

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. LE ROUX

## **Étude géométrique de la torsion et de la flexion dans la déformation infinitésimale d'un milieu continu**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 28 (1911), p. 523-579

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1911\\_3\\_28\\_523\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28_523_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE LA TORSION ET DE LA FLEXION

DANS

LA DÉFORMATION INFINITÉSIMALE D'UN MILIEU CONTINU,

PAR M. J. LE ROUX.



## Introduction.

I. Dans ses Mémoires célèbres sur la torsion et la flexion des prismes, Barré de Saint-Venant s'est placé surtout au point de vue de la statique, en cherchant les déformations qui résultent de certaines distributions de forces. L'objet de ce travail est tout différent. Je m'occupe uniquement de l'étude géométrique des déformations sans aucune considération de statique ou de dynamique.

La torsion et la flexion n'existent pas dans la déformation homogène. Leur représentation analytique dans le voisinage d'un point dépend des dérivées secondes des déplacements. Ce sont par conséquent des éléments différentiels du second ordre de la déformation, dont le rôle peut être comparé à celui de la courbure dans la théorie des surfaces. Au contraire la dilatation et la rotation moyenne sont des éléments du premier ordre, comme le plan tangent et l'élément linéaire en géométrie.

Il m'a semblé que la connaissance des lois nécessaires de la distribution des déformations du second ordre pouvait être une introduction aussi utile à l'étude de la mécanique des milieux continus que la

connaissance des éléments de la courbure à l'étude de la mécanique du point.

Il s'est trouvé, par surcroît, que cette théorie, outre son utilité pratique présente un intérêt propre par la manière simple dont les résultats se groupent et se coordonnent.

J'ai eu principalement en vue les déformations infinitésimales, mais la plupart des calculs et des méthodes s'appliquent sans grandes modifications au cas des déformations finies.

2. *Définitions et notations* <sup>(1)</sup>. — De la théorie des éléments du premier ordre de la déformation nous ne dirons que ce qui est indispensable pour définir les notations et préciser certains points dont nous aurons besoin dans la suite.

Nous appelons *fibre* <sup>(2)</sup> *d'un milieu continu* toute portion de matière infiniment tenue distribuée d'une manière continue sur une ligne quelconque. Une fibre élémentaire est une fibre de longueur infiniment petite.

Soit  $M(x, y, z)$  la position initiale d'un point du milieu; les coordonnées du point correspondant  $M'$  du milieu déformé seront désignées par

$$x' = x + u, \quad y' = y + v, \quad z' = z + w.$$

Les axes de coordonnées seront supposées rectangulaires et les fonctions  $u, v, w$ , continues, ainsi que leurs dérivées jusqu'au second ordre inclusivement.

Une fibre élémentaire issue de  $M$  sera définie, au point de vue géométrique, par sa longueur  $ds$  et ses cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ ; après la déformation ces quantités se transforment respectivement en  $ds', \alpha', \beta', \gamma'$ . Nous désignons par  $e$  la dilatation de la fibre, et nous avons,

<sup>(1)</sup> La déformation du premier ordre se trouve exposée dans tous les Ouvrages qui s'occupent de mécanique des milieux continus. Citons entre autres : E. et F. COSSERAT, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, et Note à la *Cinématique* de M. Kœnigs; APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III; THOMSON et TAIT, *A treatise on natural Philosophy*.

<sup>(2)</sup> Dans ses Mémoires sur la torsion et la flexion des prismes, Barré de Saint-Venant réserve en général le nom de fibres aux *files de molécules* longitudinales.

par conséquent,

$$(1) \quad \frac{ds'}{ds} = 1 + e,$$

$$(2) \quad \begin{cases} (1+e)\alpha' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\gamma, \\ (1+e)\beta' = \frac{\partial v}{\partial x}\alpha + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\gamma, \\ (1+e)\gamma' = \frac{\partial w}{\partial x}\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\beta + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\gamma. \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les équations (2), après les avoir élevées au carré, on trouve l'expression bien connue de la dilatation.

Soit, d'autre part,  $\theta$  l'angle que forment entre elles les deux directions initiale et finale de la fibre élémentaire; on a, d'après les équations (2),

$$(3) \quad (1+e)\cos\theta = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\alpha^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\beta^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\gamma^2 \\ + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\beta\gamma + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\gamma\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\alpha\beta \\ = 1 + D(\alpha, \beta, \gamma)$$

en posant

$$(4) \quad D(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\partial u}{\partial x}\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\beta^2 + \frac{\partial w}{\partial z}\gamma^2 \\ + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\beta\gamma + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\gamma\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\alpha\beta.$$

On sait que dans les déformations infinitésimales la dilatation  $e$  peut être remplacée par  $D(\alpha, \beta, \gamma)$ . Nous écrirons dans ce cas

$$(5) \quad \begin{cases} D(\alpha, \beta, \gamma) = e_1\alpha^2 + e_2\beta^2 + e_3\gamma^2 + g_1\beta\gamma + g_2\gamma\alpha + g_3\alpha\beta; \\ e_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad g_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad g_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

La rotation moyenne de Cauchy est définie par les expressions

$$(6) \quad {}_2p_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad {}_2p_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad {}_2p_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

En introduisant ces notations, les formules (2) peuvent s'écrire

$$(7) \quad \begin{cases} (1+e)\alpha' = \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \alpha} + p_2 \gamma - p_3 \beta, \\ (1+e)\beta' = \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \beta} + p_3 \alpha - p_1 \gamma, \\ (1+e)\gamma' = \gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \gamma} + p_1 \beta - p_2 \alpha. \end{cases}$$

Les seconds membres se trouvent ainsi décomposés en une partie symétrique et une partie dissymétrique ; la distribution de la première est régie par une forme quadratique et représentée géométriquement par une surface du second degré ; celle de la seconde est déterminée par la rotation.

3. *Glissement normal*. — Les équations (7) qui définissent la déviation ou changement de direction de la fibre peuvent, dans le cas des déformations infinitésimales, être remplacées par les suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha' - \alpha = \frac{1}{2} D'_\alpha - \alpha D + p_2 \gamma - p_3 \beta, \\ \beta' - \beta = \frac{1}{2} D'_\beta - \beta D + p_3 \alpha - p_1 \gamma, \\ \gamma' - \gamma = \frac{1}{2} D'_\gamma - \gamma D + p_1 \beta - p_2 \alpha. \end{cases}$$

Prenons, dans les seconds membres, les termes provenant de la dilatation

$$(9) \quad G_1 = \frac{1}{2} D'_\alpha - \alpha D; \quad G_2 = \frac{1}{2} D'_\beta - \beta D; \quad G_3 = \frac{1}{2} D'_\gamma - \gamma D.$$

Ces trois quantités sont les composantes d'un vecteur infiniment petit que nous appelons le *glissement normal* de la fibre.

On a la relation évidente

$$G_1 \alpha + G_2 \beta + G_3 \gamma = 0.$$

Pour une fibre dont la direction initiale est parallèle à  $Ox$ , les formules (9) donnent :

$$G_1 = 0, \quad G_2 = g_3, \quad G_3 = g_2.$$

4. *Propriété des axes principaux de dilatation d'un plan.* — Menons par le point M un plan P dont la normale a pour cosinus directeurs  $a, b, c$ . Les directions  $(\alpha, \beta, \gamma)$  des axes principaux de dilatation du plan sont déterminées par le système suivant

$$\frac{1}{2} D'_\alpha - S\alpha - ka = 0,$$

$$\frac{1}{2} D'_\beta - S\beta - kb = 0,$$

$$\frac{1}{2} D'_\gamma - S\gamma + kc = 0,$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

où S et k désignent des paramètres qu'on peut calculer ou éliminer. Si l'on ajoute membre à membre les trois premières, après les avoir multipliées respectivement par  $\alpha, \beta, \gamma$ , on trouve

$$S = D(\alpha, \beta, \gamma).$$

Remplaçant S par sa valeur, et éliminant k, on obtient

$$\frac{G_1(\alpha, \beta, \gamma)}{a} = \frac{G_2(\alpha, \beta, \gamma)}{b} = \frac{G_3(\alpha, \beta, \gamma)}{c}.$$

Le glissement normal des axes principaux de dilatation du plan P est donc perpendiculaire au plan.

Si l'on considère une fibre quelconque du plan P, la déviation ou changement de direction de cette fibre résulte de deux déplacements, l'un parallèle, l'autre normal au plan. La déviation qui s'effectue parallèlement au plan P résulte elle-même d'une rotation moyenne et d'un glissement normal. La première est la projection de la rotation moyenne en M sur la normale au plan P; le second est la projection, sur le plan considéré, du glissement normal de la fibre. Dans le cas des axes principaux de dilatation du plan, cette composante du glissement est nulle. Donc la déviation des axes parallèlement au plan résulte uniquement de la rotation moyenne.

On peut exprimer ce fait en disant que la rotation moyenne, dans son plan, d'un élément plan quelconque mené par le point M est égale à la projection de la rotation moyenne du milieu en M sur la normale au plan de l'élément considéré.

## CHAPITRE I.

## La torsion.

1. Définition et calcul de la torsion. — 2. La torsion dans les déformations infinitésimales. — 3. Expression des six composantes de la torsion. — 4. Décomposition de la rotation dérivée. — 5. Indicatrice des torsions. — 6. Seconde définition. — 7. Application au problème de Saint-Venant.

1. *Définition et calcul de la torsion* <sup>(1)</sup>. — La torsion mécanique, dans le langage ordinaire, n'a de sens bien défini que pour les corps de forme prismatique ou cylindrique. Pour en étendre la notion au cas des corps de forme quelconque nous considérons la fibre élémentaire comme un prisme infiniment petit découpé dans le corps. La torsion de ce prisme élémentaire est alors une fonction de sa direction.

Considérons d'abord une fibre rectiligne quelconque : supposons que tous ses éléments soient soumis à des rotations dont les axes coïncident avec celui de la fibre. La *torsion totale* de la fibre est alors égale à la différence des rotations de ses extrémités. La *torsion moyenne* est le rapport de la torsion totale à la longueur de la fibre. Pour une fibre élémentaire nous ne considérerons, en général, que la torsion moyenne et nous l'appellerons simplement la *torsion de l'élément*.

Imaginons maintenant, dans le milieu soumis à la déformation infinitésimale, une fibre élémentaire  $MM_1 = ds$ , ayant pour cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ . Soient

$$R, (p_1, p_2, p_3) \quad \text{et} \quad R + dR, (p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, p_3 + dp_3)$$

les rotations aux points M et  $M_1$ .

La dérivée géométrique de la rotation relative à la direction  $MM_1$  est

$$\frac{dR}{ds} = R', \left( \frac{dp_1}{ds}, \frac{dp_2}{ds}, \frac{dp_3}{ds} \right).$$

Elle peut être décomposée en deux parties : l'une dirigée suivant la fibre et l'autre perpendiculaire à sa direction. La première com-

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 mai 1910.

posante

$$\alpha \frac{dp_1}{ds} + \beta \frac{dp_2}{ds} + \gamma \frac{dp_3}{ds}$$

représente la torsion moyenne de l'élément considéré.

Pour les déformations finies, la question ne se présente pas avec une simplicité aussi grande. Sans entrer dans le détail des calculs relatifs à ce cas, je vais indiquer la définition que j'ai été conduit à adopter.

Soient respectivement  $T$  et  $T_1$  les déformations homogènes tangentes en  $M$  et en  $M_1$ . La déformation  $T_1$  peut être considérée comme la résultante de  $T$  et d'une déformation infiniment petite  $\Delta T$ , dont nous désignons par  $\Delta R$  la rotation moyenne. Soit d'autre part  $M'M'_1$  la transformée de  $T_1$  par la déformation homogène  $T$ . Nous décomposons la rotation infinitésimale  $\Delta R$  en deux composantes rectangulaires  $\Delta R_1$  et  $\Delta R_2$  dont la première a son axe dirigé suivant  $M'M'_1$ . La rotation  $\Delta R_1$  représente la torsion totale de la fibre considérée. La composante normale  $\Delta R_2$  se retrouve dans l'étude de la flexion.

Comme mesure de la torsion moyenne, nous prenons le rapport de  $\Delta R_1$  à la fibre dilatée :  $\frac{\Delta R}{M'M'_1}$ .

La limite du rapport  $\frac{\Delta R}{M'M'_1}$  peut être assimilée dans les calculs à une vitesse de rotation. Nous donnons à cette limite le nom de *rotation dérivée*. L'axe de la rotation dérivée est, bien entendu, dirigé comme celui de la rotation  $\Delta R$ . La torsion moyenne est donc la projection de la rotation dérivée sur la direction de la fibre déformée.

