

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. CHATELET

**Sur certains ensembles de tableaux et leur application  
à la théorie des nombres**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 28 (1911), p. 105-202

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1911\\_3\\_28\\_\\_105\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__105_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR  
CERTAINS ENSEMBLES DE TABLEAUX

ET LEUR APPLICATION

A LA THÉORIE DES NOMBRES,

PAR M. A. CHATELET,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure.



INTRODUCTION.

Quoique les méthodes de la théorie des nombres paraissent encore bien vagues et imprécises, on peut néanmoins signaler dans cette partie de la Science l'existence d'un petit nombre d'idées générales qui semblent extrêmement fécondes, tant par leurs applications actuellement connues que par celles qu'on pourrait probablement encore en déduire. Il en est notamment ainsi pour ce qui concerne l'étude arithmétique des irrationnelles.

On sait tout le parti qu'on a pu tirer de l'élégante démonstration de Lejeune-Dirichlet pour l'approximation des incommensurables par des fractions. Elle s'étend sans difficultés à l'approximation simultanée de plusieurs irrationnelles réelles ou même imaginaires. Sous cette dernière forme, elle a servi de point de départ à son auteur pour l'édification de la théorie des formes quadratiques à coefficients complexes (*Werke*, t. I, p. 535-618; *Journ. de Crelle*, Band 24). Il semble bien encore que la même démonstration est l'origine du célèbre théorème arithmétique de Minkowski qui est le pivot de la *Geometrie der Zahlen*.

Pour l'approximation des incommensurables et la réduction des formes binaires indéfinies quadratiques, il existe une autre méthode beaucoup plus ancienne, et supérieure à certains points de vue : le développement en fraction continue. Tandis que le procédé de Dirichlet ne conduit, pour ainsi dire, qu'à des théorèmes d'existence, l'algorithme des fractions continues constitue un procédé de calcul effectif. Malheureusement, il semble beaucoup moins fécond; d'une application très simple aux irrationnelles du deuxième degré, il ne paraît pas s'étendre aux irrationnelles algébriques de degré supérieur.

Enfin, on doit à Hermite une méthode remarquable basée sur l'introduction de paramètres continus dans certaines formes quadratiques définies. Elle est intermédiaire entre les deux méthodes précédentes et en possède les avantages; aussi extensible que le procédé de Dirichlet, elle conduit, comme le développement en fraction continue, à des moyens pratiques de calcul.

1. Dans ce travail, tout en essayant de me servir de raisonnements analogues à celui de Dirichlet, j'ai surtout repris l'idée essentielle d'Hermite, c'est-à-dire l'introduction de *paramètres continus positifs*. Toutefois, au lieu de considérer seulement les formes quadratiques

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i^2,$$

je me suis servi des fonctions homogènes d'ordre  $\omega$

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i |\xi_i|^\omega \quad (\omega \geq 1),$$

et plus spécialement de la fonction

$$f = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^{\frac{1}{\omega}} |\xi_i|^\omega \right)^{\frac{1}{\omega}},$$

dont Minkowski a donné une représentation simple au moyen de parallélépipèdes.

2. Pour rassembler divers résultats qu'on peut en déduire, il m'a semblé commode d'introduire la notation des tableaux ou systèmes linéaires. De tels symboles ont en effet l'avantage de représenter des êtres mathématiques assez divers : système de formes linéaires, forme bilinéaire, forme décomposable, substitution linéaire <sup>(1)</sup>, etc. J'ai adopté les définitions ordinaires des opérations qui correspondent aux opérations sur les substitutions. J'ai repris une définition de l'équivalence, indiquée pour la première fois par Hermite dans son célèbre Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes, et reprise ensuite par M. Jordan, puis par d'autres auteurs, qui en ont étudié également une généralisation. La définition primitive d'Hermite m'a paru convenir, beaucoup mieux que ses généralisations, au but arithmétique poursuivi.

La méthode indiquée précédemment m'a permis alors de donner une définition générale de l'ensemble des tableaux réduits équivalents à un tableau donné, le mot *réduit* ayant la même signification que dans la théorie arithmétique des formes (Chap. I, § 1 et 4).

3. Quoique peut-être intéressante en soi, cette notion des tableaux réduits introduite *a priori* pourrait sembler inutile, si elle ne se rattachait à des sujets connus. J'ai essayé de justifier cette introduction le plus complètement possible dans le cas des tableaux du deuxième ordre et j'ai montré les identités ou les relations que présentent les divers ensembles de tableaux réduits (pour les différentes valeurs de  $\omega$ ) avec l'algorithme des fractions continues, la réduction continue d'Hermite, la chaîne des parallélogrammes extrêmes ou la suite des solutions primitives de Minkowski, etc. (Chap. II).

Dans le cas du troisième ordre, j'ai trouvé moins d'analogies avec des théories connues, et j'ai simplement cherché à montrer l'existence et l'enchaînement des tableaux réduits (Chap. III); j'ai été conduit ainsi à des conditions de réduction déjà signalées par Minkowski (*Annales de l'École Normale*, 1896) et à une sorte de généralisation de la notion de quotient à une unité près, ou de partie entière.

---

<sup>(1)</sup> On peut encore citer, à un autre point de vue, la représentation de nombres hyper-complexes par des tableaux ou des matrices.



Au point de vue général, l'introduction de cette notion m'a paru aussi justifiée par son application relativement simple au cas des nombres algébriques. Les tableaux réduits se déduisent alors d'un nombre fini d'entre eux, ce qui constitue un algorithme périodique (Chap. I, § 5). Cette périodicité est d'ailleurs différente suivant les cas; elle peut se représenter dans le cas du deuxième ordre, et dans le cas du troisième ordre à deux colonnes imaginaires conjuguées par le pavage d'une droite au moyen de segments égaux, dans le cas du troisième ordre réel par le pavage d'un plan au moyen de la translation d'un polygone, et ainsi de suite.

4. Pour les entiers algébriques du deuxième degré, on sait que le théorème de Lagrange — dont la propriété précédente n'est qu'une extension — permet de trouver les solutions de l'équation de Pell-Fermat, les unités d'un ordre algébrique du deuxième degré ou encore les substitutions automorphes d'une forme indéfinie à coefficients entiers. Il en est de même de l'algorithme précédent pour les irrationnelles de degré quelconque. C'est ce que j'ai établi rigoureusement et de façon détaillée pour les ordres des deuxième et troisième degrés (Chap. IV, § 2, 3, 4); la démonstration générale s'en déduit d'ailleurs immédiatement.

Pour mettre mieux en évidence les diverses propriétés et analogies de ces problèmes, j'ai été amené à établir une correspondance entre les entiers d'un ordre algébrique et les tableaux à termes entiers de certains groupes abéliens (Chap. I, § 3; Chap. IV, § 1 et 2). Cette correspondance permet de ramener les calculs sur les nombres algébriques à des calculs bien déterminés sur certains systèmes d'entiers. Sans doute il n'y a pas là un fait nouveau, et, ainsi que l'a fait remarquer M. Poincaré dans la Préface des *Oeuvres de Laguerre*, l'introduction des tableaux dans cette question, comme dans beaucoup d'autres, ne constitue à proprement parler qu'une notation nouvelle. Je me permettrai de faire remarquer cependant que cette notation conduit à des procédés de calcul uniques — tandis qu'il n'en est pas de même des procédés basés plus ou moins sur les fonctions symétriques — et, en général, conduit au minimum de calculs.

5. Enfin, j'ai consacré un paragraphe (Chap. I, § 3) à une exposition sommaire de la théorie des modules de points, dont j'ai fait un usage constant dans la suite. Dedekind s'est servi des modules de nombres pour l'étude des corps algébriques et Minkowski a beaucoup utilisé, sous le nom de *Zahlengitter* (grille de nombres ou réseau de parallélépipèdes), une notion géométrique qui est un cas particulier de ce que j'ai désigné sous le nom de *module type*. Il m'a semblé intéressant de rapprocher ces deux notions, en considérant un module au sens de Dedekind comme la projection sur un axe des points d'un *zahlengitter*.

Je tiens à remercier particulièrement ici M. Picard, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et m'aider de ses conseils, et M. Borel, qui a contribué pour une large part à l'orientation de mes recherches. Qu'il me soit permis surtout d'exprimer toute la reconnaissance que je dois à mon regretté maître, M. Jules Tannery, chez qui j'ai toujours trouvé un accueil si affable et une aide si constante. En dédiant ce travail à sa mémoire, je ne fais qu'acquitter une faible partie de la dette que j'ai contractée envers lui.

## CHAPITRE I.

### OPÉRATIONS SUR LES TABLEAUX.

#### I. — Calcul et équivalence des tableaux.

1. On désigne sous le nom de *tableau*, de *matrice*, ou de *système linéaire* d'ordre  $n$ , un système de  $n^2$  nombres rangés en carré :

$$\begin{array}{cccc} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n, \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n. \end{array}$$

Dans cette étude, j'emploierai de préférence la dénomination

tableau <sup>(1)</sup>, et je représenterai un tel système par une seule lettre A. Je supposerai essentiellement, sauf mention du contraire, que le déterminant formé par les  $n^2$  nombres — que je représenterai par la notation  $\Delta(A)$  — est différent de zéro.

On peut considérer un tel tableau comme représentant un système de  $n$  formes linéaires indépendantes,

$$(1) \quad \xi_i = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \dots + a'_n x_n \quad [i = (1, 2, \dots, n)],$$

ou une substitution linéaire définie par les mêmes formules ou encore une forme bilinéaire à  $2n$  variables,

$$F = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^k x_i u_k.$$

2. On définit <sup>(2)</sup> la somme (somme des éléments) et le produit (lignes par colonnes) de deux tableaux de même ordre. L'addition est associative et commutative, la multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition. Elle n'est pas en général commutative, et il y a lieu de distinguer les produits à droite et à gauche. La substitution linéaire représentée par le produit  $A \times B$  de deux tableaux est le produit des substitutions représentées par A et B. Le système de formes représenté par ce même produit est le résultat de la substitution représentée par A sur le système représenté par B.

Un tableau est appelé *système simple* et représenté par  $[m]$  lorsque tous ses termes sont nuls, à l'exception des termes de la diagonale principale, ceux-ci étant tous égaux à  $m$ . On obtient le produit  $[m] \times A$  ou  $A \times [m]$  ou plus simplement  $mA$  en multipliant par  $m$  tous les termes de A.

Le système simple  $[1]$  joue donc le rôle de l'unité et, pour cette

<sup>(1)</sup> Je réserverai le mot *matrice* pour les tableaux rectangulaires dont on peut déduire des tableaux carrés par suppression de lignes ou de colonnes.

<sup>(2)</sup> Il existe un assez grand nombre d'études systématiques sur le calcul des tableaux (FROBENIUS, LAGUERRE, KRONECKER, etc.). J'ai surtout suivi les notations de LAGUERRE (*Oeuvres*, t. I, p. 221, ou *Journal de l'École Polytechnique*, LXII<sup>e</sup> Cahier).

raison, j'appellerai *tableau inverse* <sup>(1)</sup> de A, et je représenterai par la notation  $A^{-1}$  ou  $(A)^{-1}$  le tableau défini par l'une des égalités équivalentes :

$$A^{-1} \times A = [1] \quad \text{ou} \quad A \times A^{-1} = [1].$$

Son existence résulte de l'hypothèse  $\Delta(A) \neq 0$ .

3. Entre les divers systèmes, opérations et nombres définis, il existe des relations simples qui peuvent se résumer par les formules :

$$\Delta(A \times B) = \Delta(A) \times \Delta(B),$$

$$\Delta([m]) = m^n,$$

$$\Delta(A^{-1}) = \frac{1}{\Delta(A)};$$

$$(A \times B \times \dots \times L)^{-1} \doteq L^{-1} \times \dots \times B^{-1} \times A^{-1},$$

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

$$[m] + [p] = [m + p],$$

$$[m] \times [p] = [mp],$$

$$[m] \times A = A \times [m] = mA,$$

$$([m])^{-1} = \left[ \frac{1}{m} \right],$$

$m$  et  $p$  désignant des nombres quelconques et  $n$  l'ordre commun de tous les tableaux. Ces formules et les propriétés déjà énoncées permettent d'étendre aux tableaux les règles de calcul des nombres ordinaires et des égalités ou équations numériques, en tenant compte toutefois de la non-commutativité du produit.

4. Je ne m'occuperai que des tableaux ayant  $r$  colonnes à termes réels et  $s$  couples de colonnes à termes correspondants imaginaires conjugués ( $r + 2s = n$ ,  $r$  ou  $s$  pouvant être nuls). Dans ces condi-

---

<sup>(1)</sup> Cette dénomination n'a pas été adoptée par Laguerre, qui envisage seulement, sous le nom de *tableau réciproque*, le tableau formé avec les mineurs d'un tableau donné.

tions, la forme du  $n^{\text{ième}}$  ordre décomposable (<sup>1</sup>)

$$(2) \quad \Phi = \prod_{i=1}^{i=n} (a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n)$$

a tous ses coefficients réels. Il en est de même de la fonction homogène d'ordre  $\omega$  renfermant  $r + s$  paramètres arbitraires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ , tous positifs

$$(3) \quad F = \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i^\omega [a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n]^\omega + \sum_{j=1}^{j=s} \mu_j^\omega [a_1^j x_1 + \dots + a_n^j x_n]^\omega,$$

où la première somme est étendue aux colonnes à termes réels et la deuxième aux couples de colonnes à termes imaginaires conjugués. En plus, cette fonction est *définie positive* et devient une forme si  $\omega$  est un nombre entier pair. Elle a été introduite (pour la valeur  $\omega = 2$ ) par Hermite qui en a donné des applications célèbres (<sup>2</sup>).

Comme j'aurai souvent à utiliser le système (1), la forme (2) et la fonction (3), je les désignerai pour abrégé par *système*, *forme* et *fonction d'Hermite associés* au tableau. De même que pour le système, la forme ou la fonction d'Hermite associées à  $A \times B$  sont les résultats de la substitution représentée par  $A$  effectuée sur la forme ou la fonction associées à  $B$ .

5. Un tableau dont tous les termes sont des entiers réels et dont le déterminant est égal à  $\pm 1$  est dit *unimodulaire* (<sup>3</sup>); il est dit *modulaire* si le déterminant est égal à  $+1$ . Le produit de deux tableaux

(<sup>1</sup>) HERMITE a particulièrement étudié les formes décomposables (*Journal de Crelle*, t. 47, 1854; t. 57, 1857) en se servant précisément de la fonction (3) à paramètres arbitraires. L'étude en a été reprise par M. FERTWÄGLER (*Diss. Göttingue*, 1896) et STOUFF (*Ann. Toulouse*, 1903).

(<sup>2</sup>) Voir les *Lettres à Jacobi* (*Journal de Crelle*, t. 40) et *Sur l'introduction de variables continues dans la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. 41, ou *Oeuvres*, t. I). MINKOWSKI a étudié depuis la même fonction pour des valeurs diverses de  $\omega$  (*Geometrie der Zahlen* ou *Annales de l'École Normale*, 1896).

(<sup>3</sup>) J'ai eu le pouvoir attribuer sans inconvénient aux tableaux ce qualificatif des substitutions.

unimodulaires, l'inverse d'un tableau unimodulaire, sont encore unimodulaires.

Deux tableaux A et B sont dits *équivalents* si l'un est le produit à gauche de l'autre par un tableau unimodulaire — (proprement équivalents, si le tableau est modulaire)

$$A = \Sigma \times B, \quad \Delta(\Sigma) = \pm 1.$$

La propriété est réciproque; le système de formes, la forme et la fonction d'Hermite associés à A et B sont équivalents au sens ordinaire du mot. Cette notion de l'équivalence, transportée ainsi de la théorie des formes, a été introduite pour la première fois par Hermite dans son célèbre Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes <sup>(1)</sup>. Elle a été reprise par M. Jordan qui a étudié aussi le produit simultané à droite et à gauche d'un tableau par des tableaux modulaires <sup>(2)</sup>.

6. Appelons, toujours conformément à la théorie des formes, *système* (et *classe*) de tableaux, l'ensemble des tableaux équivalents (et proprement équivalents) à un tableau donné. Deux tableaux quelconques d'un système sont équivalents entre eux.

Pour chercher si deux tableaux sont équivalents ou proprement équivalents, il y a lieu de distinguer, dans un système ou une classe, des tableaux *réduits* analogues aux formes ou aux suites de formes réduites imaginées par Gauss et Hermite.

7. Je reviendrai ultérieurement sur les conditions que doivent vérifier de tels tableaux réduits. Pour le cas de tableaux à termes entiers, le problème est résolu par la proposition bien connue énoncée par Hermite <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, t. XL, 1855. HERMITE a défini, à proprement parler, l'équivalence à droite, mais elle correspond à une équivalence à gauche pour les tableaux  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$ .

<sup>(2)</sup> *Journal de l'École Polytechnique*, 48<sup>e</sup> Cahier, 1880; 51<sup>e</sup> Cahier, 1882. Pour d'autres définitions plus générales de la notion d'équivalence, cf. FROBENIUS, *Journal de Crelle*, t. 84, 1878; KRONECKER, *Vorl. über Determinantentheorie*, p. 83-366.

<sup>(3)</sup> *Journal de Crelle*, t. 41, p. 192. Ce théorème a donné lieu à un grand nombre d'applications. Cf. notamment STIELTJES, *Annales de Toulouse*, 1890. — SMITH, *Proceedings of the London Math. Soc.*, 1873. — MINKOWSKI, *Geom. der Zahl.*, p. 172; *Dioph. App.*, p. 67 et 90. — HURWITZ, *Gott. Nach.*, 1897; etc.

THÉOREME. — *Un tableau à termes entiers est équivalent à un tableau et un seul de la forme (4)*

$$(4) \quad \begin{cases} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0, \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \dots & 0, \\ \dots & \dots & . & \dots & ., \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n; \end{cases}$$

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} 0 \leq a_2^1 < a_1^1 & 0 \leq a_3^1 < a_1^1 & \dots & 0 \leq a_n^1 < a_1^1, \\ & 0 \leq a_3^2 < a_2^2 & \dots & 0 \leq a_n^2 < a_2^2, \\ & & \dots & \dots, \\ & & & 0 \leq a_{n-1}^{n-1} < a_{n-1}^{n-1}, \\ & & & 0 < a_n^n, \end{cases}$$

dont les termes sont entiers et vérifient les conditions (4 bis).

Tout tableau de la forme (4) vérifiant les conditions (4 bis) peut donc être considéré comme un tableau réduit<sup>(1)</sup>, puisqu'il en existe un et un seul dans tout système de tableaux à termes entiers. On peut évidemment trouver d'autres conditions de réduction; on peut notamment considérer, au lieu des inégalités (4 bis), des inégalités de la forme

$$|a'_{i+h}| \leq \frac{1}{2} a'_i,$$

ou encore faire dans (4) un changement convenable de lignes et colonnes, et en particulier remplacer la forme (4) et les conditions (4 bis) par

$$(5) \quad \begin{cases} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n, \\ 0 & a_2^2 & \dots & a_2^n, \\ . & \dots & \dots & \dots, \\ 0 & 0 & \dots & a_n^n; \end{cases}$$

$$(5 \text{ bis}) \quad \begin{cases} 0 \leq a_{n-1}^n < a_n^n & \dots & \dots & 0 \leq a_1^n < a_n^n, \\ & 0 \leq a_{n-2}^{n-1} < a_{n-1}^{n-1} & \dots & 0 \leq a_1^{n-1} < a_{n-1}^{n-1}, \\ & & \dots & \dots, \\ & & & 0 \leq a_1^2 < a_2^2, \\ & & & 0 < a_1^1. \end{cases}$$

---

(<sup>1</sup>) Je montrerai ultérieurement qu'il y a lieu d'assujettir les tableaux réduits à une condition supplémentaire qui est précisément vérifiée pour des tableaux de la forme (4).

On peut utiliser les mêmes conditions de réduction pour les tableaux à termes rationnels. Il suffit d'appliquer le théorème aux tableaux formés par les numérateurs après réduction au même dénominateur des termes des tableaux du système.

## II. — Théorie des modules.

8. Avant de continuer l'étude arithmétique des tableaux, je vais indiquer sommairement ses relations avec la théorie des modules. La notion de *module* de *nombres* a été introduite par Dedekind <sup>(1)</sup> en vue de la théorie des entiers des corps algébriques et des idéaux. Elle a fait depuis l'objet d'un certain nombre de travaux <sup>(2)</sup> et H. Minkowski a beaucoup utilisé sous le nom de *grille de nombres* (*Zahlengitter*) une représentation géométrique de systèmes de modules finis. Cette notion peut s'étendre à des domaines plus généraux <sup>(3)</sup> que celui des nombres réels ou imaginaires, mais je m'occuperai seulement ici des modules de nombres ou plutôt de points <sup>(4)</sup>.

9. Étant donné un tableau A d'ordre  $n$  [ $\Delta(A) \neq 0$ ], dont les termes sont  $a_i^j$  et un point d'un espace à  $n$  dimensions <sup>(5)</sup>  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , les  $n$  équations

$$p_i = x_1 a_1^i + x_2 a_2^i + \dots + x_n a_n^i \quad [i = (1, 2, \dots, n)]$$

<sup>(1)</sup> *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. X et XI, ou dans LEJEUNE-DIRICHLET, *Zahlentheorie*, 4<sup>e</sup> édition, suppl. XI.

<sup>(2)</sup> Cf. notamment STEINITZ, *Math. Ann.*, t. LII, 1899. — FROBENIUS, *Journal de Crelle*, t. 78-79.

<sup>(3)</sup> Voir, par exemple, J.-W. KÖNIG, *Theorie der Alg. Grössen*, Leipzig, 1903. — KRONECKER, *Verke*, t. I-II. — MOLK, *Thèse* de la Faculté de Paris, 1883.

<sup>(4)</sup> L'exposé qui suit est en grande partie nouveau, ainsi que plusieurs énoncés qui généralisent des propriétés établies indépendamment par divers auteurs (Minkowski, Hurwitz, Dedekind, etc.) dans des questions assez différentes (bases des corps et des idéaux, minimum d'un système de formes, unités, etc.).

