_1$  du canal, jusqu'à l'intersection avec la ligne libre  $\lambda_1$ . Comme à l'infini en aval du solide, la vitesse du fluide qui coule est égale à 1, la quantité de fluide  $Q_1$  qui s'écoule pendant l'unité de temps est  $HH'$ . Donc

$$Q_1 = \int_{HH'} ds = \int_{HH'} -dx \sin \theta_1 + dy \cos \theta_1 = \int_{HH'} u dy - v dx,$$

puisque à l'infini

$$u = \cos \theta_1, \quad v = \sin \theta_1.$$

Exprimant  $u$  et  $v$  en fonction de  $\psi$ , il vient

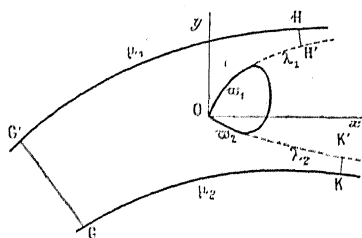
$$Q_1 = \int_{\mathbb{R}^H} d\psi,$$

c'est-à-dire

$$(67') \quad Q_1 = \psi_1,$$

puisque  $\psi$  est nul sur la ligne libre  $\lambda_1$ .

Fig. 9.



On montrera de même que la quantité  $Q_2$  de fluide qui s'écoule pendant l'unité de temps entre  $\lambda_2$  et  $\mu_2$  est

$$(67'') \quad Q_2 = \psi_2.$$

*Largeur asymptotique du canal en amont.* — Appelons  $L$  la largeur asymptotique du canal en amont. Comme la quantité de fluide, qui arrive en amont de l'obstacle, doit être égale à la quantité totale qui s'écoule en aval, nous en concluons, immédiatement, en nous rappelant que la vitesse en amont est  $V_\infty$ ,

$$(68) \quad LV_\infty = \psi_1 + \psi_2.$$

Ceci nous fera connaître  $L$  si nous connaissons  $V_\infty$ . Or, cette dernière quantité sera égale [cf. form. (58)] à la valeur que prend  $e^T$  au point  $Z = j_1$ . Ce point  $j_1$  étant un point connu, nous saurons déterminer  $L$  dans chaque cas : on a

$$V_\infty = e^{\text{Partie réelle de } \frac{1}{i} \Omega \left[ \log e^{i \frac{\pi}{2} \left( w - \frac{\gamma}{2} \right)} \right]}.$$

(69)

$$L = \frac{\psi_1 + \psi_2}{V_\infty}.$$

## Résistance de l'obstacle.

En appelant  $\alpha$  et  $\beta$  les cosinus directeurs de la normale extérieure à l'obstacle, les pressions élémentaires exercées par le fluide sur cet obstacle, se composent en une résultante générale  $P_x, P_y$ , et en un moment résultant au point O, fournis par les formules

$$(70) \quad P_x = - \int p \alpha \, ds, \quad P_y = - \int p \beta \, ds, \quad M = - \int p (\beta x - \alpha y) \, ds,$$

les intégrales ci-dessus étant étendues au contour de l'obstacle parcouru dans le sens trigonométrique direct.

Les formules élémentaires

$$\alpha \, ds = dy, \quad \beta \, ds = -dx$$

permettent immédiatement d'écrire

$$(71) \quad P = P_x + iP_y = i \int p \, dz.$$

Remplaçons maintenant  $p$  par sa valeur, qui est

$$p = p_1 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$$

le long du contour  $P_2OP_1$ , et  $p = p_1$  sur le reste du contour; on voit de suite qu'il reste

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{i}{2} \int_{P_1OP_2} (1 - V^2) \, dz = \frac{1}{2i} \int_{P_2OP_1} (1 - V^2) \, dz \\ \text{ou} \\ P_x = \frac{1}{2} \int_{P_1OP_2} (1 - V^2) \alpha \, ds, \quad P_y = \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} (1 - V^2) \beta \, ds, \end{array} \right.$$

expression qu'on peut écrire, d'après (58) et (43),

$$(73) \quad P = \frac{1}{2i} \int (e^{i\Omega} - e^{2T+i\Omega}) \, df,$$

l'intégrale étant prise cette fois le long de la demi-circonférence  $|Z| = 1$ , dans le sens direct, du point 1 au point  $-1$ . Ceci posé, un artifice imaginé par M. T. Levi-Civita (*cf.* LEVI-CIVITA, *Sciee leggi di resistenza: Circolo di Palermo*, 1907) et basé sur ce double fait : que la fonction  $\Omega(Z)$  prend des valeurs conjuguées en deux points  $Z$  conjugués, et que l'expression de  $df$  ne change pas lorsqu'on change  $Z$  en  $\frac{1}{\bar{Z}}$  (ce qui, sur la circonférence  $|Z| = 1$  remplace le point  $Z$  par son conjugué), permet de ramener  $P$  à la forme suivante

$$(74) \quad P = \frac{1}{2i} \int_{|Z|=1} e^{i\Omega} df.$$

où l'intégrale est étendue à toute la circonférence de rayon 1, parcourue dans le sens trigonométrique.

Le calcul de la résistance est ainsi ramené à celui d'une intégrale, dont le coefficient différentiel a été écrit tout au long précédemment.

Dans le cas particulier d'un canal rectiligne, nous allons donner, de la composante  $P_x$  de la résistance parallèle aux bords du canal, une expression très simple, entièrement débarrassée de tout signe de quadrature.

A cet effet, nous nous appuierons, comme le fait M. U. Cisotti dans son remarquable Mémoire [U. CISOTTI, *Sul moto di un solido in un canale* (*Circolo*, 1909, § 14)], sur un théorème bien connu de Green, qui est le suivant :

« Si  $\varphi(x, y)$  est une fonction harmonique de  $x$  et  $y$  (ici, le potentiel des vitesses du fluide) uniforme et régulière dans un champ limité par un contour fermé, on a l'égalité

$$\int_{\text{contour total}} \frac{d\varphi}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = \frac{1}{2} \int_{\text{contour total}} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \alpha ds = \frac{1}{2} \int V^2 \alpha ds,$$

le contour étant cette fois décrit de manière à laisser l'aire enfermée, à gauche du sens du parcours. »

Nous emploierons alors le raisonnement même de M. Cisotti, avec modifications insignifiantes.



Appliquons ce théorème au contour  $OP_1H'HG'GKK'P_2O$  de la figure 9, où les segments  $GG'$ ,  $HH'$ ,  $KK'$  sont tracés très loin à droite ou à gauche de l'obstacle. Observons que, partout où  $\psi$  est constant,  $\frac{d\varphi}{dn}$  qui est égal à  $\frac{d\psi}{ds}$  est nul. Sur  $KK'$  et  $HH'$ , on a, les parois du canal étant supposées horizontales,

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -1, \quad \alpha = -1.$$

Sur  $GG'$ , on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = V_\infty, \quad \alpha = 1.$$

De là, nous tirons d'abord facilement

$$\int \frac{d\varphi}{dn} \frac{\partial\varphi}{\partial x} ds = -KK' - HH' + GG'(V_\infty)^2 = LV_\infty^2 - \psi_1 - \psi_2,$$

ce qui, en utilisant la formule (68), peut s'écrire

$$\int \frac{d\varphi}{dn} \frac{\partial\varphi}{\partial x} ds = \frac{\psi_1 + \psi_2}{L} (\psi_1 + \psi_2 - L).$$

Calculons maintenant  $\frac{1}{2} \int V^2 \alpha ds$ ; nous trouvons de la même manière, en ayant soin d'observer que, dans ce calcul, le sens positif, pour compter les arcs  $s$ , est le sens  $OP_1H'$ , ..., c'est-à-dire le sens contraire à celui qu'on supposait dans les formules (70),

$$\frac{1}{2} \int V^2 \alpha ds = -\frac{KK' + HH'}{2} + \frac{1}{2} (V_\infty)^2 GG' + \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} V^2 \alpha ds + \frac{1}{2} \int_{KP_2+P_1H'} \alpha ds.$$

Or, on a visiblement

$$\frac{1}{2} \int_{KP_2+P_1H'} \alpha ds + \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} \alpha ds + \frac{1}{2} \int_{H'K'} \alpha ds = 0.$$