2. *Distribution des torsions dans le cas des déformations infinitésimales.* — Dans le cas des déformations infiniment petites, la rotation dérivée se réduit à la dérivée géométrique de la rotation. Soient  $R'_x, R'_y, R'_z$  ses composantes suivant les axes ; on a

$$(10) \quad \begin{cases} R'_x = \frac{dp_1}{ds} = \alpha \frac{\partial p_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_1}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_1}{\partial z}, \\ R'_y = \frac{dp_2}{ds} = \alpha \frac{\partial p_2}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_2}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_2}{\partial z}, \\ R'_z = \frac{dp_3}{ds} = \alpha \frac{\partial p_3}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_3}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_3}{\partial z}. \end{cases}$$



La torsion  $\tau(\alpha, \beta, \gamma)$  de la fibre sera donc donnée par la formule

$$(11) \quad \begin{aligned} \tau(\alpha, \beta, \gamma) = & \alpha^2 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial p_2}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial p_3}{\partial z} + \beta \gamma \left( \frac{\partial p_3}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) \\ & + \gamma \alpha \left( \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial p_3}{\partial x} \right) + \alpha \beta \left( \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Nous poserons

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \tau_{11}, & \frac{\partial p_2}{\partial y} = \tau_{22}, & \frac{\partial p_3}{\partial z} = \tau_{33}, \\ \frac{\partial p_3}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial z} = 2\tau_{23}, & \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial p_3}{\partial x} = 2\tau_{31}, & \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} = 2\tau_{12}. \end{cases}$$

L'expression de la torsion devient alors

$$(13) \quad \tau(\alpha, \beta, \gamma) = \tau_{11}\alpha^2 + \tau_{22}\beta^2 + \tau_{33}\gamma^2 + 2\tau_{23}\beta\gamma + 2\tau_{31}\gamma\alpha + 2\tau_{12}\alpha\beta.$$

On voit que la torsion d'une fibre élémentaire est une fonction du second degré des cosinus directeurs de la fibre. Cette fonction se forme avec les composantes de la rotation comme la dilatation  $D(\alpha, \beta, \gamma)$  à l'aide des composantes du déplacement. La forme quadratique (13) qui détermine la loi de distribution des torsions autour d'un point du milieu appartient à la classe des quantités géométriques auxquelles M. W. Voigt a donné le nom de *tenseurs*. Mais ce tenseur est d'une espèce différente de celui qui correspond à la dilatation. Le signe de la torsion en effet dépend du sens des rotations positives, ou, ce qui revient au même, de l'orientation des axes de coordonnées. Une transformation par symétrie, qui laisse inaltérée la dilatation, change au contraire le signe de la torsion. Le tenseur correspondant est donc un *tenseur axial*.

3. *Expression des composantes de la torsion.* — Un calcul très simple, qui se présente d'ailleurs dans la démonstration des formules de Barré de Saint-Venant par la méthode de Beltrami, permet d'exprimer les composantes de la torsion à l'aide des coefficients de la dilatation.

On a

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\tau_{11} = 2 \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_3}{\partial z}, \\ 2\tau_{22} = 2 \frac{\partial p_2}{\partial y} = \frac{\partial g_3}{\partial z} - \frac{\partial g_1}{\partial x}, \\ 2\tau_{33} = 2 \frac{\partial p_3}{\partial z} = \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial y}, \\ 4\tau_{23} = 2 \left( \frac{\partial p_3}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) = \frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial y} + 2 \frac{\partial (e_2 - e_3)}{\partial x}, \\ 4\tau_{31} = 2 \left( \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial p_3}{\partial x} \right) = \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial z} + 2 \frac{\partial (e_3 - e_1)}{\partial y}, \\ 4\tau_{12} = 2 \left( \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_2}{\partial x} + 2 \frac{\partial (e_1 - e_2)}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Les trois premières équations donnent l'identité

$$(15) \quad \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0.$$

4. *Décomposition de la rotation dérivée en ses parties symétrique et dissymétrique.* — Comme toute dérivée de vecteur, la rotation dérivée est décomposable en deux parties, symétrique et dissymétrique suivant la méthode de Helmholtz. La première s'exprime à l'aide de la torsion et la seconde à l'aide d'un autre vecteur  $\Phi$  qui se présente comme la rotation de la rotation.

Posons

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\varphi_1 = \frac{\partial p_3}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial z}, \\ 2\varphi_2 = \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_3}{\partial x}, \\ 2\varphi_3 = \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Les composantes de la rotation dérivée (10) deviennent

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} R'_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \varphi_2 \gamma - \varphi_3 \beta, \\ R'_y = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \varphi_3 \alpha - \varphi_1 \gamma, \\ R'_z = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} + \varphi_1 \beta - \varphi_2 \alpha. \end{array} \right.$$

Nous retrouverons plus loin le vecteur  $\Phi$  à propos de la flexion.

Remarquons que ce vecteur, qui affecte une forme dissymétrique par rapport à la rotation, est au contraire symétrique par rapport aux déplacements.

5. *Indicatrice des torsions.* — Pour représenter géométriquement la distribution des torsions nous sommes conduits à introduire une surface du second degré, ou mieux deux surfaces conjuguées. A partir du point M pris comme origine, nous portons, dans chaque direction  $\alpha, \beta, \gamma$ , un vecteur inversement proportionnel à la racine carrée de la torsion correspondante (considérée en valeur absolue). L'extrémité variable de ce vecteur décrit les deux surfaces conjuguées

$$\tau_{11}X^2 + \tau_{22}Y^2 + \tau_{33}Z^2 + 2\tau_{23}YZ + 2\tau_{31}ZX + 2\tau_{12}XY = \pm 1,$$

dont l'ensemble constitue l'indicatrice des torsions.

D'après l'équation (15) le cône asymptote de l'indicatrice est toujours réel et capable d'un trièdre trirectangle inscrit. L'indicatrice se compose donc en général de deux hyperboloïdes conjugués; elle peut se réduire exceptionnellement à deux cylindres hyperboliques équilatères conjugués. La considération de l'indicatrice met en évidence un certain nombre d'éléments que nous pourrions appeler *distingués* et présentant quelque propriété spéciale par rapport à la torsion. Tels sont en particulier les axes, auxquels correspondent les *torsions principales*.

La somme algébrique des torsions de trois fibres rectangulaires quelconques est nulle, d'après l'équation (15). C'est donc, en particulier, le cas des torsions principales.

Il n'existe aucune relation nécessaire entre les valeurs numériques que prennent en un point les coefficients de la dilatation et ceux de la torsion. Par conséquent les axes principaux de la dilatation et ceux de la torsion peuvent être situés d'une manière quelconque les uns par rapport aux autres.

Les fibres dirigées suivant les génératrices du cône asymptote ont leur torsion nulle au point M. C'est pourquoi nous donnons à ce cône le nom de *cône d'intorsion* au point considéré. Les lignes d'intorsion sont en tous leurs points tangentes au cône d'intorsion; elles jouissent d'une propriété intéressante que nous retrouverons dans l'étude de la

flexion. Nous serons également amenés à considérer les trièdres tri-rectangles inscrits dans le cône d'intorsion, à propos de la flexion des surfaces.

6. *Autre définition de la torsion.* — On aurait pu définir la torsion d'une seconde manière en considérant, non plus les rotations des éléments d'une fibre, mais les rotations moyennes de deux éléments plans parallèles et infiniment voisins. La propriété des axes principaux de dilatation d'un plan que nous avons démontrée à la fin de l'introduction montre que cette seconde définition est équivalente à la première, dans le cas des déformations infinitésimales.

7. *Application au problème de Saint-Venant.* — Il est intéressant d'appliquer notre théorie à la classe de déformations infinitésimales qu'on rencontre dans l'étude de la torsion des prismes. En supposant l'axe  $Oz$  parallèle aux arêtes du prisme, nous considérons la déformation infinitésimale

$$\begin{aligned} u &= -\tau_0 yz, \\ v &= \tau_0 zx, \\ w &= \tau_0 \Phi(x, y), \end{aligned}$$

où  $\tau_0$  désigne un facteur infiniment petit et  $\Phi$  une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace :

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Les composantes de la rotation sont :

$$\begin{aligned} {}_2\rho_1 &= \tau_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} - x \right), \\ {}_2\rho_2 &= -\tau_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right), \\ {}_2\rho_3 &= 2\tau_0 z, \end{aligned}$$

et l'expression de la torsion devient

$$(19) \quad \tau(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} \tau_0 \left[ 2\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} (\alpha^2 - \beta^2) + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \alpha \beta \right].$$

On reconnaît immédiatement que l'une des torsions principales est toujours parallèle à Oz. Sa valeur constante est égale à  $\tau_0$ . C'est cette torsion des fibres longitudinales des prismes qu'on a seule en vue dans le problème de Saint-Venant.

Les directions des torsions principales transversales sont définies par l'équation

$$\frac{2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \alpha + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \beta}{\alpha} = \frac{-2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \beta + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \alpha}{\beta}.$$

On peut la simplifier en tenant compte de l'équation de Laplace et l'on trouve

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \alpha^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \alpha \beta + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \beta^2 = 0.$$

*Donc les lignes des torsions principales transversales sont les lignes asymptotiques de la section droite déformée.*

Il existe une relation remarquable entre la torsion mécanique des fibres transversales et la torsion géodésique des mêmes lignes dans la section droite déformée.

Cette torsion géodésique  $\tau_g$  est donnée par l'équation

$$\tau_g = -\tau_0 \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} (\alpha^2 - \beta^2) + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \alpha \beta \right].$$

En comparant le résultat précédent à l'expression de la torsion mécanique  $\tau$ , donnée par la formule (19) et où l'on a fait  $\gamma = 0$ , on obtient la relation

$$(20) \quad 2\tau + \tau_0 + \tau_g = 0.$$

*La torsion mécanique d'une fibre transversale quelconque est égale, mais de signe contraire, à la moyenne arithmétique de la torsion  $\tau_0$  des fibres longitudinales et de la torsion géodésique de la fibre transversale considérée dans la section droite déformée.*

Cette propriété intéressante est d'ailleurs spéciale à la torsion des prismes et n'a pas d'analogue dans le cas des déformations générales.

## CHAPITRE II.

## Incurvation et flexion.

8. Incurvation des fibres. — 9. Rotation figurative de la courbure. — 10. Décomposition de la courbe. — 11. Définition de la flexion. — 12. Éléments géométriques relatifs à la flexion. — 13. Composition des flexions. — 14. Digression sur une transformation par polaires réciproques de la composition des vecteurs. — 15. La flexion considérée comme rotation de rotation. — 16. Première décomposition. — 17. Flexion de torsion et flexion cyclique. — 18. Composantes de la flexion cyclique. — 19. Les trois formes fondamentales. — 20. Les trois flexions indépendantes. — 21. Remarque. — 22. Forme nouvelle de quelques formules.

8. *Incurvations des fibres.* — La courbure des fibres dans le milieu déformé se déduit par une simple différentiation des équations (2), en tenant compte des formules de Serret et Frenet.

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la tangente en M à la courbe de figure de la fibre dans l'état initial ;  $\lambda, \mu, \nu$  ceux de la normale principale ;  $\rho$  le rayon de courbure ; les mêmes lettres accentuées désigneront les éléments analogues relatifs à l'état déformé. En effectuant la différentiation indiquée, nous tiendrons compte de la relation évidente

$$\frac{d\alpha'}{ds} = \frac{d\alpha'}{ds'} \frac{ds'}{ds} = (1 + e) \frac{\lambda'}{\rho'}.$$

La première des équations (2) donne alors

$$\begin{aligned} (21) \quad (1 + e)^2 \frac{\lambda'}{\rho'} + \alpha' \frac{de}{ds} \\ = \frac{1}{\rho} \left[ \left( 1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \lambda + \frac{\partial u}{\partial y} \mu + \frac{\partial u}{\partial z} \nu \right] \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \gamma^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \beta \gamma + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \gamma \alpha + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \alpha \beta. \end{aligned}$$

Nous désignerons, pour abréger, par le symbole  $\frac{d}{ds}$  les dérivées par rapport à l'arc, prises en regardant  $\alpha, \beta, \gamma$  comme des constantes ; nous avons donc, en employant cette notation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \gamma^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \beta \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \gamma \alpha + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \alpha \beta,$$

ainsi que des expressions semblables pour  $\nu$  et  $w$ . L'équation (21) et les deux autres équations analogues déduites du système (2) deviennent par conséquent

$$(22) \quad \begin{cases} (1+e)^2 \frac{\lambda'}{\rho'} + \alpha' \frac{de}{ds} = \frac{1}{\rho} \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \lambda + \frac{\partial u}{\partial y} \mu + \frac{\partial u}{\partial z} \nu \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \\ (1+e)^2 \frac{\mu'}{\rho'} + \beta' \frac{de}{ds} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \lambda + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mu + \frac{\partial v}{\partial z} \nu \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ (1+e)^2 \frac{\nu'}{\rho'} + \gamma' \frac{de}{ds} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \lambda + \frac{\partial w}{\partial y} \mu + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \nu \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \end{cases}$$

Désignons par  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  les cosinus directeurs de la direction que la déformation homogène tangente en M fait correspondre à la normale principale initiale de la fibre, et par  $\varepsilon$  le coefficient de dilatation correspondant. On a alors, d'après les formules (2), trois équations de la forme

$$(1+\varepsilon)\lambda_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\lambda + \frac{\partial u}{\partial y}\mu + \frac{\partial u}{\partial z}\nu;$$

.....

Cela nous permet de simplifier les équations (22), qui deviennent

$$(23) \quad \begin{cases} (1+e)^2 \frac{\lambda'}{\rho'} + \alpha' \frac{de}{ds} = \frac{(1+\varepsilon)\lambda_1}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \\ (1+e)^2 \frac{\mu'}{\rho'} + \beta' \frac{de}{ds} = \frac{(1+\varepsilon)\mu_1}{\rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ (1+e)^2 \frac{\nu'}{\rho'} + \gamma' \frac{de}{ds} = \frac{(1+\varepsilon)\nu_1}{\rho} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \end{cases}$$

9. *Rotation représentative de la courbure* <sup>(1)</sup>. — Nous effectuerons encore une nouvelle transformation en introduisant la représentation de la courbure par une rotation, suivant la méthode employée par M. Darboux dans la théorie des surfaces. L'axe de la rotation représentative de la courbure est la binormale. Appelons  $\xi, \eta, \zeta$ , les cosinus directeurs de la binormale initiale;  $\xi', \eta', \zeta'$ , ceux de la binormale

---

<sup>(1)</sup> La représentation de la courbure et de la torsion géométrique par des rotations se trouve employée d'une manière systématique par Kirchhoff dans la théorie des corps minces (*Journal de Crelle*, t. V-VI, 1859) et ensuite par M. Boussinesq (*Journ. de Liouville*, t. XVI, 1871).

relative à l'état déformé, et  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  ceux de la perpendiculaire au plan qui se déduit du plan osculateur initial par la déformation homogène tangente en M. Ce dernier plan diffère, en général, du plan osculateur de la fibre déformée. Si l'on désigne par  $\theta$  l'angle que forment entre elles les directions  $\alpha', \beta', \gamma'$  et  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$ , on a

$$\xi_1 \sin \theta = \beta' \nu_1 - \gamma' \mu_1;$$

.....