<sup>(5)</sup> Je désignerai en général par  $n$  le nombre de dimensions de l'espace. Il est à remarquer que dans cette géométrie l'origine ou point nul et les axes jouent un rôle essentiel. L'introduction de coordonnées relatives est un changement d'axes qui n'altère pas l'origine.



ont un et un seul système de solutions qui seront dites les *coordonnées relatives* du point par rapport à A. D'autre part, on appellera *somme* ou *différence* de deux points  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  le point  $(p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n)$  ou  $(p_1 - q_1, \dots, p_n - q_n)$ . Les nombres  $p_i$  peuvent d'ailleurs désigner indifféremment les coordonnées absolues ou relatives.

Ceci posé, on appelle *module de points* un ensemble de points tels que la somme ou la différence de deux d'entre eux appartienne encore à l'ensemble. On peut transporter aux modules la notion d'*isomorphisme mériédrique* et *holoédrique* de la théorie des groupes, la correspondance étant invariante pour l'addition et la soustraction.

10. On aura évidemment à rechercher si les points du module n'appartiennent pas à un espace de dimension inférieure à  $n$ ; on est ainsi amené à appeler *dimension du module* le nombre  $n - k$ , tel qu'il existe  $k$  et pas plus de  $k$  mêmes relations linéaires, homogènes et indépendantes entre les coordonnées de chacun de ses points :

$$\lambda_i^1 p_1 + \lambda_i^2 p_2 + \dots + \lambda_i^n p_n = 0 \quad [i = (1, 2, \dots, k)]$$

(un des déterminants d'ordre  $k$  de la matrice des  $\lambda$  non nul).

On peut faire correspondre aux points d'un module de dimension  $n - k$  des points d'un espace de dimension  $n - k$  et formant un nouveau module, ce qu'on peut énoncer de façon précise : un *module*  $\mathfrak{M}$  de dimension  $n - k$  est isomorphe holoédriquement d'un module  $\mathfrak{N}$  de même dimension, mais dans un espace également de dimension  $n - k$ . Il suffit par exemple de prendre pour  $\mathfrak{N}$  l'ensemble des points  $(p_1, p_2, \dots, p_{n-k})$ , le déterminant correspondant des  $\lambda$  étant supposé non nul <sup>(1)</sup>.

Si un module  $\mathfrak{M}$  est de dimension  $n$ , on pourra toujours trouver, d'une infinité de façons,  $n$  points du module  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , ...,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  tels que le tableau A, qu'on peut

---

<sup>(1)</sup> Comme exemple de tels modules on peut citer les points ayant pour coordonnées les logarithmes des valeurs absolues des conjugués des unités d'un corps algébrique. C'est un module de dimension  $r + s - 1$  dans un espace de dimension  $r + s$ .

appeler tableau du module

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ait un déterminant non nul. Ce tableau est particulièrement intéressant, car tout point ayant des entiers comme coordonnées relatives par rapport à  $A$  appartient à  $\mathfrak{N}$ . Cette même remarque montre qu'on ne peut pas construire les points de  $\mathfrak{N}$  par addition et soustraction à partir de moins de  $n$  d'entre eux.

11. Tous les points dont les coordonnées relatives par rapport à un tableau  $A$  (qui peut être égal à  $[1]$ ) sont des nombres entiers, constituent un module de dimension  $n$  et  $A$  est un tableau de ce module. Un tel module sera dit, suivant une locution de Dedekind, d'*ordre*  $n$ , ou encore *module type*. On peut le rattacher à la définition générale par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un module de dimension  $n$  soit d'ordre  $n$  est que les inégalités*

$$(6) \quad |p_1| \leq \varepsilon, \quad |p_2| \leq \varepsilon, \quad \dots, \quad |p_n| \leq \varepsilon,$$

*où  $\varepsilon$  est un nombre positif quelconque, soient vérifiées seulement par un nombre fini de points du module.*

Pour démontrer cette propriété, on peut d'abord remarquer que toute limitation supérieure, en valeur absolue, des coordonnées d'un point entraîne une limitation de ses coordonnées relatives et réciproquement; ceci prouve que les conditions sont nécessaires. En les supposant remplies, et en appelant  $A$  un tableau quelconque du module  $\mathfrak{N}$ , on construira un tableau  $B$  de  $\mathfrak{N}$  avec  $n$  points ayant pour coordonnées relatives par rapport à  $A$  :

$$(u_1, 0, 0, \dots), \quad (v_1, v_2, 0, \dots), \quad \dots, \quad (s_1, s_2, \dots, s_n),$$

avec les conditions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \leq v_1 < u_1 & 0 \leq w_1 < u_1 & \dots & 0 \leq s_1 < u_1, \\ & 0 \leq w_2 < v_2 & \dots & 0 \leq s_2 < v_2, \\ & & \dots & \dots \dots \dots, \\ & & & 0 < s_n, \end{array}$$

et  $u_1, v_2, \dots, s_n$  étant les plus petits possibles. On vérifie qu'on peut faire un tel choix et qu'il en résulte que tous les points de  $\mathfrak{M}$  ont pour coordonnées relatives par rapport à B des nombres entiers <sup>(1)</sup>.

12. Le tableau B dont on a ainsi montré l'existence est dit une *base de module*; comme A est arbitraire, on peut toujours prendre pour première ligne de B les coordonnées  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  d'un point de  $\mathfrak{M}$ , pourvu qu'aucun des points  $(\frac{\alpha_1}{\lambda}, \frac{\alpha_2}{\lambda}, \dots, \frac{\alpha_n}{\lambda})$ ,  $\lambda$  étant un entier, n'appartienne à  $\mathfrak{M}$ .

D'après cette dernière remarque, il y a une infinité de bases à un module type. Elles se déduisent d'une seule en vertu de la propriété :

THÉORÈME. — *L'ensemble de toutes les bases d'un module type constitue un système de tableaux équivalents entre eux.*

Entre une base B et un tableau du module A, on a en effet une relation de la forme  $A = \Sigma \times B$ ,  $\Sigma$  étant à termes entiers, et les propriétés des équations linéaires donnent immédiatement  $\Delta(\Sigma) = \pm 1$  comme condition nécessaire et suffisante pour que A soit une base.

13. On peut maintenant chercher à comparer les modules aux modules types. Un module  $\mathfrak{M}$  de dimension  $n$  sera dit *fini* ou *infini* suivant que l'on pourra trouver ou non un module type  $\mathfrak{M}'$  d'ordre  $n'$  à qui  $\mathfrak{M}$  soit isomorphe. Dans le premier cas, comme on peut évidemment construire  $\mathfrak{M}$  à partir de  $n'$  points, d'après une remarque précédente (n° 10), on devra avoir  $n' \geq n$ .

---

<sup>(1)</sup> Pour les détails de cette démonstration, voir par exemple des démonstrations analogues : HURWITZ, *Gott. Nach.*, 1897; MINKOWSKI, *Dioph. App.*, Chap. III, § 14 et 15.

On peut étendre à tout module fini la construction et la notion d'ordre des modules types en montrant l'existence d'un module type isomorphe holoédriquement à  $\mathfrak{A}$ . Si l'isomorphisme  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$  n'est pas déjà holoédrique, au point nul de  $\mathfrak{A}$  correspondent des points de  $\mathfrak{A}'$  formant un nouveau module de dimension  $k$ , isomorphe holoédriquement à un module type  $\mathfrak{A}'$  d'ordre  $k$  (n° 10). En prenant une base de  $\mathfrak{A}'$  dont l'un des mineurs d'ordre  $k$  soit une base de  $\mathfrak{A}'$ , le mineur complémentaire sera une base d'un module type  $\mathfrak{A}$  d'ordre  $n' - k = m$ , isomorphe holoédriquement à  $\mathfrak{A}$  ( $m \geq n$ ).

Le module ainsi trouvé est unique, à un isomorphisme holoédrique près. Son ordre sera dit l'ordre de  $\mathfrak{A}$ , et à ses points de base correspondront  $m$  points de  $\mathfrak{A}$  ( $a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i$ ) tels que tout point de  $\mathfrak{A}$  aura des coordonnées de la forme

$$x_1 a_j^1 + x_2 a_j^2 + \dots + x_m a_j^m \quad [j = (1, 2, \dots, n)]$$

( $x_1, x_2, \dots, x_m$  étant des entiers quelconques).

Enfin et, pour ainsi dire, réciproquement, à tout module type  $\mathfrak{A}$  d'ordre  $m$  formé par les points  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ , on peut faire correspondre le module  $\mathfrak{A}$  de dimension  $n$  ( $n < m$ ) formé par les points  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . L'isomorphisme est holoédrique si entre les  $m$  premières coordonnées des points de base de  $\mathfrak{A}$  il n'existe *aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers*. Pour  $n = 1$  le module  $\mathfrak{A}$  est un *module de nombres*.

14. Je vais, en terminant, exposer quelques principes de la divisibilité des modules types; les propriétés du numéro précédent en permettent l'extension aux modules finis. Un module  $\mathfrak{A}$  dont tous les points appartiennent à un module  $\mathfrak{A}$  est dit un *sous-module*, ou suivant Dedekind un *multiple* de  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}$  étant lui-même un *diviseur* de  $\mathfrak{A}$ .

La dimension de  $\mathfrak{A}$  est inférieure ou égale à celle de  $\mathfrak{A}$  et l'application du théorème du n° 11 montre que si  $\mathfrak{A}$  est un module type,  $\mathfrak{A}$  en est un aussi. En outre, s'ils sont tous deux de même dimension et par suite de même ordre, toute base  $M$  de  $\mathfrak{A}$  se déduit d'une base  $A$  de  $\mathfrak{A}$  par

une égalité de la forme

$$M = S \times A, \quad \Delta(S) \neq 0,$$

$S$  étant un tableau à coefficients entiers.

Considérons encore deux modules types  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  de bases  $A$  et  $B$ . Leurs points communs (qui peuvent se réduire au seul point nul), forment un module  $\mathfrak{K}$ , sous-module commun de  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$ , et tout sous-module commun de  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  est un sous-module de  $\mathfrak{K}$ . De même, tout module, ayant  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  comme sous-modules, admet comme sous-module  $\mathfrak{O}$ , obtenu en combinant par addition et soustraction les points de  $\mathfrak{A}$  et de  $\mathfrak{B}$ . En appliquant le principe précédent, un calcul simple sur les tableaux  $A$  et  $B$  montre que : *Si l'un des tableaux  $\mathfrak{K}$  ou  $\mathfrak{O}$  est d'ordre  $n$ , l'autre l'est aussi et, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait*

$$A = \Sigma \times B, \quad \Delta(\Sigma) \neq 0,$$

$\Sigma$  étant un tableau à termes rationnels.

15. Les raisonnements précédents sont encore valables pour des points à coordonnées réelles ou imaginaires, à condition qu'on puisse trouver un tableau  $A$  du module tel que les coordonnées relatives, par rapport à  $A$ , des points du module soient réelles. C'est ce qui est vérifié notamment dans le cas où chaque point a  $r$  coordonnées réelles et  $s$  couples de coordonnées imaginaires conjuguées. Les bases et les tableaux des divers modules sont alors de la forme indiquée au n° 4. Les inégalités (6) du théorème fondamental se réduisent à  $r + s = n - s$  inégalités distinctes.

### III. — Groupes abéliens de tableaux.

16. En plus des systèmes simples, j'aurai souvent à utiliser des tableaux dont les termes de la diagonale principale seront seuls différents de zéro, mais non nécessairement égaux. Pour abréger, j'appellerai un tel tableau *tableau élémentaire* et je le représenterai en général

par la lettre E, accentuée ou non, soit par la notation  $(^1)[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  ou plus simplement  $[\alpha_i]$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  étant les termes de la diagonale principale. Les opérations entre tableaux élémentaires sont très simples et l'on a les règles évidentes :

$$[\alpha_i] + [\beta_i] = [\alpha_i + \beta_i], \quad [\alpha_i] \times [\beta_i] = [\alpha_i \beta_i],$$

$$\Delta([\alpha_i]) = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \quad [\alpha_i]^{-1} = \left[ \frac{1}{\alpha_i} \right];$$

la multiplication est dans ce cas commutative.

Je n'aurai à considérer que la *multiplication à droite* d'un tableau quelconque A par un tableau élémentaire  $[\alpha_i]$ . Elle a pour effet de multiplier par  $\alpha_i$  les termes de la colonne de rang  $i$ . Le module  $\mathfrak{B}$  ayant pour base  $A \times [\alpha_i]$  se déduit de même du module  $\mathfrak{A}$  de base A en multipliant par  $\alpha_i$  la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de chaque point. Pour cette raison, je dirai que la multiplication à droite d'un tableau A par un tableau E est une *dilatation*, à condition toutefois qu'aux colonnes réelles ou imaginaires conjuguées de A correspondent des nombres réels ou imaginaires conjugués de E.

Dans une dilatation, la forme du  $n^{\text{ème}}$  ordre associée à A est multipliée par  $\Delta(E)$  et, réciproquement, le tableau auquel est associée une forme du  $n^{\text{ème}}$  ordre décomposable en facteurs linéaires n'est défini qu'à une dilatation près de déterminant 1. Les formes du système associé sont multipliées respectivement par  $\alpha_i$  et, dans la fonction d'Hermite, il y a seulement changement des paramètres  $\lambda_i, \mu_j$ . Enfin une même dilatation transforme  $(^2)$  un système de tableaux en un autre système.

17. Dans un tableau T, on peut mettre en évidence un tableau élémentaire en introduisant les éléments doubles de la substitution définie par T. On est ainsi conduit à la proposition précise : *Si l'équation en  $\lambda$  n'a ni racine double ni racine nulle, T peut se mettre sous la forme*

$$(7) \quad T = A \times [\lambda_i] \times A^{-1}.$$

(<sup>1</sup>) KRONECKER (*Vorl. über Det.*, p. 380) emploie une notation analogue.

(<sup>2</sup>) Il en serait d'ailleurs ainsi pour tout produit à droite par un tableau quelconque mais déterminé.

Les nombres  $\lambda_i$  sont les racines de l'équation en  $\lambda$  et, leur ordre étant choisi,  $A$  est défini à une dilatation près et son déterminant n'est pas nul.

En supposant *a priori*  $\Delta(A) \neq 0$ , l'équation (7) est en effet équivalente à l'équation

$$(7 \text{ bis}) \quad T \times A = A \times [\lambda_i].$$

En désignant par  $\alpha_i^j$  et  $\alpha_i^j$  les termes de  $T$  et de  $A$ , celle-ci est elle-même équivalente au système de  $n^2$  équations en  $\alpha$  et  $\lambda$

$$a_i^1 \alpha_1^j + a_i^2 \alpha_2^j + \dots + a_i^n \alpha_n^j = \alpha_i^j \lambda_j \quad [i = (1, 2, \dots, n); j = (1, 2, \dots, n)].$$

Ces équations, groupées par mêmes valeurs de  $j$ , montrent, par élimination des  $\alpha_j$ , que  $\lambda_j$  doit annuler le polynôme en  $\lambda$

$$f(\lambda) = \Delta(T - [\lambda]).$$

Réciproquement, à chaque zéro simple  $\lambda_k$  de  $f$  correspond un et un seul système de valeurs de  $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k$  définies à un facteur près [ $f'(\lambda_k)$  n'est pas nul, et par suite au moins un mineur de  $\Delta(T - [\lambda])$ ]. On détermine ainsi  $A$  à une dilatation près et  $\Delta(A)$  n'est pas nul, car s'il existait  $n$  relations

$$u_1 \alpha_1^k + u_2 \alpha_2^k + \dots + u_n \alpha_n^k = 0 \quad [k = (1, 2, \dots, n); u_n \neq 0],$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  vérifieraient l'équation de degré  $n - 1$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 - \lambda & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}^1 & \alpha_{n-1}^2 & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} - \lambda & \alpha_{n-1}^n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n-1} & u_n \end{vmatrix} = 0,$$

non identiquement nulle, ce qui est absurde.

18. La condition du théorème n'est évidemment pas nécessaire; mais étant donné un tableau mis sous la forme (7), le début du raisonnement montre que les  $\lambda_i$  sont les racines de l'équation en  $\lambda$ . En outre, en précisant la discussion du système d'équations, on trouve aisément que, si  $\lambda_k = \lambda_{k'}$ , leur valeur commune est racine double de

l'équation en  $\lambda$  et le tableau  $A$  n'est plus déterminé qu'à un produit près à droite par un tableau renfermant, outre les termes de la diagonale principale, deux termes, de valeurs quelconques, occupant des positions symétriques par rapport à cette diagonale (ligne et colonne de rang  $k, k'$  et  $k', k$ ). On obtiendrait des résultats analogues pour le cas de  $n \geq 3$  valeurs de  $\lambda$  égales entre elles. Dans le cas particulier où elles sont toutes égales à un même nombre  $p$  on a manifestement

$$T = A \times [p] \times A^{-1} = [p],$$

et réciproquement tout système simple peut être mis sous la forme (7) en prenant pour  $A$  un tableau quelconque.

19. Pour abrégier le langage, je dirai que  $A$ , défini à une dilatation près, est *un opérateur* et que  $[\lambda_i]$  est *le tableau élémentaire* de tout tableau  $T$  mis sous la forme (7). Le calcul de tableaux de même opérateur se ramène au calcul de leurs tableaux élémentaires par suite des égalités immédiates<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} AEA^{-1} + AE'A^{-1} &= A \times (E + E')A^{-1}, \\ (AEA^{-1}) \times (AE'A^{-1}) &= A \times (EE')A^{-1}, \\ (AEA^{-1})^{-1} &= AE^{-1}A^{-1}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'égalité plus générale,  $R$  désignant une fonction rationnelle quelconque,

$$R(AEA^{-1}, AE'A^{-1}, \dots) = A \times R(E, E', \dots) \times A^{-1}.$$

En particulier<sup>(2)</sup>  $f(\lambda)$  étant le premier membre de l'équation en  $\lambda$  de  $T$ , on a l'égalité

$$f(T) = A \times [f(\lambda_i)] \times A^{-1} = 0.$$

Le calcul des tableaux de même opérateur serait susceptible d'un

<sup>(1)</sup> Des égalités analogues auraient encore lieu pour des formes plus générales des  $E$ . Cf. FROBENIUS, *Journal de Crelle*, t. 84, 1878.

<sup>(2)</sup> Cette propriété bien connue n'est ainsi démontrée que pour des tableaux pouvant se mettre sous la forme (7). La démonstration serait rendue générale en se servant de l'égalité (7 bis). Pour les conséquences je renvoie à LAGUERRE (*loc. cit.*).



assez grand nombre d'applications géométriques ou algébriques. Je signale simplement l'application à la transformation de Tschirnhausen. Une équation entière

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

peut toujours s'écrire sous forme d'une équation en  $\lambda$  d'un tableau T, par exemple

$$\begin{vmatrix} -a_1 - x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & -x & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \dots & . & \dots & \dots & . \\ -a_n & 0 & \dots & \dots & -x \end{vmatrix} = 0.$$

Pour appliquer à  $f$  la transformation  $\gamma = \varphi(x)$ , il suffit de calculer le tableau

$$T' = \varphi(T),$$

et l'équation en  $\lambda$  de ce nouveau tableau

$$\Delta(T' - [\gamma]) = 0$$

est l'équation cherchée. Cette méthode de calcul ne diffère pas d'ailleurs essentiellement de l'ingénieuse méthode donnée par Hermite (<sup>1</sup>).

20. Des tableaux de même opérateur constituent, d'après ce qui précède, un ensemble d'éléments à multiplication commutative. On peut montrer, sauf quelques restrictions, que c'est le seul moyen d'obtenir de tels ensembles de tableaux. C'est ce qui résulte de la propriété : *Étant donné un tableau T dont l'équation en  $\lambda$  n'a pas de racine double, tout tableau S,  $[\Delta(S) \neq 0]$ , permutable avec T, peut être considéré comme ayant le même opérateur que T.*

En effet, T étant mis sous la forme  $T = AEA^{-1}$ , l'hypothèse entraîne les égalités

$$STS^{-1} = T \quad \text{ou} \quad (SA) \times E \times (SA)^{-1} = AEA^{-1}.$$

---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus*, Paris, 1859. Cf. aussi l'exposé de cette méthode par WEBER (*Lehrbuch der Algebra*, t. I, p. 211).

Or, l'opérateur de T étant défini à une dilatation près, on doit avoir

$$SA = A \times E' \quad \text{ou} \quad S = A \times E' \times A^{-1}.$$

Donc, si dans un *groupe abélien* de tableaux il y en a au moins <sup>(1)</sup> un dont l'équation en  $\lambda$  n'ait pas de racine double, tous les tableaux du groupe seront de la forme

$$T = AEA^{-1}, \quad T' = AE'A^{-1}, \quad \dots,$$

les tableaux élémentaires E, E', ... formant un groupe nécessairement abélien. Réciproquement, un tel ensemble est un groupe abélien de tableaux. Il en est de même de l'ensemble suivant, où  $\Sigma$  désigne un tableau quelconque [ $\Delta(\Sigma) \neq 0$ ],

$$\Sigma T \Sigma^{-1}, \quad \Sigma T' \Sigma^{-1}, \quad \dots,$$

l'opérateur commun de ce nouveau groupe étant  $\Sigma A$  à une dilatation près.

#### IV. — Méthode générale de réduction des tableaux.

21. Des tableaux d'un système pourront être dits *réduits* lorsqu'ils vérifieront certaines conditions données *a priori*. Toutefois, pour qu'elles soient bien des *conditions de réduction* (au sens attaché à ce mot dans la théorie arithmétique des formes), il faut évidemment que :

1° Il existe toujours au moins un, et en général un ensemble de tableaux réduits équivalents à un tableau donné ;

2° Ces conditions soient indépendantes du tableau choisi pour définir le système.

S'il en est ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que deux tableaux A et B soient équivalents est bien que les ensembles de tableaux réduits équivalents respectivement à A et B soient identiques.