Par suite, en remarquant que  $K'H' = L - \psi_1 - \psi_2$ ,

$$\frac{1}{2} \int V^2 \alpha ds = -\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} + \frac{1}{2} LV_\infty^2 + \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} V^2 \alpha ds - \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} \alpha ds - \frac{1}{2} (L - \psi_1 - \psi_2).$$

D'où, enfin, en appliquant l'égalité de Green, et tenant compte du

changement de signe indiqué il y a un instant

$$\frac{\psi_1 + \psi_2}{L}(\psi_1 + \psi_2 - L) = \frac{1}{2} \frac{(\psi_1 + \psi_2)^2}{L} - \frac{1}{2} L + P_x,$$

ce qui se laisse mettre sans difficulté sous la forme

$$(75) \quad P_x = \frac{[L - \psi_1 - \psi_2]^2}{2L}.$$

En remarquant que  $L - \psi_1 - \psi_2$  n'est autre que la largeur du sillage à l'infini, ce résultat peut s'énoncer en disant que : *la résistance directe est égale à la moitié du carré de la largeur du sillage à l'infini, divisée par la largeur du canal.*

Ce résultat généralise celui que M. U. Cisotti avait obtenu, par la même méthode, dans le cas où le mouvement était supposé symétrique par rapport à l'axe du canal.

**L'obstacle est généralement à bords tranchants.**

C'est ici le lieu de faire remarquer que, en général, si l'on prend quelconque la fonction  $\Omega(Z)$  (satisfaisant, bien entendu, à toutes les conditions énoncées à la page 156), l'obstacle correspondant sera à bords tranchants, c'est-à-dire que les lignes libres ne s'en détacheront pas *tangentiellement avec un rayon de courbure fini*.

En effet, le rayon de courbure, en un point d'une ligne libre, est, d'après l'équation (60), égal à  $\left| \frac{df}{d\theta} \right|$ . Cherchons par exemple la valeur de cette expression au point  $P_2$  d'où part une ligne de glissement, point qui correspond à  $Z = 1$ . On peut évidemment écrire

$$df = \frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ} dZ.$$

Pour  $Z = 1$ ,  $\frac{df}{dt}$  n'est ni nul ni infini, car  $t$  n'est pas alors égal à  $a$ ,  $b$

ou  $c$ . Quant à  $\frac{dt}{dZ}$ , son expression (36) devient, quand on y fait  $Z = 1$ ,

$$-\frac{\omega}{i\pi} \frac{p' \frac{\gamma}{2} p'(\omega + \omega')}{\left[ p(\omega + \omega') - p \frac{\gamma}{2} \right]^2},$$

c'est-à-dire zéro, puisque  $p'(\omega + \omega') = 0$ .

Donc, si  $\frac{d\Theta}{dZ}$  n'est pas nul pour  $Z = 1$  (sur une ligne libre,  $\Omega$  se réduit à la fonction réelle  $\Theta$  de la variable  $Z$ , également réelle), le rayon de courbure de la ligne libre sera nul au point de départ, et l'obstacle aura bien son bord tranchant au point  $P_2$ .

Ce qu'on vient de dire pour le point  $P_2$  se transporte évidemment de soi-même au point  $P_1$ .

Or, on constatera, en formant des exemples, que la dérivée  $\frac{d\Theta}{dZ}$  est, en général, différente de zéro pour  $Z = 1$  et pour  $Z = -1$ , ce qui légitime la proposition énoncée.

## DEUXIÈME PARTIE.

SUR L'INTÉGRALE GÉNÉRALE  $\Omega(Z)$  DU PROBLÈME.

Observons, tout d'abord, que les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction  $\Omega(Z)$ , fonction dont la construction résout complètement le problème, sont les mêmes que celles que devait remplir la fonction portant le même nom, que j'ai étudiée à propos d'un solide dans un fluide limité par une paroi fixe tout au moins lorsque les parois du canal sont rectilignes <sup>(1)</sup>. Ce fait tient à ce que la présence d'une seconde paroi fixe n'introduit pas de singularités supplémen-

<sup>(1)</sup> Cf. H. VILLAT, *Sur la résistance des fluides*. Première Partie (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911); *Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide limité par une paroi fixe* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1911).

taires relativement à la façon dont doit se comporter  $\Omega(Z)$  sur la circonférence de rayon  $q$ , correspondant aux parois fixes.

En conséquence, nous allons pouvoir transporter, sans grandes modifications, au problème actuel, un grand nombre de résultats obtenus antérieurement dans les deux précédents Mémoires que j'ai rappelés il y a un instant.

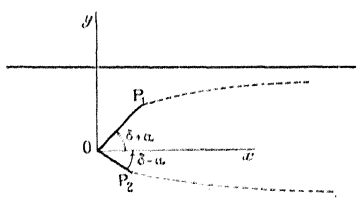
#### Cas d'un obstacle formé de deux segments rectilignes.

Nous commencerons par rechercher la solution du problème dans le cas où l'obstacle, immergé dans le canal rectiligne, est formé de deux segments rectilignes issus du point  $O$ , et faisant avec  $Ox$  deux angles  $\delta \pm \alpha$ . Nous admettrons maintenant qu'entre ces constantes et l'argument  $\sigma_0$  du point  $j$  qui correspond à la proue, on ait la relation

$$(76) \quad (\delta - \alpha)\sigma_0 + (\delta + \alpha)(\pi - \sigma_0) = 0,$$

condition dont la nécessité sera prouvée tout à l'heure.

Fig. 10.



De la signification de  $\Theta$  indiquée antérieurement (*cf.* p. 157), nous concluons de suite que  $\Theta$  doit être égal :

A  $\delta - \alpha$ , si le point  $Z$  est situé sur la circonférence de rayon 1, à droite de l'ordonnée du point  $j$ ;

A  $\delta + \alpha$ , si le point  $Z$  est situé sur la même circonférence, à gauche de l'ordonnée de  $j$ .

Il en résulte que la fonction particulière, qui résout le problème dans le cas actuel, coïncide avec la fonction  $\Omega'_0$  déterminée dans ma

Thèse, et dont je rappelle l'expression

$$(77) \quad \Omega_0^1 = \sum_1 \left[ A_n \operatorname{sh} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \cos n\sigma - i A_n \operatorname{ch} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \sin n\sigma \right]$$

avec

$$(78) \quad A_n = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n \operatorname{sh}(n \log q)}.$$

Or, dans mon Mémoire *Sur le mouvement d'un solide donné*, etc., j'ai montré qu'en introduisant des fonctions elliptiques, telles que les deux périodes  $2\omega$  et  $2\omega'$  soient liées à la quantité  $q$  par la relation

$$(79) \quad q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}},$$

la fonction  $\Omega_0^1$  pouvait prendre la forme

$$(80) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3} \log Z + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Nous déduisons de la formule (79), rapprochée de (28), que les fonctions  $\sigma$  qui figurent dans la précédente expression, peuvent être supposées construites avec les mêmes périodes  $2\omega$  et  $2\omega'$ , qui ont été utilisées pour les fonctions elliptiques introduites dans la première Partie du présent Mémoire.

Transportant maintenant cette fonction  $\Omega_0^1$  à la place de  $\Omega$  dans toutes les formules générales du Chapitre antérieur, nous en déduirons immédiatement tous les éléments du mouvement et la résistance de notre obstacle; particulièrement, les longueurs des deux segments nous seront fournies par l'équation (66) que nous intégrerons entre  $\sigma_0$  et 0, pour le segment  $OP_2$ , entre  $\sigma_0$  et  $\pi$  pour le segment  $OP_1$ . Il nous paraît inutile d'écrire ici à nouveau les formules correspondantes, où tout est ramené par de simples quadratures.