Les deux directions considérées  $(\alpha', \beta', \gamma')$  et  $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$  correspondent à deux directions rectangulaires de l'état initial; l'expression

$$(1 + \varepsilon)(1 + e) \sin \theta - 1$$

représente donc la dilatation superficielle d'un élément plan, primitivement situé dans le plan osculateur de la fibre. Si l'on appelle  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les deux dilatations principales du plan considéré, on a par conséquent

$$(24) \quad (1 + \varepsilon)(1 + e) \sin \theta = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$$

et par suite

$$(1 + \varepsilon) \sin \theta = \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{(1 + e)}.$$

Tenant compte de ces relations et des formules bien connues

$$\xi' = \beta' \nu' - \mu' \gamma',$$

.....,

nous pouvons déduire des équations (23) le nouveau système

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\xi'}{\rho'} = \frac{\xi_1}{\rho} \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{(1 + e)^3} + \frac{1}{(1 + e)^2} \left( \beta' \frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} - \gamma' \frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} \right), \\ \frac{\beta'}{\rho'} = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{(1 + e)^3} + \frac{1}{(1 + e)^2} \left( \gamma' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \alpha' \frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} \right), \\ \frac{\zeta'}{\rho'} = \frac{\zeta_1}{\rho} \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{(1 + e)^3} + \frac{1}{(1 + e)^2} \left( \alpha' \frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} - \beta' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right). \end{cases}$$

Les équations (25) donnent les composantes de la rotation de courbure suivant les axes de coordonnées.

#### 10. Décomposition de la courbure. — Le simple examen du résultat



obtenu montre que la rotation de courbure de la fibre déformée est la résultante de deux autres. La première composante a pour valeur

$$\frac{1}{\rho} \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{(1 + e)^3};$$

c'est la transformée de la courbure initiale par la déformation homogène dérivée en M. En d'autres termes, si l'on considère le cercle osculateur primitif de la fibre, la déformation homogène le transforme en une ellipse; la première composante de la courbure est la courbure de cette ellipse au point M'. La forme même du résultat rappelle une expression bien connue de la courbure de l'ellipse en fonction du diamètre conjugué de celui qui aboutit au point considéré. La première courbure présente les caractères essentiels suivants : 1° elle dépend uniquement des dérivées du premier ordre des déplacements; 2° elle est nulle pour les fibres droites; 3° pour les fibres courbes ayant la même tangente et le même plan osculateur, elle est proportionnelle à la courbure initiale.

11. *Définition de la flexion* <sup>(1)</sup>. — La seconde composante de la courbure est la même pour toutes les fibres droites ou courbes qui admettent la même tangente; elle dépend linéairement des dérivées du second ordre des fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . C'est à cette seconde courbure que nous donnons le nom de *flexion* de la fibre. Pour les fibres primitivement droites, la courbure dans l'état déformé se réduit à la flexion.

Les composantes de la rotation représentative de la flexion suivant les axes de coordonnées sont :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{1}{(1 + e)^2} \left( \beta' \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \gamma' \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right), \\ F_2 = \frac{1}{(1 + e)^2} \left( \gamma' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \alpha' \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \\ F_3 = \frac{1}{(1 + e)^2} \left( \alpha' \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \beta' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right). \end{array} \right.$$

Dans le cas des déformations infinitésimales, ces expressions

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 juin 1910.

deviennent

$$(26') \quad \begin{cases} F_1 = \beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ F_2 = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ F_3 = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}. \end{cases}$$

12. *Éléments géométriques relatifs à la flexion.* — Bien que la flexion ne soit en général que l'une des composantes de la courbure, il est naturel d'associer, à l'étude de la flexion, des éléments géométriques analogues à ceux que l'on considère à propos de la courbure. L'introduction de ces éléments est d'autant plus légitime que les fibres primitivement droites n'ont d'autre courbure que celle qui résulte de la flexion. Nous aurons donc à considérer : le *plan de flexion* P, plan osculateur de la fibre droite déformée, la normale principale de flexion, l'axe de flexion, correspondant à l'axe de courbure, le rayon, le centre, le cercle de flexion.

Dans les calculs relatifs à ces éléments nous nous bornerons désormais aux déformations infinitésimales; cependant plusieurs de nos résultats sont applicables sans modifications au cas des déformations finies.

Le plan de flexion P, perpendiculaire à l'axe de la rotation de flexion F, a pour équation

$$F_1(X - x) + F_2(Y - y) + F_3(Z - z) = 0.$$

Le rayon de flexion R est l'inverse de la rotation F :

$$\frac{1}{R^2} = F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

L'axe de flexion, comme l'axe de courbure, est caractérisé par une propriété cinématique simple qui permet d'en écrire immédiatement les équations.

Si l'on considère le mouvement euclidien résultant de la rotation de flexion autour d'un axe passant par le point M et d'une translation dont la vitesse, égale à l'unité, est dirigée suivant la tangente à la fibre, le lieu des points de vitesse nulle est formé par l'axe de flexion.

On obtient ainsi les équations de l'axe :

$$(27) \quad \begin{cases} \alpha + F_2(Z - z) - F_3(Y - y) = 0, \\ \beta + F_3(X - x) - F_1(Z - z) = 0, \\ \gamma + F_1(Y - y) - F_2(X - x) = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont établies pour le cas des déformations infinitésimales. Pour les déformations finies il suffirait d'y remplacer les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$  de la fibre initiale par ceux de la fibre déformée et les coordonnées du point M par celles du point M'.

Les trois équations (27) peuvent être remplacées par les deux suivantes, qui en sont des combinaisons :

$$(28) \quad \begin{cases} \alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0, \\ \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} + 1 = 0. \end{cases}$$

13. *Composition des flexions.* — Deux flexions d'une même fibre élémentaire se composent en une seule, comme des rotations. A ce point de vue la construction de la flexion résultante ne présente rien de particulier.

Mais on peut l'envisager autrement, en considérant la flexion comme définie par son axe, et l'on se trouve alors amené au problème suivant :

*Deux flexions d'une même fibre élémentaire étant définies par leurs axes, construire l'axe de la flexion résultante.*

Nous remarquons d'abord que les axes étant tous deux perpendiculaires à la fibre élémentaire considérée, sont situés dans le même plan. Supposons la fibre parallèle à Oz; les axes de flexion sont alors parallèles au plan des xy. Soient (F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>) et (F'<sub>1</sub>, F'<sub>2</sub>) les rotations figuratives des flexions composantes; les axes correspondants sont représentés, en projection sur le plan xOy, par les équations

$$\begin{aligned} 1 + F_1(Y - y) - F_2(X - x) &= 0, \\ 1 + F'_1(Y - y) - F'_2(X - x) &= 0. \end{aligned}$$

Pour l'axe de la flexion résultante on a l'équation

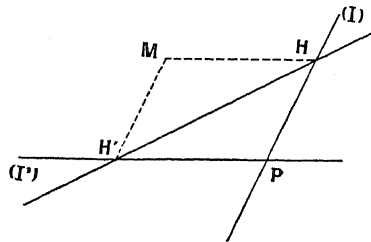
$$1 + (F_1 + F'_1)(Y - y) - (F_2 + F'_2)(X - x) = 0.$$

On voit immédiatement qu'il passe au point d'intersection de chacun des axes des flexions composantes avec la parallèle à l'autre menée par le point M.

D'où résulte la construction géométrique suivante :

Soient (I) et (I') les deux axes considérés, qui se coupent en P. En

Fig. 1.



menant par le point M des parallèles à ces droites, nous déterminons un parallélogramme MHPH'. L'axe de la flexion résultante est la droite HH', c'est-à-dire celle des diagonales du parallélogramme qui ne passe pas par le point M.

La démonstration synthétique de cette construction est également très simple. Le problème revient en effet à composer trois mouvements euclidiens : 1° une translation perpendiculaire au plan de la figure; 2° une rotation (F) ayant pour axe MH'; et 3° une seconde rotation (F') ayant pour axe MH. La translation et la rotation (F) se composent en une rotation pure (R) dont l'axe est la droite (I). Il ne reste plus qu'à composer entre elles les deux rotations (R) et (F) dont les axes se coupent au point H; par conséquent, le mouvement résultant sera encore une rotation pure dont l'axe passera en H.

On démontrerait de la même façon qu'il passe en H'.

Lorsque les deux flexions composantes ont leurs axes parallèles, la construction se trouve en défaut; mais on peut alors faire usage de la propriété suivante qui est toujours applicable :

L'axe HH' de la flexion résultante est parallèle à la polaire du

point M par rapport au système des deux axes composants (I) et (I'), et se trouve situé à égale distance du point M et de cette polaire.

Lorsque les flexions composantes sont rectangulaires, les points H et H' sont les centres de flexion. Dans ce cas, le centre de la flexion résultante est en ligne droite avec les deux centres des composantes. Cette circonstance se présente dans la théorie des surfaces.

Le théorème de Meusnier exprime en effet que la courbure d'une courbe quelconque tracée sur une surface est la résultante d'une flexion normale et d'une flexion géodésique, la flexion normale étant la même pour toutes les courbes de même tangente.

Lorsque l'on considère une famille de courbes tangentes entre elles en un point M, si tous les axes de courbures passent par un même point H, on peut décomposer de même la courbure de chacune des courbes en deux flexions rectangulaires dont l'une est constante. Notre remarque s'applique par exemple à l'intéressante généralisation du théorème de Meusnier qui a été donné par M. Königs.

14. *Digression sur la transformation par polaires réciproques de la composition des vecteurs.* — La construction géométrique à laquelle nous avons été conduit pour la composition des flexions présente une certaine ressemblance avec la composition des vecteurs. Elle en est en réalité la transformation par polaires réciproques.

Nous considérons habituellement la portion de droite comme un élément essentiel du vecteur, et il est exact en effet que la question de direction intervient généralement à propos des quantités qu'on représente par des vecteurs. Cependant dans certains cas, par exemple pour les questions de composition ou d'addition géométrique, le vecteur pourrait être réduit à deux points, une origine et une extrémité. La ligne droite qui joint ces deux points pourrait être supprimée ou remplacée par une ligne continue quelconque.

Des vecteurs issus d'une origine donnée sont déterminés par leurs extrémités, c'est-à-dire chacun par un point. Par exemple, dans le cas d'un vecteur OA issu de l'origine des coordonnées, le point A suffit pour déterminer la figure.

Il en résulte immédiatement que si l'on transforme la figure par polaires réciproques en prenant comme directrice une sphère (dans

l'espace) ou un cercle (dans le plan), on fera correspondre à chaque point A, et par conséquent à chaque vecteur OA un plan ou une droite, polaire du point A. Considérons le cas des figures planes et prenons comme directrice la courbe imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0;$$

au point A ( $a, b$ ) correspond la droite

$$ax + by + 1 = 0.$$

Si l'on prend deux vecteurs OA ( $a, b$ ) et OA' ( $a', b'$ ) dont la somme géométrique soit représentée par OA'' ( $a + a', b + b'$ ), on voit immédiatement que la polaire du point A''

$$(a + a')x + (b + b')y + 1 = 0$$

se construit à l'aide des polaires des deux points composants, A et A', par un procédé identique à celui qui nous a donné l'axe de la flexion résultante.

Nous rencontrerons une construction analogue pour l'espace à propos de la flexion cyclique.

15. *La flexion considérée comme rotation de rotation.* — On peut employer pour représenter la flexion un autre système de vecteurs qui rend immédiatement évidente la réciprocité polaire que nous venons d'établir.

Prenons à partir du point M sur la normale principale de la flexion et dans le sens opposé au centre de flexion, la longueur MA mesurée par l'inverse du rayon. Le point A est le pôle de l'axe de flexion par rapport au cercle imaginaire dont nous avons parlé, cercle situé dans le plan normal, ayant son centre en M et pour carré du rayon = 1.

Nous considérerons le vecteur MA comme le vecteur représentatif de la flexion. Désignons-le par A, et soient  $H_1, H_2, H_3$  ses composantes. On a

$$(29) \quad \begin{cases} H_1 = \beta F_3 - \gamma F_2, \\ H_2 = \gamma F_1 - \alpha F_3, \\ H_3 = \alpha F_2 - \beta F_1. \end{cases}$$

Ces expressions sont les coefficients de la seconde des équations (28)

qui devient ainsi :

$$H_1(X-x) + H_2(Y-y) + H_3(Z-z) + 1 = 0.$$

En remplaçant les rotations  $F_i$  par leurs valeurs on trouve les expressions des quantités  $H_i$  en fonction des dérivées des déplacements

$$(30) \quad \begin{cases} H_1 = -\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \alpha \left( \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right); \\ H_2 = -\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \beta \left( \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right); \\ H_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \gamma \left( \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right). \end{cases}$$

L'expression placée entre parenthèses est une forme cubique des cosinus directeurs qui joue un rôle important dans l'étude de la flexion.

Nous poserons

$$(31) \quad D_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{dD}{ds} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}.$$

La forme  $D_2(\alpha, \beta, \gamma)$  étant égale à la dérivée de la dilatation dans le sens de la fibre, nous l'appellerons la *dilatation seconde*.