---

<sup>(1)</sup> Cette condition, de même que celle du théorème précédent, n'est évidemment pas nécessaire. Elle sera vérifiée pour les groupes de tableaux à termes entiers dont je m'occuperai ultérieurement (Chap. IV).

Ce seront également des conditions de réduction pour le système de formes associées. Mais pour qu'il en soit de même de la forme associée d'ordre  $n$ , comme le tableau correspondant n'est défini qu'à une dilatation près (n° 16), il faut encore que :

3° Les conditions de réduction soient invariantes pour une dilatation, c'est-à-dire qu'à une dilatation effectuée sur un système corresponde la même dilatation sur l'ensemble des tableaux réduits.

Il suffirait strictement de supposer cette troisième propriété vérifiée seulement pour les dilatations de déterminant 1. Je la supposerai entièrement nécessaire, ce qui revient à admettre que les conditions de réduction ne portent que sur les rapports mutuels des coefficients de  $\Phi$ .

On peut évidemment imaginer une infinité de méthodes de réduction vérifiant les trois propriétés précédentes ; je vais en exposer une qui n'est qu'une extension de la *réduction continue d'Hermite* <sup>(1)</sup>. Grâce à l'introduction d'un nombre  $\omega$  supposé seulement supérieur à 1, la définition de ce mode de réduction renferme une certaine latitude qui permet d'en déduire, comme cas particuliers, des algorithmes indiqués par divers auteurs <sup>(2)</sup>.

22. Fixons d'abord les notations ; étant donné un tableau T, je désignerai par  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  les formes linéaires correspondant aux colonnes réelles et  $\eta_1, \overline{\eta_1}, \eta_2, \overline{\eta_2}, \dots, \eta_s, \overline{\eta_s}$  les formes correspondant aux couples de colonnes imaginaires conjuguées. La fonction d'Hermite F associée à T peut s'écrire

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \lambda_i^\omega |\xi_i|^\omega + \sum \mu_j^\omega (\eta_j \overline{\eta_j})^{\frac{\omega}{2}}.$$

Je supposerai  $\omega \geq 1$  et j'envisagerai aussi la fonction limite

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} F^\omega,$$

---

<sup>(1)</sup> HERMITE, *loc. cit.* Voir aussi une application de cette méthode : CHARVÉ, *Annales de l'École Normale*, 1880.

<sup>(2)</sup> Cf. en particulier MINKOWSKI, *Geom. der Zahlen*, p. 147 ; *Math. Ann.*, t. LIV 1901 ; *Annales de l'École Normale*, 1896.

qui est égale au plus grand des nombres

$$\lambda_1|\xi_1|, \dots, \lambda_r|\xi_r|, \mu_1|\eta_1|, \dots, \mu_s|\eta_s|.$$

Si l'on suppose que les indéterminées  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ne peuvent prendre que des valeurs entières, on peut considérer  $\xi_1, \xi_2, \dots, \eta_1, \overline{\eta_1}, \dots, \eta_s, \overline{\eta_s}$ , comme les coordonnées d'un point du module  $\mathfrak{C}$  ayant T pour base, et F,  $F^{\frac{1}{\omega}}$  et  $f$  comme des *fonctions des points du module*. Je rappelle dans ce cas que, d'après le théorème arithmétique de Minkowski ( $F^{\frac{1}{\omega}} = \text{const.}$  pour  $\omega \geq 1$  est l'équation d'une *surface nulle part concave*), il existe au moins un point du module tel que l'on ait

$$F^{\frac{1}{\omega}} \leq \delta_{\omega} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r \mu_1^2 \dots \mu_s^2 |\Delta(T)|},$$

$\delta_{\omega}$  étant une constante finie, fonction seulement de  $\omega$  et de  $r$  et  $s$ . J'aurai à revenir sur ce théorème dont je donnerai une démonstration dans certains cas particuliers.

23. Je supposerai, pour simplifier, qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers entre les termes d'une même colonne de T. Dans ces conditions, le module  $\mathfrak{C}$  est isomorphe holoédriquement à tout module obtenu en supprimant une ou plusieurs coordonnées à chacun de ses points (n° 13). Ceci posé, considérons d'abord le cas  $s = 0, r = n$ , c'est-à-dire tous les termes de T réels; dans ce cas, il existe au moins un tableau U du module vérifiant les conditions :

A. 1° *Il existe un système de valeurs des  $\lambda$  tel que la fonction d'Hermite correspondante soit minimum pour le point constituant la première ligne de U;*

2° *Il existe un système de valeurs des  $\lambda$  (ne vérifiant pas nécessairement la condition précédente) tel que la fonction d'Hermite prenne les mêmes valeurs pour les  $n$  points de U, et que cette valeur soit inférieure ou égale à la valeur pour les autres points de  $\mathfrak{C}$ , sauf peut-être pour les*

points du sous-module de dimension  $n - 1$ , contenant les  $n - 1$  premiers points de  $U$  <sup>(1)</sup>.

Ces conditions ne dépendant que des rapports mutuels des  $\lambda$ , on peut supposer  $\lambda_n$ , par exemple, égal à 1. Soit alors un premier système de valeurs des  $\lambda : l_1, l_2, \dots, 1$ ; il y a au moins un point du module  $(\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^n)$  différent de  $(0, 0, \dots, 0)$  où  $F$  (pour les valeurs  $l_i$ ) est minimum. En effet,  $H$  étant positif et suffisamment grand, il y a des points de  $\mathfrak{E}$  vérifiant l'inégalité

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) < H,$$

mais il y a seulement un nombre fini de ces points, car cette inégalité entraîne *a fortiori* la limitation des coordonnées (voir n° 11)

$$|\xi_1| \leq \frac{1}{l_1} H^{\frac{1}{\omega}}, \quad |\xi_2| \leq \frac{1}{l_2} H^{\frac{1}{\omega}}, \quad \dots, \quad |\xi_n| \leq H^{\frac{1}{\omega}}.$$

Le premier point de  $U$  ainsi déterminé, nous allons démontrer l'existence des autres par récurrence. Supposons qu'on ait pu trouver  $p - 1$  points du module

$$(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2), \quad (\alpha_1^3, \alpha_2^3, \dots, \alpha_n^3), \quad \dots, \quad (\alpha_1^p, \alpha_2^p, \dots, \alpha_n^p),$$

qui, avec le point précédent, forment un système définissant un sous-module  $\mathfrak{E}'$  de dimension  $p$  et vérifiant la deuxième condition (A); si  $p < n$ , on peut trouver un  $(p + 1)^{\text{ième}}$  point. En effet, la fonction d'Hermite ayant une même valeur  $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, 1)$  pour les  $p$  points trouvés, les équations aux  $\lambda_i$

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, 1) = \Sigma \lambda_i^{\alpha_i^1} |\alpha_i^1|^{\omega} = \Sigma \lambda_i^{\alpha_i^2} |\alpha_i^2|^{\omega} = \dots = \Sigma \lambda_i^{\alpha_i^p} |\alpha_i^p|^{\omega}$$

ont un système de solutions positives :  $l'_1, l'_2, \dots, 1$ ; comme  $p < n$ , elles en ont une infinité et, par *variation continue* du système de solutions, on peut l'amener du système initial  $(l'_1, l'_2, \dots, 1)$  à un système  $(l''_1, l''_2, \dots, 1)$ , où l'un des paramètres au moins,  $l''_k$  par exemple,

---

<sup>(1)</sup> Ce sous-module renferme par suite tous les points de  $\mathfrak{E}$  qui forment avec les  $n - 1$  premiers un tableau de déterminant nul. Sur la nécessité de cette restriction, voir le cas du troisième ordre (Chap. III).

soit inférieur à un nombre donné  $\varepsilon$ . On peut alors disposer de  $\varepsilon$  de façon que, dans cette variation, les  $p$  points aient cessé d'être des minima de  $F$ . Il suffit pour cela que l'expression

$$\varphi(l'_1, l'_2, \dots, 1) = |l'_1 \alpha_1^1|^\omega + |l'_2 \alpha_2^1|^\omega + \dots + |\alpha_n|^\omega$$

ne soit plus minimum, relativement aux *points de  $\mathfrak{C}$  n'appartenant pas à  $\mathfrak{C}'$* . Or  $\mathfrak{C}'$  étant d'ordre  $p$  (n° 14) on peut trouver un point  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  de  $\mathfrak{C}$  n'appartenant pas à  $\mathfrak{C}'$  vérifiant les  $n - 1$  inégalités

$$|\xi_i| \leq |\alpha_i^1| \quad (i \neq k),$$

car elles sont vérifiées par un nombre infini <sup>(1)</sup> de points de  $\mathfrak{C}$  et un nombre fini de points de  $\mathfrak{C}'$ . Il suffit alors de choisir  $\varepsilon$  tel que

$$|\varepsilon \xi_k|^\omega + |\xi_n|^\omega < |\varepsilon \alpha_k^1|^\omega + |\alpha_n^1|^\omega,$$

pour qu'on ait *a fortiori* l'inégalité

$$|l'_1 \xi_1|^\omega + |l'_2 \xi_2|^\omega + \dots + |\xi_n|^\omega < |l'_1 \alpha_1^1|^\omega + |l'_2 \alpha_2^1|^\omega + \dots + |\alpha_n^1|^\omega.$$

Il y a donc un système de valeurs des paramètres pour lequel  $\varphi$  cesse d'être minimum. Comme  $\varphi$  est une fonction continue des  $\lambda$ , pour ce système, elle est égale à la valeur de la fonction d'Hermite pour un certain point de  $\mathfrak{C}$  n'appartenant pas à  $\mathfrak{C}'$ , soit  $(\alpha_1^{p+1}, \alpha_2^{p+1}, \dots, \alpha_n^{p+1})$  qui est le  $p + 1^{\text{ème}}$  point cherché.

On a ainsi démontré l'existence d'un tableau  $U$  correspondant à un système de paramètres  $(l_1, l_2, \dots, 1)$ . On peut d'abord trouver plusieurs tableaux correspondant à ce système et notamment tous les tableaux  $[\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1] \times U$ ; on pourrait par suite supposer les termes de la première colonne de  $U$  positifs. D'autre part, en faisant varier ces paramètres, on peut obtenir un ensemble de tableaux  $U$  qui seront ainsi classés suivant les valeurs correspondantes des paramètres, c'est-à-dire dans un espace à  $n - 1$  dimensions.

24. Supposons maintenant  $s \neq 0$ ; un procédé tout à fait analogue

<sup>(1)</sup> Ceci en vertu de l'hypothèse faite au début du paragraphe et de l'isomorphisme qui en résulte. Ces  $n - 1$  inégalités entraînent  $|\xi_k| > |\alpha_k^1|$ , autrement  $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_n^1)$  ne serait pas minimum.

au précédent montre l'existence de  $r + s$  points de  $\mathfrak{e}$  définissant un sous-module  $\mathfrak{e}'$  d'ordre et de dimension  $r + s$  et vérifiant les conditions précédentes. Il leur correspond au moins un système de valeurs des  $\lambda$  et des  $\mu$  et une valeur  $\varphi_0$  de la fonction d'Hermite. On peut alors déterminer un  $r + s + 1^{\text{ième}}$  point de  $\mathfrak{e}$ , non de  $\mathfrak{e}'$ , rendant la fonction d'Hermite minimum, pour les valeurs précédentes des paramètres et par comparaison aux valeurs de la fonction aux autres points de  $\mathfrak{e}$  n'appartenant pas à  $\mathfrak{e}'$ . En opérant de même sur les  $r + s + 1$  points obtenus, et ainsi de suite de proche en proche, on détermine encore un tableau U de  $\mathfrak{e}$  vérifiant les conditions :

B. 1° *Sa première ligne est formée par un point qui est un minimum de F ;*

2° *Il existe un système de valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  tel que la fonction F correspondante ait la même valeur pour les  $r + s$  premiers points du tableau, cette valeur étant minimum par comparaison aux valeurs de F pour les points de  $\mathfrak{e}$  n'appartenant pas au sous-module  $\mathfrak{e}_0$  défini par les  $r + s - 1$  premiers points ;*

3° *Le  $(r + s + k)^{\text{ième}}$  point rend la fonction F, correspondante aux valeurs précédentes des paramètres, minima par comparaison aux valeurs de F pour les points de  $\mathfrak{e}$  n'appartenant pas au sous-module  $\mathfrak{e}_k$  défini par les  $r + s + k - 1$  premiers points ; cette condition étant vérifiée pour  $k = (1, 2, \dots, s)$ .*

25. Les tableaux U ainsi définis vérifient les conditions 1°, 2°, 3° du début de ce paragraphe. En effet, en remplaçant T par un tableau équivalent, on ne change pas  $\mathfrak{e}$  qui entre seul dans les conditions (A) et (B), et, d'autre part, une dilatation faite sur T change les paramètres de F, mais laisse invariants ses minima. Toutefois ces tableaux U ne sont pas nécessairement équivalents à T, mais de la forme  $\Sigma T [\Sigma \text{ à termes entiers, } \Delta(\Sigma) \neq 0]$ . Le tableau  $\Sigma^{-1} U$  est donc équivalent à T ; il en est de même de  $SU = V$  ; S étant équivalent à  $\Sigma^{-1}$  (à termes rationnels) et de la forme (4) (voir n° 6). De plus, le tableau V est unique quand U est donné, et l'ensemble des tableaux V peut constituer un *ensemble de tableaux réduits*.

Cet ensemble dépend *a priori* du nombre  $\omega$  ; on vérifie sans difficulté que sa définition subsiste pour  $\omega = \infty$ , en utilisant dans ce cas

la fonction limite  $f$ . On peut constater, en particulier, que pour le cas d'un tableau  $T$  à termes entiers, un tableau équivalent de la forme (4) vérifie les conditions (A) pour  $\omega = \infty$  (').

26. Considérons, comme cas particulièrement remarquable, un tableau  $T$  ayant pour termes d'une colonne des entiers algébriques d'un même corps et pour termes des autres colonnes les entiers conjugués. Soit  $U$  un tableau déduit de  $T$ , vérifiant les conditions (A) ou (B). En supposant le produit des paramètres égal à 1 et en appliquant le théorème de Minkowski (²) à la valeur commune ou à la plus grande valeur de la fonction  $F$  pour les  $n$  points de  $U$ , on a l'inégalité

$$[F]^{\frac{1}{\omega}} \leq \delta^{\omega} \times \sqrt{|\Delta(T)|} = H,$$

et, *a fortiori*, les inégalités

$$\lambda_1 |\alpha_1^i| \leq H, \quad \lambda_2 |\alpha_2^i| \leq H, \quad \dots, \quad \lambda_n |\alpha_n^i| \leq H.$$

Mais si nous considérons la forme d'ordre  $n$  associée à  $U$ , on peut l'écrire, le produit des paramètres étant 1,

$$\Phi = \prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i (\alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \dots + \alpha_n^i x_n).$$

Les inégalités précédentes entraînent une limite supérieure pour les valeurs absolues des coefficients de  $\Phi$  et ces coefficients étant des entiers rationnels, il n'y a qu'un nombre fini de formes  $\Phi$  associées aux divers tableaux  $U$ . Donc ces tableaux  $U$ , et par suite les *tableaux réduits équivalents à  $T$  (de la forme  $SU$ )*, se déduisent tous, par des dilatations, d'un nombre fini d'entre eux.

De cette propriété résulte une certaine *périodicité* pour les valeurs

(¹) Les tableaux à termes entiers rentrent précisément dans le cas d'exception écarté au n° 23. Je reviendrai sur ce cas pour le deuxième ordre.

(²) L'inégalité n'est pas à vrai dire une conséquence immédiate du théorème de Minkowski sous sa forme habituelle à cause des restrictions apportées aux minima dans (A) et (B), il faudrait modifier légèrement l'énoncé et la démonstration. Pour plus de précision, voir le Chapitre IV de ce travail.



des paramètres correspondant aux tableaux réduits et pour les tableaux modulaires, quotients deux à deux des tableaux réduits; j'ai précisé cette périodicité pour les cas particuliers du deuxième et du troisième ordre (Chap. IV). Une périodicité analogue a été établie depuis longtemps pour le cas du deuxième ordre. M. Charve, d'après Hermite, en a signalé une pour le cas du troisième ordre.

Enfin, si l'on remarque que dans la constante  $H$  n'entre que l'expression  $|\Delta(T)|$  qui, à une puissance près, est le discriminant du corps des  $z$ , on constate que la démonstration conduit encore au célèbre théorème d'Hermite sur le nombre limité d'irrationalités distinctes <sup>(1)</sup>, théorème repris ensuite par Minkowski <sup>(2)</sup> dans la recherche des corps d'un discriminant donné.

## CHAPITRE II.

### RÉDUCTION DES TABLEAUX DU DEUXIÈME ORDRE.

#### I. — Suite des tableaux réduits.

1. Je vais m'occuper dans ce Chapitre de la réduction des tableaux d'ordre 2 de la forme <sup>(3)</sup>

$$T = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}.$$

La forme associée est une forme quadratique

$$\Phi = (ax + by)(a'x + b'y).$$

Elle est *définie* si les deux colonnes du tableau sont à termes imaginaires conjugués. Dans ce cas la méthode de réduction (conditions B) conduit pour  $\Phi$  aux conditions bien connues de Gauss. Posons en effet

$$a = a_0 + ia_1, \quad b = b_0 + ib_1.$$

<sup>(1)</sup> Lettre à M. Borchardt, *Journal de Crelle*, t. 53; *Oeuvres*, t. I, p. 413.

<sup>(2)</sup> *Geom. der Zahl.*, § 41, 42, 43. La démonstration qu'on déduirait des principes précédents serait en somme identique à celle de Minkowski.

<sup>(3)</sup> Sur les matières de ce Chapitre, cf. *Comptes rendus*, 28 juin 1909, 6 juin 1910.

La fonction d'Hermite renferme un seul paramètre qu'on peut supposer égal à 1, et peut s'écrire

$$F = [(a_0x + b_0y)^2 + (a_1x + b_1y)^2]^{\frac{\omega}{2}}.$$

Il est indifférent d'employer une valeur quelconque de  $\omega$  et pour que le tableau U

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 & \alpha_0 - i\alpha_1 \\ \beta_0 + i\beta_1 & \beta_0 - i\beta_1 \end{pmatrix}$$

vérifie les conditions (B), il faut et il suffit que les expressions  $(\alpha_0)^2 + (\alpha_1)^2, (\beta_0)^2 + (\beta_1)^2$  soient des minima de la forme quadratique:  $(a_0x + b_0y)^2 + (a_1x + b_1y)^2$ , la première par comparaison à tous les points du module  $\varepsilon$ , la deuxième par comparaison aux mêmes points, exception faite des points  $[(\alpha_0 + i\alpha_1)x, (\alpha_0 - i\alpha_1)x]$ . On en déduit d'abord sans difficulté que U est équivalent à T (cf. un raisonnement analogue au n° 5 de ce Chapitre) et ensuite qu'il faut et suffit qu'on ait (1)

$$\left| \frac{\beta_0 + i\beta_1}{\alpha_0 + i\alpha_1} \right| \geq 1, \quad 0 \leq \Re \left( \frac{\beta_0 + i\beta_1}{\alpha_0 + i\alpha_1} \right) < \frac{1}{2}.$$

Sous cette forme, on reconnaît la définition bien connue du domaine fondamental du groupe modulaire qui conduit aux conditions de Gauss pour  $\Phi$ .

2. Dans le cas où les termes de T sont réels, la forme associée est indéfinie. On peut représenter les points du module  $\varepsilon$  ayant T pour base par les sommets d'un réseau de parallélogrammes dans le plan. Les inégalités (6) sur les modules types expriment le fait évident qu'il n'y a qu'un nombre fini de ces sommets à l'intérieur d'un parallélogramme de centre O et de côtés parallèles à  $Ox, Oy$ .

Pour la réduction (2) de T, je me servirai de la fonction limite  $f$

(1) Ce résultat est en somme la propriété du parallélogramme réduit dans le réseau de périodes d'une fonction elliptique.

(2) Cf. pour une réduction analogue MINKOWSKI, *Arithmetische Theorie eines Linienpaars* (*Geom. der Zahl.*, § 43). J'ai cru utile de donner une exposition différente de celle de Minkowski, surtout en vue de la comparaison des diverses méthodes et de leur extension au troisième ordre.

(pour la valeur  $\omega = \infty$ ) et je supposerai le produit des paramètres égal à 1. Cette fonction que je représenterai par  $f_\lambda(\xi, \xi')$ ,  $(\xi, \xi')$  étant un point de  $\mathfrak{C}$ , est alors égale au plus grand des deux nombres

$$\lambda|\xi|, \quad \frac{1}{\lambda}|\xi'|.$$

Comme on a  $f_\lambda(\xi, \xi') = f_\lambda(-\xi, -\xi')$ , au point de vue de la valeur de  $f$  il suffit de considérer, et je considérerai dans la suite seulement les points de  $\mathfrak{C}$  dont la première coordonnée est positive.

3. Cette convention étant faite, le même raisonnement que pour le  $n^{\text{ième}}$  ordre (Chap. I, n° 23) montre qu'à une valeur de  $\lambda$  correspond au moins un point  $(\alpha, \alpha')$  de  $\mathfrak{C}$  rendant  $F$  minimum ( $\alpha > 0$ ). Si le minimum est atteint pour deux points  $(\alpha, \alpha')$ ,  $(\beta, \beta')$ , je dirai qu'il y a un seul minimum proprement dit ou deux minima selon les conventions suivantes :

En supposant, par exemple :

$$f_\lambda(\alpha, \alpha') = \lambda\alpha.$$

$$f_\lambda(\beta, \beta') = \frac{1}{\lambda}|\beta'|; \quad (\alpha, \alpha'), \quad (\beta, \beta') \text{ minima simultanés.}$$

$$f_\lambda(\beta, \beta') = \lambda\beta \begin{cases} |\beta'| > |\alpha'| \\ \text{ou} \\ |\beta'| = |\alpha'|, \end{cases} \quad \alpha' > 0; \quad (\alpha, \alpha') \text{ minimum proprement dit.}$$

En adoptant ces conventions, il existe au plus deux minima proprement dits pour une valeur du paramètre.