Nous observerons que le sillage, derrière notre obstacle, ne se détachera pas tangentiellement. Il suffit pour cela de faire voir (*cf. supra*, p. 167), que les valeurs de la dérivée  $\frac{d\Theta}{dZ}$  sont différentes

de zéro pour  $Z = \pm 1$ . En ces points, la dérivée en question coïncide avec  $\frac{d\Omega_0^1}{dZ}$ . Or, on a

$$\frac{d\Omega_0^1}{dZ} = \frac{2\alpha\omega}{\pi^2} \frac{1}{Z} \left[ \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) \right] + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3} \frac{1}{Z}.$$

Donc, pour  $Z = 1$ ,

$$(81) \quad \frac{d\Omega_0^1}{dZ_{(Z=1)}} = -\frac{4\alpha\omega}{\pi^2} \zeta\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3} = \frac{4\alpha\omega}{\pi^2} \left[ \frac{\eta\sigma_0}{\pi} - \zeta\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) \right].$$

Puis, pour  $Z = -1$ ,

$$\frac{d\Omega_0^1}{dZ_{(Z=-1)}} = -\frac{2\alpha\omega}{\pi^2} \left[ \zeta\left(\omega - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - \zeta\left(\omega + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) \right] - \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3},$$

ce qu'on simplifie en utilisant la formule (TANNERY et MOLL, VI)

$$\zeta\left(\omega - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) = -\zeta\left(\omega + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 - 2\omega\right) = 2\eta - \zeta\left(\omega + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right),$$

qui permet d'écrire

$$(82) \quad \frac{d\Omega_0^1}{dZ_{(Z=-1)}} = -\frac{4\alpha\omega}{\pi^2} \left[ \eta \left(1 + \frac{\sigma_0}{\pi}\right) - \zeta\left(\omega + \omega \frac{\sigma_0}{\pi}\right) \right].$$

Or ces expressions (81) et (82) ne sont évidemment pas nulles, car on vérifie aisément que la fonction  $\eta X - \zeta(\omega X)$ , c'est-à-dire

$$X\zeta\omega - \zeta(\omega X),$$

n'admet, pour  $X$  réel dans l'intervalle 0, 2 où sont compris les nombres  $\frac{\sigma_0}{\pi}$  et  $1 + \frac{\sigma_0}{\pi}$ , que la racine  $X = 1$ .

Posons, en effet,

$$S = \zeta(\omega X) - X\zeta\omega;$$

on a

$$\frac{dS}{dX} = -\omega p(\omega X) - \zeta\omega.$$

Cette dérivée est négative aux extrémités de l'intervalle, et son

maximum a lieu évidemment pour  $X = 1$ , pour laquelle valeur  $p(\omega X)$  est égal à  $e_1$  et  $\frac{dS}{dX}$  à

$$-\omega e_1 - \zeta \omega = -\omega \left( e_1 + \frac{\eta}{\omega} \right).$$

Or on sait que (TANNERY et MOLK, XXX, 1)

$$e_1 + \frac{\eta}{\omega} = \frac{\eta^2}{2\omega^2} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} \right]$$

Cette quantité est donc essentiellement positive;  $\frac{dS}{dX}$  est constamment négatif et  $S$  ne saurait s'annuler plus d'une fois. La racine  $X = 1$  est en évidence; et il est clair que  $\frac{\sigma_0}{\pi}$  et  $1 + \frac{\sigma_0}{\pi}$  ne sont jamais égaux à cette racine.

L'obstacle est donc bien à bords tranchants. Il en sera donc *en général* de même pour un obstacle pris arbitrairement.

Avant d'aller plus loin, nous ferons encore remarquer que la condition (76), admise il y a un instant, peut se traduire comme il suit : désignons par

$$(83) \quad \Theta = \Phi(\sigma)$$

la relation qui existe entre la partie réelle  $\Theta$  de  $\Omega$  sur une des parois de l'obstacle, et l'argument  $\sigma$  du point correspondant de la circonférence  $|Z| = 1$ . Dans l'exemple actuel, on a

$$\Phi(\sigma) = \delta - \alpha$$

ou

$$\Phi(\sigma) = \delta + \alpha$$

selon que le point  $Z$  est à droite ou à gauche de l'ordonnée du point  $j$ . Dans ces conditions, la relation (76) exprime évidemment que l'on a

$$(84) \quad \int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0.$$

## Nécessité de la condition (84).

Je vais montrer que, dans le cas du canal à bords rectilignes, cette condition *est une condition nécessaire du problème*, quel que soit le contour de l'obstacle considéré.

En effet, en opérant ici comme je l'ai fait dans ma Thèse (cf. *Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 250 et suiv.), on pourra former dans tous les cas possibles une fonction particulière  $\Omega_0 = \Theta_0 + iT_0$ , dont la partie réelle tende vers  $\delta \pm \alpha$ , lorsque le point Z sur la circonférence  $|Z| = 1$  tend vers le point  $j$  d'un côté ou de l'autre <sup>(1)</sup>, et telle, d'autre part, que les valeurs

$$\Theta_0 = \Phi_0(\sigma),$$

prises sur le profil de l'obstacle, satisfassent à la relation

$$(85) \quad \int_0^\pi \Phi_0(\sigma) d\sigma = 0.$$

De là résulte que la différence

$$\Omega - \Omega_0 = \Theta - \Theta_0 + i(T - T_0),$$

dans laquelle  $\Omega$  désigne la solution la plus générale du problème, celle qui correspond à un obstacle absolument quelconque, est une fonction analytique de Z, régulière partout dans la couronne circulaire  $q \leq |Z| \leq 1$  frontières comprises. Par suite, si nous considérons l'intégrale

$$\int_{|Z|=1} (\Omega - \Omega_0) \frac{dZ}{Z} - \int_{|Z|=q} (\Omega - \Omega_0) \frac{dZ}{Z},$$

où les deux circonférences sont décrites dans le même sens, nous voyons que cette intégrale est nulle, le point  $Z = 0$  étant extérieur à la couronne. Or la portion de cette intégrale relative à la circonférence intérieure  $|Z| = q$ , est réelle puisque  $\Omega$  et  $\Omega_0$  y sont imaginaires

---

<sup>(1)</sup> Ici  $\delta \pm \alpha$  désignent comme d'habitude les angles avec Ox, des deux tangentes en O au contour de l'obstacle.



pures : il en sera donc de même de la portion relative à la circonférence  $|Z| = 1$ , ce qui entraîne, en posant  $Z = e^{i\sigma}$ ,

$$\int_0^{2\pi} (\Theta - \Theta_0) d\sigma = 0,$$

ou bien

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\sigma) d\sigma = \int_0^{2\pi} \Phi_0(\sigma) d\sigma,$$

ou, enfin, en remarquant que  $\Phi(\sigma)$  et  $\Phi_0(\sigma)$  prennent les mêmes valeurs en deux points  $e^{i\sigma}$  symétriques par rapport à l'axe réel, et en utilisant l'hypothèse (85),

$$\int_0^{\pi} \Phi(\sigma) d\sigma = 0,$$

ce qui était la relation à démontrer.

#### L'intégrale générale $\Omega(Z)$ .

Le paragraphe précédent achève de démontrer l'analogie qui existe entre la solution actuelle du problème du mouvement dans un canal, avec le problème du mouvement dans un fluide limité par une seule paroi fixe. Il suffit alors de transcrire ici, mot pour mot, les raisonnements et démonstrations de mon Mémoire *Sur le mouvement d'un solide donné*, etc., pour obtenir les conclusions suivantes, que je me contente ici d'énoncer.

En désignant par

$$\theta = \Phi(\sigma)$$

la relation qui existe entre l'angle que fait avec  $Ox$  la tangente à la paroi de l'obstacle, et l'argument  $\sigma$  du point correspondant à la circonférence  $|Z| = 1$ , la fonction  $\Omega(Z)$  la plus générale, qui résout le problème, peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes ci-dessous :

$$(A) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Phi(\sigma) \frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} d\sigma,$$

cette forme étant valable seulement dans la couronne circulaire et sur la frontière intérieure, mais pas sur la frontière extérieure, et

$$\begin{aligned}
 \text{(B)} \quad \Omega(Z) = & \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\varpi\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\varpi\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} d\sigma \\
 & + \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)] \log \frac{\varpi\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}{\varpi\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)} \\
 & + \left(\frac{2\eta\omega}{\pi^2} \log Z + 1\right) \Phi(\pi),
 \end{aligned}$$

cette seconde forme étant valable dans tout le domaine, limites comprises sans aucune exception.