Les composantes de la rotation de flexion s'expriment en fonction de celles du vecteur  $H$  par des formules semblables aux équations (29) :

$$(32) \quad \begin{cases} F_1 = H_2 \gamma - H_3 \beta, \\ F_2 = H_3 \alpha - H_1 \gamma, \\ F_3 = H_1 \beta - H_2 \alpha. \end{cases}$$

Ces expressions rappellent celles qui donnent la vitesse dans un mouvement de rotation, de sorte que l'emploi du vecteur  $H$  pour représenter la flexion revient à considérer la flexion comme la rotation d'une rotation.

Il est évident d'ailleurs que si l'on considère plusieurs flexions d'une fibre élémentaire, le vecteur  $H$  relatif à la flexion résultante est la somme géométrique des vecteurs analogues relatifs aux flexions composantes.

16. *Première décomposition de la flexion totale.* — Les détails dans

lesquels nous avons cru devoir entrer à propos de la composition des flexions trouveront leur application dans l'étude de la distribution des flexions dont nous allons maintenant nous occuper. Pour obtenir une représentation géométrique simple de cette distribution, on est conduit en effet à regarder la flexion totale des fibres comme la résultante de plusieurs autres dont chacune peut s'étudier isolément.

Une première décomposition qui semble tout d'abord indiquée se trouve suggérée par la considération des glissements et des rotations.

L'identité

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \alpha} + p_2 \gamma - p_3 \beta$$

donne par différentiation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial D}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial p_2}{\partial s_2} - \beta \frac{\partial p_3}{\partial s},$$

et l'on a des expressions semblables pour les dérivées  $\frac{d^2 v}{ds^2}$  et  $\frac{d^2 w}{ds^2}$ . Portons ces valeurs dans la formule (30); en tenant compte en outre des équations (9) et (31), nous obtenons

$$(33) \quad \begin{cases} H_1 = -\frac{\partial G_1}{\partial s} - \gamma \frac{\partial p_2}{\partial s} + \beta \frac{\partial p_3}{\partial s}; \\ H_2 = -\frac{\partial G_2}{\partial s} - \alpha \frac{\partial p_3}{\partial s} + \gamma \frac{\partial p_1}{\partial s}; \\ H_3 = -\frac{\partial G_3}{\partial s} - \beta \frac{\partial p_1}{\partial s} + \alpha \frac{\partial p_2}{\partial s}. \end{cases}$$

La flexion se trouve par ces formules décomposée en deux autres; l'une que nous appelons *flexion par glissement* a pour composantes les dérivées changées de signe

$$-\frac{\partial G_1}{\partial s}, \quad -\frac{\partial G_2}{\partial s}, \quad -\frac{\partial G_3}{\partial s};$$

l'autre, qu'on peut appeler *flexion par rotation*, a pour composantes suivant les axes les termes dépendant de la rotation dérivée dans les équations (33).

17. *Flexion de torsion et flexion cyclique.* — Mais la rotation dérivée, elle-même, a été décomposée par les équations (17); en introduisant



ces expressions dans les formules (33), on trouve

$$\begin{aligned}\beta \frac{\partial p_3}{\partial s} - \gamma \frac{\partial p_2}{\partial s} &= \frac{1}{2} \left( \beta \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \right) + \varphi_1 - \alpha(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3), \\ \gamma \frac{\partial p_1}{\partial s} - \alpha \frac{\partial p_3}{\partial s} &= \frac{1}{2} \left( \gamma \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} - \alpha \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \right) + \varphi_2 - \beta(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3), \\ \alpha \frac{\partial p_2}{\partial s} - \beta \frac{\partial p_1}{\partial s} &= \frac{1}{2} \left( \alpha \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \right) + \varphi_3 - \gamma(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3).\end{aligned}$$

La flexion par rotation est donc la résultante de :

1° Une *flexion de torsion*, représentée par un vecteur  $H'$  :

$$(34) \quad \begin{cases} H'_1 = \frac{1}{2} \left( \beta \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \right), \\ H'_2 = \frac{1}{2} \left( \gamma \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \right), \\ H'_3 = \frac{1}{2} \left( \alpha \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \right). \end{cases}$$

2° Une autre flexion que nous appelons la *flexion cyclique* ou *polaire* et dont le vecteur représentatif  $H''$  a pour composantes

$$(35) \quad \begin{cases} H''_1 = \varphi_1 - \alpha(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3), \\ H''_2 = \varphi_2 - \beta(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3), \\ H''_3 = \varphi_3 - \gamma(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3). \end{cases}$$

Le vecteur  $H''$  est la projection, sur le plan normal à la fibre, du vecteur  $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ . La connaissance du vecteur  $\Phi$  suffit donc pour définir la distribution des flexions correspondantes autour du point M. On peut dire que ce vecteur représente la *flexion cyclique du milieu en M*.

Le vecteur  $\Phi$  est un vecteur polaire; c'est pourquoi nous avons donné à la *flexion cyclique* le nom de *flexion polaire*, pour la distinguer de la flexion de torsion, dont la distribution est régie par un tenseur axial. Le nom de flexion cyclique que nous proposons maintenant se trouve justifié par de nombreuses propriétés que nous rencontrerons dans la suite.

18. *Composantes de la flexion cyclique.* — Nous ferons plus loin l'étude spéciale de chacune des flexions considérées; pour le moment

nous donnerons simplement les expressions des composantes de la flexion cyclique. En remplaçant dans les équations (16) les rotations par leurs valeurs, on a

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \varphi_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta u, \\ 4 \varphi_2 = \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \Delta v, \\ 4 \varphi_3 = \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Delta w, \end{array} \right.$$

$\Theta$  désignant la dilation cubique, et  $\Delta$  l'opérateur de Laplace :

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

On peut également exprimer les quantités  $\varphi_i$  à l'aide des coefficients de la dilatation :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \varphi_1 = 2 \left( \frac{\partial e_2}{\partial x} + \frac{\partial e_3}{\partial x} \right) - \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \\ 4 \varphi_2 = 2 \left( \frac{\partial e_3}{\partial y} + \frac{\partial e_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \\ 4 \varphi_3 = 2 \left( \frac{\partial e_1}{\partial z} + \frac{\partial e_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial x}. \end{array} \right.$$

La flexion cyclique s'introduit directement dans les équations de l'équilibre élastique des corps isotropes, qu'on peut écrire sous la forme (1)

$$\rho X + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} - 4\mu \varphi_1 = 0,$$

$$\rho Y + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} - 4\mu \varphi_2 = 0,$$

$$\rho Z + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - 4\mu \varphi_3 = 0.$$

S'il existe un potentiel des forces de masse ( $\rho X$ ,  $\rho Y$ ,  $\rho Z$ ) il y a donc aussi un potentiel des flexions cycliques. Si les forces de masse sont négligeables, la flexion cyclique est représentée en chaque point par

---

(1) O. TEDONE, *Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre* (*Encyclopädie der math. Wiss.*, t. IV, 2u, p. 66).

un vecteur normal à la surface S, lieu des points d'égale dilatation cubique.

19. *Les trois formes fondamentales : dilatation seconde, torsion et flexion cyclique.* — La flexion cyclique et la torsion sont indépendantes l'une de l'autre. Les 3 coefficients de la première et les 6 coefficients de la seconde forment un total de 9 paramètres entre lesquels il existe une seule relation (15). Les dérivées secondes des trois fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont au nombre de 18, comme les dérivées premières des 6 coefficients de la dilatation.

Si l'on suppose connues en un point la torsion et la flexion cyclique, les valeurs numériques de ces dérivées ne dépendent donc plus que de 10 paramètres arbitraires. Or le nombre des coefficients qui figurent dans les composantes de la flexion par glissement n'est pas en général inférieur à 18. Il en résulte donc que la flexion par glissement n'est pas indépendante des deux autres au point de vue de la distribution dans le voisinage d'un point.

La considération de la dilatation seconde

$$D_2(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial D}{\partial s}$$

nous fournira au contraire la troisième flexion, dont la distribution dépend de 10 coefficients nouveaux, indépendants de la torsion et de la flexion cyclique.

Nous poserons

$$(38) \quad D_2(\alpha, \beta, \gamma) = d_{111}\alpha^3 + d_{222}\beta^3 + d_{333}\gamma^3 + 3d_{112}\alpha^2\beta + 3d_{113}\alpha^2\gamma \\ + 3d_{221}\beta^2\alpha + 3d_{223}\beta^2\gamma + 3d_{331}\gamma^2\alpha + 3d_{332}\gamma^2\beta \\ + 6d_{123}\alpha\beta\gamma.$$

Les valeurs des coefficients  $d$  sont données par les formules suivantes, et par celles qui s'en déduisent par permutation des indices et des variables :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_{111} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial e_1}{\partial x}, \\ 3d_{112} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial e_1}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial x}, \\ 6d_{123} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Inversement il est possible d'exprimer les 18 dérivées secondes de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ou les dérivées premières des coefficients de la dilatation en fonction des coefficients de la torsion, de la flexion cyclique et de la dilatation seconde.

Les résultats du calcul se trouvent résumés dans les identités suivantes :

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} - \frac{2}{3} (\beta \tau'_\gamma - \gamma \tau'_\beta) + \frac{4}{3} [\alpha (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3) - \varphi_1], \\ \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \beta} - \frac{2}{3} (\gamma \tau'_\alpha - \alpha \tau'_\gamma) + \frac{4}{3} [\beta (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3) - \varphi_2], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} - \frac{2}{3} (\alpha \tau'_\beta - \beta \tau'_\alpha) + \frac{4}{3} [\gamma (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3) - \varphi_3]. \end{cases}$$

20. *Les trois flexions indépendantes.* — Le vecteur  $H$  de la flexion totale sera donc défini par les composantes

$$(41) \quad \begin{cases} H_1 = -\frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} + \alpha D_2 + \frac{1}{3} \left( \beta \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \right) + \frac{4}{3} [\varphi_1 - \alpha (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3)], \\ H_2 = -\frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \beta} + \beta D_2 + \frac{2}{3} \left( \gamma \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \right) + \frac{4}{3} [\varphi_2 - \alpha (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3)], \\ H_3 = -\frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} + \gamma D_2 + \frac{2}{3} \left( \alpha \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \right) + \frac{4}{3} [\varphi_3 - \alpha (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3)]. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$H_1''' = -\frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} + \alpha D_2,$$

$$H_2''' = -\frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \beta} + \beta D_2,$$

$$H_3''' = -\frac{1}{3} \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} + \gamma D_2,$$

on pourra considérer le vecteur  $H''' (H_1''', H_2''', H_3''')$  comme figurant une troisième flexion que nous appellerons la *flexion de dilatation seconde*. Les deux autres composantes de la flexion conservent la même forme dans la nouvelle décomposition, mais elles se trouvent toutes deux augmentées d'un tiers de leur valeur.

On a donc

$$\mathbf{H}_1 = \frac{4}{3} \mathbf{H}'_1 + \frac{4}{3} \mathbf{H}''_1 + \mathbf{H}'''_1,$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{4}{3} \mathbf{H}'_2 + \frac{4}{3} \mathbf{H}''_2 + \mathbf{H}'''_2,$$

$$\mathbf{H}_3 = \frac{4}{2} \mathbf{H}'_3 + \frac{4}{3} \mathbf{H}''_3 + \mathbf{H}'''_3.$$

La dilatation seconde appartient à la catégorie des quantités dirigées du troisième ordre, de M. W. Voigt (<sup>1</sup>). Les trois quantités dirigées qui se présentent ainsi dans l'étude de la flexion : *dilatation seconde*, *torsion*, *flexion cyclique*, forment un système entièrement identique à celui qui sert à représenter en général les relations linéaires entre un champ de vecteurs et un champ de tenseurs (<sup>2</sup>). Dans le cas des déformations infinitésimales dépourvues de rotation, les quantités  $u$ ,  $v$ ,  $w$  étant les dérivées partielles d'une fonction  $U(x, y, z)$ , la dilatation seconde est égale à la différentielle troisième  $d^3U$  dans laquelle on aurait remplacé les différentielles  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , par les cosinus directeurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (<sup>3</sup>).

21. *Remarque sur les flexions par rotation.* — La flexion de torsion et la flexion cyclique ont des valeurs différentes suivant qu'on les considère dans la première ou dans la seconde décomposition. Cependant comme dans les deux cas les expressions ne diffèrent que par le facteur numérique  $\frac{4}{3}$ , les propriétés géométriques restent exactement les mêmes. Mais la seconde décomposition seule étant composée d'éléments indépendants, c'est celle que nous aurons désormais en vue, à moins que le contraire ne soit spécifié.

22. *Formes nouvelles de quelques formules.* — Avec nos nouvelles

(<sup>1</sup>) W. VOIGT, *Ueber die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Grössen höherer Ordnung* (Gött. Nach., 1900, p. 355).

(<sup>2</sup>) *Encyklopädie der math. Wissenschaft*, t. IV, 3, p. 46.

(<sup>3</sup>) La décomposition de la flexion totale en trois flexions indépendantes, dilatation seconde, torsion et flexion cyclique, s'applique sans modification au cas des déformations finies.

notations les équations de l'axe de flexion deviennent

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0, \\ -\frac{1}{3} \left[ (X-x) \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} + (Y-y) \frac{\partial D_2}{\partial \beta} + (Z-z) \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} \right] \\ + \frac{4}{3} [\varphi_1(X-x) + \varphi_2(Y-y) + \varphi_3(Z-z)] \\ + \frac{4}{3} \left| \begin{array}{ccc} (X-x) & (Y-y) & (Z-z) \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{1}{2} \tau'_\alpha & \frac{1}{2} \tau'_\beta & \frac{1}{2} \tau'_\gamma \end{array} \right| + 1 = 0. \end{array} \right.$$

Les composantes de la rotation de flexion  $F$  prennent la forme

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{1}{3} \left( \beta \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial D_2}{\partial \beta} \right) + \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2} \tau'_\alpha - \alpha \tau \right) + \frac{4}{3} (\varphi_1 \gamma - \varphi_3 \beta), \\ F_2 = \frac{1}{3} \left( \gamma \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} \right) + \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2} \tau'_\beta - \beta \tau \right) + \frac{4}{3} (\varphi_3 \alpha - \varphi_1 \gamma), \\ F_3 = \frac{1}{3} \left( \alpha \frac{\partial D_2}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} \right) + \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2} \tau'_\gamma - \gamma \tau \right) + \frac{4}{3} (\varphi_1 \beta - \varphi_2 \alpha). \end{array} \right.$$

Dans ces expressions, les parties relatives aux trois flexions indépendantes se trouvent nettement séparées.