Pour rechercher tous les points de  $\mathfrak{C}$  qui sont des minima de  $f$ , on pourra se servir de la propriété : *La condition nécessaire et suffisante pour que  $(\alpha, \alpha')$  soit un minimum proprement dit de  $f$  pour certaines valeurs de  $\lambda$ , est qu'il n'existe aucun point  $(\xi, \xi')$  de  $\mathfrak{C}$  vérifiant les inégalités*

$$0 < \xi \leq \alpha, \quad |\xi'| \leq |\alpha'|,$$

*sauf  $(0, 0)$  et, s'il existe, le point  $(\alpha, -\alpha')$ . Dans ce dernier cas, il faut en outre que  $\alpha'$  soit positif.*

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons-la vérifiée, et soit d'abord  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha' \neq 0$ . On peut toujours déterminer un point  $(\beta, \beta')$  de  $\varepsilon$  par les conditions

$$0 \leq \beta < \alpha, \quad |\beta'| \text{ le plus petit possible,}$$

car, suivant que le module formé par les nombres  $\pm \xi$  est du deuxième ou du premier ordre, l'inégalité  $|\xi| < \alpha$  ou l'égalité  $\xi = 0$  a une infinité de solutions, et l'on peut choisir parmi elles  $(\beta, \beta')$ . S'il y a ambiguïté, on choisira celui des points dont la première coordonnée est la plus petite, ou dont les deux coordonnées sont positives. On déterminera de même  $(\gamma, \gamma')$  tel qu'on ait

$$0 < \gamma, \quad |\gamma'| < |\alpha'|, \gamma \text{ le plus petit possible.}$$

Considérons alors les valeurs  $\lambda_1, \lambda_2$  définies par les égalités

$$\lambda_1 \alpha = \frac{1}{\lambda_1} |\beta'|, \quad \frac{1}{\lambda_2} |\alpha'| = \lambda_2 \gamma;$$

$(\alpha, \alpha')$  est seul minimum pour les valeurs de  $\lambda$  intérieures, au sens étroit, à l'intervalle  $\lambda_1, \lambda_2$  et ne l'est pas pour les valeurs extérieures. C'est ce qu'on vérifie aisément en remarquant que les points de  $\varepsilon$  peuvent se répartir en trois catégories :

- (A)  $|\xi| \geq \alpha, \quad |\xi'| \geq |\alpha'|,$
- (B)  $|\xi| \geq \gamma > \alpha,$
- (C)  $|\xi'| \geq |\beta'| > |\alpha'|,$

et en étudiant  $f_\lambda(\xi, \xi')$  pour chacune d'elles.

Si  $\alpha = 0$ ,  $\alpha' \neq 0$ , on ne peut déterminer que le point  $(\gamma, \gamma')$  et la valeur  $\lambda_2$ . Le point  $(\alpha, \alpha')$  est seul minimum pour les valeurs de  $\lambda$  intérieures à  $(\infty, \lambda_2)$ . Si  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha' = 0$ , les valeurs de  $\lambda$  seront intérieures à  $(\lambda_1, 0)$ .

4. La démonstration précédente montrerait encore que  $(\beta, \beta')$  est un minimum proprement dit de  $f$  pour des valeurs de  $\lambda$  immédiatement

supérieures à  $\lambda_1$ , et pour  $\lambda = \lambda_1$ , les points  $(\alpha, \alpha')$ ,  $(\beta, \beta')$  sont minima simultanés. On peut dire pour cette raison que  $(\beta, \beta')$  est le minimum *suivant*  $(\alpha, \alpha')$ ;  $(\gamma, \gamma')$  serait de même le minimum *précédant*. Si  $\beta \neq 0$  on peut de même déterminer un minimum suivant  $(\beta, \beta')$  et si  $\gamma' \neq 0$  un minimum précédant  $(\gamma, \gamma')$ , et ainsi de suite, ce qui montre comment se succèdent les minima de  $f_\lambda(\xi, \xi')$  lorsque  $\lambda$  varie d'une façon continue.

D'autre part, si  $\lambda$  est intérieur à un intervalle I intérieur à  $(0, \infty)$ , il n'y a qu'un nombre fini de points rendant  $f_\lambda$  minimum. Car un tel point devrait vérifier des inégalités de la forme

$$f_\lambda(\alpha, \alpha') \leq \lambda e_1, \quad f_\lambda(\alpha, \alpha') \leq \frac{1}{\lambda} |e'_2|,$$

et *a fortiori*

$$\alpha \leq e_1, \quad |\alpha'| < |e'_2|,$$

$(e_1, e'_1), (e_2, e'_2)$  étant des points de  $\mathfrak{E}$  tels que l'intervalle  $\sqrt{\left|\frac{e'_1}{e_1}\right|} < \sqrt{\left|\frac{e'_2}{e_2}\right|}$  comprenne I. Par suite, en faisant croître et décroître indéfiniment les bornes de I, on obtiendra tous les minima de  $f$  rangés en une *suite ordonnée dans les deux sens* suivant les valeurs croissantes et décroissantes de  $\lambda$ . Elle sera aussi ordonnée, d'après ce qui précède, par rapport aux valeurs décroissantes et croissantes de  $\alpha$  et aux valeurs croissantes et décroissantes de  $|\alpha'|$ . Elle peut d'ailleurs être limitée, dans un sens, ou dans les deux.

5. En faisant une légère modification aux conditions générales (A) (nécessité par l'introduction des minima proprement dits), nous désignerons par U et nous appellerons *tableau réduit* tout tableau constitué par deux minima successifs, le point de la première ligne *précédant* le point de la deuxième, soit

$$U = \begin{array}{cc} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{array}.$$

Ses termes vérifient *a priori* les inégalités

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha > \beta, \quad |\beta'| > |\alpha'|,$$

d'où il résulte que  $\Delta(U)$  n'est pas nul. En procédant comme pour le théorème sur les points minima, on démontre que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tableau U du module  $\mathfrak{E}$ , vérifiant les inégalités précédentes soit réduit, est que tout point  $(^1)$   $(\xi, \xi')$  de  $\mathfrak{E}$  vérifie au moins l'une des inégalités*

$$|\xi| > \alpha \quad \text{ou} \quad |\xi'| > |\beta'|.$$

Ce théorème permet de prouver l'importante propriété, qui justifie la dénomination de *réduit* appliquée à U :

*Tout tableau U formé de deux minima successifs est équivalent à T.* En effet, U étant un tableau du module  $[\Delta(U) \neq 0]$ , une base de  $\mathfrak{E}$  est de la forme  $S^{-1} \times U$ , S étant à termes entiers et  $S^{-1}$  défini à une équivalence près. On peut donc supposer  $S^{-1}$  de la forme (4) (voir Chap. I, n° 7) et poser

$$T' = \begin{pmatrix} a_1 & a'_1 \\ b_1 & b'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{d} & 0 \\ \frac{p'}{d} & \frac{q}{d} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix},$$

$p, p', q, d$  étant des entiers vérifiant les conditions

$$\frac{pq}{d^2} = \frac{1}{d} \quad (S \text{ à termes entiers}) \quad (p, d, q) > 0, \quad \left| \frac{p'}{d} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{p}{d}.$$

Comme on ne peut avoir simultanément, puisque  $(\alpha, \alpha')$  est un minimum,

$$\alpha > |\alpha| = \frac{p}{d} \alpha = \frac{1}{q} \alpha, \quad |\alpha'| > |\alpha'| = \frac{p}{d} |\alpha'| = \frac{1}{q} |\alpha'|,$$

il faut  $q = 1$ . Mais alors, si  $d$  était supérieur à 1, on aurait

$$\begin{aligned} |b_1| &= \left| \frac{p'}{d} \alpha + \frac{1}{d} \beta \right| \leq \left| \frac{p'}{d} \right| \alpha + \frac{1}{d} \beta \leq \frac{1}{2} (\alpha + \beta) < \alpha, \\ |b'_1| &= \left| \frac{p'}{d} \alpha' + \frac{1}{d} \beta' \right| \leq \left| \frac{p'}{d} \right| |\alpha'| + \frac{1}{d} |\beta'| \leq \frac{1}{2} (|\alpha'| + |\beta'|) < |\beta'|, \end{aligned}$$

inégalités impossibles. Donc  $d = 1$ ,  $p' = 0$  et U est confondu avec T', c'est-à-dire avec une base de  $\mathfrak{E}$ .

(<sup>1</sup>) Sauf le point 0, 0.

6. J'ai ainsi montré la formation des tableaux réduits à partir de la suite des minima. On peut se proposer de chercher les conditions que doivent vérifier les termes d'un tableau équivalent à T pour qu'il soit réduit. On trouve la propriété suivante :

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tableau U équivale à un tableau T soit réduit est que, ou bien ses termes vérifient les conditions*

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} > 1 & (\alpha > 0), \\ 0 > \frac{\alpha'}{\beta'} > -1, \end{cases}$$

*ou bien il soit de l'une des formes*

$$(2) \quad \begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \beta & \beta' \end{array} \quad \text{et si} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \beta \leq \frac{\alpha}{2}, \\ \beta = \frac{\alpha}{2}, \quad \beta' > 0; \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{cc} \alpha & \alpha' \\ 0 & \beta' \end{array} \quad \text{et si} \quad \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \leq \frac{\alpha'}{\beta'} \leq 0, \\ \frac{\alpha'}{\beta'} = -\frac{1}{2}, \quad \beta' > 0. \end{array}$$

Démontrons par exemple les conditions (1); d'après l'ordre adopté pour les lignes du tableau, on a nécessairement  $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ ,  $\left| \frac{\alpha'}{\beta'} \right| < 1$ . De plus,  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont de signes contraires, sinon le point de  $\mathfrak{E}$  ( $\gamma = \alpha - \beta$ ,  $\gamma' = \alpha' - \beta'$ ), différent du point nul, vérifierait les inégalités :  $\gamma < \alpha$ ,  $|\gamma'| < |\beta'|$ .

Réciproquement, les conditions étant remplies, comme U est une base de  $\mathfrak{E}$ , tout point de  $\mathfrak{E}$  a des coordonnées de la forme,  $x, y$  étant entiers : ( $\xi = x\alpha + y\beta$ ,  $\xi' = x\alpha' + y\beta'$ ). Une discussion simple montre que, suivant les cas, on a

$$\begin{array}{ll} xy > 0, & |x\alpha + y\beta| \geq \alpha + \beta > \alpha, \\ xy < 0, & |x\alpha' + y\beta'| \geq |\alpha'| + |\beta'| > |\beta'|, \\ x = 0, \quad |y| > 1, & |x\alpha' + y\beta'| > |\beta'|, \\ |x| > 1, \quad y = 0, & |x\alpha + y\beta| > \alpha, \end{array}$$

c'est-à-dire au moins une des inégalités  $|\xi| > \alpha$ ,  $|\xi'| > |\beta'|$ .

7. On peut déduire de ce résultat une limite supérieure du minimum de  $f_\lambda(\xi, \xi')$ , qui n'est qu'un cas particulier du théorème de Minkowski sur le minimum des formes linéaires <sup>(1)</sup>. Soit donc  $l$  une valeur arbitraire de  $\lambda$ ,  $(\alpha, \alpha')$  le minimum correspondant, et supposons par exemple  $f_l(\alpha, \alpha') = l\alpha$ . Considérons le tableau réduit  $U$  ayant ce point pour première ligne, la valeur absolue de  $\Delta(U)$  est

$$|\Delta(U)| = |\alpha\beta' - \beta\alpha'| = \alpha|\beta'| + \beta|\alpha'|,$$

on en déduit

$$\alpha|\beta'| < |\Delta(U)| \quad \text{ou} \quad l\alpha \frac{1}{l} |\beta'| < |\Delta(U)|.$$

En tenant compte de ce que  $\alpha$  est minimum et par suite  $l\alpha < \frac{1}{l} |\beta'|$  et que d'autre part  $U$  est équivalent à  $T$ , on trouve finalement

$$(4) \quad f_l(\alpha, \alpha') \leq \sqrt{|\Delta(T)|},$$

ce qu'on peut énoncer : dans  $\mathfrak{E}$  il existe au moins deux points  $(+\xi, +\xi')$ ,  $(-\xi, -\xi')$  vérifiant, quel que soit  $\lambda$ , les inégalités simultanées

$$\lambda|\xi| \leq \sqrt{|\Delta(T)|}, \quad \frac{1}{\lambda}|\xi'| \leq \sqrt{|\Delta(T)|}.$$

Il ne saurait y avoir égalité que si l'un des termes de  $U$  était nul.

8. Du classement des minima on déduit le rangement des tableaux réduits <sup>(2)</sup> en une suite ordonnée dans les deux sens. Deux tableaux consécutifs,  $U, U'$ , ont une ligne commune (la deuxième de  $U$  et la première de  $U'$ ):

$$U = \begin{array}{cc} \gamma & \gamma' \\ \alpha & \alpha' \end{array}, \quad U' = \begin{array}{cc} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{array}.$$

Réciproquement, d'ailleurs, une suite de tableaux ordonnée dans les deux sens, tous équivalents à un tableau  $T$  et vérifiant les condi-

<sup>(1)</sup> Pour la démonstration générale de ce théorème, voir MINKOWSKI, *Geom. der Zahl.* — HILBERT (dans Minkowski), *Dioph. App.*, Chap. I. — HURWITZ, *Gott. Nach.*, 1897.

<sup>(2)</sup> La suite des tableaux réduits coïncide en somme avec la suite des parallélogrammes extrêmes de Minkowski (*loc. cit.*).



tions (1), les extrêmes, s'il y en a, étant de l'une des formes (2) ou (3) et deux tableaux consécutifs ayant une ligne commune, coïncide nécessairement avec la suite des tableaux réduits équivalents à T. C'est une conséquence immédiate des propriétés des tableaux réduits et de la suite des minima.

La suite des tableaux réduits (et par suite celle des minima) peut être *limitée à droite*. Elle se termine nécessairement par un tableau (1) de la forme (3) et, pour qu'il en soit ainsi, on vérifie aisément qu'il faut et suffit que le rapport  $\frac{a}{b}$  des termes de la première colonne de T soit rationnel. De même, si la suite est *limitée à gauche*, elle l'est par un tableau de la forme (2), et il faut et il suffit, pour cela, que  $\frac{a'}{b'}$  soit rationnel.

Si les deux rapports sont rationnels, la suite est limitée dans les deux sens et comprend un nombre limité de termes.

## II. — Enchaînement des tableaux réduits.

9. Deux tableaux réduits consécutifs sont équivalents  $U = \Sigma U'$ ; si  $U'$  est donné, vérifiant les conditions (1) ou (3), U est déterminé de façon unique. Or le tableau équivalent à  $U'$

$$\begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times U' = \begin{pmatrix} q\alpha + \beta & q\alpha' + \beta' \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix},$$

où  $q$  est la *partie entière* de  $-\frac{\beta'}{\alpha'}$ , vérifie les conditions (1) ou (2); il est par conséquent identique à U et l'on a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \gamma &= q\alpha + \beta, \\ \gamma' &= q\alpha' + \beta', \end{aligned}$$

---

(1) On peut remarquer que ce tableau extrême a une définition invariante pour une dilatation et peut être considéré comme constituant à lui seul un ensemble de tableaux réduits.

ce qui montre que  $q$  est aussi la *partie entière de*  $\frac{\gamma}{\alpha}$ . On peut donc ainsi déterminer  $\Sigma$  soit à partir de  $U$ , soit à partir de  $U'$ , et en procédant de proche en proche trouver un tableau quelconque de la suite. On peut remarquer l'analogie de cet algorithme avec celui des fractions continues. D'une façon plus précise, considérons les tableaux successifs de la suite

$$\dots, \begin{array}{cc} \alpha_{-n} & \alpha'_{-n} \\ \beta_{-n} & \beta'_{-n} \end{array}, \dots, \begin{array}{cc} \alpha_{-1} & \alpha'_{-1} \\ \beta_{-1} & \beta'_{-1} \end{array}, \begin{array}{cc} \alpha_0 & \alpha'_0 \\ \beta_0 & \beta'_0 \end{array}, \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \beta_1 & \beta'_1 \end{array}, \dots, \begin{array}{cc} \alpha_n & \alpha'_n \\ \beta_n & \beta'_n \end{array}, \dots,$$

$\frac{\alpha_n}{\beta_n}$  et  $-\frac{\beta'_{-n}}{\alpha'_{-n}}$  sont respectivement les  $n^{\text{ièmes}}$  quotients complets des développements en fraction continue de  $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$  et  $-\frac{\beta'_0}{\alpha'_0}$ ; réciproquement  $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$  et  $-\frac{\beta'_0}{\alpha'_0}$  sont les  $n^{\text{ièmes}}$  quotients complets de  $\frac{\alpha_{-n}}{\beta_{-n}}$  et  $-\frac{\beta'_n}{\alpha'_n}$ . On peut encore poser, en désignant par  $q_i$  la partie entière commune de  $-\frac{\beta'_i}{\alpha'_i}$  et de  $\frac{\alpha_{i-1}}{\beta_{i-1}}$ ,

$$(5) \quad \begin{cases} \begin{array}{cc} \alpha_0 & \alpha'_0 \\ \beta_0 & \beta'_0 \end{array} = \prod_{i=1}^{i=n} \begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{array}{cc} \alpha_n & \alpha'_n \\ \beta_n & \beta'_n \end{array} = \Sigma_n \times \begin{array}{cc} \alpha_n & \alpha'_n \\ \beta_n & \beta'_n \end{array}, \\ \begin{array}{cc} \alpha_0 & \alpha'_0 \\ \beta_0 & \beta'_0 \end{array} = \prod_{i=0}^{i=-n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \times \begin{array}{cc} \alpha_{-n} & \alpha'_{-n} \\ \beta_{-n} & \beta'_{-n} \end{array} = \Sigma_{-n} \times \begin{array}{cc} \alpha_{-n} & \alpha'_{-n} \\ \beta_{-n} & \beta'_{-n} \end{array}. \end{cases}$$

10. Je rappelle d'abord quelques propriétés des tableaux unimodulaires  $\Sigma_n$  et  $\Sigma_{-n}$ , bien connues dans la théorie des fractions continues.  $\Sigma_n$  et  $\Sigma_{n+1}$ , de même que  $\Sigma_{-n}$  et  $\Sigma_{-n+1}$ , ont une colonne commune, de sorte qu'on peut poser

$$(6) \quad \Sigma_n = \prod \begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{array}, \quad \Sigma_{-n} = \prod \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} P_{-n+1} & P_{-n} \\ Q_{-n+1} & Q_{-n} \end{array}.$$

Les termes de  $\Sigma_n$  comme ceux de  $\Sigma_{-n}$  augmentent indéfiniment avec

$n$ . Si l'on considère la suite des fractions  $\frac{P_n}{Q_n}$ , elles sont toutes supérieures à 1; l'une d'entre elles est comprise entre les deux précédentes et l'intervalle de deux fractions consécutives diminue indéfiniment (1). Il en est de même des fractions  $\frac{P_{-n}}{Q_{-n}}$ , sauf cette différence qu'elles sont comprises entre 0 et -1. Ces propriétés sont vraies quels que soient les nombres  $q$  supposés entiers. En outre, si nous supposons que ces nombres sont donnés par les égalités (5), on peut affirmer que  $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$  est toujours compris entre deux fractions successives  $\frac{P_n}{Q_n}$  et par suite est leur limite commune, de même pour  $\frac{\alpha'_0}{\beta'_0}$  et  $\frac{P_{-n}}{Q_{-n}}$ .

11. Ceci posé, étant donné un système de tableaux, la considération des tableaux réduits permet de définir une suite d'entiers  $q$  (*quotients incomplets*) ordonnée dans les deux sens et en général illimitée. Cette suite ne change pas pour une même dilatation effectuée sur les tableaux du système. Réciproquement, considérons une suite à deux sens d'entiers positifs et numérotés à partir d'un intervalle arbitraire

$$\dots, q_{-n}, \dots, q_{-1}, q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

Définissons  $\Sigma_n$  et  $\Sigma_{-n}$  par les égalités (6); des propriétés rappelées, il résulte que  $\frac{P_n}{Q_n}$ ,  $\frac{P_{-n}}{Q_{-n}}$  ont respectivement des limites  $l$ ,  $l'$  ( $l > 1$ ,  $0 > l' > -1$ ). Si la suite d'entiers provient d'un système de tableaux, le tableau réduit correspondant à  $q_0$  est nécessairement, à une dilatation près,

$$U_0 = \begin{matrix} l & l' \\ 1 & 1 \end{matrix}.$$

---

(1) Ces propriétés et la suivante résultent des égalités immédiates :

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n q_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n q_{n+1} + Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \pm \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} \quad [\Delta(\Sigma) = 1],$$

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{P_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} + P_{n-1}}{Q_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} + Q_{n-1}}.$$

Or un tel tableau est réduit [conditions (1)] et d'autre part en posant  $U_0 = \Sigma_n U_n$  ou  $U_0 = \Sigma_{-n} U_{-n}$ , on constate aisément que les termes de  $U_n$  et de  $U_{-n}$  donnés par des équations linéaires vérifient les conditions (1) de réduction. Ce qui montre qu'une suite à deux sens d'entiers positifs quelconques peut être considérée comme la suite des quotients incomplets d'un certain système de tableaux défini à une dilatation près.

Le même résultat est encore vrai pour une suite d'entiers limitée dans un sens (ou dans deux), à condition toutefois que l'entier terminal soit supérieur à 1. Les nombres  $l$  ou  $l'$  sont alors définis par des égalités.