La fonction arbitraire dont dépend la question est ici représentée par  $\Phi(\sigma)$ ; elle est assujettie toutefois à satisfaire à la condition démontrée antérieurement

$$\int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0.$$

#### Cas du canal à bords quelconques.

Le cas du canal à bords quelconques peut se traiter d'une façon toute semblable. Désignons par

$$\theta = \Phi(\sigma)$$

et

$$\theta = \Psi(\sigma)$$

les relations qui existent entre l'inclinaison  $\theta$  du courant le long de l'obstacle, ou le long des bords du canal, et l'argument  $\sigma$  ( $0 < \sigma < \pi$ ), du point correspondant sur une frontière.

La relation

$$(84') \quad \int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = \int_0^\pi \Psi(\sigma) d\sigma$$

se démontrera comme la relation (84) dont elle prend la place. Mais elle résultera aussi d'une autre considération.

En effet, la fonction  $\Omega(Z)$ , qu'il s'agit actuellement de déterminer, doit être uniforme dans la couronne circulaire que l'on sait. Sa partie réelle doit prendre, sur les deux demi-circonférences frontières supérieures, les valeurs  $\Phi(\sigma)$  et  $\Psi(\sigma)$ ; et sur les demi-circonférences inférieures, les mêmes valeurs aux points symétriques par rapport à l'axe réel, ceci en vertu du prolongement analytique qui définit  $\Omega$  dans toute la couronne. Dans ces conditions, cette fonction  $\Omega$  est fournie par une formule générale dont j'ai donné ailleurs la démonstration <sup>(1)</sup>, et dont l'application conduit immédiatement au résultat suivant.

Si la condition (84') n'est pas remplie, la fonction  $\Omega(Z)$  contient un terme linéaire en  $\log Z$ , et n'est, par suite, pas uniforme. Cette condition est par conséquent nécessaire, et il vient alors [en convenant que  $\Phi(2\pi - \sigma) = \Phi(\sigma)$ ;  $\Psi(2\pi - \sigma) = \Psi(\sigma)$ ]

$$\begin{aligned}\Omega(Z) = & \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\sigma) \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) d\sigma \\ & - \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Psi(\sigma) \zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) d\sigma,\end{aligned}$$

ce qu'on met bien aisément sous la forme suivante (après décomposition de l'intervalle 0,  $2\pi$ , en deux intervalles partiels 0,  $\pi$ ;  $\pi$ ,  $2\pi$ )

$$\begin{aligned}(A_1) \quad \Omega(Z) = & \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \left[ \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] d\sigma \\ & - \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(\sigma) \left[ \zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) + \zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] d\sigma,\end{aligned}$$

qui joue le rôle de la formule (A), à laquelle d'ailleurs elle se réduit dans l'hypothèse  $\Psi(\sigma) \equiv 0$ .

#### Cas d'un obstacle donné.

Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le cas d'un canal rectiligne.

---

<sup>(1)</sup> Cf. *Sur le problème de Dirichlet relatif à une couronne circulaire* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, 13 mars 1911); *Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire* (*Circolo mat. di Palermo*, 1912, 1<sup>er</sup> sem.). La formule à laquelle je fais allusion est la formule (26) de ce dernier Mémoire.

Le contour de l'obstacle peut toujours être déterminé par la relation qui lie le rayon de courbure  $R$  en un point, avec l'angle  $\Theta$  que fait la tangente à ce contour (dans le sens du courant) avec l'axe des  $x$ . Soit

$$R = R(\Theta)$$

cette relation.

Or, en désignant par  $d\varpi$  l'élément d'arc d'une paroi  $\varpi$  de l'obstacle, on sait qu'on a [cf. f. (66)]

$$R = \left| \frac{d\varpi}{d\Theta} \right|$$

avec

$$d\varpi = e^{-T} \left| d\sigma \right| \left[ \begin{aligned} & A \frac{d}{d\sigma} \log \left[ \begin{aligned} & \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \\ & - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta_1 \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right] \\ & + B \frac{d}{d\sigma} \log \left[ \begin{aligned} & \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \\ & - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]$$

Par conséquent, une fois connue la fonction  $R(\Theta)$ , c'est-à-dire l'obstacle,  $\Phi(\sigma)$  doit satisfaire à l'équation intégrale-différentielle que voici :

$$(86) \quad R[\Phi(\sigma)]\Phi'(\sigma) = e^{-T} \left\{ \begin{aligned} & A \frac{d}{d\sigma} \log \left[ \begin{aligned} & \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \\ & - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta_1 \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right] \\ & + B \frac{d}{d\sigma} \log \left[ \begin{aligned} & \zeta \left( \omega + \omega' + \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \\ & - \zeta \left( \omega + \omega' - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

dans laquelle  $T$  doit être remplacé par sa valeur  $T_1$  :

$$(87) \quad T_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\varepsilon} \log \left| \frac{\tau \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma - \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \right)}{\tau \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \right)} \right| d\varepsilon + \frac{2\eta\omega}{\pi^2} \sigma \Phi(\sigma)$$

qu'il prend sur la circonférence de rayon 1, au point  $e^{i\sigma}$  <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Cf. H. VILLAT, *Sur le mouvement d'un solide*, etc., p. 385 [form. (51)].

Bien entendu, cette équation ne peut être résolue complètement dans l'état actuel de nos connaissances. Mais cette résolution n'est nullement indispensable pour obtenir pratiquement le mouvement d'un fluide dans un canal, avec un obstacle de forme générale donnée à l'avance.

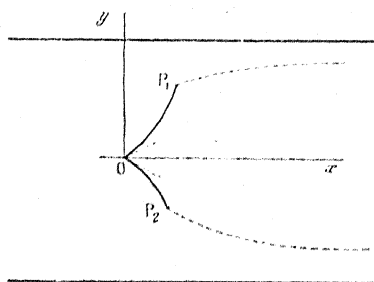
On peut en effet, dès que la forme de l'obstacle est donnée, en conclure comment varie l'angle de la tangente avec la direction des parois du canal, lorsqu'on décrit le contour de l'obstacle dans un sens déterminé, par exemple dans le sens  $P_2OP_1$ , et par suite on sait quelle doit être l'allure de la fonction  $\Phi(\sigma)$  lorsque  $\sigma$  varie de 0 à  $\pi$ , en passant par  $\sigma_0$  (pour la proue de l'obstacle). La fonction exacte  $\Phi(\sigma)$ , qui correspond au contour donné, appartient donc à une classe de fonctions faciles à caractériser, et dans laquelle il sera en général facile de choisir une fonction particulière (contenant si l'on veut des constantes arbitraires en nombre quelconque) qui fournisse un obstacle de forme pratiquement identique à celui qu'on s'était donné à l'avance.

Pour la construction d'exemples de cette nature, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer ailleurs, il suffira d'utiliser la formule (A) pour  $\Omega(Z)$ , la difficulté relative à la frontière extérieure disparaissant d'elle-même, dès que les quadratures ont été effectuées (*cf.*, par exemple, ma *Thèse*, p. 84, ou *Annales de l'École normale*, 1911, p. 286).

Des considérations toutes semblables sont valables dans le cas d'un canal quelconque.

*Exemple.* — Soit, par exemple, un obstacle ayant la forme indiquée

Fig. 11.



par le dessin ci-dessus. On voit de suite que la fonction cherchée  $\Phi(\sigma)$  doit être constamment négative et croissante dans l'intervalle 0,  $\sigma_0$ ,

qui correspond à  $P_2O$ , constamment positive et croissante dans l'intervalle  $\sigma_0, \pi$ , qui correspond à  $OP_1$ . De plus, le module de  $\Phi(\sigma)$  ne doit jamais dépasser  $\frac{\pi}{2}$ , et si les deux tangentes en  $O$  sont supposées faire avec  $Ox$  le même angle (en valeur absolue), les valeurs  $\Phi(\sigma_0 + 0)$  et  $\Phi(\sigma_0 - 0)$  vers lesquelles tend  $\Phi(\sigma)$ , lorsque  $\sigma$  tend vers  $\sigma_0$  par valeurs supérieures ou inférieures, seront opposées.