### CHAPITRE III.

#### Propriétés spéciales des diverses flexions.

23. Étude de la flexion de torsion. — 24. Surface des centres dans la flexion de torsion. — 25. La flexion cyclique. — 26. Flexion de dilatation seconde. — 27. Les sept lignes d'inflexion. — 28. Flexion moyenne. — 29. Déformations sans torsion. — 30. Flexion cyclique homogène. — 31. Flexion plane du problème de Saint-Venant.

23. *Étude de la flexion de torsion.* — La représentation géométrique de la flexion de torsion s'obtient facilement par la considération de l'indicatrice des torsions.

Les expressions

$$\frac{1}{2} \tau'_\alpha, \quad \frac{1}{2} \tau'_\beta, \quad \frac{1}{2} \tau'_\gamma$$

sont les projections sur les axes de coordonnées d'un vecteur MT perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la fibre par rapport à l'indicatrice. La projection de MT sur la direction de la fibre est égale à la torsion, en vertu de l'identité

$$\frac{1}{2}(\alpha\tau'_\alpha + \beta\tau'_\beta + \gamma\tau'_\gamma) = \tau;$$

sa projection sur un plan perpendiculaire à la fibre, multipliée par le facteur  $\frac{4}{3}$ , représente en grandeur et en direction la rotation figurative de la flexion de torsion.

Lorsque la fibre est dirigée suivant l'un des axes de l'indicatrice, la flexion de torsion est donc nulle. Les directions des torsions principales sont d'ailleurs les seules qui jouissent de cette propriété.

La normale principale de la flexion de torsion est située dans le plan diamétral conjugué de la fibre par rapport à l'indicatrice.

Elle est définie par les équations

$$\begin{aligned}\alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) &= 0, \\ (X-x)\tau'_\alpha + (Y-y)\tau'_\beta + (Z-z)\tau'_\gamma &= 0.\end{aligned}$$

24. *Surface des centres.* — Dans la flexion de torsion, le lieu des centres de flexion des fibres issues d'une même origine M est en général une surface du cinquième ordre. L'étude de cette surface offre un certain intérêt parce que la dissymétrie qu'elle présente par rapport aux axes de l'indicatrice correspond au caractère dissymétrique de la torsion elle-même.

Si l'on prend comme axes de coordonnées les axes principaux de la torsion en M, le centre de flexion considéré se trouve déterminé par les trois équations

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y + \gamma z &= 0, \\ \tau_{11}\alpha x + \tau_{22}\beta y + \tau_{33}\gamma z &= 0, \\ \frac{4}{3} \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \tau_{11}\alpha & \tau_{22}\beta & \tau_{33}\gamma \end{vmatrix} + 1 &= 0.\end{aligned}$$

L'élimination de  $\alpha, \beta, \gamma$  fournit l'équation du lieu,

$$(44) \quad \frac{4}{3}xyz(\tau_{33}-\tau_{22})(\tau_{11}-\tau_{33})(\tau_{22}-\tau_{11})(x^2+y^2+z^2) \\ + (\tau_{33}-\tau_{22})^2y^2z^2 + (\tau_{11}-\tau_{33})^2z^2x^2 + (\tau_{22}-\tau_{11})^2x^2y^2 = 0.$$

Lorsqu'on effectue sur les coordonnées une transformation par symétrie, les termes de la première ligne de l'équation semblent changer de signes; mais en réalité les torsions changent également de signes, de sorte que l'équation n'est pas modifiée.

25. *La flexion cyclique.* — Dans le cas de la flexion cyclique, les équations de l'axe de flexion deviennent

$$(45) \quad \begin{cases} \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0, \\ \frac{3}{4}[\varphi_1(X-x) + \varphi_2(Y-y) + \varphi_3(Z-z)] + 1 = 0. \end{cases}$$

La seconde équation est indépendante de la direction de la fibre. Donc :

*Tous les axes de flexion cyclique des fibres issues d'un même point M sont situées dans un même plan II, que nous appelons le plan principal de la flexion cyclique au point M.*

La perpendiculaire abaissée de M sur le plan II est l'*axe central* de la flexion cyclique. La direction de cet axe est évidemment la même que celle du vecteur  $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  que nous avons précédemment défini.

Dans la décomposition de la flexion totale en flexions indépendantes, le vecteur figuratif de la flexion cyclique a pour composantes

$$\frac{4}{3}\varphi_1, \quad \frac{4}{3}\varphi_2, \quad \frac{4}{3}\varphi_3.$$

L'extrémité de ce vecteur et le plan principal II se correspondent comme pôle et plan polaire par rapport à la sphère imaginaire de rayon  $\sqrt{-1}$  ayant son centre en M.

L'intersection P de l'axe central et du plan principal est le *pôle* ou *centre principal* de la flexion cyclique. La longueur MP en est le rayon principal.



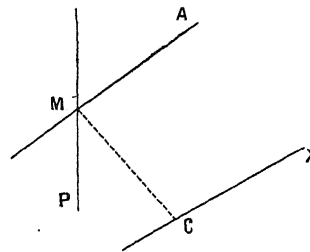
On a

$$\frac{1}{MP^2} = \frac{16}{9}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2).$$

La flexion cyclique d'une fibre donnée se détermine facilement à l'aide des éléments principaux.

Soit MA la direction de la fibre. Le plan de flexion cyclique contient

Fig. 2.



la droite MA et l'axe principal MP. La normale principale de flexion est donc située dans ce plan. Le centre de flexion C est à l'intersection de la normale principale et du plan principal II relatif au point M. L'axe de flexion CX est l'intersection du plan principal II et du plan normal à la fibre.

La fibre dirigée suivant l'axe central a une flexion nulle. Les fibres perpendiculaires à l'axe ont toutes le pôle P comme centre de flexion.

Si l'on considère les fibres dirigées dans un même plan Q, les axes de flexions correspondants passent par un même point Q', intersection du plan principal II et de la normale au plan Q.

Les cercles de flexion de ces fibres sont donc situés sur une même sphère ayant pour centre Q', et les centres de flexion sont sur un même cercle décrit sur PQ' comme diamètre.

Pour les axes de l'indicatrice des torsions, la flexion par rotation se réduit à la flexion cyclique. Donc les trois cercles de flexion par rotation des axes considérés sont situés deux à deux sur une sphère.

La composition des flexions cycliques en un point d'un milieu est analogue à celle des flexions des fibres. Si l'on représente les flexions cycliques par des vecteurs, la flexion résultante sera définie par la somme géométrique des vecteurs composants. Mais si les flexions sont

déterminées par leurs plans principaux, le plan principal de la flexion résultante se construira par un procédé semblable à celui que nous avons trouvé pour les axes de flexion dans le Chapitre précédent. Cette construction, comme nous l'avons remarqué, est, dans l'espace, la transformation par polaires réciproques de l'addition géométrique des vecteurs.

26. *Flexion de dilatation seconde.* — La distribution des dilatations secondes autour d'un point est représentée par une indicatrice du troisième ordre. Portons sur la direction  $\alpha, \beta, \gamma$  de chaque fibre, à partir de M, un vecteur MN mesuré par la valeur de  $\frac{1}{\sqrt[3]{D_2(\alpha, \beta, \gamma)}}$ . Le lieu du point N est l'indicatrice des dilatations secondes; il est défini par l'équation

$$(46) \quad D_2(x, y, z) - 1 = 0,$$

l'origine des coordonnées étant supposée en M.

Le cône asymptote de l'indicatrice est formé par les directions des fibres dont la dilatation seconde est nulle. Ce cône du troisième ordre n'est assujéti à aucune condition restrictive, soit au point de vue de la figure, soit au point de vue de la situation relativement aux autres éléments de la déformation : les dix coefficients de l'équation (46) peuvent prendre en un point donné des valeurs numériques entièrement arbitraires et indépendantes de la torsion et de la flexion cyclique.

En se reportant aux équations (42) on voit que l'axe de la flexion de dilatation seconde d'une fibre donnée est situé dans le plan

$$(47) \quad (X - x) \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} + (Y - y) \frac{\partial D_2}{\partial \beta} + (Z - z) \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} - 3 = 0.$$

Portons sur la direction de la fibre un vecteur unitaire MI. Le plan (47) est le deuxième polaire du point I par rapport à l'indicatrice cubique des dilatations secondes. L'axe de flexion est l'intersection du plan considéré et du plan normal à la fibre en M. Si les deux plans sont parallèles, la flexion est nulle.

Les directions qui satisfont à cette condition sont déterminées par

les relations

$$\frac{\frac{\partial D_2}{\partial \alpha}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial D_2}{\partial \beta}}{\beta} = \frac{\frac{\partial D_2}{\partial \gamma}}{\gamma}.$$

En comparant les deux premiers rapports au troisième on a les deux équations homogènes du troisième ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial D_2}{\partial \beta} &= 0, \\ \gamma \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} &= 0, \end{aligned}$$

qui ont neuf solutions communes. Parmi ces solutions il y en a deux à éliminer : celles qui vérifient les deux relations  $\gamma = 0$  et  $\frac{\partial D_2}{\partial \gamma} = 0$ . Il reste donc en général *sept* directions de fibres dont la flexion de dilatation seconde est nulle. Ce sont les *sept lignes d'inflexion* relatives à la déformation considérée.

27. *Lignes d'inflexion.* — Un calcul semblable s'applique à la flexion générale et fournit également *sept lignes d'inflexion* totale passant par chaque point du milieu.

Dans le cas de la flexion par rotation, quatre des lignes d'inflexion sont imaginaires ; ce sont les directions asymptotiques des sections circulaires de l'indicatrice des torsions.

Enfin dans la flexion cyclique, il y a une seule ligne d'inflexion réelle : la direction de l'axe principal, et une infinité de solutions imaginaires : toutes les directions isotropes.

Comme le nombre des solutions est impair, dans le cas général, il en résulte qu'il y en a toujours au moins une de réelle. D'où cette conséquence :

*Par tout point M du milieu déformé il passe au moins une fibre réelle dont la flexion en ce point est nulle.*

28. *Flexion moyenne.* — Considérons une fonction quelconque  $F(\alpha, \beta, \gamma)$  des cosinus directeurs. Nous appelons *valeur moyenne* de

la fonction  $F$  l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \iint F(\alpha, \beta, \gamma) d\sigma$$

étendue à toute la surface de la sphère de rayon  $un$  et désignant l'élément superficiel de la sphère.

De même si l'on considère un vecteur dont les composantes  $V_1, V_2, V_3$  sont des fonctions des mêmes cosinus, on peut lui faire correspondre un vecteur moyen  $V_1, V_2, V_3$  par les formules

$$V_i = \frac{1}{4\pi} \iint U_i d\sigma.$$

Appliquons ce calcul au vecteur  $H$ . On a

$$\frac{1}{4\pi} \iint H_1 d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \iint \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \alpha D_2 \right) d\sigma = -\frac{4}{15} \Delta u + \frac{1}{15} \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

et de même

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iint H_2 d\sigma &= -\frac{4}{15} \Delta v + \frac{1}{5} \frac{\partial \Theta}{\partial y}; \\ \frac{1}{4\pi} \iint H_3 d\sigma &= -\frac{4}{15} \Delta w + \frac{1}{5} \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Pour attacher à la notion de ce vecteur moyen une déformation déterminée, on peut considérer la flexion cyclique qui fournit la même moyenne. Soit  $K(K_1, K_2, K_3)$  le vecteur représentatif de la flexion cyclique cherchée. En égalant les moyennes on obtient les relations

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{8}{5} \varphi_1 - \frac{3}{10} \frac{\partial \Theta}{\partial x}; \\ K_2 &= \frac{8}{15} \varphi_2 - \frac{3}{10} \frac{\partial \Theta}{\partial y}; \\ K_3 &= \frac{8}{15} \varphi_3 - \frac{3}{10} \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Nous appelons *flexion moyenne* du milieu en  $M$  la flexion cyclique ainsi déterminée.

La flexion moyenne ne dépend donc que de la flexion cyclique du milieu et des dérivées partielles de la dilatation cubique. Ce sont les mêmes éléments qui figurent dans les équations de l'équilibre élastique des milieux isotropes.

29. *Déformations sans torsion.* — Comme exemple d'applications des théories précédentes nous allons considérer d'abord les déformations infinitésimales sans torsion.

Le calcul des rotations  $p_1, p_2, p_3$  dans les déformations sans torsion est analogue à celui des composantes  $u, v, w$  du déplacement dans les déformations sans dilatation. Nous trouvons donc immédiatement, par un raisonnement classique <sup>(1)</sup>, que les composantes de la flexion cyclique sont des constantes.