12. Les mêmes propriétés des tableaux modulaires permettent d'étendre aux tableaux la propriété des quotients incomplets des développements en fraction continue de deux nombres équivalents. On a alors la propriété suivante : *La condition nécessaire et suffisante pour que les suites de quotients incomplets supposées illimitées à droite, de deux systèmes de tableaux coïncident à partir d'un certain rang à droite, est que l'on puisse trouver des tableaux T et T' de chaque système ayant les termes des premières colonnes proportionnels (1).*

En numérotant les quotients incomplets à partir d'un terme commun, la démonstration précédente montre que la proportionnalité est bien vérifiée pour  $U_0$ ,  $U'_0$ . Réciproquement, considérons deux tableaux :

$$T = \begin{matrix} a & a' \\ b & b' \end{matrix}, \quad T' = \begin{matrix} a & 0 \\ b & 1 \end{matrix}.$$

En supposant par exemple  $\frac{a}{b} > 2$ ,  $T'$  est un tableau réduit, et soit  $T'_n$  le  $n^{\text{ième}}$  tableau de la suite,  $T' = \Sigma_n T'_n$ .

En posant aussi  $T = \Sigma_n T_n$ , on a

$$T'_n = \begin{matrix} \alpha_n & \gamma'_n \\ \beta_n & \delta'_n \end{matrix}, \quad T_n = \begin{matrix} \alpha_n & \alpha'_n \\ \beta_n & \beta'_n \end{matrix},$$

---

(1) On aurait évidemment la même propriété pour la coïncidence à gauche et les deuxièmes colonnes.

et

$$-\frac{\alpha'_n}{\beta'_n} = \frac{Q_{n-1}\left(-\frac{\alpha'}{b'}\right) + P_{n-1}}{Q_n\left(-\frac{\alpha'}{b'}\right) + P_n}, \quad 1 + q_n \frac{\alpha'_n}{\beta'_n} = \frac{Q_{n-2}\left(-\frac{\alpha'}{b'}\right) + P_{n-2}}{Q_n\left(-\frac{\alpha'}{b'}\right) + P_n}.$$

Si l'on suppose  $n$  assez grand pour que  $\frac{\alpha'}{b'}$  soit extérieur aux intervalles  $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}, \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}$ , ces égalités prouvent que  $T_n$  est réduit, ce qui démontre le théorème pour les tableaux particuliers  $T, T'$  envisagés. L'intervention d'un système auxiliaire de comparaison permet de l'étendre à tous les cas.

13. Cette propriété conduit à un procédé méthodique pour rechercher un premier tableau réduit  $U$  équivalent à  $T$ ,

$$T = \begin{pmatrix} a & \alpha' \\ b & b' \end{pmatrix};$$

on peut d'abord rendre  $\frac{a}{b} > 2$  en multipliant  $T$  par un des tableaux unimodulaires de la forme

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1' & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit ensuite de chercher la suite des tableaux réduits déduite de

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1' \end{pmatrix}$$

et les tableaux unimodulaires  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  correspondants. Pour  $n$  suffisamment grand,  $\Sigma_n^{-1}T$  sera réduit, et de ce premier tableau on déduira, par l'algorithme indiqué précédemment, la suite de tous les tableaux réduits.

### III. — Comparaison entre les diverses méthodes de réduction.

14. J'ai employé dans ce qui précède la fonction limite  $f$  pour définir les tableaux réduits. Il est remarquable de constater qu'en

employant la fonction  $F$ , on est conduit à la même suite de tableaux, à des exceptions isolées près. En changeant un peu la signification des paramètres de la fonction d'Hermite, posons

$$F_{\lambda}(x, y) = \lambda |ax + by|^{\omega} + \frac{1}{\lambda} |a'x + b'y|^{\omega},$$

ou, plus brièvement,

$$F_{\lambda}(\xi, \xi') = \lambda |\xi|^{\omega} + \frac{1}{\lambda} |\xi'|^{\omega}.$$

A toute valeur du paramètre correspond un minimum  $(\alpha, \alpha')$  de  $F$  et, d'après la propriété du n° 3, Chapitre II, *c'est aussi un minimum proprement dit de  $f$* , puisqu'il n'existe aucun point de  $\mathfrak{E}$  vérifiant les inégalités  $|\xi| < \alpha, |\xi'| < |\alpha'|$ . En outre, dans la variation de  $\lambda$ , *les minima de  $F$  se succèdent dans le même ordre que ceux de  $f$* . En effet, si  $(\alpha, \alpha')$  est un minimum de  $F$  pour la valeur  $l$  et si  $(\beta, \beta')$  est un minimum antérieur de  $f$  ( $\beta > \alpha, |\beta'| < |\alpha'|$ ), l'inégalité

$$l|\beta|^{\omega} + \frac{1}{l}|\beta'|^{\omega} \geq l|\alpha|^{\omega} + \frac{1}{l}|\alpha'|^{\omega}$$

entraîne *a fortiori*

$$\lambda|\beta|^{\omega} + \frac{1}{\lambda}|\beta'|^{\omega} > \lambda|\alpha|^{\omega} + \frac{1}{\lambda}|\alpha'|^{\omega} \quad \text{pour } \lambda > l,$$

ce qui prouve que  $(\beta, \beta')$  ne saurait être un minimum de  $F$  postérieur à  $(\alpha, \alpha')$ .

15. La suite des minima de  $F$  est donc intérieure à la suite  $s$  de  $f$ , c'est-à-dire s'en déduit seulement par suppression de certains termes (<sup>1</sup>), s'il y a lieu. On peut donner quelques propriétés générales sur la distribution des termes de  $s$  minima de  $F$ .

I. *Dans tout tableau réduit, au moins un des deux points qui le constituent est un minimum de  $F$* . Remarquons d'abord que, d'après la propriété précédente, pour que  $(\alpha, \alpha')$ , minimum de  $f$ , le soit aussi

(<sup>1</sup>) Cette propriété justifie le choix de  $f$  pour définir la suite des tableaux réduits.



de  $F$  pour la valeur  $\lambda$ , il faut et il suffit qu'on ait

$$F_{\lambda}(\alpha, \alpha') \leq F_{\lambda}(u, u'),$$

$(u, u')$  étant un point quelconque de  $s$ . Ceci posé,  $(\alpha, \alpha')$  et  $(\beta, \beta')$  étant deux points d'un tableau réduit et par suite consécutifs dans  $s$  et  $(a, a'), (b, b')$  des points quelconques de  $s$  respectivement antérieurs et postérieurs aux deux premiers, il existe au moins une valeur de  $\lambda$  telle qu'on ait simultanément

$$F_{\lambda}(\alpha, \alpha') \leq F_{\lambda}(b, b'), \quad F_{\lambda}(\beta, \beta') \leq F_{\lambda}(a, a').$$

En tenant compte des inégalités

$$\begin{aligned} |\alpha| &> b, & |\beta| + |\alpha| &\leq a, \\ |\alpha'| + |\beta'| &\leq |b'|, & |\beta'| &> |a'|, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, puisque  $\omega \geq 1$ ,

$$|b'|^{\omega} \geq |\alpha'|^{\omega} + |\beta'|^{\omega}, \quad |a|^{\omega} \geq |\beta|^{\omega} + |\alpha|^{\omega},$$

on trouve qu'il suffit de prendre, pour valeur de  $\lambda$ ,  $\sqrt{\left|\frac{\beta'}{\alpha}\right|^{\omega}}$ . Pour cette valeur, celui des deux points  $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta')$  pour lequel  $F_{\lambda}$  est le plus petit est évidemment un minimum de  $F$ .

II. *La deuxième ligne d'un tableau réduit est nécessairement un minimum de  $F$ , si la partie entière de  $\frac{\alpha}{\beta}$ , c'est-à-dire le quotient incomplet suivant le tableau est supérieur à 1.* Supposons  $\frac{\alpha}{\beta} \geq 2$ , un calcul analogue au précédent montre que l'un des points  $(\beta, \beta'), (\alpha - \beta, \alpha' - \beta')$  est un minimum de  $F_{\lambda}$ , et comme ce ne peut être le deuxième qui, d'après l'hypothèse, n'est pas un point de la suite  $s$ , la propriété est démontrée. On aurait évidemment une propriété analogue pour la première ligne d'un tableau et le quotient incomplet précédent.

16. En rapprochant les deux propriétés ainsi démontrées, on en déduit que tout point  $(\beta, \beta')$  de  $s$  non minimum de  $F$  est *isolé*, c'est-à-dire que les points précédant et suivant  $(\alpha, \alpha'), (\gamma, \gamma')$  sont des

minima. En outre il est nécessaire que la *partie entière commune* de  $\frac{\alpha}{\beta}$  et  $-\frac{\gamma'}{\beta'}$  soit égale à 1.

De ces diverses propriétés on déduit l'extension à la suite des minima de F de la deuxième propriété du n° 5 : *deux minima successifs de F forment un tableau équivalent à T*. On pourrait d'ailleurs démontrer ce résultat directement, ce qui a été fait par Hermite dans le cas  $\omega = 2$ .

On peut enfin indiquer une condition suffisante, d'un emploi peu commode, pour que  $(\beta, \beta')$  ne soit pas minimum de F. En appelant toujours  $(\alpha, \alpha')$ ,  $(\gamma, \gamma')$  les termes précédant et suivant dans s et en déterminant  $\lambda_1$  par la condition

$$F_{\lambda_1}(\alpha, \alpha') = F_{\lambda_1}(\gamma, \gamma'),$$

il faut et il suffit que  $(\beta, \beta')$  ne soit pas un minimum pour cette valeur  $\lambda_1$ , c'est-à-dire qu'on ait

$$F_{\lambda_1}(\beta, \beta') > F_{\lambda_1}(\alpha, \alpha').$$

En explicitant F on trouve, tous calculs faits, la condition

$$(7) \quad \frac{(|\alpha'| + |\beta'|)^\omega - |\alpha'|^\omega}{|\alpha|^\omega - (|\alpha| - |\beta|)^\omega} < \frac{|\beta'|^\omega - |\alpha'|^\omega}{|\alpha|^\omega - |\beta|^\omega},$$

qui devient pour  $\omega = 1$

$$(7 \text{ bis}) \quad |\beta' \alpha| + |\beta \alpha'| < 2|\beta \beta'|.$$

On peut encore écrire cette condition en introduisant les rapports positifs :  $\frac{\alpha}{\beta} = m$ ,  $-\frac{\beta'}{\alpha'} = n$ ,

$$\frac{(n+1)^\omega - 1}{n^\omega - 1} < \frac{m^\omega - (m-1)^\omega}{m^\omega - 1}.$$

L'étude de la variation des fonctions constituant chacun des membres montre qu'il existe effectivement des nombres  $m$  et  $n$  ( $1 \leq m < 2$ ,  $1 < n$ ) vérifiant cette inégalité et que, par suite, il peut exister pour certains tableaux des minima de  $f$  non minima de F.



17. J'indique, pour terminer, une limite supérieure du minimum de  $F_\lambda$ ; déterminons  $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta')$  de façon que  $\lambda$  soit compris entre  $\sqrt{\left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right|^\omega}$ ,  $\sqrt{\left|\frac{\beta'}{\beta}\right|^\omega}$ . De l'identité

$$\begin{aligned} & \left(\lambda |\alpha|^\omega + \frac{1}{\lambda} |\alpha'|^\omega\right) \left(\lambda |\beta|^\omega + \frac{1}{\lambda} |\beta'|^\omega\right) \\ &= 2(|\alpha\beta'|^\omega + |\beta\alpha'|^\omega) + \left(\lambda |\alpha|^\omega - \frac{1}{\lambda} |\alpha'|^\omega\right) \left(\lambda |\beta|^\omega - \frac{1}{\lambda} |\beta'|^\omega\right), \end{aligned}$$

on déduit dans ce cas l'inégalité

$$\left(\lambda |\alpha|^\omega + \frac{1}{\lambda} |\alpha'|^\omega\right) \left(\lambda |\beta|^\omega + \frac{1}{\lambda} |\beta'|^\omega\right) \leq 2(|\alpha\beta'|^\omega + |\beta\alpha'|^\omega) \leq 2|\Delta(T)|^\omega.$$

L'un des facteurs du premier membre, et *a fortiori* le minimum de  $F_\lambda$ , est donc inférieur (') ou égal à  $\sqrt{2|\Delta(T)|^\omega}$ .

#### IV. — Suite de Minkowski et approximations.

18. Minkowski a indiqué (2), sous le nom de *Kette der primitiven Losungen*, un algorithme qui peut constituer une méthode de réduction des tableaux du deuxième ordre. Je montrerai qu'elle serait identique à l'application de la méthode générale pour  $\omega = 1$ . Toutefois, sous la forme indiquée par Minkowski, l'algorithme a l'avantage d'être lié aux questions d'approximations par des fractions.

J'indique d'abord quelques conséquences des propriétés des tableaux réduits. L'égalité donnant le déterminant de U et par suite celui de T

$$|\Delta(T)| = |\Delta(U)| = |\alpha\beta'| + |\beta\alpha'|,$$

peut s'écrire

$$\frac{|\Delta(T)|}{|\beta\beta'|} = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\alpha'}{\beta'}\right|.$$

(1) MINKOWSKI a indiqué des limites supérieures plus petites, suivant les différentes valeurs de  $\omega$ . HERMITE avait indiqué, dans le cas  $\omega = 2$ , une limite qui peut être effectivement atteinte.

(2) *Math. Ann.*, t. LIV, 1901, p. 91, ou *Diop. App.*, Chap. II, § 8, 9, 10, 12.

Si  $q$  désigne le quotient incomplet qui suit  $U$ , cette relation entraîne la limitation <sup>(1)</sup> de  $|\beta\beta'|$ ,

$$q < \frac{|\Delta(T)|}{|\beta\beta'|} < q + 2.$$

D'autre part, en appliquant à la même égalité la relation bien connue entre les moyennes géométrique et arithmétique, on trouve

$$|\alpha\beta'| \times |\beta\alpha'| \leq \frac{|\Delta(T)|^2}{4} \quad \text{ou} \quad |\alpha\alpha'| \times |\beta\beta'| \leq \frac{|\Delta(T)|^2}{4}.$$

Il en résulte que les coordonnées d'au moins l'un des points d'un tableau réduit vérifient l'inégalité

$$(8) \quad |\xi\xi'| \leq \frac{|\Delta(T)|}{2}.$$

19. Cette propriété prouve l'existence d'une infinité de solutions de cette inégalité (8) qu'on peut encore écrire, en mettant en évidence les indéterminées entières  $x, y$ ,

$$(8 \text{ bis}) \quad |ax + by| \times |a'x + b'y| \leq \left| \frac{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}}{2} \right|.$$

La suite de Minkowski est l'ensemble des solutions de cette inégalité, pour lesquelles  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux (solutions primitives), ces points étant rangés par ordre de grandeur croissante et décroissante de  $|\xi| = |ax + by|$ .

Je vais montrer que la suite de ces solutions primitives coïncide avec la suite des minima de la fonction d'Hermite

$$F = \lambda |ax + by| + \frac{1}{\lambda} |a'x + b'y|.$$

Prouvons d'abord qu'une solution  $\alpha = ax_1 + by_1$ ,  $\alpha' = a'x_1 + b'y_1$ , ( $\alpha > 0$ ) est une ligne d'un tableau réduit. Les entiers  $x_1, y_1$  étant pre-

---

<sup>(1)</sup> HERMITE a indiqué une propriété analogue (*Oeuvres*, t. I, p. 103).

miers, on peut trouver  $x_2, y_2$  tels que le tableau

$$\Sigma = \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ \pm x_2 + \iota x_1 & \pm y_2 + \iota y_1 \end{array}$$

soit unimodulaire quel que soit  $\iota$ . Tous les tableaux

$$\Sigma \times T = \begin{array}{cc} \alpha & \alpha' \\ \pm \beta + \iota \alpha & \pm \beta' + \iota \alpha' \end{array}$$

sont équivalents à T. Déterminons  $\iota$  de façon qu'on ait  $0 < \beta + \iota \alpha < \alpha$ , et posons

$$\beta_1 = \beta + \iota \alpha, \quad \beta'_1 = \beta' + \iota \alpha'.$$

L'un des deux tableaux

$$\begin{array}{cc} \alpha & \alpha' \\ \beta_1 & \beta'_1 \end{array}, \quad \begin{array}{cc} \alpha & \alpha' \\ \alpha - \beta_1 & \alpha' - \beta'_1 \end{array},$$

est alors réduit, car on a d'une part

$$\frac{\alpha}{\beta_1} > 1, \quad \frac{\alpha}{\alpha - \beta_1} > 1;$$

d'autre part, en explicitant la valeur du déterminant de  $\Sigma \times T$  et en se servant de l'hypothèse, on trouve l'inégalité

$$\left| \frac{\beta'_1}{\alpha'} - \frac{\beta_1}{\alpha} \right| \geq 2,$$

qui entraîne l'une des inégalités

$$-\frac{\beta'_1}{\alpha'} \geq 2 - \frac{\beta_1}{\alpha} > 1$$

ou

$$-\frac{\alpha' - \beta'_1}{\alpha'} \geq 2 - \frac{\alpha - \beta_1}{\alpha} > 1.$$

Pour compléter la démonstration, cherchons dans quel cas un minimum  $(\beta, \beta')$  de  $f$  n'est pas solution de (8). Il faut et il suffit qu'on ait

$$|\beta\beta'| > \frac{|\Delta(T)|}{2} \quad \text{ou} \quad 2|\beta\beta'| > |\alpha\beta'| + |\beta\alpha'|.$$

C'est précisément la condition nécessaire et suffisante pour que  $(\beta, \beta')$  ne soit pas minimum de F [condition (7 *bis*), n° 16].

20. L'inégalité (8 *bis*) donne une limite supérieure du minimum de la forme indéfinie représentée par le premier membre. En se plaçant à ce seul point de vue, on peut, en précisant la méthode, indiquer des limites plus petites et retrouver certains des résultats de MM. Korkine et Zolotarev <sup>(1)</sup>.

Soient deux tableaux réduits consécutifs U et U';  $(\alpha, \alpha')$ ,  $(\beta, \beta')$ ,  $(\gamma, \gamma')$  les points qui les constituent et  $q$  le quotient incomplet intermédiaire. La relation homographique  $\frac{\alpha}{\beta} = q + \frac{\gamma}{\beta}$  peut s'écrire en introduisant les points doubles

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta} - \theta}{\frac{\alpha}{\beta} - \theta'} = \lambda \frac{\frac{\beta}{\gamma} - \theta}{\frac{\beta}{\gamma} - \theta'},$$

$$\theta = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4}}{2}, \quad \lambda = -\frac{\theta'^2}{4}.$$

$$\theta' = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4}}{2},$$

Ceci montre que  $\frac{\alpha}{\beta}$  et  $\frac{\beta}{\gamma}$  sont séparés par  $\theta$ , par suite  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$  et  $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}$  sont séparés par  $\theta + \frac{1}{\theta} = \sqrt{q^2 + 4}$ . Or on peut écrire ces nombres en mettant en évidence  $\Delta(T)$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = |\Delta(T)| \frac{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}{\left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| + \left| \frac{\beta'}{\beta} \right|}, \quad \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} = |\Delta(T)| \frac{\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}{\left| \frac{\beta'}{\beta} \right| + \left| \frac{\gamma'}{\gamma} \right|}.$$

L'un de ces deux nombres étant supérieur à  $\delta = \sqrt{q^2 + 4}$  et l'autre

---

<sup>(1)</sup> *Math. Ann.*, t. VI, 1873.

inférieur, il en résulte que, parmi les trois quantités

$$\frac{|\alpha'|}{|\alpha|} - \frac{|\Delta(T)|}{\delta} \frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{|\beta'|}{|\beta|} - \frac{|\Delta(T)|}{\delta} \frac{1}{\beta^2}, \quad \frac{|\gamma'|}{|\gamma|} - \frac{\Delta(T)}{\delta} \frac{1}{\gamma^2},$$

l'une au moins est positive ou nulle, et l'une au moins négative ou nulle <sup>(1)</sup>. Donc parmi les trois nombres  $|\alpha\alpha'|$ ,  $|\beta\beta'|$ ,  $|\gamma\gamma'|$ , l'un au moins est supérieur ou égal et l'un au moins inférieur ou égal à  $\frac{|\Delta(T)|}{\sqrt{q^2+4}}$ .

On peut donc affirmer l'existence d'une infinité de points de  $\mathfrak{C}$  (nécessairement minima de  $f$ ) vérifiant l'inégalité

$$|\xi\xi'| \leq \frac{|\Delta(T)|}{\sqrt{5}}.$$

S'il existe une infinité de quotients incomplets égaux à 2, on peut remplacer  $\sqrt{5}$  par  $\sqrt{8}$ , et ainsi de suite. On pourrait encore appliquer le procédé précédent à la relation homographique qui lie deux quotients complets non nécessairement consécutifs, on trouverait ainsi d'autres limites supérieures pour  $|\xi\xi'|$  dans le cas où les quotients incomplets ne sont pas tous identiques.

21. Les résultats précédents peuvent s'interpréter comme approximations de l'irrationnelle  $\frac{b}{a}$  par des fractions, si la suite des tableaux réduits se termine à gauche par le tableau

$$\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ b & 1 \end{array}.$$

L'inégalité (8 bis) peut en effet s'écrire dans ce cas

$$\left| \frac{b}{a} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{2y^2}.$$

Les fractions  $\frac{x}{y}$  sont d'ailleurs les réduites du développement en frac-

---

<sup>(1)</sup> Voir une démonstration analogue de M. E. BOREL, *Analyse arithmétique du continu* (*Journal de Liouville*, 1903).

tion continue de  $\frac{b}{a}$ . La limite plus petite du numéro précédent conduit à l'approximation d'Hurwitz <sup>(1)</sup>  $\frac{1}{y^2\sqrt{5}}$ . Enfin la limitation de  $|\beta\beta'|$  indiquée au n° 18 prouve que si les quotients incomplets du développement de  $\frac{b}{a}$  sont limités <sup>(2)</sup>, on a, quelle que soit la fraction  $\frac{x}{y}$ ,

$$\left| \frac{b}{a} - \frac{x}{y} \right| > \frac{A}{y^2},$$

A étant un certain nombre fixe. Si les quotients incomplets augmentent indéfiniment, mais assez lentement <sup>(3)</sup> pour que le rapport  $\frac{(q_n)^\eta}{P_{n-1}}$  tende vers zéro, quel que soit le nombre positif  $\eta$ , il y a une infinité de fractions vérifiant l'inégalité

$$\left| \frac{b}{a} - \frac{x}{y} \right| < \frac{\varepsilon}{y^2},$$

quel que soit  $\varepsilon$ , mais seulement un nombre fini vérifiant

$$\left| \frac{b}{a} - \frac{x}{y} \right| < \frac{A}{y^{2+\eta}},$$

A et  $\eta$  étant des nombres positifs déterminés.