Nous pourrions alors prendre (cf. *Sur le mouvement d'un solide*, p. 402),  $P$  désignant une constante,

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi(\sigma) = P \frac{p' \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\left[ p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right]^{\frac{3}{2}}} & \text{si } 0 < \sigma < \frac{\pi}{2}, \\ \Phi(\sigma) = -\Phi(\pi - \sigma) & \text{si } \frac{\pi}{2} < \sigma < \pi, \end{array} \right.$$

et nous avons vu qu'alors la fonction  $\Omega(Z)$  s'écrivait (*Id.*, p. 407)

$$(89) \quad \Omega(Z) = \frac{Pi}{\pi} p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) \times \left[ \frac{2[e_1^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)]}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) \left[ (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1 \left\{ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - e_1 \right\} \right] \sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}}} \right. \\ - \frac{1}{\left[ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) \right]^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} - \sqrt{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right)}}{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} + \sqrt{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right)}} \\ \left. \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\sqrt{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - e_1} \left\{ (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1 \left[ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - e_1 \right] \right\}^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \left. \times \log \frac{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} - \sqrt{e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - e_1}}}{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} + \sqrt{e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log Z \right) - e_1}}} \right]$$

Il suffit ensuite de transporter cette fonction dans les formules (65), (66), (69), (74), (79), pour en conclure les équations exactes du profil, et la valeur de la résistance correspondante. Les équations (68), (69) donneront notamment la largeur du canal et la vitesse correspondante à l'infini.

Je n'insisterai pas ici sur cet exemple, ni sur d'autres faciles à former, me proposant d'y revenir ailleurs, en indiquant quelques résultats numériques intéressants.

---

### TROISIÈME PARTIE.

#### MOUVEMENTS ET OBSTACLES SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT A L'AXE DU CANAL.

---

Le problème se simplifie grandement si l'on suppose que l'obstacle, et par suite le mouvement, soient symétriques par rapport à l'axe du canal. On peut alors résoudre le problème de plusieurs manières outre la résolution si élégante de M. Cisotti; je vais ici exposer deux des procédés simples que l'on peut employer, car les catégories d'exemples qui se traitent facilement et qui se présentent d'elles-mêmes ne sont pas identiques suivant les méthodes employées.

#### Première méthode.

Une première méthode est celle qui résulte des Chapitres précédents. On a déjà vu que nos formules générales conviendraient au cas de la symétrie, si l'on y faisait (cf. p. 144)

$$(90) \quad \begin{cases} a = -b, & A = B, & c = 0, & \gamma = \omega, \\ j = e^{i\frac{\pi}{2}}, & j_1 = q e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

Toutes les formules s'appliquent alors facilement. La manière de former des exemples correspondant à des obstacles dont le contour a une allure donnée, reste la même que précédemment.

Il est bon de remarquer que, parmi les plus importantes simplifications, figure celle relative au calcul de la résistance : dans le cas du canal rectiligne, celle-ci n'a plus qu'une composante non nulle, celle qui est parallèle aux parois du canal (résistance directe), et par suite elle s'exprime actuellement sans quadratures (c'est alors le théorème de M. U. Cisotti).

### Seconde méthode.

La seconde méthode, que je vais exposer en quelques mots, va provenir d'un procédé d'inversion de l'intégrale (14), plus simple dans le cas de la symétrie, que celui indiqué pour le cas général.

Nous commençons donc, comme dans notre première méthode, par faire correspondre au domaine  $\mathfrak{w}$  du plan  $f$ , correspondant au fluide en mouvement, un demi-plan  $t$ , par la formule (7) actuellement réduite à

$$(91) \quad f = -\Lambda \log(t^2 - b^2) + 2\Lambda \log b + i\psi_1$$

équivalente à [cf. éq. (8)]

$$(92) \quad df = -\frac{2\Lambda t}{t^2 - b^2} dt.$$

Ensuite, comme ci-dessus [éq. (14)] posons

$$(93) \quad ds = \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - b^2)}} = \frac{1}{b} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)\left(1 - \frac{1}{b^2}t^2\right)}}.$$

On voit alors immédiatement que l'inversion va s'obtenir d'elle-même au moyen des fonctions de Jacobi, de module

$$(94) \quad k = \frac{1}{b} < 1,$$

et nous pouvons écrire de suite

$$(95) \quad t = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(bs) = \operatorname{sn}\left(\frac{s}{k}\right).$$

la fonction  $\operatorname{sn}$  étant la fonction elliptique construite avec les périodes  $4K$ ,



$2iK'$ , où  $K$  et  $K'$  sont donnés par (cf. APPELL et LACOUR, p. 153)

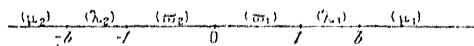
$$(96) \quad \begin{cases} K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} \end{cases} \quad (k^2 + k'^2 = 1).$$

Or il est facile de vérifier que  $t$  décrit l'axe réel de son plan, lorsque le point

$$(97) \quad u = \frac{s}{k}$$

décrit le contour du rectangle indiqué sur la figure 13 : la corres-

Fig. 12.



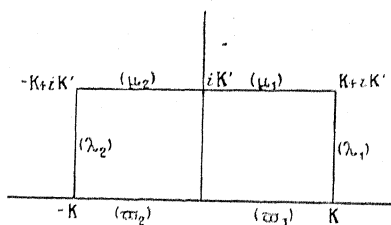
pondance étant établie avec l'axe réel du plan  $t$ , comme le montre le dessin.

Les valeurs de  $\operatorname{sn} u$  sur les côtés  $O, K; K, K + iK'; K + iK', iK';$  sont en effet bien classiques (cf. APPELL et LACOUR, p. 152); pour en déduire les valeurs prises sur les côtés du demi-rectangle de gauche, il suffit de se rappeler que  $\operatorname{sn}$  est une fonction impaire, qu'elle admet la période  $2iK'$ , et qu'on a (APPELL, p. 405)

$$\operatorname{sn}(-K + i\nu) = \operatorname{sn}(K + i\nu + 2K) = -\operatorname{sn}(K + i\nu).$$

D'où l'on conclut que les valeurs, prises sur les côtés du demi-rectangle

Fig. 13.



de gauche, sont opposées à celles du demi-rectangle de droite. D'où la représentation qui est figurée.

Posons maintenant

$$(98) \quad s = ku = \frac{1}{iB'} \log \frac{Z}{i} \quad (B' = \text{const. réelle})$$

avec

$$(99) \quad Z = \rho e^{i\sigma}.$$

Par suite

$$s = ku = \frac{1}{iB'} \left( \log \rho + i\sigma - \frac{i\pi}{2} \right).$$

On a immédiatement les résultats indiqués par le Tableau suivant :

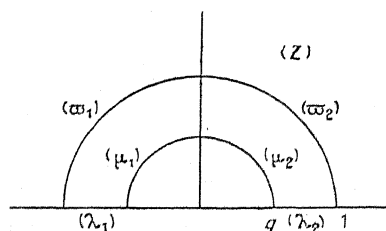
	u varie de	$\rho$ .	$\sigma$ .
( $\omega_1$ )	0 à K	const = 1	varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2} + B'kK$
( $\lambda_1$ )	K à K + iK'	varie de 1 à $e^{-B'kK'}$	const = $\frac{\pi}{2} + B'kK$
( $\mu_1$ )	K + iK' à iK'	const = $e^{-B'kK'}$	varie de $\frac{\pi}{2} + B'kK$ à $\frac{\pi}{2}$
( $\mu_2$ )	iK' à -K + iK'	const = $e^{-B'kK'}$	varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2} - B'kK$
( $\lambda_2$ )	-K + iK' à -K	varie de $e^{-B'kK'}$ à 1	const = $\frac{\pi}{2} - B'kK$
( $\omega_2$ )	-K à 0	const = 1	varie de $\frac{\pi}{2} - B'kK$ à $\frac{\pi}{2}$

En conséquence, si nous choisissons  $B'$  par la condition

$$(100) \quad B'kK = \frac{\pi}{2},$$

nous aurons réalisé la représentation du demi-plan  $z$  sur la demi-cou-

Fig. 14.



ronne circulaire qu'indique le dessin. Je ne m'arrête pas à faire voir

que la représentation sera conforme, cela étant évident d'après ce qu'on a déjà exposé au Chapitre I.