Soit donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_3}{\partial y} - \frac{\partial p_1}{\partial z} &= 2\varphi_1, \\ \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_3}{\partial x} &= 2\varphi_2, \\ \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial y} &= 2\varphi_3;\end{aligned}$$

nous en tirons

$$(48) \quad \begin{cases} p_1 = \varphi_2 z - \varphi_3 y + p_{10}, \\ p_2 = \varphi_3 x - \varphi_1 z + p_{20}, \\ p_3 = \varphi_1 y - \varphi_2 x + p_{30}. \end{cases}$$

$p_{10}, p_{20}, p_{30}$  désignant de nouvelles constantes. En faisant abstraction d'un déplacement euclidien, on peut supposer ces constantes égales à zéro. Si de plus nous choisissons l'axe  $Oz$  parallèle à l'axe principal de la flexion polaire, nous aurons  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ; en posant alors  $\varphi_3 = \omega$ , les formules (48) deviennent

$$\begin{aligned}p_1 &= -\omega y, \\ p_2 &= \omega x, \\ p_3 &= 0.\end{aligned}$$

On satisfait à ces équations en prenant

$$(49) \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = -\omega(x^2 + y^2).$$

Toutes les autres déformations infinitésimales sans torsion, qui admettent la même flexion cyclique, s'obtiendront en adjoignant à la précé-

---

<sup>(1)</sup> APPELL, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 265. — POINCARÉ, *Leçons sur l'élasticité*, p. 14.

dente une déformation sans rotation, combinée avec une déformation homogène. En négligeant cette dernière déformation on a donc pour les valeurs les plus générales de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , des expressions de la forme suivante, où  $F$  désigne une fonction arbitraire :

$$(50) \quad \begin{cases} u = \omega \frac{\partial F}{\partial x}, \\ v = \omega \frac{\partial F}{\partial y}, \\ w = \omega \frac{\partial F}{\partial z} - \omega(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Supposons d'abord  $F(x, y, z) = 0$ . Les formes fondamentales  $D$  et  $D_2$  prennent les valeurs

$$\begin{aligned} D &= -2\omega(\gamma\beta\gamma + x\alpha\gamma), \\ D_2 &= -2\omega\gamma(\beta^2 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Les composantes  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  du vecteur figuratif de la flexion sont

$$\begin{aligned} H_1 &= -2\omega\alpha\gamma(\beta^2 + \alpha^2), \\ H_2 &= -2\omega\beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2), \\ H_3 &= 2\omega(\alpha^2 + \beta^2) - 2\omega\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2) = 2\omega(\alpha^2 + \beta^2)^2. \end{aligned}$$

Ces valeurs étant les mêmes dans tout le milieu, il en résulte que toutes les fibres de même direction sont également fléchies. La déformation est homogène au point de vue des flexions. Il en est ainsi d'ailleurs pour toutes les déformations dans lesquelles les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  du déplacement sont des fonctions du second degré des coordonnées. L'équation du plan de flexion

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} = \beta(X-x) - \alpha(Y-y) = 0$$

montre que ce plan est partout parallèle à  $Oz$ . La flexion d'une fibre ne dépend que de l'angle qu'elle forme sur l'axe  $Oz$ ; les fibres parallèles à l'axe ont une flexion nulle; ce sont d'ailleurs les seules lignes d'inflexion réelles.

30. *Flexion cyclique homogène.* — En choisissant convenablement

la fonction  $F(x, y, z)$  des équations (50), on peut annuler la dilatation seconde. Prenons en effet

$$F(x, y, z) = \frac{\omega}{3} z(x^2 + y^2).$$

Nous avons alors

$$(51) \quad \begin{cases} u = \frac{2\omega}{3} xz, \\ v = \frac{2\omega}{3} yz, \\ w = -\frac{2\omega}{3} (x^2 + y^2), \end{cases}$$

d'où

$$D = \frac{2\omega}{3} [z(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma(\alpha x + \beta y)],$$

$$D_2 = 0.$$

Pour cette déformation la flexion totale se réduit à la flexion cyclique.

Il résulte d'ailleurs de nos calculs que toute déformation infinitésimale sans torsion et sans dilatation seconde se ramène au type des formules (51) combiné avec une déformation homogène quelconque. Nous appelons *flexion cyclique homogène* du milieu la déformation considérée.

31. *Flexion plane.* — Dans la flexion plane uniforme du problème de Saint-Venant on a

$$u = \frac{\omega}{2} [\alpha(x^2 - y^2) + z^2],$$

$$v = \omega \alpha xy,$$

$$w = -\omega xz,$$

$\omega$  et  $\alpha$  désignant des constantes dont la première est supposée infiniment petite.

Les formes fondamentales deviennent ici :

$$D = \omega x [\alpha(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2],$$

$$D_2 = \omega \alpha [\alpha(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2],$$

$$\tau(\alpha, \beta, \gamma) = \omega(\alpha + 1)\beta\gamma,$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega}{2}(\alpha - 1), \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0.$$

La flexion cyclique est donc constante en grandeur et en direction.

Le cône d'intorsion se décompose en deux plans rectangulaires, parallèles respectivement à  $xOy$  et  $xOz$ . Les fibres non parallèles à l'un de ces plans subissent une torsion.

Les composantes de la flexion d'une fibre quelconque sont :

$$H_1 = \omega\alpha\beta^2 - \omega\gamma^2[1 - (\alpha + 1)\alpha^2],$$

$$H_2 = -\omega\alpha\alpha\beta[1 + (\alpha + 1)\gamma^2],$$

$$H_3 = \omega\alpha\gamma[(2 - \alpha) + (\alpha + 1)\gamma^2].$$

Les fibres parallèles à  $Ox$  ne subissent aucune flexion.

Pour la direction parallèle à  $Oz$ , on a

$$H_1 = -\omega, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0,$$

et, pour la direction parallèle à  $Oy$ ,

$$H_1 = \omega\alpha, \quad H_2 = H_3 = 0.$$

Remarquons que la flexion cyclique  $\varphi_1$  est égale à la moyenne des courbures des fibres parallèles aux axes.

La flexion plane que l'on considère dans l'hypothèse simplifiée de la résistance des matériaux se déduirait de la précédente en y faisant  $\alpha = 0$ .

## CHAPITRE IV.

### Flexion des surfaces.

32. Flexion normale et flexion géodésique. — 33. Étude de la flexion normale. — 34. Composantes de la flexion normale. — 35. Plans caractéristiques d'une fibre. — 36. Points focaux de la congruence des axes. — 37. Incurvation normale totale. — 38. Flexion géodésique. — 39. Plans pour lesquelles la flexion géodésique par rotation est nulle. — 40. Lignes d'inflexion relatives à la flexion par rotation. — 40. Application à un problème de M. Darboux et de M. Weingarten.

32. *Flexion normale et flexion tangentielle ou géodésique.* — La flexion d'une fibre élémentaire située sur une surface  $S$  peut être décomposée en une flexion normale et une flexion tangentielle ou géodésique. Ce sont respectivement les analogues de la courbure normale et de la courbure géodésique.

Le vecteur figuratif de la première est la projection  $H_n$  du vecteur  $H$



sur la normale à la surface. Nous continuerons à désigner comme précédemment par  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la fibre, et nous appellerons  $a, b, c$  les cosinus directeurs de la normale à la surface.

On a donc

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Tenant compte de cette relation nous aurons pour  $H_n$  les deux formes suivantes :

$$(52) \quad H_n = - \left( a \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + c \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = aH_1 + bH_2 + cH_3.$$

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_n = - \frac{1}{3} \left( a \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} + b \frac{\partial D_2}{\partial \beta} + c \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} \right) + \frac{4}{3} (a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3) \\ \quad + \frac{2}{3} \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \tau'_\alpha & \tau'_\beta & \tau'_\gamma \end{array} \right|. \end{array} \right.$$

Les composantes de la flexion géodésique suivant les axes de coordonnées seraient

$$H_1 = aH_n, \quad H_2 = bH_n, \quad H_3 = cH_n.$$

Mais pour l'étude de la flexion géodésique il est en général plus commode de se servir de la rotation figurative  $F$ . La rotation figurative de la flexion géodésique a en effet son axe normal à la surface, de sorte que si l'on désigne par  $F_1, F_2, F_3$  les composantes de la rotation de flexion totale de la fibre, la rotation de flexion géodésique aura pour valeur

$$F_n = aF_1 + bF_2 + cF_3.$$

Cette expression, développée, devient

$$(54) \quad F_n = \frac{1}{3} \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial D_2}{\partial \beta} & \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} \end{array} \right| - \frac{4}{3} \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{array} \right| + \frac{2}{3} (a\tau'_\alpha + b\tau'_\beta + c\tau'_\gamma).$$

33. *Étude de la flexion normale.* — L'expression de la flexion normale  $H_n$  devient homogène et du second degré en  $\alpha, \beta, \gamma$  quand on multiplie par  $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$  les termes dépendant de la flexion cyclique. Il en résulte immédiatement que l'étude de la flexion normale autour d'un point  $M$  de la surface est entièrement semblable à

celle de la courbure normale en géométrie. La variation des flexions normales est représentée par une indicatrice du second degré analogue à l'indicatrice de Dupin. Il y a par conséquent, en général, deux flexions normales principales correspondant aux axes de l'indicatrice.

Les flexions principales et les directions des fibres correspondantes sont déterminées par le système suivant, où l'on suppose  $H_n$  rendu homogène par rapport à  $\alpha, \beta, \gamma$  :

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \alpha} - S \alpha - \lambda a = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \beta} - S \beta - \lambda b = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \gamma} - S \gamma - \lambda c = 0, \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = 0. \end{cases}$$

L'élimination de  $S$  et de  $\lambda$  entre les trois premières donne l'équation du second degré en  $\alpha, \beta, \gamma$  :

$$(56) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \alpha} & \alpha & a \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \beta} & \beta & b \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \gamma} & \gamma & c \end{vmatrix} = 0,$$

qui, jointe à la quatrième des équations (55), détermine les directions principales. Si l'on élimine au contraire  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  entre les équations considérées, on obtient une équation du second degré en  $S$  dont les racines sont les valeurs des flexions principales.

Les directions principales satisfont à une relation importante dans laquelle le caractère dissymétrique de la torsion se met encore en évidence ; désignons par  $a', b', c'$  et  $a'', b'', c''$  leurs cosinus directeurs et supposons-les dirigées de telle façon que le trièdre trirectangle qu'elles forment avec la normale soit orienté comme le trièdre des axes de coordonnées, quand on range ces directions dans l'ordre des indices supérieurs. On a, dans cette hypothèse,

$$(57) \quad \begin{cases} a'' = bc' - cb', & b'' = ca' - ac', & c'' = ab' - ba', \\ a' = -(bc'' - cb''), & b' = -(ca'' - ac''), & c' = -(ab'' - ba''). \end{cases}$$

Considérons d'autre part la forme polaire, composée avec les trois systèmes de variables  $(a, b, c)$ ,  $(a', b', c')$ ,  $(a'', b'', c'')$ , qu'on déduit de la dilatation seconde.

Cette forme peut être représentée par le produit symbolique

$$\frac{1}{6} \left( a \frac{\partial}{\partial \alpha} + b \frac{\partial}{\partial \beta} + c \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \left( a' \frac{\partial}{\partial \alpha} + b' \frac{\partial}{\partial \beta} + c' \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \\ \times \left( a'' \frac{\partial}{\partial \alpha} + b'' \frac{\partial}{\partial \beta} + c'' \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) D_2(\alpha, \beta, \gamma).$$

Nous la désignerons par

$$D_2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.$$

Cela posé, en écrivant que les deux directions principales sont rectangulaires et conjuguées par rapport à l'indicatrice, on obtient la relation

$$-D_2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ \frac{\partial \tau}{\partial a'} & \frac{\partial \tau}{\partial b'} & \frac{\partial \tau}{\partial c'} \end{vmatrix} + \frac{1}{3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \frac{\partial \tau}{\partial a''} & \frac{\partial \tau}{\partial b''} & \frac{\partial \tau}{\partial c''} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on tient compte des formules (57), cette équation devient simplement

$$(58) \quad -D_2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} + \frac{2}{3} [\tau(a'', b'', c'') - \tau(a', b', c')] = 0.$$

La différence des torsions des axes de l'indicatrice dépend donc seulement de la dilatation seconde au point M.

34. *Composantes de la flexion normale.* — Examinons maintenant les trois composantes de la flexion normale.

La flexion cyclique normale a pour expression

$$\frac{4}{3} (a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

. Elle est indépendante de la direction des fibres dans le plan tangent

à la surface. L'indicatrice correspondante est un cercle et le centre de flexion se trouve à l'intersection de la normale à la surface  $S$  avec le plan principal de la flexion cyclique au point  $M$ .

La flexion normale de torsion est représentée par le déterminant

$$\frac{2}{3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \tau'_\alpha & \tau'_\beta & \tau'_\gamma \end{vmatrix}.$$

L'indicatrice relative à cette flexion est toujours une hyperbole équilatère. Pour en déterminer les directions asymptotiques il suffit de considérer l'intersection de l'indicatrice des torsions avec le plan tangent à la surface. Les axes de la conique d'intersection sont les asymptotes de l'indicatrice des flexions normales de torsion dans le plan considéré. Il résulte de là que la flexion normale moyenne de torsion est nulle et que la flexion normale moyenne totale est indépendante de la torsion.

Les axes de l'indicatrice ont des torsions égales. Cette propriété résulte immédiatement de l'équation (58) quand on y supprime les termes provenant de la dilatation seconde.

La flexion normale de dilatation seconde est représentée par la forme polaire

$$-\frac{1}{3} \left( a \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} + b \frac{\partial D_2}{\partial \beta} + c \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} \right).$$

Les axes de l'indicatrice correspondante forment, avec la direction  $(a, b, c)$  de la normale à la surface, un trièdre trirectangle ( $T$ ) dont les arêtes jouissent d'une intéressante propriété de réciprocité. Les trois directions satisfont en effet, en vertu de l'équation (58), à la relation symétrique

$$(59) \quad D_2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0.$$

Si l'on se donne la direction  $(a, b, c)$ , les seules directions  $(a', b', c')$  et  $(a'', b'', c'')$  formant avec la première un trièdre trirectangle et vérifiant en outre l'équation (59) sont les axes de l'indicatrice des flexions normales de dilatation seconde relative au plan perpendiculaire à la direc-

tion considérée. Il en résulte qu'un trièdre trirectangle (T) satisfaisant à la condition (59) est, en général, déterminé par une de ses arêtes. Nous disons que ce trièdre est *conjugué par rapport à la dilatation seconde*.