## V. — Réduction continue d'Hermite.

22. Hermite (*loc. cit.*) a fait une application de la méthode générale « de l'introduction des paramètres... » à la réduction des formes quadratiques binaires indéfinies. Cette méthode peut évidemment s'appliquer aux tableaux; mais, contrairement aux méthodes indiquées aux paragraphes III et IV, elle nécessite, en plus des minima de  $f$ , l'introduction d'autres points du module. Ceci tient à ce que, au lieu de déterminer

<sup>(1)</sup> *Math. Ann.*, t. XXXIX, 1891.

<sup>(2)</sup> C'est précisément ce qui se produit pour des irrationnelles du deuxième degré.

<sup>(3)</sup> C'est ce qui se passe pour certaines fonctions homographiques de  $e^{\frac{1}{n}}$ . Cf. *Comptes rendus*, 21 mars, 2 mai 1910.

des points  $(\alpha, \alpha')$ ,  $(\beta, \beta')$  tels que  $\lambda\alpha^2 + \frac{1}{\lambda}\alpha'^2$  et  $\lambda\beta^2 + \frac{1}{\lambda}\beta'^2$  soient minima simultanés, on les détermine de façon que ces expressions soient les coefficients extrêmes d'une forme

$$\lambda(\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{\lambda}(\alpha' x + \beta' y)^2,$$

réduite au sens de Gauss. Dans ce cas, l'un des coefficients seulement est en général un minimum de la forme.

Je vais d'abord indiquer comment on peut compléter la suite des tableaux réduits précédemment définie, par l'introduction de tableaux intermédiaires et en déduire une formation méthodique de tous les tableaux d'un système. J'indiquerai ensuite la relation avec la méthode de réduction continue (1).

23. Entre deux tableaux réduits consécutifs U, U', le quotient incomplet intermédiaire  $q$  étant supposé supérieur à 1, on intercalera des tableaux *réduits intermédiaires*, analogues aux réduites intermédiaires de Serret, et de la forme

$$U_k = \begin{array}{cc} \alpha - k\beta & \alpha' - k\beta' \\ \beta & \beta' \end{array} \quad [k = (1, 2, \dots, q-1)].$$

Je dirai que la suite ainsi obtenue est la *suite complète* des tableaux réduits, en y distinguant les tableaux réduits *principaux* et intermédiaires. Dans le cas d'un quotient incomplet égal à 1, il n'y a pas de réduit intermédiaire et, dans le cas où tous les quotients incomplets sont égaux à 1, la suite complète coïncide avec la suite des tableaux réduits principaux.

Les tableaux  $U_k$  font partie du système de tableaux; on peut en effet les déduire de U ou de U' par les égalités

$$U = \begin{array}{cc} 1 & k \\ 0 & 1 \end{array} \times U_k, \quad U_k = \begin{array}{cc} q-k & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \times U'.$$

---

(1) Au sujet de ces propriétés, voir une Note aux *Comptes rendus*, 6 juin 1910.

Leurs termes vérifient les conditions

$$(1 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0, \quad \frac{\alpha}{\beta} > 1, \\ \alpha' < 0, \quad \frac{\alpha'}{\beta'} < -1. \end{array} \right.$$

Réciproquement, si un tableau V équivalent à T vérifie ces conditions, on constate sans difficulté qu'on peut déterminer des nombres positifs  $k$  et  $q - k$  tels que U et U' déterminés par les égalités précédentes vérifient les conditions (1) et aient une ligne commune, c'est-à-dire soient réduits principaux consécutifs.

24. Deux tableaux V, V' de la suite complète ont une ligne commune. Le tableau  $\Theta$ , que j'appellerai *semi-réduit*, formé par les deux lignes non communes de V et V', appartient encore au système. On le déduit en effet de V' par l'une ou l'autre des égalités

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times V', \quad \Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times V',$$

suivant que V' est intermédiaire ou principal. En se servant de ces égalités, soit pour déterminer  $\Theta$ , soit pour déterminer V', on trouve que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tableau du système soit semi-réduit est que ses termes vérifient les inégalités

$$(1 \text{ ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, \quad \frac{a}{b} > 1, \\ 0 < \frac{a'}{b'} < 1. \end{array} \right.$$

Enfin de chaque tableau semi-réduit on peut déduire une infinité de tableaux T du système par l'égalité

$$T = \prod_{i=1}^{i=n} \begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \Theta$$

ou

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{q_1} \times \dots \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{q_{n-1}} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p+q_n} \times \Theta.$$



Les nombres  $q_i$  sont des entiers positifs en nombre  $n$  quelconque;  $p$  est également un nombre positif ou nul (il n'y a d'ailleurs intérêt à tenir compte de  $p$  que s'il n'y a aucun entier  $q$ ). Les termes d'un tableau T ainsi obtenu vérifient le système d'inégalités

$$(1^{IV}) \quad \begin{cases} a > 0, & \frac{a}{b} > 1, \\ & \frac{a'}{b'} > 1. \end{cases}$$

D'autre part, en suivant la méthode indiquée au n° 13 du paragraphe II pour trouver un tableau réduit équivalent à un tableau donné, on démontre que tout tableau du système au signe près et à l'ordre près des lignes, c'est-à-dire à une multiplication près par l'un des tableaux

$$\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{array}, \quad \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array},$$

peut être obtenu de la façon précédente à partir d'un certain tableau  $\Theta$ , et ceci d'une seule manière. On obtient donc ainsi un classement et une formation méthodique de tous les tableaux d'un système.

25. Considérons maintenant un tableau réduit ou semi-réduit et la forme quadratique associée d'Hermite :

$$F(x, y) = \left( \lambda \alpha^2 + \frac{1}{\lambda} \alpha'^2 \right) x^2 + 2 \left( \lambda \alpha \alpha' + \frac{1}{\lambda} \beta \beta' \right) xy + \left( \lambda \beta^2 + \frac{1}{\lambda} \beta'^2 \right) y^2.$$

Je vais chercher s'il existe des valeurs de  $\lambda$  telles que l'une des deux formes  $F(x, y)$ ,  $F(y, x)$  soit réduite au sens de Gauss. Supposons par exemple U réduit intermédiaire; quel que soit  $\lambda$ , on a [conditions (1 bis)]

$$\lambda \alpha^2 + \frac{1}{\lambda} \alpha'^2 > \lambda \beta^2 + \frac{1}{\lambda} \beta'^2,$$

$F(x, y)$  n'est jamais réduite et, pour que  $F(y, x)$  le soit, il faut et il suffit que  $\lambda$  vérifie les inégalités

$$-\left( \lambda \beta^2 + \frac{1}{\lambda} \beta'^2 \right) < 2 \left( \lambda \alpha \beta + \frac{1}{\lambda} \alpha' \beta' \right) < \lambda \beta^2 + \frac{1}{\lambda} \beta'^2.$$

Ces inégalités sont équivalentes après simplification à

$$(9) \quad \frac{\alpha'^2 - (\beta' + \alpha')^2}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha^2} < \lambda^2 < \frac{(\alpha' - \beta')^2 - \alpha'^2}{\alpha^2 - (\alpha - \beta)^2}.$$

En tenant compte des conditions (1 bis), on peut vérifier les inégalités

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha'^2 - (\beta' + \alpha')^2 < (\alpha' - \beta')^2 - \alpha'^2, \\ (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 &> \alpha^2 - (\alpha - \beta)^2 > 0, \end{aligned}$$

qui prouvent l'existence de l'intervalle trouvé pour  $\lambda^2$ .

26. En faisant une discussion analogue pour les différents cas qui peuvent se présenter, on aboutit aux résultats résumés dans le tableau suivant :

Si le tableau est :	Forme réduite.	Inégalités.
<i>Intermédiaire</i> .....	$F(y, x)$	(9)
<i>Principal</i> , la première ligne n'étant pas un minimum de F.....	Id.	(9)
<i>Principal</i> , la deuxième ligne n'étant pas un minimum de F.....	$F(x, y)$	(9 bis)
<i>Principal</i> , les deux lignes étant des minima de F.	$\begin{cases} F(x, y) & \text{si } \lambda^2 < \frac{\beta'^2 - \alpha'^2}{\alpha^2 - \beta^2} \\ F(y, x) & \text{si } \lambda^2 > \frac{\beta'^2 - \alpha'^2}{\alpha^2 - \beta^2} \end{cases}$	(9 ter)
<i>Semi-réduit</i> , déduit de deux tableaux principaux, la ligne commune n'étant pas un minimum de F.....	Id.	(9 <sup>iv</sup> )

les inégalités (9), (9 bis), (9 ter), (9<sup>iv</sup>) étant :

$$\begin{aligned} (9) \quad & \frac{\alpha'^2 - (\beta' + \alpha')^2}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha^2} < \lambda^2 < \frac{(\alpha' - \beta')^2 - \alpha'^2}{\alpha^2 - (\alpha - \beta)^2}, \\ (9 \text{ bis}) \quad & \frac{\beta'^2 - (\beta' + \alpha')^2}{(\alpha + \beta)^2 - \beta^2} < \lambda^2 < \frac{(\alpha' - \beta')^2 - \beta'^2}{\beta^2 - (\alpha - \beta)^2}, \\ (9 \text{ ter}) \quad & \frac{\beta'^2 - (\beta' + \alpha')^2}{(\alpha + \beta)^2 - \beta^2} > \lambda^2 > \frac{(\alpha' - \beta')^2 - \alpha'^2}{\alpha^2 - (\alpha - \beta)^2}, \\ (9^{\text{iv}}) \quad & \frac{\beta'^2 - (\alpha' - \beta')^2}{(\alpha - \beta)^2 - \beta^2} < \lambda^2 < \frac{(\alpha' - \beta')^2 - \alpha'^2}{\alpha^2 - (\alpha - \beta)^2}. \end{aligned}$$

Dans tous les autres cas, les formes  $F(x, y)$ ,  $F(y, x)$  ne peuvent être réduites.

27. On est ainsi amené à intercaler, dans la suite complète, des tableaux semi-réduits entre chaque couple de tableaux principaux successifs (s'ils existent) dont la ligne commune n'est pas un minimum de  $F$ . On constate alors que les différents intervalles de variation de  $\lambda^2$  définis pour chacun de ces tableaux sont contigus et « payent » tout intervalle intérieur à  $(0, \infty)$ .

On obtient donc ainsi la propriété suivante : *Si  $\lambda$  varie en croissant ou décroissant à partir d'une valeur initiale  $\lambda_0$ , pour chacune de ses valeurs il existe une forme réduite*

$$F(x, y) = \lambda (z \cdot x + \beta y)^2 + \frac{1}{\lambda} (z' x + \beta' y)^2,$$

*équivalente à la forme d'Hermite associée à T et la suite des tableaux*  
 $\begin{smallmatrix} \alpha & x' \\ \beta & \beta' \end{smallmatrix}$  *— à l'ordre près des lignes — est identique à la suite complète, après addition, s'il y a lieu, de certains tableaux semi-réduits.*

Cette propriété précise la relation entre la méthode de réduction employée précédemment et la réduction continue. La façon dont elle a été établie permettrait même de retrouver un certain nombre de propriétés de la réduction continue.

28. Ce résultat donne encore un procédé pour trouver une forme définie réduite équivalente à une forme donnée, ou, ce qui revient au même, un tableau équivalent à un tableau T à colonnes imaginaires conjuguées (*voir* n° 1, Ch. II). Il suffit de former la suite complète des tableaux réduits équivalents au tableau à termes réels (*voir* n° 13)

$$T = \begin{smallmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{smallmatrix}.$$

On cherchera ensuite, parmi les intervalles définis par les inégalités (9), celui qui contient la valeur  $\lambda = 1$ .

Ceci explique pourquoi on représente quelquefois T par le module de points réels  $\tau_1$  de base  $T_1$ . Toutefois ce module présente une différence essentielle avec le module qu'on emploierait pour la réduction du tableau réel  $T_1$ . Une dilatation faite sur T ne fait subir, aux points de  $\tau_1$ , qu'une homothétie et une rotation par rapport à l'origine. Par

suite on peut prendre, comme unique parallélogramme réduit, celui qui a les plus petits côtés; cette condition, invariante pour une dilatation sur T, ne le serait plus pour une dilatation opérée sur  $T_1$ <sup>(1)</sup>.

### CHAPITRE III.

#### RÉDUCTION DES TABLEAUX DU TROISIÈME ORDRE.

---

#### PREMIÈRE PARTIE.

##### TABLEAUX A TERMES RÉELS.

---

#### I. — Ensemble des minima.

1. Je vais m'occuper dans cette première Partie des tableaux du troisième ordre à termes réels de la forme

$$T = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

La forme associée est une forme ternaire du troisième ordre, décomposable

$$\Phi = (ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z)(a''x + b''y + c''z).$$

On peut représenter les points du module  $\bar{\omega}$  ayant T pour base par les sommets d'un réseau de parallélipèdes.

Je me servirai encore de la fonction limite  $f$  (pour la valeur  $\omega = \infty$ ), en supposant le produit des paramètres  $\lambda, \lambda', \lambda''$  égal à 1. Cette fonction, que je représenterai par  $f_{\lambda, \lambda', \lambda''}(\xi, \xi', \xi'')$  ou  $f_{\lambda}(\xi, \xi', \xi'')$ , est égale

---

<sup>(1)</sup> Ces considérations s'étendent sans difficulté au cas des tableaux d'ordre  $n$ . On peut employer des considérations analogues pour la recherche du nombre d'unités différentes d'un corps (voir Chap. IV).

au plus grand des trois nombres

$$\lambda|\xi|, \quad \lambda'|\xi'|, \quad \lambda''|\xi''|.$$

Enfin, je ne considérerai que les points de  $\mathfrak{E}$  dont la première coordonnée est positive.

2. Il sera commode d'avoir une représentation géométrique d'un système de paramètres  $\lambda, \lambda', \lambda''$ . Je le représenterai par un point M d'un plan ayant pour distances (en grandeur et signe) à trois droites concourantes faisant entre elles des angles de  $\frac{2\pi}{3}$  (voir *fig. 1* et *5*) :  $\log \lambda, \log \lambda', \log \lambda''$ . Comme on a

$$\log \lambda + \log \lambda' + \log \lambda'' = 0 \quad (\lambda, \lambda', \lambda'') > 0,$$

cette représentation est possible et est univoque. Un tel plan avec ce système de repères sera dit *plan des  $\lambda$* . Pour éviter l'ambiguïté,  $\lambda, \lambda', \lambda''$  seront dits *les paramètres de M* (au lieu des coordonnées). Au contraire, un point de  $\mathfrak{E}$  sera toujours représenté par ses trois coordonnées.

3. Pour simplifier l'exposé, je supposerai dans ce qui suit, comme je l'avais déjà fait pour le cas général, qu'il n'existe aucune relation linéaire, homogène à coefficients entiers entre les termes d'une même colonne de T. Dans ce cas, il ne peut exister deux points de  $\mathfrak{E}$  ayant leur première coordonnée positive et deux coordonnées de même rang de même valeur absolue.

A chaque point P du plan des  $\lambda$  correspond au moins un point de  $\mathfrak{E}$  pour lequel  $f$  est minimum. Il n'y aura pas lieu, d'après la propriété précédente, de distinguer de minimum proprement dit et pour un point P, il y aura au plus trois minima simultanés.

4. On peut démontrer la même propriété que dans le cas du deuxième ordre : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$  de  $\mathfrak{E}$  ( $\alpha > 0$ ) soit un minimum de  $f$ , pour certains points du plan des  $\lambda$ , est qu'il n'existe aucun point  $(\xi, \xi', \xi'')$  de  $\mathfrak{E}$  vérifiant les inégalités*

$$0 < \xi \leq \alpha, \quad |\xi'| \leq |\alpha'|, \quad |\xi''| \leq |\alpha''|,$$

*sauf le point nul  $(0, 0, 0)$ .*

Pour montrer que la condition est suffisante, je considérerai le point P, dont les paramètres sont solutions des équations

$$\lambda\alpha = \lambda'|\alpha'| = \lambda''|\alpha''|, \quad \lambda\lambda'\lambda'' = 1.$$

Un point quelconque de  $\mathfrak{C}$  vérifie au moins l'une des inégalités

$$|\xi| > \alpha, \quad \text{ou} \quad |\xi'| > |\alpha'|, \quad \text{ou} \quad |\xi''| > |\alpha''|,$$

et par suite au moins l'une des inégalités

$$\begin{aligned} \lambda|\xi| > \lambda\alpha = f_P(\alpha, \alpha', \alpha''), \quad \lambda'|\xi'| > \lambda'|\alpha'| = f_P(\alpha, \alpha', \alpha''), \\ \lambda''|\xi''| > \lambda''|\alpha''| = f_P(\alpha, \alpha', \alpha''). \end{aligned}$$

On a donc, quel que soit  $(\xi, \xi', \xi'')$ ,

$$f_P(\xi, \xi', \xi'') > f_P(\alpha, \alpha', \alpha''),$$

ce qui montre qu'au point P,  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$  est minimum et même est le seul minimum.

Ce minimum  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$  est obtenu par un choix entre un nombre fini de points de  $\mathfrak{C}$ ; par raison de continuité, il reste donc minimum pour les points voisins de P et, par suite, dans un domaine du plan des  $\lambda$  dont je vais me proposer de déterminer les limites (1).

5. J'indique d'abord une remarque géométrique essentielle pour la suite. Les points ayant pour paramètres

$$\left(\frac{l}{l^2}, l'l, l''l\right), \quad \left(l, \frac{l}{l^2}, l''l\right), \quad \left(l, l'l, \frac{l''}{l^2}\right),$$

où  $l$  est une variable supérieure à 1, constituent trois demi-droites issues du point  $M(l, l', l'')$  et perpendiculaires aux axes de coordonnées (voir *fig. 1*). Je les désignerai par  $Mx, My, Mz$ .

Ceci posé, le point P ayant pour paramètres  $(l, l', l'')$ , pour tout point de la demi-droite  $Px$ , on a

$$\lambda'|\alpha'| = \lambda''|\alpha''| > \lambda\alpha$$

(1) Pour le cas du deuxième ordre, la détermination analogue avait été faite dans la démonstration même du théorème.

et, par suite,

$$f(\alpha, \alpha', \alpha'') = \lambda' |\alpha'| = \lambda'' |\alpha''|.$$

Déterminons le point  $(\beta, \beta', \beta'')$  de  $\mathfrak{c}$  par les conditions

$$|\beta'| < |\alpha'|, \quad |\beta''| < |\alpha''|, \quad \beta > 0 \text{ et minimum,}$$

et considérons le segment PA de Px défini par l'inégalité

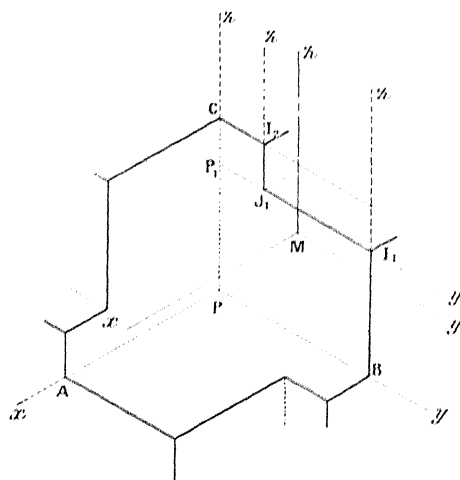
$$(PA) \quad \lambda' |\alpha'| - \lambda'' |\alpha''| < \lambda \beta.$$

Du choix du point  $(\beta, \beta', \beta'')$  il résulte qu'un point quelconque de  $\mathfrak{c}$  vérifie au moins une des inégalités

$$|\xi'| > |\alpha'|, \quad \text{ou} \quad |\xi''| > |\alpha''|, \quad \text{ou} \quad |\xi| \geq \beta.$$

Donc  $f(\xi, \xi', \xi'')$  est supérieure à l'un au moins des nombres  $\lambda\beta$ ,

Fig. 1.



$\lambda' |\alpha'|$ ,  $\lambda'' |\alpha''|$ , de sorte qu'en tout point de PA on a

$$f(\xi, \xi', \xi'') > f(\alpha, \alpha', \alpha''),$$

et  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$  est minimum. Au contraire, en tout point de Ax prolongement de PA, on a

$$f(\beta, \beta', \beta'') < f(\alpha, \alpha', \alpha''),$$

et  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$  n'est plus minimum. Au point A,  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ ,  $(\beta, \beta', \beta'')$  sont minima simultanés.