Observons que les lignes libres ont leurs images sur les bords de la demi-couronne situés sur l'axe réel du plan  $Z$ . Enfin, le rayon de la circonférence intérieure est

$$(101) \quad e^{-B'K K'} = e^{-\frac{\pi K'}{2K}} = q^{\frac{1}{2}}$$

en désignant, selon l'usage, par  $q$ , la quantité

$$(102) \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

En définitive, nous avons, entre  $t$  et  $Z$ , la relation

$$t = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn} \left[ \frac{1}{i k B'} \left( \log Z - \frac{i\pi}{2} \right) \right]$$

ou

$$(103) \quad t = \operatorname{sn} \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z - K \right).$$

Et par suite on passera de  $f$  à  $Z$ , par la transformation

$$(104) \quad f = -\Lambda \log \left[ \operatorname{sn}^2 \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z - K \right) - \frac{1}{k^2} \right] + 2\Lambda \log \frac{1}{k} + i\psi_1.$$

Or on a

$$k^2 \operatorname{sn}^2 \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z - K \right) - 1 = -\operatorname{dn}^2 \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z - K \right),$$

ce qui permet de mettre l'équation (104) sous la forme suivante, après réductions évidentes,

$$f = i(\psi_1 - \Lambda\pi) - 2\Lambda \log \left[ \operatorname{dn} \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z - K \right) \right].$$

D'ailleurs on sait que (TANNERY et MOLK, LXXII)

$$\operatorname{dn} \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z - K \right) = \operatorname{dn} \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z + K \right) = \frac{k'}{\operatorname{dn} \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z \right)}.$$

Donc, en définitive,

$$(105) \quad f = 2\Lambda \log \left[ \operatorname{dn} \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z \right) \right] + i(\psi_1 - \Lambda\pi) - 2\Lambda \log k'.$$

Et par suite la différentielle  $df$  s'en déduit immédiatement sous la forme (cf. TANNERY et MOLK, LXVIII)

$$(106) \quad df = - \frac{4AKk^2}{i\pi} \frac{dZ}{Z} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right)}.$$

On aperçoit que cette différentielle reste invariable si l'on échange  $Z$  en  $\frac{1}{Z}$ .

La fonction  $\Omega(Z)$ . Éléments du mouvement en fonction de  $\Omega$  et de  $Z$ .

L'introduction de la fonction  $\Omega(Z)$  définie dans la couronne circulaire dont la demi-couronne précédente constituait la moitié, et les propriétés de cette précédente fonction, se déterminent exactement comme nous l'avons fait dans la première Partie : la seule différence est que le rayon de la circonférence intérieure est  $q^{\frac{1}{2}}$  au lieu de  $q$ . Tous les éléments du mouvement se déterminent aussi de même, en partant de la valeur (106) de  $df$ . Par exemple, les lignes  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , qui forment le profil de l'obstacle, sont fournies par les équations suivantes, déduites de (65) :

$$z = x + iy = \int_i^Z e^{i\Omega} df = - \frac{4AKk^2}{i\pi} \int_i^Z \frac{dZ}{Z} e^{i\Omega} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right)},$$

l'intégrale étant prise le long de la circonférence  $|Z| = 1$ , ce qui donne en séparant  $x$  et  $y$  :

$$(107) \quad \begin{cases} x = - \frac{4AKk^2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{-\tau} \cos \Theta \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi} \sigma\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2K}{\pi} \sigma\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{\pi} \sigma\right)} d\sigma, \\ y = - \frac{4AKk^2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{-\tau} \sin \Theta \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi} \sigma\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2K}{\pi} \sigma\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{\pi} \sigma\right)} d\sigma, \end{cases}$$

et l'élément d'arc sur une de ces parois est

$$(108) \quad d\sigma = \frac{4AKK^2}{\pi} e^{-\tau} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\sigma\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2K}{\pi}\sigma\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{2K}{\pi}\sigma\right)} d\sigma.$$

On a des calculs tout à fait semblables pour les parois du canal.

### Fonction particulière $\Omega_0^1$ . L'intégrale générale $\Omega$ .

Supposons d'abord le canal rectiligne.

Nous avons dans le cas général obtenu tout d'abord la fonction particulière  $\Omega_0^1$  qui correspondait à l'obstacle formé de deux lames faisant avec  $Ox$  les angles  $\hat{\sigma} \pm \alpha$ . La solution correspondante peut être ici transportée en faisant  $\hat{\sigma} = 0$ ,  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ , et en mettant dans l'expression (77) de cette fonction particulière  $q^{\frac{1}{2}}$  à la place de  $q$ .

Si par suite on veut utiliser la démonstration que nous avons faite, qui donne la fonction  $\Omega_0^1$  exprimée au moyen de fonctions elliptiques, il suffira de prendre, pour l'application de la formule (80), des fonctions elliptiques construites avec les périodes que je vais dire :

Observons tout d'abord que dans la formule que je viens de rappeler, à savoir, en désignant momentanément par  $\omega_1$ ,  $\omega'_1$ , les demi-périodes,

$$(109) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\vartheta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \sigma_0 \middle| \omega_1, \omega'_1\right)}{\vartheta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \sigma_0 \middle| \omega_1, \omega'_1\right)} + \frac{4\alpha\eta_1\omega_1\sigma_0}{\pi^3} \log Z + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi},$$

on peut, pour la construction des fonctions  $\vartheta$ , modifier les périodes  $2\omega_1$ ,  $2\omega'_1$ , en les multipliant par un facteur constant arbitraire  $\lambda$ . D'après des formules d'homogénéité (*cf.* TANNERY et MOLK, XVIII), on a

$$\vartheta(u | \lambda\omega_1, \lambda\omega'_1) = \lambda \vartheta\left(\frac{u}{\lambda} \middle| \omega_1, \omega'_1\right),$$

et par suite

$$\frac{\vartheta\left(\frac{\lambda\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\lambda\omega_1}{\pi} \sigma_0 \middle| \lambda\omega_1, \lambda\omega'_1\right)}{\vartheta\left(\frac{\lambda\omega_1}{i\pi} \log z + \frac{\lambda\omega_1}{\pi} \sigma_0 \middle| \lambda\omega_1, \lambda\omega'_1\right)} = \frac{\vartheta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \sigma_0 \middle| \omega_1, \omega'_1\right)}{\vartheta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z + \frac{\omega_1}{\pi} \sigma_0 \middle| \omega_1, \omega'_1\right)}.$$

D'autre part,  $\eta_1 = \zeta\omega_1$  devant être remplacé par  $\frac{\eta_1}{\lambda}$  (TANNERY et MOK, *Idem*), le produit  $\eta_1\omega_1$  n'est pas modifié et, par conséquent, la formule (109) n'est pas altérée par la transformation ci-dessus. Dans cette formule, les périodes  $2\omega_1$ ,  $2\omega'_1$ , n'interviennent donc en réalité que par leur rapport, qui doit être lié à  $q'$  par la relation

$$q' = e^{-\frac{\pi\omega'_1}{i\omega_1}},$$

$q'$  désignant le rayon intérieur de la couronne circulaire que l'on sait.

Ceci étant, le rayon de la circonférence intérieure de notre couronne devant être ici égal à  $e^{-\frac{\pi K'}{2K}}$ , les périodes  $2\omega_1$  et  $2\omega'_1$  que nous devons choisir seront liées à  $K$  et  $K'$  par

$$e^{-\frac{\pi\omega'_1}{i\omega_1}} = e^{-\frac{\pi K'}{2K}}$$

ou, si l'on veut,

$$(110) \quad \frac{\omega'_1}{\omega_1} = \frac{iK'}{2K},$$

ce qui les définit à un facteur près.