De la forme symétrique de la relation (59) il résulte que, *dans chaque face du trièdre conjugué (T) les axes de l'indicatrice des flexions normales de dilatation seconde sont dirigés suivant les arêtes du trièdre*.

De plus, comme on peut choisir arbitrairement l'une des arêtes du trièdre conjugué, on est conduit à la proposition suivante :

*Par une fibre élémentaire quelconque on peut faire passer deux plans rectangulaires tels que, dans chacun d'eux, la fibre considérée coïncide avec l'une des directions principales de la flexion normale de dilatation seconde.*

35. *Plans caractéristiques d'une fibre.* — Cette propriété est susceptible d'être étendue avec quelques modifications à la flexion générale.

Proposons-nous de trouver les plans passant par une fibre élémentaire donnée et pour lesquels la direction de la fibre soit une direction principale de flexion normale.

Désignons, comme précédemment, par  $(a, b, c)$  les cosinus directeurs de la normale au plan cherché. La solution du problème est alors immédiatement fournie par l'équation (56) jointe à la dernière des équations (55). L'équation (56) est homogène et du second degré par rapport aux inconnues  $(a, b, c)$ . Il existe donc en général deux solutions réelles ou imaginaires. Nous donnons aux plans correspondants le nom de *plans caractéristiques* de la fibre.

Cherchons la condition pour que les deux plans caractéristiques soient rectangulaires. L'équation (56), quand on y regarde  $a, b, c$  comme des coordonnées, représente un cône du second degré passant par la fibre considérée. Pour que les plans caractéristiques soient rectangulaires, il est donc nécessaire et suffisant que le cône (56) soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit. En exprimant cette condition on trouve, après quelques réductions faciles,

$$\tau(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

D'où cette conséquence remarquable :

*La condition nécessaire et suffisante pour que les deux plans caractéristiques d'une fibre soient rectangulaires, c'est que la torsion de cette fibre soit nulle.*

Dans chacun des plans caractéristiques le second axe de l'indicatrice  $a$ , en général, en vertu de l'équation (58), une torsion différente de zéro ; de plus ces seconds axes ne coïncident pas avec les axes de l'indicatrice des flexions normales du plan perpendiculaire à la fibre considérée. La propriété de réciprocity du trièdre (T) relatif à la flexion de dilatation seconde ne s'applique donc plus en général au trièdre formé par les plans caractéristiques et le plan normal à une fibre, même lorsque les plans caractéristiques sont rectangulaires. Il existe cependant certains trièdres trirectangles réciproques dont les faces sont les plans caractéristiques des arêtes. Ce sont ceux qui sont à la fois conjugués par rapport à la dilatation seconde et inscrits dans le cône asymptote de l'indicatrice des torsions.

36. *Points focaux de la congruence des axes de flexion.* — Les axes de flexion relatifs à l'ensemble des fibres élémentaires issues d'un même point M forment une congruence. La détermination des points focaux de cette congruence se rattache au problème des plans caractéristiques.

A une fibre donnée  $MM'$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , nous cherchons à associer une fibre infiniment voisine  $MM''$ ,  $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$ , telle que les axes de flexion correspondants se rencontrent.

Si nous prenons le point M comme origine, nous aurons à exprimer que les quatre équations suivantes sont compatibles :

$$\begin{aligned} H_1 x + H_2 y + H_3 z + 1 &= 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0, \\ x dH_1 + y dH_2 + z dH_3 &= 0, \\ x d\alpha + y d\beta + z d\gamma &= 0. \end{aligned}$$

D'où nous déduirons, par l'élimination des inconnues  $x, y, z$ ,

$$(60) \quad \begin{vmatrix} dH_1 & \alpha & d\alpha \\ dH_2 & \beta & d\beta \\ dH_3 & \gamma & d\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Soient  $\alpha$ ,  $b$ ,  $c$  les cosinus directeurs de la normale au plan  $MM'M''$ , déterminé par les deux fibres infiniment voisines. On a

$$(61) \quad \begin{cases} \alpha x + b\beta + c\gamma = 0, \\ \alpha d\alpha + b d\beta + c d\gamma = 0, \end{cases}$$

d'où résulte aussi, en vertu de l'équation (60),

$$(62) \quad \alpha dH_1 + b dH_2 + c dH_3 = 0.$$

Si l'on pose

$$H_n = \alpha H_1 + b H_2 + c H_3,$$

l'équation (62) devient

$$(63) \quad \frac{\partial H_n}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial H_n}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial H_n}{\partial \gamma} d\gamma.$$

En y joignant la seconde des équations (62) et la relation identique

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0,$$

on peut éliminer  $d\alpha$ ,  $d\beta$ ,  $d\gamma$ , ce qui donne la condition cherchée sous la forme

$$(64) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial H_n}{\partial \alpha} & \alpha & a \\ \frac{\partial H_n}{\partial \beta} & \beta & b \\ \frac{\partial H_n}{\partial \gamma} & \gamma & c \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation exprime que le plan  $MM'M''$  des deux fibres infiniment voisines est un plan caractéristique de la fibre  $MM'$ .

Il reste à déterminer le point focal, c'est-à-dire la limite du point d'intersection de l'axe de flexion de la fibre  $MM'$  avec celui de la fibre infiniment voisine  $MM''$ . Les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  du point focal vérifient les deux équations

$$\begin{aligned} x dH_1 + y dH_2 + z dH_3 &= 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0. \end{aligned}$$

Comparant ces relations avec les équations (61) et (62), on en déduit

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Le point focal se trouve donc sur la normale au plan caractéristique. Il est situé par conséquent à l'intersection de cette normale et de l'axe de flexion, c'est-à-dire au centre de flexion normale de la fibre, regardée comme appartenant au plan caractéristique considéré.

Les deux points focaux situés sur l'axe de flexion correspondent ainsi aux deux plans caractéristiques de la fibre.

37. *Incurvation normale totale des surfaces.* — La flexion normale donne l'incurvation totale des éléments superficiels dont la forme primitive était plane. Mais pour les surfaces courbes, il faut joindre à la flexion normale la transformée de la courbure initiale par la déformation homogène tangente au point considéré. Les formules que nous avons données au Chapitre II pour l'incurvation des fibres nous fourniront également l'incurvation normale totale des surfaces, même dans le cas des déformations finies.

Nous nous servons d'une relation que nous allons d'abord établir.

Soient, en un point M,  $d\sigma$  un élément superficiel infiniment petit,  $ds$  une fibre élémentaire,  $\theta$  l'angle que la fibre  $ds$  forme avec la normale à  $d\sigma$ ;  $d\sigma_1$ ,  $ds_1$ ,  $\theta_1$  les éléments correspondants du milieu déformé;  $\Theta$  la dilatation cubique,  $\eta$  la dilatation superficielle de  $d\sigma$ ,  $\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma} = 1 + \eta\right)$ ,  $\varepsilon$  la dilatation linéaire de la fibre  $ds$ ,  $\left(\frac{ds_1}{ds} = 1 + \varepsilon\right)$ .

On a

$$(65) \quad (1 + \varepsilon)(1 + \eta) \cos \theta_1 = (1 + \Theta) \cos \theta.$$

En effet, le produit  $ds d\sigma \cos \theta$  représente le volume d'un prisme oblique infiniment petit ayant pour base  $d\sigma$  et pour arête latérale  $ds$ . En comparant ce volume avec son correspondant dans le milieu déformé on trouve

$$\frac{ds_1 d\sigma_1 \cos \theta_1}{ds d\sigma \cos \theta} = 1 + \Theta,$$

ce qui établit la formule (65).

Cela posé, soit une surface S dont la normale en M a pour cosinus directeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dans l'état initial et  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  dans l'état déformé. Si nous considérons une fibre quelconque située sur cette surface, les formules (23) du Chapitre III donnent les courbures des lignes de figure de cette fibre avant et après la déformation.



Multiplions ces équations respectivement par  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  et ajoutons-les membre à membre. Nous avons

$$(66) \quad \frac{(1+e)^2(a'\lambda' + b'\mu' + c'\nu')}{\rho'} = \frac{(1+\varepsilon)(a'\lambda_1 + b'\mu_1 + c'\nu_1)}{\rho} + \left( a' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b' \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + c' \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right).$$

Soient :  $\theta$  l'angle que forme, dans l'état initial, la normale principale de la courbe avec la normale de la surface ;

$\theta_1$  l'angle que forme la direction  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$ , transformée de la normale principale, avec la direction  $a', b', c'$  de la surface déformée ;

$\theta'$  l'angle de la normale principale de la courbe déformée avec la même direction  $a', b', c'$ .

Ces quantités vérifient les équations

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= a'\lambda_1 + b'\mu_1 + c'\nu_1, \\ \cos \theta' &= a'\lambda' + b'\mu' + c'\nu', \\ (1+\varepsilon)(1+\eta) \cos \theta_1 &= (1+\Theta) \cos \theta, \end{aligned}$$

$\eta$  et  $\Theta$  ayant les mêmes significations que ci-dessus.

L'équation (66) devient donc

$$(67) \quad (1+e)^2 \frac{\cos \theta'}{\rho'} = \frac{1+\Theta}{1+\eta} \frac{\cos \theta}{\rho} + a' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b' \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + c' \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}.$$

En introduisant les rayons de courbure normale  $R$  et  $R'$  relatifs aux deux états considérés de la surface, on trouve finalement

$$(68) \quad \frac{1}{R'} = \frac{1+\Theta}{1+\eta} \frac{1}{R} \frac{1}{(1+e)^2} + \frac{1}{(1+e)^2} \left( a' \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b' \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + c' \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right).$$

Dans l'équation (68) se trouvent nettement séparées les deux composantes de la courbure normale de la fibre dans la surface déformée. Nous avons étudié précédemment la flexion normale ; examinons maintenant la transformée de la courbure initiale par la déformation homogène tangente en  $M$ .

Posons

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1+\Theta}{1+\eta} \frac{\left( \frac{1}{R} \right)}{(1+e)^2}.$$

La courbure  $\frac{1}{R}$  s'exprime, en général, par une forme quadratique des cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ , de la fibre initiale; il en est de même du dénominateur  $(1 + e)^2$ . Le rapport  $\frac{\frac{1}{R}}{(1 + e)^2}$  se transformerait, en vertu des formules (2), en une fonction homogène de  $\alpha', \beta', \gamma'$  dont la variation serait représentée par une indicatrice de Dupin.

Nous allons chercher les directions initiales des fibres qui viennent, après la déformation, coïncider avec les axes de cette indicatrice.

Soit

$$\frac{1}{R} = f(\alpha, \beta, \gamma); \quad (1 + e)^2 = E(\alpha, \beta, \gamma).$$

Il faut trouver les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma$  qui correspondent au maximum ou au minimum du rapport  $\frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{E(\alpha, \beta, \gamma)}$ , les variables étant liées par la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Les directions considérées sont définies par l'équation homogène

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial E}{\partial \alpha} & a \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} & \frac{\partial E}{\partial \beta} & b \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma} & \frac{\partial E}{\partial \gamma} & c \end{vmatrix} = 0.$$

L'interprétation géométrique de ce résultat donne la proposition suivante :

Soient (C) l'indicatrice des courbures normales de la surface (S) en M, dans l'état initial; (C') l'indicatrice de la surface transformée de (S) par la déformation homogène tangente en M; (C<sub>1</sub>) l'ellipse suivant laquelle le plan tangent en M à la surface (S) coupe l'ellipsoïde des dilatations relatif à ce point; les directions initiales des fibres qui viennent coïncider avec les axes de l'indicatrice (C') sont les diamètres conjugués communs à l'indicatrice initiale (C) et à l'ellipse (C<sub>1</sub>).

Lorsque les deux coniques (C) et (C<sub>1</sub>) ont les mêmes axes, les axes des deux indicatrices (C) et (C') sont aussi dirigées suivant les mêmes fibres.

La démonstration géométrique de ce théorème est une conséquence immédiate des propriétés très connues de la déformation homogène.

38. *Flexion géodésique.* — Nous avons donné au n° 32 l'expression de la rotation figurative  $F_n$  de la flexion géodésique. Appelons  $x_1, y_1, z_1$ , les coordonnées du centre de flexion géodésique.

Nous avons, pour déterminer ces quantités, les trois équations

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 - x) + \beta(y_1 - y) + \gamma(z_1 - z) &= 0, \\ a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z) &= 0, \\ \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} F_n + 1 &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de  $\alpha, \beta, \gamma$  entre ces formules et les deux équations

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c\gamma &= 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \end{aligned}$$

donne le lieu des centres de flexion géodésique des fibres élémentaires de même origine M et situées dans le même plan.

Si l'on prend en particulier le point M pour origine des coordonnées et le plan considéré pour plan des  $xy$ , on trouve pour l'équation développée de cette courbe dans son plan

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 + y^2) \left[ 1 + \frac{4}{3} (\varphi_1 x + \varphi_2 y + \tau_{23} x - \tau_{13} y) \right] \\ &\quad - d_{112} y^3 - d_{122} x^3 + (2 d_{122} - d_{111}) xy^2 + (2 d_{112} - d_{222}) x^2 y. \end{aligned}$$

Le lieu des centres de flexion géodésique est donc une cubique ayant à l'origine des coordonnées un point isolé à tangentes isotropes.

Quand on considère seulement la flexion géodésique par rotation, résultante de la flexion de torsion et de la flexion cyclique, le résultat se simplifie : tous les centres de flexion géodésique sont alors en ligne droite. La distribution des flexions géodésiques par rotation dans un plan, autour d'un de ses points, est donc analogue à celle des flexions cycliques dans l'espace.