On déterminerait de même B et C sur Py, Pz correspondant aux points  $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ ,  $(\delta, \delta', \delta'')$  définis par les conditions

$$\begin{aligned} 0 < \gamma < \alpha, & \quad |\gamma''| < |\alpha''|, & \quad |\gamma'| \text{ minimum,} \\ 0 < \delta < \alpha, & \quad |\delta'| < |\alpha'|, & \quad |\delta''| \text{ minimum.} \end{aligned}$$

Cherchons maintenant les points de l'angle (Py, Pz) appartenant au domaine de  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ . Pour tout point de cet angle, on a

$$f(\alpha, \alpha', \alpha'') = \lambda\alpha,$$

et pour tout point extérieur au parallélogramme construit sur PC, PB,  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$  n'est plus minimum, car on a au moins une des inégalités

$$\lambda\alpha > f(\gamma, \gamma', \gamma'') \quad \text{ou} \quad \lambda\alpha > f(\beta, \beta', \beta'').$$

On peut affirmer en outre qu'en tout point de la demi-bande (Pz, PB, Bz), un minimum de  $f$  doit nécessairement vérifier les inégalités

$$0 < \xi < \alpha, \quad |\xi'| < |\gamma'|.$$

Choisissons, parmi les points vérifiant ces conditions, celui,  $(x_1, x'_1, x''_1)$ , dont la troisième coordonnée est minimum en valeur absolue; on aura nécessairement

$$|x''_1| \leq |\delta''|.$$

En tout point de la demi-bande situé entre PB et la droite I<sub>1</sub>P<sub>1</sub> parallèle à BP d'équation

$$(I_1P_1) \quad \lambda\alpha = \lambda''|x''_1|,$$

$(\alpha, \alpha', \alpha'')$  est minimum. Il peut se faire que le parallélogramme ainsi défini coïncide avec le précédent ( $x''_1 = \delta''$ ), sinon l'on a

$$|x''_1| < |\delta''|, \quad |\gamma'| > |x'_1| > |\alpha'|.$$

Déterminons sur P<sub>1</sub>I<sub>1</sub> un point J<sub>1</sub> par les équations

$$(J_1) \quad \lambda\alpha = \lambda'|x'_1| = \lambda''|x''_1|.$$



La demi-bande  $(P_1z, P_1J_1, J_1z)$  jouit des mêmes propriétés que la demi-bande précédente; on la limitera par une droite  $P_2I_2$  en cherchant un point  $(x_2, x'_2, x''_2)$  tel que

$$0 < x_2 < z, \quad |x'_2| < |x'_1|, \quad |x''_2| \text{ minimum,}$$

et ainsi de suite. On aboutira nécessairement au point  $(\delta, \delta', \delta'')$ , car tous les points  $(x, x', x'')$  vérifient les inégalités

$$x < z, \quad |x'| < |z'|, \quad |x''| \leq |\delta''|,$$

et sont par suite en nombre fini.

Donc tous les points de l'angle  $(Py, Pz)$  appartenant au domaine de  $(z, z', z'')$  sont compris entre PB, PC, et une certaine ligne brisée  $BI_1J_1I_2 \dots C$  dont les côtés sont alternativement parallèles à PC et BP. On déterminerait de même les points des angles  $(Pz, Px)$ ,  $(Px, Py)$  et le domaine total est un polygone d'un seul tenant entourant P.

6. Les points  $(\beta, \beta', \beta'')$ ,  $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ ,  $(\delta, \delta', \delta'')$  et les différents points  $(x, x', x'')$  sont aussi des minima pour  $f$  et leurs domaines sont contigus à celui de  $(z, z', z'')$ . Il en résulte que les sommets du polygone, domaine de  $(z, z', z'')$ , sont de trois natures :

1° Les points A, B, C (angles sortants) pour lesquels il y a deux minima simultanés, la valeur de  $f$  étant donnée par deux coordonnées de  $(z, z', z'')$ ;

2° Les points  $J_1, J_2, \dots$  (angles rentrants) pour lesquels il y a deux minima simultanés, la valeur de  $f$  étant donnée par deux coordonnées de  $(x, x', x'')$ ; ce sont par suite des sommets de la première nature pour le domaine de  $(x, x', x'')$ ;

3° Les points  $I_1, I_2, I_3, \dots$  (au moins trois) pour lesquels il y a trois minima simultanés; ils sont de même nature pour les domaines des minima voisins.

On voit ainsi comment s'enchaînent les domaines des divers minima. Il reste à montrer, comme pour le deuxième ordre, qu'il suffit d'un nombre fini de ces domaines pour couvrir une aire limitée quelconque. Pour cela, enfermons cette aire à l'intérieur d'un hexagone H formé

par les droites  $(P_1y, P_1z)$ ,  $(P_2z, P_2x)$ ,  $(P_3x, P_3y)$ ;  $P_1, P_2, P_3$  étant des points convenablement choisis de paramètres  $(l_1, l'_1, l''_1)$ ,  $(l_2, l'_2, l''_2)$ ,  $(l_3, l'_3, l''_3)$ . Soit alors un point  $(a_1, a'_1, a''_1)$  du module vérifiant les inégalités

$$a_1 > \frac{1}{l_1}, \quad |a'_1| < \frac{1}{l'_1}, \quad |a''_1| < \frac{1}{l''_1}.$$

A l'intérieur de l'angle  $(P_1y, P_1z)$  et par suite à l'intérieur de H, on a

$$f(a_1, a'_1, a''_1) = \lambda a_1.$$

Soient de même deux points  $(a_2, a'_2, a''_2)$ ,  $(a_3, a'_3, a''_3)$  de  $\mathfrak{c}$  tels qu'à l'intérieur de H on ait

$$f(a_2, a'_2, a''_2) = \lambda |a'_2|, \quad f(a_3, a'_3, a''_3) = \lambda |a''_3|.$$

Pour qu'un point  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$  du module soit minimum à l'intérieur de H, il est alors nécessaire qu'on ait

$$\alpha < a_1, \quad |\alpha'| < |a'_2|, \quad |\alpha''| < |a''_3|.$$

Il n'y a donc qu'un nombre fini de minima intérieurs à H. En augmentant H indéfiniment dans tous les sens, on obtient l'ensemble de tous les minima de  $f$ , classés, dans un plan, suivant les grandeurs des nombres

$$\frac{| \alpha \alpha' \alpha'' |^{\frac{1}{3}}}{\alpha}, \quad \frac{| \alpha \alpha' \alpha'' |^{\frac{1}{3}}}{|\alpha'|}, \quad \frac{| \alpha \alpha' \alpha'' |^{\frac{1}{3}}}{|\alpha''|} \quad (\text{paramètres de P}).$$

## II. — Ensemble des tableaux réduits.

7. Conformément aux conditions générales (A) <sup>(1)</sup>, à chaque sommet I commun à trois domaines nous ferons correspondre un tableau U

<sup>(1)</sup> Sur les propriétés du paragraphe II, cf. MINKOWSKI, *Ann. de l'École Normale*, 1896. On trouve précisément dans cet article les conditions de réduction citées plus loin.

constitué par les trois minima simultanés en ce point I :

$$U = \begin{array}{ccc} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{array}.$$

Par analogie avec le deuxième ordre, nous prendrons pour première, deuxième et troisième ligne les points pour lesquels la valeur de  $f$  est obtenue pour la première, deuxième et troisième coordonnée. Les termes de  $U$  vérifient alors *a priori* les inégalités

$$(1) \quad (\alpha, \beta, \gamma) > 0, \quad \begin{array}{l} \alpha > \beta \quad |\beta'| > |\alpha'| \quad |\gamma''| > |\alpha''| \\ \alpha > \gamma \quad |\beta'| > |\gamma'| \quad |\gamma''| > |\beta''| \end{array}.$$

Dans le cas où  $\Delta(U)$  n'est pas nul,  $U$  est un tableau du module et sera dit *réduit*. Si  $\Delta(U) = 0$ ,  $U$  sera dit *réduit de deuxième espèce*; d'après la méthode générale, il conviendrait de le remplacer par un tableau à déterminant non nul ayant avec le premier deux lignes communes. Pour la symétrie des notations, je considérerai, en même temps que tout tableau réduit de deuxième espèce, un premier, deuxième et troisième tableau *réduits adjoints* :

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ V_1 = \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ V_2 = \beta_1 & \beta'_1 & \beta''_1 \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ V_3 = \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma_1 & \gamma'_1 & \gamma''_1 \end{array}.$$

Ces tableaux devront vérifier les inégalités (1), avoir un déterminant non nul, et ces conditions étant remplies,  $\alpha_1, |\beta'_1|, |\gamma''_1|$  seront choisis les plus petits possibles. Étant donnée l'hypothèse du n° 3, ils sont ainsi bien déterminés.

8. Considérons des tableaux  $U, V_1, V_2$  ou  $V_3$  formés de trois points du module et vérifiant les inégalités (1). Il résulte presque immédiatement des définitions que :

1° Pour que  $U$  soit réduit de première ou de deuxième espèce, il faut et il suffit que tout point <sup>(1)</sup> de  $\bar{c}$  vérifie l'une au moins des inégalités

$$|\xi| > \alpha, \quad \text{ou} \quad |\xi'| > |\beta'|, \quad \text{ou} \quad |\xi''| > |\gamma''|;$$

---

(1) Sauf le point (0, 0, 0).

2° Pour que  $V_1$  soit un premier réduit adjoint <sup>(1)</sup>, il faut et il suffit que tout point de  $\mathfrak{E}$  n'appartenant pas au sous-module  $\mathfrak{N}$  de dimension 2 contenant  $(\beta, \beta', \beta'')$ ,  $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ , vérifie l'une au moins des inégalités

$$|\xi| > z_1, \quad \text{ou} \quad |\xi'| > |\beta'|, \quad \text{ou} \quad |\xi''| > |\gamma''|;$$

tandis qu'au contraire il existe un point de  $\mathfrak{N}$   $(z, z', z'')$  vérifiant simultanément les inégalités

$$0 < z < z_1, \quad |z'| < |\beta'|, \quad |z''| < |\gamma''|.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre au troisième ordre la propriété d'équivalence des tableaux réduits (propriété qui ne paraît pas s'étendre au  $n^{\text{ième}}$  ordre) : *Tout tableau réduit de première espèce et tout tableau réduit adjoint à un tableau de deuxième espèce sont équivalents à T.*

Supposons par exemple U de première espèce, il y a une base T' de  $\mathfrak{E}$  de la forme  $S^{-1}U$ ,  $S^{-1}$  étant de la forme (4) (Chap. I, n° 7). Posons

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{p}{d} & 0 & 0 \\ \frac{p'}{d} & \frac{q}{d} & 0 \\ \frac{p''}{d} & \frac{q'}{d} & \frac{r}{d} \end{pmatrix} \propto U = \begin{pmatrix} a_1 & a'_1 & a''_1 \\ b_1 & b'_1 & b''_1 \\ c_1 & c'_1 & c''_1 \end{pmatrix},$$

$p, p', p'' = q, q' = r$  et  $d$  étant des entiers vérifiant les conditions

$$\frac{pqr}{d^3} = \frac{1}{d}, \quad \left| \frac{p'}{d} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{p}{d}, \quad \left| \frac{q'}{d} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{q}{d}, \quad \frac{r}{d} > 0,$$

et tels, en outre, que S soit à termes entiers. Le même procédé que pour le deuxième ordre permet de montrer que  $\frac{p}{d}$  et  $\frac{q}{d}$  sont égaux à 1.

Si  $d$  est différent de 1, supposons d'abord l'une au moins des frac-

---

(1) On a évidemment des conditions analogues pour le deuxième et le troisième adjoint.

tions  $\left|\frac{p''}{d}\right|, \left|\frac{q'}{d}\right|$ , par exemple la première, inférieure à  $\frac{1}{2}$ . On devrait alors avoir

$$\frac{p''}{d} \leq \frac{d-2}{2d} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \left|\frac{p''}{d}\right| < \frac{d-1}{2d} \\ \left|\frac{q'}{d}\right| < \frac{d-1}{2d} \end{cases},$$

suivant que  $d$  est pair ou impair. On en déduirait ou

$$|c_1| = \left| \frac{p''}{d} \alpha + \frac{q'}{d} \beta + \frac{1}{d} \gamma \right| \leq \frac{d-2}{2d} \alpha + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{d} \gamma < \alpha$$

ou

$$|c_1| < \frac{d-1}{2d} \alpha + \frac{d-1}{2d} \beta + \frac{1}{d} \gamma < \alpha,$$

et de même

$$|c'_1| < |\beta'|, \quad |c''_1| < |\gamma''|,$$

et ce cas est impossible. Supposons alors

$$\left|\frac{p''}{d}\right| = \left|\frac{q'}{d}\right| = \frac{1}{2};$$

on peut disposer de  $T'$  de façon que les deux systèmes de trois nombres  $\frac{p''}{d}, \frac{q'}{d}, \frac{1}{d}; -\frac{p''}{d}, -\frac{q'}{d}, -\frac{1}{d}$  ne présentent aucun des arrangements de signe présentés par les termes des colonnes de U. On aurait encore dans ce cas

$$|c_1| = \left| \frac{p''}{d} \alpha + \frac{q'}{d} \beta + \frac{1}{d} \gamma \right| < \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \alpha = \alpha,$$

et de même

$$|c'_1| < |\beta'|, \quad |c''_1| < |\gamma''|.$$

Ce cas est donc encore impossible; donc  $d=1$  et  $T'$  est identique à U <sup>(1)</sup>.

On peut faire une démonstration analogue pour le troisième réduit adjoint, en remarquant que les inégalités  $|c_1| < \alpha, |c'_1| < |\beta'|, |c''_1| < |\gamma''|$

---

(1) Cf. pour des démonstrations analogues : HERWITZ, *Gott. Nach.*, 1897; MINKOWSKI, *Diop. App.* (*Adaptation eines Zahlengitter*), etc.

sont encore impossibles, car  $(c_1, c'_1, c''_1)$  n'appartient pas au module  $\mathfrak{M}\left(\frac{r}{d} \neq 0\right)$ . Dans le cas du premier et du deuxième adjoint, on utiliserait des égalités de la forme

$$\begin{array}{ccc} \frac{r}{d} & \frac{q'}{d} & \frac{p''}{d} \\ \mathbf{T}' = 0 & \frac{q}{d} & \frac{p'}{d} \times \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{T}' = \frac{p''}{d} & \frac{r}{d} & \frac{q'}{d} \times \mathbf{V}_2. \\ 0 & 0 & \frac{p}{d} \end{array}$$

9. Considérons maintenant un tableau U-ou V équivalent à T et dont les termes vérifient les inégalités (1).

I. *Pour qu'un tel tableau soit réduit de première espèce, il faut et il suffit que ses termes présentent l'un des arrangements de signe <sup>(1)</sup> (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>), (A<sub>3</sub>), (B<sub>1</sub>), (B<sub>2</sub>) et vérifient les systèmes de conditions correspondantes :*

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} + & \varepsilon & \eta \\ (\mathbf{A}_1) + & -\varepsilon & \eta, \\ + & \varepsilon & -\eta \end{array} & \begin{array}{ccc} + & \varepsilon & \eta \\ (\mathbf{A}_2) + & -\varepsilon & -\eta, \\ + & -\varepsilon & \eta \end{array} & \begin{array}{ccc} + & \varepsilon & \eta \\ (\mathbf{A}_3) + & \varepsilon & -\eta; \\ + & -\varepsilon & -\eta \end{array} \\ (\mathbf{A}_1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta + \gamma \\ |\alpha'| > |\gamma'| \quad \text{ou} \quad |\alpha''| > |\beta''| \end{array} \right. & (\mathbf{A}_2) \left\{ \begin{array}{l} |\beta'| < |\alpha'| + |\gamma'| \\ \beta > \gamma \quad \text{ou} \quad |\beta''| > |\alpha''| \end{array} \right. & (\mathbf{A}_3) \left\{ \begin{array}{l} |\gamma''| < |\alpha''| + |\beta''| \\ \gamma > \beta \quad \text{ou} \quad |\gamma'| > |\alpha'| \end{array} \right. \\ \begin{array}{ccc} + & \varepsilon & \eta \\ (\mathbf{B}_1) + & -\varepsilon & \eta, \\ + & -\varepsilon & -\eta \end{array} & \begin{array}{ccc} + & \varepsilon & \eta \\ (\mathbf{B}_2) + & -\varepsilon & -\eta; \\ + & \varepsilon & -\eta \end{array} & \\ (\mathbf{B}_1) \left\{ \begin{array}{l} \gamma > \beta, \quad \text{ou} \quad |\alpha'| > |\gamma'|, \quad \text{ou} \quad |\beta''| > |\alpha''|; \\ \beta > \gamma, \quad \text{ou} \quad |\gamma'| > |\alpha'|, \quad \text{ou} \quad |\alpha''| > |\beta''|. \end{array} \right. & & \end{array}$$

II. *Pour qu'un tel tableau soit le premier, deuxième ou troisième réduit adjoint d'un tableau de deuxième espèce, il faut et il suffit que ses*

<sup>(1)</sup> Dans ces conditions les lettres  $\varepsilon, \eta$  désignent le double signe  $\pm$  sans qu'il y ait de relation entre les signes ainsi désignés.

termes présentent l'un des arrangements de signe  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  ou  $(A_3)$  et vérifient les conditions :

$$\begin{aligned} (A'_1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha > \beta + \gamma \\ |\alpha'| > |\gamma'| \quad \text{ou} \quad |\alpha''| > |\beta''| \end{array} \right\}, \quad (A'_2) \left\{ \begin{array}{l} |\beta'| > |\alpha'| + |\gamma'| \\ \beta > \gamma \quad \text{ou} \quad |\beta''| > |\alpha''| \end{array} \right\}, \\ (A'_3) \left\{ \begin{array}{l} |\gamma''| > |\alpha''| + |\beta''| \\ \gamma > \beta \quad \text{ou} \quad |\gamma'| > |\alpha'| \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Il est d'abord impossible que deux lignes de U ou de V :  $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ ,  $(\beta, \beta', \beta'')$  aient les mêmes signes, sinon le point de  $\mathfrak{C}$   $(\alpha - \beta, \alpha' - \beta', \alpha'' - \beta'')$ , distinct du point nul, vérifierait les inégalités

$$|\alpha - \beta| < \alpha, \quad |\alpha' - \beta'| < |\beta'|, \quad |\alpha'' - \beta''| < \max. (|\alpha''|, |\beta''|) < |\gamma''|.$$

La considération du point de  $\mathfrak{C}$   $(\beta + \gamma - \alpha, \beta' + \gamma' - \alpha', \beta'' + \gamma'' - \alpha'')$ , distinct du point nul, puisque  $\Delta(U) \neq 0$ , montre de même que tout tableau V ou U ne peut présenter que l'un des cinq arrangements de signes indiqués.

Considérons l'un des arrangements de signes  $(B_i)$ ; le même raisonnement appliqué au point  $(\alpha - \beta + \gamma, \alpha' - \beta' + \gamma', \alpha'' - \beta'' + \gamma'')$ , dont les valeurs absolues des coordonnées sont :  $(\alpha + \gamma - \beta, |\beta'| + |\alpha'| - |\gamma'|, |\gamma''| + |\beta''| - |\alpha''|)$ , montre que les conditions  $(B_i)$  sont nécessaires pour tout tableau U ou V. De même, pour l'un des arrangements  $A_i$ , la considération du point  $(\alpha - \beta - \gamma, \alpha' - \beta' - \gamma', \alpha'' - \beta'' - \gamma'')$  montre que la deuxième condition  $(A_i)$  est nécessaire pour tout tableau U ou V, tandis que, en se servant du point  $(\beta + \gamma, \beta' + \gamma', \beta'' + \gamma'')$ , on montre que la première condition  $(A_i)$  est nécessaire seulement pour tout tableau U. (Ce point appartient en effet au sous-module  $\mathfrak{M}$ .)

Réciproquement, soit un tableau équivalent à T, de la forme  $(B_i)$  et vérifiant les conditions  $(B_i)$ . Tout point de  $\mathfrak{C}$  a des coordonnées de la forme :

$$x\alpha + y\beta + z\gamma, \quad x\alpha' + y\beta' + z\gamma', \quad x\alpha'' + y\beta'' + z\gamma'',$$

et une discussion simple montre que, suivant les cas, on a, quels que soient  $x, y, z$ , les valeurs  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  exceptées,

$$\begin{aligned} |x\alpha + y\beta + z\gamma| > \alpha, \quad \text{ou} \quad |x\alpha' + y\beta' + z\gamma'| > |\beta'|, \\ \text{ou} \quad |x\alpha'' + y\beta'' + z\gamma''| > |\gamma''|. \end{aligned}$$

Un tel tableau est donc réduit de première espèce. Il en est de même de la forme et des conditions ( $A_1$ ).