Rien n'empêche de choisir

$$(111) \quad \omega_1 = K, \quad \omega'_1 = \frac{iK'}{2};$$

de sorte qu'alors notre fonction particulière  $\Omega'_0$  qui convient à l'obstacle formé de deux lames sera  $\left(\sigma_0 = \frac{\pi}{2}\right)$

$$(112) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega'_0 &= \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{2} \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{2} \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)} + \frac{2\alpha\eta_1 K}{\pi^2} \log Z + \alpha \\ &\quad \left[ \eta = \zeta\left(K \middle| K, \frac{iK'}{2}\right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Ce résultat peut recevoir une forme plus condensée. J'ai en effet démontré <sup>(1)</sup> que la fonction  $\Omega'_0$  du cas général s'exprimait facilement

(1) Cf. mon Mémoire : *Sur le mouvement d'un solide donné*, etc., équation (25), p. 366.

au moyen des fonctions de Jacobi construites avec les constantes  $K_1$  et  $K'_1$  liées aux périodes  $2\omega_1$ ,  $2\omega'_1$  par la relation

$$e^{-\frac{\pi\omega'_1}{i\omega_1}} = e^{-\frac{\pi K'_1}{K_1}}.$$

Rien n'empêche de prendre

$$(113) \quad K_1 = \omega_1 = K, \quad K'_1 = \frac{\omega'_1}{i} = \frac{K'}{2},$$

et, dans ces conditions, l'équation rappelée nous donne, en nous souvenant qu'à cause de la symétrie on a  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ ,

$$(114) \quad \Omega'_0 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{2} \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{2} \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)} + \alpha.$$

C'est cette forme que nous allons conserver pour le moment, pour en déduire l'expression de  $\Omega$  qui convient à l'obstacle le plus général. La marche à suivre étant celle que j'ai indiquée dans ma *Thèse* (seconde Partie, p. 54), j'exposerai très rapidement les calculs, qui se légitiment comme je l'ai déjà dit en cet endroit.

Nous écrirons d'abord la fonction  $\Omega_0$  qui correspond à un obstacle polygonal symétrique par rapport à  $Ox$  (jouant le rôle d'intermédiaire analytique) et, par le même procédé utilisé dans le travail rappelé, on la mettra immédiatement sous la forme

$$(115) \quad \Omega_0 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi} \left[ \sigma_1 + i \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_1 \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_1 \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)} \right] \\ + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \left[ \sigma_2 + i \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_2 \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_2 \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)} \right] \\ + \dots \dots \dots + \frac{\theta_N - \theta_{N-1}}{\pi} \left[ \sigma_{N-1} + i \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_{N-1} \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_{N-1} \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)} \right]$$

dans laquelle  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$  désignent les angles que font avec  $Ox$  les côtés du polygone, et  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}, \pi$  les arguments des points de la demi-circonférence supérieure  $|Z| = 1$  qui correspondent aux sommets du polygone. A cause de la symétrie, la valeur de  $\sigma$  qui correspond à la proue de l'obstacle (point de la paroi où le courant se divise) est évidemment  $\frac{\pi}{2}$ , et les valeurs de  $\theta$ , correspondant aux côtés symétriques, sont opposées.

Si maintenant nous supposons que la ligne polygonale tende vers une courbe quelconque, le nombre de ses côtés devenant infini, chacun d'eux tendant vers zéro, et si nous appelons

$$\theta = \Phi(\sigma)$$

la relation qui existe, pour le contour limite, entre  $\theta$  et  $\sigma$ , avec évidemment

$$(116) \quad \Phi(\pi - \sigma) = -\Phi(\sigma)$$

et, par suite,

$$\int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0,$$

on en conclut immédiatement que la fonction  $\Omega$  limite de  $\Omega_0$  se présentera sous la forme ( $\Phi(\sigma)$  peut être discontinu pour  $\sigma = \frac{\pi}{2}$ )

$$(117) \quad \begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \sigma d\sigma \\ & + \frac{i}{\pi} \left[ \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \right] \log \frac{\text{H}\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{2}\right)}{\text{H}\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{2}\right)} \\ & + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\text{H}\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right)}{\text{H}\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right)} d\sigma, \end{aligned}$$

ce qui se légitime *a posteriori* exactement comme je l'ai fait ailleurs.



Cette formule peut se transformer facilement, en suivant toujours la méthode que j'ai donnée. En supposant que le point Z de la couronne ne soit pas sur la frontière extérieure, tous les calculs qui suivent seront valables (1).

D'abord on a

$$\int_0^\pi \sigma \Phi'(\sigma) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} + \int_{\frac{\pi}{2}+0}^\pi = \left[ \Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right) \right] \frac{\pi}{2} + \pi \Phi(\pi).$$

Puis une intégration par partie donne également

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \Phi'(\sigma) \log \frac{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z - \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)}{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z + \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)} d\sigma \\ &= \left[ \Phi(\sigma) \log \frac{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z - \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)}{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z + \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\ & \quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \Phi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z - \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)}{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z + \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)} d\sigma, \\ & \int_{\frac{\pi}{2}+0}^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z - \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)}{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z + \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)} d\sigma \\ &= \left[ \Phi(\sigma) \log \frac{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z - \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)}{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z + \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)} \right]_{\frac{\pi}{2}+0}^\pi \\ & \quad - \int_{\frac{\pi}{2}+0}^\pi \Phi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z - \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)}{\operatorname{H}\left(\frac{\mathbf{K}}{i\pi} \log Z + \frac{\mathbf{K}}{2} \sigma\right)} d\sigma. \end{aligned}$$

---

(1) Cf. *Thèse*, p. 65 et *Sur le mouvement d'un solide*, p. 370 et suiv.

De sorte qu'en remplaçant dans (117), il vient

$$(118) \quad \Omega = \Phi(\pi) + \frac{i}{\pi} \Phi(\pi) \log \frac{\Pi\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z - K\right)}{\Pi\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z + K\right)} \\ - \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right)} d\sigma.$$

Mais on a (TANNERY et MOLK, LXXVII)

$$\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + K \mid K, \frac{iK'}{2}\right) = \Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - K + 2K\right) = -K\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - K\right)$$

et

$$\frac{i}{\pi} \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - K\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + K\right)} = -1,$$

de sorte que les deux premiers termes de (118) se détruisent, et qu'il reste

$$(119) \quad \Omega = - \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma \mid K, \frac{iK'}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma \mid K, \frac{iK'}{2}\right)} d\sigma.$$

Dans le cas d'un canal à bords quelconques, cette formule doit être remplacée par la suivante, qu'on peut démontrer par le même procédé et que je me contente d'écrire, pour abréger la rédaction,  $\Phi(\sigma)$  et  $\Psi(\sigma)$  représentant toujours l'inclinaison du courant sur  $Ox$  le long de la paroi de l'obstacle, ou le long des parois du canal; on a

$$\Omega = - \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right)} d\sigma \\ + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Psi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\Theta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right)}{\Theta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right)} d\sigma;$$

H et  $\Theta$  sont les fonctions de Jacobi, construites avec les mêmes périodes que ci-dessus. En outre, la symétrie exige que l'on ait

$$\begin{aligned}\Phi(\pi - \sigma) &= -\Phi(\sigma), \\ \Psi(\pi - \sigma) &= -\Psi(\sigma).\end{aligned}$$

De là il sera facile de tirer autant d'exemples que l'on voudra, pour lesquels les calculs s'achèvent complètement, et qui correspondent à des formes de profils d'obstacles et de parois donnés *a priori*, l'allure des fonctions arbitraires  $\Phi(\sigma)$  et  $\Psi(\sigma)$  étant alors connue.

Je n'insisterai pas pour le moment sur ces exemples.

*Remarque.* — Il est intéressant de constater que la formule (119), à laquelle nous venons d'aboutir pour  $\Omega$ , peut coïncider avec la formule (A) exposée pour le cas général, par une transformation convenable.