39. *Plans pour lesquels la flexion géodésique par rotation est nulle.* —

Il existe en tout point M des plans pour lesquels la flexion géodésique par rotation est nulle. En effet, dans l'expression de la rotation figurative  $F_n$  de la flexion géodésique, les termes provenant de la rotation dérivée représentent les  $\frac{4}{3}$  de la projection de cette rotation dérivée sur la normale à la surface. Pour déterminer les plans cherchés, il suffira donc d'écrire que la projection normale de la rotation dérivée est nulle. On trouve ainsi l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & a \left( \alpha \frac{\partial p_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_1}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_1}{\partial z} \right) \\ & + b \left( \alpha \frac{\partial p_2}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_2}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) + c \left( \alpha \frac{\partial p_3}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_3}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_3}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned}$$

qui doit être vérifiée pour toutes les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma$  vérifiant la condition

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Nous en déduisons

$$\frac{a \frac{\partial p_1}{\partial x} + b \frac{\partial p_2}{\partial x} + \gamma \frac{\partial p_3}{\partial x}}{a} = \frac{a \frac{\partial p_1}{\partial y} + b \frac{\partial p_2}{\partial y} + c \frac{\partial p_3}{\partial y}}{b} = \frac{a \frac{\partial p_1}{\partial z} + b \frac{\partial p_2}{\partial z} + c \frac{\partial p_3}{\partial z}}{c}.$$

Désignons par  $r$  la valeur commune de ces rapports; nous avons alors, pour déterminer les rapports des cosinus directeurs  $a, b, c$  de la normale au plan, les trois équations

$$(69) \quad \begin{cases} a \frac{\partial p_1}{\partial x} + b \frac{\partial p_2}{\partial x} + c \frac{\partial p_3}{\partial x} - ra = 0, \\ a \frac{\partial p_1}{\partial y} + b \frac{\partial p_2}{\partial y} + c \frac{\partial p_3}{\partial y} - rb = 0, \\ a \frac{\partial p_1}{\partial z} + b \frac{\partial p_2}{\partial z} + c \frac{\partial p_3}{\partial z} - rc = 0. \end{cases}$$

L'élimination des cosinus donne l'équation caractéristique du troisième degré en  $r$

$$(70) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x} - r & \frac{\partial p_2}{\partial x} & \frac{\partial p_3}{\partial x} \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} & \frac{\partial p_2}{\partial y} - r & \frac{\partial p_3}{\partial y} \\ \frac{\partial p_1}{\partial z} & \frac{\partial p_2}{\partial z} & \frac{\partial p_3}{\partial z} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe donc en général trois directions de plans, réelles ou imaginaires, satisfaisant à la condition indiquée. Nous laissons de côté la discussion des cas singuliers : c'est un problème bien connu qui se rencontre dans plusieurs questions de géométrie ou d'analyse. Remarquons cependant la signification mécanique des racines de l'équation caractéristique.

En ajoutant membre à membre les équations (65) après les avoir multipliées respectivement par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , on trouve

$$\tau(a, b, c) = r.$$

40. *Lignes d'inflexion relatives à la flexion par rotation.* — Les trois plans ainsi déterminés forment un trièdre  $T_1$  dont les arêtes sont des lignes d'inflexion relativement à la flexion par rotation. Nous avons montré qu'il existe en général sept lignes d'inflexion. Dans la flexion par rotation, quatre des lignes considérées sont formées par les directions asymptotiques des sections circulaires de l'indicatrice des torsions. Les trois autres sont les arêtes du trièdre  $T_1$ .

Cherchons en effet les fibres pour lesquelles la rotation dérivée a la même direction que la fibre elle-même.

Pour ces fibres la composante de flexion de la rotation dérivée est nulle. Les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$  vérifient des équations de la forme

$$(71) \quad \begin{cases} \alpha \frac{\partial p_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_1}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_1}{\partial z} - r\alpha = 0, \\ \alpha \frac{\partial p_2}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_2}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_2}{\partial z} - r\beta = 0, \\ \alpha \frac{\partial p_3}{\partial x} + \beta \frac{\partial p_3}{\partial y} + \gamma \frac{\partial p_3}{\partial z} - r\gamma = 0. \end{cases}$$

Le déterminant du système (71) est le même que celui du système (69) : les lignes de l'un sont les colonnes de l'autre.

Considérons deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  de l'équation caractéristique; soient  $a_1, b_1, c_1$  les cosinus qui correspondent à la première racine  $r_1$  par les équations (65);  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  ceux qui correspondent à la racine  $r_2$  par le système (67).

Ces deux systèmes de cosinus vérifient la condition d'orthogonalité

$$a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 = 0.$$

Il en résulte que les deux systèmes (65) et (67) définissent, l'un les faces, et l'autre les arêtes du même trièdre  $T_1$ .

Les équations (67) nous donnent une valeur nouvelle des racines de l'équation caractéristique : on en déduit

$$\tau(\alpha, \beta, \gamma) = r.$$

Si l'on considère par conséquent les deux directions  $(a, b, c)$  et  $(\alpha, \beta, \gamma)$  qui correspondent à une même racine de l'équation caractéristique, on a

$$\tau(a, b, c) = \tau(\alpha, \beta, \gamma).$$

*Chaque arête du trièdre  $T_1$  a la même torsion que la fibre normale à la face opposée.*

Il est à peine utile de signaler l'analogie qui existe entre le trièdre  $T_1$  et le trièdre de J. Bertrand relatif aux déformations du premier ordre. Le trièdre  $(T_1)$  se détermine à l'aide des composantes de la rotation comme le trièdre de Bertrand à l'aide des composantes  $u, v, w$  du déplacement. La torsion est pour l'un ce qu'est la dilatation pour l'autre.

41. *Application des théories précédentes à un problème de M. Darboux et de M. Weingarten. — Rappel d'une proposition de Weingarten.* — A propos de la théorie des systèmes triples orthogonaux, M. Darboux<sup>(1)</sup> s'est occupé de déterminer les déformations dépourvues de rotation et pour lesquelles les plans principaux de la dilatation sont tangents à trois familles de surfaces.

L'étude du même problème pour les déformations quelconques fournit une application intéressante de la théorie de la flexion.

L'interprétation géométrique et mécanique de nos formules n'a été complètement étudiée que pour les déformations infinitésimales, tandis que la théorie de M. Darboux s'applique à des déformations finies. Mais les résultats analytiques qui s'expriment par des équations homogènes par rapport aux déplacements et à leurs dérivées peuvent toujours être interprétés dans la théorie des déformations infiniment petites. En effet ces équations ne changent pas quand on y remplace

---

<sup>(1)</sup> DARBOUT, *Proceedings of the London math. Soc.*, t. XXXII; *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, 2<sup>e</sup> édit., 1910.

les déplacements  $u, v, w$ , par des déplacements proportionnels  $\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon w$ .

Nous prendrons pour base de nos calculs les résultats obtenus par M. Weingarten <sup>(1)</sup> à propos des surfaces isostatiques.

On sait que Lamé avait admis que les directions des efforts principaux dans un milieu continu sont toujours normales à certaines familles de surfaces auxquelles il avait donné le nom de *surfaces isostatiques*. M. Boussinesq <sup>(2)</sup> remarqua que cette proposition est en général inexacte, et M. Weingarten établit les conditions d'existence des surfaces isostatiques.

Les résultats de M. Weingarten peuvent se résumer de la manière suivante :

Soit

$$f = \Sigma a_{hk} dx_h dx_k, \\ (a_{hk} = a_{kh}) \quad (h = k = 1, 2, 3)$$

une forme quadrilatère des différentielles  $dx_1, dx_2, dx_3$ .

De la forme  $f$ , on en déduit une autre

$$\varphi = \Sigma \alpha_{hk} dx_h dx_k,$$

en posant

$$\alpha_{1i} = \frac{\partial a_{2i}}{\partial x_3} - \frac{\partial a_{3i}}{\partial x_2}, \\ \alpha_{2i} = \frac{\partial a_{3i}}{\partial x_1} - \frac{\partial b_{1i}}{\partial x_3}, \\ \alpha_{3i} = \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{2i}}{\partial x_1}.$$

Un calcul analogue appliqué à la forme  $F$ , adjointe de  $f$ ,

$$F = \Sigma b_{hk} dx_h dx_k,$$

donne la forme

$$\Phi = \Sigma \beta_{hk} dx_h dx_k.$$

<sup>(1)</sup> WEINGARTEN, *Journal de Crelle*, t. 90, 1881, p. 18-33. Voir sur le même sujet E. et F. COSSERAT, *Mém. sur l'élasticité (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse)*, t. XI, p. 52).

<sup>(2)</sup> BOUSSINESQ, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, p. 242.

On forme ensuite les trois invariants

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum \alpha_{hk} \alpha_{hk}, \\ J_2 &= \sum \alpha_{hk} \beta_{hk} = \sum b_{hk} \alpha_{hk}, \\ J_3 &= \sum b_{hk} \beta_{hk}. \end{aligned}$$

Pour que les plans principaux relatifs à la forme  $f$  enveloppent une famille de surfaces orthogonales, il est nécessaire et suffisant que les trois invariants  $J_1, J_2, J_3$  soient nuls.

*Interprétation de ce résultat dans la théorie des flexions.* — Supposons que la forme  $f$ , quand on y remplace les différentielles par des cosinus, représente la *dilatation* dans une déformation infinitésimale :

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = e_1 \alpha^2 + e_2 \beta^2 + e_3 \gamma^2 + g_1 \beta \gamma + g_2 \gamma \alpha + g_3 \alpha \beta.$$

La forme associée  $\varphi$  représente alors la *torsion* correspondante  $\tau(\alpha, \beta, \gamma)$ . Nous laissons de côté la signification géométrique de la forme adjointe  $F$  et de la forme associée  $\Phi$ , dont la considération s'imposerait surtout dans l'étude des déformations finies.

Pour obtenir facilement l'interprétation mécanique des conditions de Weingarten nous supposons qu'après avoir calculé les invariants  $J$ , on prenne comme axes de coordonnées les arêtes du trièdre principal (T) des dilatations au point M.

Les deux premières équations deviennent

$$\begin{aligned} e_1 \tau_{11} + e_2 \tau_{22} + e_3 \tau_{33} &= 0, \\ e_2 e_3 \tau_{11} + e_3 e_1 \tau_{22} + e_1 e_2 \tau_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on y joint l'identité

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0,$$

on en tire

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = 0.$$

En tenant compte de ce résultat, la troisième condition se réduit à

$$(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) d_{123} = 0.$$

Les trois dilatations principales étant supposées distinctes, on a donc

$$d_{123} = 0.$$



Cette équation exprime que le trièdre principal (T) est conjugué par rapport à la dilatation seconde.

Donc :

Pour que les faces du trièdre principal (T) de la dilatation dans une déformation infinitésimale enveloppent trois familles de surfaces orthogonales, il est nécessaire et suffisant que ce trièdre soit conjugué par rapport à la dilatation seconde et inscrit dans le cône asymptote de l'indicatrice des torsions.

Or, si nous nous reportons aux propriétés que nous avons établies à propos de la flexion normale, nous pouvons traduire la condition précédente en disant que dans chacune des faces du trièdre (T) l'indicatrice des flexions normales a ses axes dirigés suivant les arêtes du trièdre.

*Relation avec le théorème de Dupin.* — Sous cette forme de l'énoncé, il s'établit un rapprochement intéressant entre la condition obtenue et le théorème de Dupin.

En effet soit S le système triple orthogonal tangent aux faces du trièdre T. La déformation le transforme en un autre système triple orthogonal S'. Par conséquent les arêtes du trièdre principal T sont, avant et après la déformation, dirigées suivant les tangentes aux lignes de courbure des surfaces considérées. Or l'incurvation des surfaces se compose ici de l'incurvation par la déformation homogène tangente en M et de la flexion normale.

La première conserve les directions des courbures normales principales pour toutes les surfaces du système S.

Il est donc nécessaire que la flexion conserve les mêmes directions principales, c'est-à-dire que les axes des indicatrices des flexions normales dans les faces du trièdre (T) soient dirigés suivant les arêtes du trièdre.

La nécessité des conditions de Weingarten est donc une conséquence du théorème de Dupin.

*Formes nouvelles des conditions de Weingarten.* — La forme analytique des trois conditions de Weingarten peut être modifiée en tenant compte des résultats précédents.

Soient  $(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'')$  les trois systèmes de cosinus directeurs des arêtes du trièdre T. On a

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau(a, b, c) = \tau(a', b', c') = \tau(a'', b'', c'') = 0, \\ D_2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

Les trois premières conditions se réduisent à deux, en vertu de la relation qui existe entre les torsions.

Dans le cas de M. Darboux les torsions sont nulles identiquement, et il n'y a plus à considérer qu'une condition unique

$$(69) \quad D_2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0.$$

D'ailleurs les déplacements étant les dérivées partielles d'une même fonction,  $\varphi(x, y, z)$ , la dilatation seconde  $D_2(\alpha, \beta, \gamma)$  se déduit de la différentielle troisième de cette fonction en y remplaçant les différentielles  $dx, dy, dz$  par les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ .

L'équation (69) peut alors se mettre sous la forme symbolique

$$(70) \quad \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left( a' \frac{\partial}{\partial x} + b' \frac{\partial}{\partial y} + c' \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( a'' \frac{\partial}{\partial x} + b'' \frac{\partial}{\partial y} + c'' \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi(x, y, z) = 0$$

dans laquelle les dérivées sont prises en regardant les cosinus comme des constantes.

M. Darboux <sup>(1)</sup> a lui-même obtenu par une autre méthode, et sous une forme équivalente à (70), l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction  $\varphi(x, y, z)$ .

---

<sup>(1)</sup> *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, 2<sup>e</sup> édition, 1910. p. 530-543.