A cet effet, observons qu'on a

$$\begin{aligned}(120) \quad & \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)} \\ &= -\frac{K}{\pi} \left[ \frac{\Pi'\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right)} + \frac{\Pi'\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right)}{\Pi\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right)} \right].\end{aligned}$$

Or, en introduisant les fonctions elliptiques de Weierstrass construites cette fois avec des périodes  $2\omega$ ,  $2\omega'$ , liées à  $K$  et  $K'$  par (*cf.* TANNERY et MOLK, LXXI)

$$\omega \sqrt{e_1 - e_3} = K, \quad \omega' \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{iK'}{2},$$

$e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  étant les nombres connus relatifs à ces fonctions, on a (TANNERY et MOLK, LXXVIII)

$$\frac{\Pi'(X)}{\Pi(X)} = \frac{\eta}{K \sqrt{e_1 - e_3}} X + \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \zeta\left(\frac{X}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right).$$

Donc, en posant pour un instant

$$u = \frac{K}{i\pi} \log Z = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\omega}{i\pi} \log Z,$$

$$v = \frac{K}{\pi} \sigma = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\omega}{\pi} \sigma,$$

il viendra

$$\frac{H'(u-v)}{H(u-v)} + \frac{H'(u+v)}{H(u+v)}$$

$$= \frac{\eta}{K\sqrt{e_1 - e_3}} 2u + \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left[ \zeta\left(\frac{u+v}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) + \zeta\left(\frac{u-v}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) \right].$$

Mais (TANNERY et MOLK, VII)

$$\zeta\left(\frac{u+v}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) + \zeta\left(\frac{u-v}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) = 2\zeta\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) + \frac{p'\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}{p\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) - p\left(\frac{v}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}.$$

Transportons dans (119), il vient pour  $\Omega$ , à cause de

$$\int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0,$$

et après réductions,

$$\Omega = \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log Z\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} d\sigma.$$

C'est bien la forme du cas général, et nous voyons maintenant nettement comment la forme particulière, qui convient au cas de la symétrie, doit être reliée à celle-ci.

Observons que le calcul qui vient d'être fait conduira de suite, dès qu'un exemple particulier aura été traité dans le cas général avec  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ , à en transporter tous les exemples concernant la fonction  $\Omega$  dans un exemple *correspondant* dans le cas symétrique. La fonction  $\Phi(\sigma)$  restant alors la même, les profils d'obstacles correspondants seront d'allures semblables.

## NOTE.

En conservant partout les fonctions de Jacobi, nous avons en somme obtenu, pour le cas du canal avec symétrie, les deux formules fondamentales suivantes :

1° Changement de variable :

$$(121) \quad f = 2\Lambda \log \left[ \operatorname{dn} \left( \frac{2K}{i\pi} \log Z \middle| K, iK' \right) \right] + i(\psi_1 - \Lambda\pi) - 2\Lambda \log k';$$

2° Expression de la fonction  $\Omega$  la plus générale :

$$(122) \quad \begin{aligned} \Omega = & -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\operatorname{H} \left( \frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, \frac{iK'}{2} \right)}{\operatorname{H} \left( \frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, \frac{iK'}{2} \right)} d\sigma \\ & + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Psi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\Theta \left( \frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, \frac{iK'}{2} \right)}{\Theta \left( \frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, \frac{iK'}{2} \right)} d\sigma, \end{aligned}$$

J'ai mis dans ces formules les périodes en évidence. On peut trouver avantage à n'introduire dans la théorie que des fonctions elliptiques construites toutes avec la même paire de périodes. C'est ce qu'il est très facile de faire, ainsi que nous allons le montrer.

Si nous ne conservons que des fonctions construites avec les demi-périodes  $K, \frac{iK'}{2}$ ; la fonction  $\Omega$  est d'elle-même sous la forme désirée. Pour y mettre l'expression de  $f$ , il suffira d'utiliser la transformation bien connue de Landen.

On obtiendra des formules plus élégantes en ne conservant que des fonctions construites avec les demi-périodes  $K, iK'$ . Auquel cas tout d'abord la formule (121), qui lie  $f$  et  $Z$ , restera telle quelle.

Pour transformer l'expression de  $\Omega$  dans le but poursuivi, nous nous reporterons à une des valeurs que nous avons démontrées pour

la fonction  $\Omega_0^1$  qui correspond à l'obstacle formé de deux segments rectilignes [cf. *infra*, éq. (109) et (112)], à savoir en nous plaçant pour abréger dans le cas du canal rectiligne, ce qui revient à négliger momentanément le second terme de l'équation (122),

$$(123) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)} + \frac{4\alpha\eta_1 K \sigma_0}{\pi^3} \log Z + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Or on sait qu'on peut écrire (cf. TANNERY et MOLK, XXIV)

$$\vartheta\left(u \middle| K, \frac{iK'}{2}\right) = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \vartheta(u \mid K, iK') \vartheta_3(u \mid K, iK'),$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, \frac{iK'}{2}\right)} \\ &= e^{-2e_3 \frac{K^2}{i\pi^2} \sigma_0 \log Z} \frac{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, iK'\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, iK'\right)}{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, iK'\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, iK'\right)}. \end{aligned}$$

Reportant dans  $\Omega_0^1$ , et observant que (TANNERY et MOLK, XXIV)

$$\eta_1 - e_3 \omega = 2\eta \quad [\eta = \zeta(K \mid K, iK')],$$

il vient après réductions évidentes

$$(124) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, iK'\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, iK'\right)}{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, iK'\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_0 \middle| K, iK'\right)} + \frac{8\alpha\eta K \sigma_0}{\pi^3} \log Z + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Pour l'application, on fera  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Ceci posé, nous pourrions former la fonction  $\Omega_0$  qui correspond à un

obstacle polygonal (cf. plus haut, p. 188). Cette fonction se mettra immédiatement sous la forme

$$\begin{aligned}\Omega_0 = & i \frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_1\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_1\right)}{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_1\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_1\right)} \\ & + \frac{(\theta_2 - \theta_1) 4\eta\omega\sigma_1}{\pi^3} \log Z + \frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi} \sigma_1 \\ & + i \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_2\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma_2\right)}{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_2\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma_2\right)} \\ & + \frac{(\theta_3 - \theta_2) 4\eta\omega\sigma_2}{\pi^3} \log Z + \frac{\theta_3 - \theta_2}{\pi} \sigma_2 \\ & + \dots\dots\dots\end{aligned}$$

avec les mêmes notations qu'à la page 188.

Passant de là à la limite, et posant alors comme précédemment,

$$\theta = \Phi(\sigma) \quad \left[ \Phi(\pi - \sigma) = -\Phi(\sigma), \quad \text{d'où} \quad \int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0 \right],$$

on obtient à la limite la formule

$$\begin{aligned}\Omega = & \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right)}{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right)} d\sigma \\ & + \frac{i}{\pi} \left[ \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \right] \log \frac{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{2}\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{2}\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{2}\right)} \\ & + \left( \frac{4\eta\omega}{\pi^3} \log Z + \frac{1}{\pi} \right) \left\{ \int_0^\pi \sigma \Phi'(\sigma) d\sigma + \frac{\pi}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \right] \right\}\end{aligned}$$

qu'on légitime comme antérieurement.

Supposant le point  $Z$  situé dans la couronne et non sur la frontière extérieure, des intégrations par parties nous donnent, par des calculs

identiques dans le fond à ceux indiqués page 190, la formule définitive

$$(125) \quad \Omega = -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \\ \times \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, iK'\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, iK'\right)}{\vartheta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, iK'\right) \vartheta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma \middle| K, iK'\right)} d\sigma.$$

Le même procédé conduit, dans le cas du canal quelconque, à une expression qu'on peut mettre sous la forme

$$6) \quad \Omega = \frac{iK}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \left[ \zeta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right) + \zeta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right) \right. \\ \left. + \zeta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma\right) + \zeta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma\right) \right] d\sigma \\ - \frac{iK}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(\sigma) \left[ \zeta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma + \frac{iK'}{2}\right) + \zeta\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma + \frac{iK'}{2}\right) \right. \\ \left. + \zeta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z - \frac{K}{\pi} \sigma + \frac{iK'}{2}\right) + \zeta_3\left(\frac{K}{i\pi} \log Z + \frac{K}{\pi} \sigma + \frac{iK'}{2}\right) \right] d\sigma.$$

Toutes les fonctions qui figurent dans (121) et (126) sont maintenant construites avec les demi-périodes  $K, iK'$ , ce qui remplit le but proposé.

Les applications se traitent alors comme on l'a déjà indiqué, le choix de la fonction arbitraire  $\Phi(\sigma)$  pouvant être fait de manière à correspondre à un obstacle de forme générale donné *a priori*. D'où de multiples exemples faciles à traiter jusqu'au bout. J'en indiquerai ailleurs quelques-uns.

Caen, janvier 1911.