Il est donc nécessaire qu'un premier tableau réduit adjoint  $V_1$  soit de la forme ( $A_1$ ) et vérifie les conditions ( $A'_1$ ); le même raisonnement que pour les tableaux de première espèce montre que ces conditions sont suffisantes. En outre, le tableau réduit de deuxième espèce auquel est adjoint  $V$  est

$$\begin{array}{ccc} \beta + \gamma & \beta' + \gamma' & \beta'' + \gamma'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{array}.$$

La démonstration précédente s'étend évidemment, par un simple changement de lettres, à la forme ( $B_2$ ) et aux formes ( $A_2$ ), ( $A_3$ ). En rapprochant les différents résultats obtenus pour les premier, deuxième et troisième adjoints, on trouve que tout *tableau réduit de deuxième espèce présente un des arrangements de signe*

$$(C) \quad \begin{array}{ccc} + & \varepsilon & \eta \\ + & \varepsilon & -\eta \\ + & -\varepsilon & \eta \end{array}$$

*et vérifie les égalités*

$$(C) \quad \begin{cases} \alpha = \beta + \gamma, \\ \alpha' = \beta' + \gamma', \\ \alpha'' = \beta'' + \gamma''. \end{cases}$$

10. Ces différentes conditions permettent de trouver un résultat important pour la valeur de  $\Delta(U)$  ou de  $\Delta(V)$  qui, d'après le dernier théorème du n° 8, est aussi égale à  $\Delta(T)$ . Considérons, par exemple, le cas ( $B_1$ ); les six termes du développement de  $\Delta(U)$  ont pour signe  $\varepsilon\eta$ , sauf le terme  $\beta\gamma'\alpha''$ . Mais, d'après les conditions ( $B_1$ ), on a une des trois inégalités

$$\begin{aligned} |\beta\gamma'\alpha''| < |\gamma\gamma'\alpha''| < |\gamma\beta'\alpha''|, \quad \text{ou} \quad |\beta\gamma'\alpha''| < |\beta\alpha'\alpha''| < |\beta\alpha'\gamma''|, \\ \text{ou} \quad |\beta\gamma'\alpha''| < |\beta\gamma'\beta''| < |\alpha\gamma'\beta''|. \end{aligned}$$

Le déterminant a donc pour signe  $\varepsilon\eta$  et est supérieur en valeur absolue à son terme principal  $\alpha\beta'\gamma''$ . On trouve le même résultat pour



le cas (A<sub>4</sub>), car les six termes sont de signe de  $\varepsilon\eta$ , à l'exception de  $\alpha\beta''\gamma'$ , qui vérifie l'une des inégalités

$$|\alpha\beta''\gamma'| < |\beta\beta''\gamma'| + |\gamma\beta''\gamma'| < |\beta\gamma''\alpha'| + |\gamma\beta''\alpha'|$$

ou

$$|\alpha\beta''\gamma'| < |\beta\beta''\gamma'| + |\gamma\beta''\gamma'| < |\beta\alpha''\gamma'| + |\gamma\alpha''\beta'|.$$

Enfin, pour le cas (A<sub>1</sub>), en supposant par exemple  $|\alpha'_1| > |\gamma'|$ , on a

$$\begin{aligned} |\Delta(V)| &> |\alpha_1\beta'\gamma''| + |\beta\gamma''\alpha'_1| + |\gamma\beta''\alpha'_1| - |\alpha_1\beta''\gamma'| \\ &> |\alpha_1\beta'\gamma''| + |\beta\beta''\gamma'| + |\gamma\beta''\gamma'| - |\alpha_1\beta''\gamma'| \end{aligned}$$

ou

$$|\Delta(V)| > |\alpha_1\beta'\gamma''| + (\beta + \gamma - \alpha_1)|\beta''\gamma'| > |(\beta + \gamma)\beta'\gamma''|.$$

En remarquant que  $\beta + \gamma$  est un terme du tableau réduit auquel est adjoint V, on peut énoncer le résultat général : *Dans tout tableau réduit de première ou de deuxième espèce, on a*

$$(2) \quad |\alpha\beta'\gamma''| < |\Delta(T)|.$$

11. Cette inégalité permet encore de trouver une limite supérieure du minimum de  $f$  pour un point quelconque M de paramètres  $\lambda, \lambda', \lambda''$ . Supposons, par exemple,

$$f_M(\alpha, \alpha', \alpha'') = \lambda\alpha,$$

et choisissons un sommet I du domaine de M, tel que M soit intérieur à l'angle (I $\gamma'$ , I $\alpha'$ ). En désignant par  $(\beta, \beta', \beta'')$ ,  $(\gamma, \gamma', \gamma'')$  les autres minima au point I, on conclut de la condition précédente

$$\lambda\alpha \leq \lambda'|\beta'|, \quad \lambda\alpha \leq \lambda''|\gamma''|.$$

Mais, d'autre part, on peut écrire l'inégalité (2)

$$|\lambda\alpha.\lambda'\beta'.\lambda''\beta''| < |\Delta(T)|,$$

d'où l'on déduit (1)

$$f_M(\alpha, \alpha', \alpha'') < \sqrt[3]{|\Delta(T)|}.$$

---

(1) Pour plus amples développements sur ce sujet, voir la question analogue pour le deuxième ordre (Chap. II, n° 7). Il est à remarquer que la propriété n'a été démontrée dans le cas présent que pour un module n'ayant pas de point sur les axes de coordonnées.

## III. — Enchaînement des tableaux réduits.

12. Les points I du plan des  $\lambda$ , auxquels nous avons fait correspondre des tableaux réduits, forment un réseau de points, reliés par des lignes brisées <sup>(1)</sup> (voir *fig.* 5). On peut donc dire aussi que l'ensemble des tableaux réduits a été ordonné en un *réseau de tableaux*. De chaque point I partent trois lignes brisées dont le deuxième sommet après I est un nouveau point du réseau. On obtient ainsi trois points I', I'', I''' qu'on peut appeler *voisins* de I et, par suite, trois tableaux voisins d'un tableau donné.

La ligne brisée II' séparant les domaines de deux points minima, les deux tableaux U et U' ont deux points communs, le premier point de U, par exemple, n'appartenant plus à U'. En outre, II' ayant entre I et I' un sommet de la nature A, B ou C pour l'un des domaines, de la nature J pour l'autre, l'un des points communs à U et U' occupe le même rang dans les deux tableaux, l'autre occupant des rangs différents.

13. Afin de n'avoir que des tableaux équivalents entre eux, on peut convenir de remplacer chaque tableau de deuxième espèce U par ses trois adjoints  $V_1, V_2, V_3$ . Le tableau  $V_1$  sera considéré comme le voisin de celui des voisins de U qui ne contient pas le premier point de celui-ci; de même pour  $V_2$  et  $V_3$ . En outre  $V_1, V_2, V_3$  seront voisins entre eux. Ceci revient, au point de vue de la représentation géométrique, à remplacer chaque point I correspondant à un tableau U de deuxième espèce, par un petit triangle dont les sommets correspondraient respectivement à  $V_1, V_2, V_3$ .

Deux tableaux voisins de ce nouveau réseau, suivant qu'ils correspondent à des points différents ou à un même point, sont liés par une égalité de l'une des deux formes

$$\begin{array}{ccc} m & l & \pm 1 \\ \text{U} = \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \times \text{U}' & \text{ou} & \begin{array}{ccc} m & \pm 1 & l \\ \text{V} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \times \text{V}', \end{array}$$

(1) Pour des classements analogues, voir CHARVE, *Annales de l'École Normale*, 1880.



d'une forme (A) (première espèce ou adjoint), et les signes des  $x$  sont

$$\varepsilon' \varepsilon_1, \quad -\varepsilon' \varepsilon_2, \quad -\varepsilon' \varepsilon_3;$$

$\varepsilon'$  étant déterminé de façon que les termes de la première colonne de  $U'$  soient positifs. En désignant par  $\varepsilon''$  un signe à déterminer, écrivons les égalités (4) sous la forme

$$(5) \quad \varepsilon'' x_i = \eta a_i - l u_i + m v_i.$$

En multipliant les deux premières égalités (5) par  $\varepsilon_1$  et  $-\varepsilon_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon' \varepsilon'' |x_1| &= |a_1| - l |u_1| + m |v_1|, \\ \varepsilon' \varepsilon'' |x_2| &= |a_2| + l |u_2| - m |v_2|. \end{aligned}$$

De ces égalités on conclut que  $l$  et  $m$  doivent être de même signe, et  $m$  positif et non nul pour que les inégalités (3<sup>ter</sup>) soient vérifiées. La troisième égalité (5) multipliée par  $-\varepsilon_3$  peut alors s'écrire

$$\varepsilon' \varepsilon'' |x_3| = \mp |a_3| + l |u_3| + m |v_3|,$$

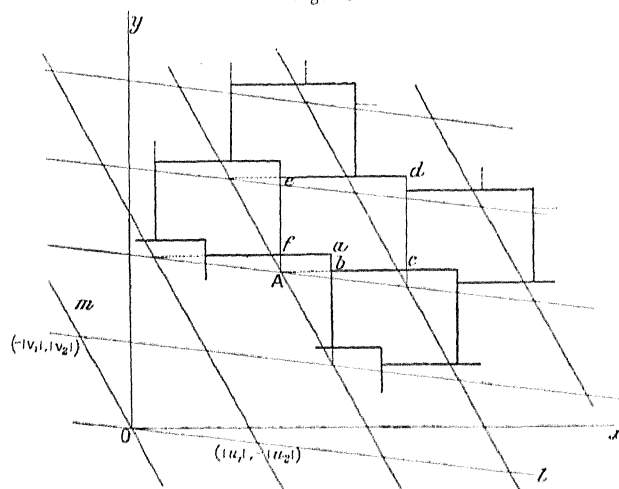
ce qui prouve que  $\varepsilon' \varepsilon'' = +1$  ou  $\varepsilon' = \varepsilon''$ . D'autre part,  $U'$  étant d'une forme (A), en plus des conditions (5<sup>ter</sup>), on doit avoir  $|x_1| > |v_1|$  ou  $|x_2| > |u_2|$ . Donc *il est nécessaire que  $l$  et  $m$  ( $l \geq 0$ ,  $m > 0$ ) vérifient les conditions*

$$(6) \quad \begin{aligned} &0 < |a_1| - l |u_1| + m |v_1| < |u_1|, \\ &0 < |a_2| + l |u_2| - m |v_2| < |v_2|, \\ &\left\{ \begin{array}{l} |a_1| - l |u_1| + m |v_1| > |v_1| \\ \text{ou} \\ |a_2| + l |u_2| - m |v_2| > |u_2|. \end{array} \right. \end{aligned}$$

En utilisant une remarque déjà faite sur l'unicité de la solution, pour montrer que ces conditions (6) sont suffisantes, il suffit de montrer qu'elles sont vérifiées par un et un seul système de valeurs entières de  $l$  et  $m$ . C'est ce qui résulte de considérations géométriques simples. Les nombres  $l|u_1| - m|v_1|$ ,  $-l|u_2| + m|v_2|$  sont les coordonnées des sommets d'un réseau de parallélogrammes. Les conditions (6) expriment, en supposant  $l$  et  $m$  déterminés, que le

point  $(|a_1|, |a_2|)$  est à l'intérieur d'un certain hexagone <sup>(1)</sup>  $abcdef$  (voir *fig. 2*), à côtés parallèles aux axes de coordonnées, et relatif au sommet A du réseau. Les divers hexagones relatifs à tous les points

Fig. 2.



du réseau et déduits de l'un d'eux par translation recouvrent le plan sans trou ni duplication, le point  $(|a_1|, |a_2|)$  est donc à l'intérieur d'un seul d'entre eux qui donne l'unique solution des inégalités (6).

On pourrait employer cette méthode géométrique ou une discussion directe pour trouver une méthode arithmétique de recherche de  $l$  et  $m$ . J'indiquerai seulement la méthode suivante : en se servant des mineurs de  $U$  ou des termes de  $U^{-1}$ , on peut d'abord déterminer  $L$  et  $M$  tels que

$$\begin{cases} \eta a_1 = L u_1 + M v_1 \\ \eta a_2 = L u_2 + M v_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} |a_1| = L |u_1| + M |v_1| \\ |a_2| = L |u_2| + M |v_2| \end{cases}$$

On cherchera ensuite deux entiers  $l_1$  et  $m_1$  tels que  $|L - l_1|$  et  $|M + m_1|$  soient inférieurs à  $\frac{1}{2}$  et les entiers  $l$  et  $m$  seront donnés par l'une des trois formules :

$$\begin{cases} l_1 - \rho \\ m_1 - \rho \end{cases}, \quad \begin{cases} l_1 - \rho \\ m_1 - \rho - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} l_1 - \rho - 1 \\ m_1 - \rho \end{cases},$$

<sup>(1)</sup> La construction de cet hexagone est indiquée sur la figure.

$\rho$  étant un entier positif ou nul et inférieur à la plus petite des parties entières de

$$\frac{2|u_1|}{|u_1| - |v_1|}, \quad \frac{2|v_2|}{|v_2| - |u_2|}.$$

16. *Deuxième cas* :  $\frac{u_1}{v_1} \cdot \frac{u_3}{v_3} < 0$ ,  $\frac{u_1}{v_1} \cdot \frac{u_2}{v_2} < 0$ . — Les signes des  $u$ , des  $v$  et des  $a$  sont respectivement

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3; \quad \varepsilon\varepsilon_1, \quad -\varepsilon\varepsilon_2, \quad -\varepsilon\varepsilon_3; \quad \eta\varepsilon_1, \quad \pm\eta\varepsilon_2, \quad \mp\eta\varepsilon_3,$$

en prenant le signe supérieur ou inférieur suivant que U est d'une forme (A) ou (B). Le tableau U' peut être *a priori* de l'une de ces deux formes, mais n'est pas adjoint, car le tableau formé par les points  $(u_1, u_2, u_3)$ ,  $(v_1, v_2, v_3)$ ,  $(u_1 - \varepsilon v_1, u_2 - \varepsilon v_2, u_3 - \varepsilon v_3)$  ne présente pas l'arrangement de signes (C). Suivant que U est d'une forme (A) ou (B), nous écrirons les égalités (4) sous la forme

$$(7) \quad \varepsilon'' x_i = \eta a_i - l u_i + m \varepsilon v_i,$$

$$(8) \quad \varepsilon'' x_i = \eta a_i + l u_i - m \varepsilon v_i.$$

Une discussion analogue à celle du cas précédent montre qu'on doit avoir, suivant la forme de U,

$$\begin{aligned} l &\geq 0, & m &\geq 0, \\ l &\geq -1, & m &\geq 1. \end{aligned}$$

$\varepsilon'\varepsilon_i$  étant le signe de  $x_i$ ,  $\varepsilon'\varepsilon''$  est égal à  $\mp 1$  suivant que U et U' sont de même forme ou de forme différente. Enfin, *il est nécessaire que l et m vérifient l'un des systèmes de conditions* (le double signe étant déterminé, comme plus haut, par la forme de U)

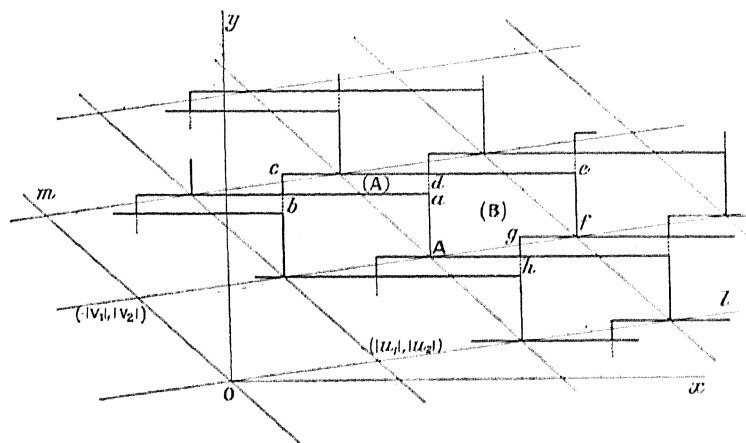
$$(9) \quad \begin{cases} 0 > \pm |a_1| - l |u_1| + m |v_1| > - |u_1|, \\ |v_2| - |u_2| < |a_2| - l |u_2| - m |v_2| < |v_2|; \end{cases}$$

$$(9 \text{ bis}) \quad \begin{cases} 0 < \pm |a_1| - l |u_1| + m |v_1| < |u_1|, \\ 0 < |a_2| - l |u_2| - m |v_2| < |v_2|, \\ \left\{ \begin{array}{l} \pm |a_1| - l |u_1| + m |v_1| < |v_1|, \\ \text{ou} \\ |a_2| - l |u_2| - m |v_2| > |u_2|. \end{array} \right. \end{cases}$$

Suivant que  $l$  et  $m$  vérifient les conditions (9) ou (9 bis), le tableau U' sera d'une forme (A) ou (B).

Employons toujours la même représentation géométrique; les conditions (9) expriment que le point  $(\pm|a_1|, |a_2|)$  est intérieur à un certain rectangle  $abcd$  (voir *fig. 3*) et les conditions (9 bis) expriment que ce

Fig. 3.



point est intérieur à un certain hexagone  $Adefgh$  adjacent au rectangle. L'ensemble de ces deux figures constitue un octogone  $Abcdefgh$ , et les divers octogones relatifs à toutes les valeurs de  $l$  et  $m$  recouvrent le plan sans trou ni duplication. Le point  $(\pm|a_1|, |a_2|)$  est donc à l'intérieur d'un seul d'entre eux qui donne la solution unique de l'un des systèmes d'inégalités (9) ou (9 bis).

La méthode arithmétique indiquée dans le premier cas se simplifie dans le cas présent. On détermine encore les entiers  $L, M$  et les entiers  $l_1$  et  $m_1$ . Les entiers cherchés sont alors un des sept systèmes de nombres :

$$\begin{array}{ccccccc} l_1 & l_1 - 1 & l_1 + 1 & l_1 & l_1 - 1 & l_1 - 2 & l_1 + 1, \\ m_1 & m_1 & m_1 - 1 & m_1 - 1 & m_1 - 1 & m_1 - 1 & m_1 - 2. \end{array}$$

17. *Troisième cas* :  $\frac{u_1}{v_1} \cdot \frac{u_3}{v_3} > 0$ . — Les signes des  $u$ , des  $v$  et des  $a$  sont respectivement :

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3; \quad \varepsilon\varepsilon_1, \quad -\varepsilon\varepsilon_2, \quad \varepsilon\varepsilon_3; \quad \eta\varepsilon_1, \quad -\eta\varepsilon_2, \quad -\eta\varepsilon_3;$$

U est de l'une des formes A, soit de première espèce, soit réduit adjoint. Le tableau U' peut être *a priori* de l'une des deux formes (A), (B), mais n'est pas réduit adjoint. Nous écrirons les égalités (4) sous la forme

$$(10) \quad \varepsilon'' x_i = r_i a_i + l u_i - m \varepsilon v_i;$$

on trouve cette fois les inégalités

$$l \geq -1, \quad m \geq 1, \quad l \leq m,$$

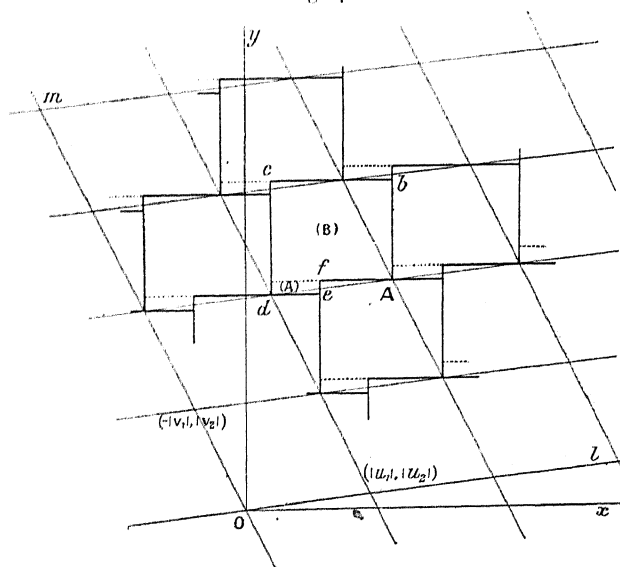
et en désignant par  $\varepsilon' \varepsilon_i$  le signe de  $x_i$ , on a  $\varepsilon' \varepsilon'' = 1$ . Enfin, *il est nécessaire que l et m vérifient l'un des systèmes de conditions*

$$(11) \quad \begin{cases} |v_1| - |u_1| > -|a_1| - l|u_1| + m|v_1| > -|u_1|, \\ 0 > |a_2| - l|u_2| - m|v_2| > -|u_2|; \end{cases}$$

$$(11 \text{ bis}) \quad \begin{cases} 0 > -|a_1| - l|u_1| + m|v_1| > -|u_1|, \\ 0 < |a_2| - l|u_2| - m|v_2| < |v_2|. \end{cases}$$

Suivant que  $l$  et  $m$  vérifient les inégalités (11) ou (11 bis) le tableau U' sera d'une forme (A) ou (B).

Fig. 4.



En considérant encore le réseau de parallélogrammes ayant pour sommets les points  $(l|u_1| - m|v_1|, l|u_2| + m|v_2|)$ , les conditions (11)



et (11 bis) expriment que le point  $(-|a_1|, |a_2|)$  est intérieur à un certain hexagone, formé de deux rectangles correspondant respectivement à chaque système de conditions (voir *fig. 4*). Les hexagones pavent le plan sans trou ni duplication, ce qui montre que les conditions précédentes sont suffisantes.

En déterminant encore L, M et les entiers  $l_1, m_1$ , les entiers cherchés sont alors l'un des six systèmes de nombres

$$\begin{array}{cccccc} l_1 & l_1 + 1 & l_1 + 1 & l_1 & l_1 - 1 & l_1 + 1, \\ m_1 & m_1 & m_1 - 1 & m_1 - 1 & m_1 - 1 & m_1 - 2. \end{array}$$

Dans le cas particulier où U est réduit de première espèce suivant qu'on a

$$\left| \frac{a_1}{v_1} \right| > 1 \quad \text{ou} \quad \left| \frac{a_1}{v_1} \right| < 1,$$

on a

$$\begin{array}{lll} l = 0, & m = 1 & \text{et } U' \text{ est d'une forme (B),} \\ l = 1, & m = 1 & \text{et } U' \text{ est d'une forme (A).} \end{array}$$

18. Pour deux tableaux voisins correspondant à un même point I, on est ramené au premier cas étudié. Par exemple, pour passer d'un premier à un deuxième adjoint, il suffit de poser

$$\begin{array}{lll} u_1 = \alpha, & v_1 = \gamma, & a_1 = \alpha_1, \\ u_2 = \alpha'', & v_2 = \gamma'', & a_2 = \alpha'_1, \\ u_3 = \alpha', & v_3 = \gamma', & a_3 = \alpha'_1, \end{array}$$

on se trouve bien dans les conditions de signe du premier cas. L'inégalité  $|v_3| > |a_3|$  n'est pas nécessairement vérifiée, mais on peut remarquer qu'il n'a pas été fait usage de cette inégalité pour le cas en question.

19. Il est à remarquer que, dans les trois cas et quelle que soit la méthode employée, il suffit pour calculer  $l$  et  $m$  de connaître les termes de deux colonnes convenablement choisies. On peut rapprocher ce fait de ce que, dans la réduction des tableaux du deuxième ordre, le quotient incomplet ne dépend que des rapports des termes d'une colonne.

On peut facilement appliquer l'algorithme précédent à chaque cas particulier. J'ai indiqué dans le tableau ci-dessous les différents cas qui peuvent se présenter et, pour chacun d'eux, les valeurs de  $u_1, u_2 - v_1, v_2$  et les formes particulières des équations (5), (7), (8) et (10).

$$\alpha \quad \alpha' \quad \alpha''$$

Le tableau primitif est  $\beta \quad \beta' \quad \beta''$ . La ligne nouvelle est  $x, x', x''$ .

$$\gamma \quad \gamma' \quad \gamma''$$

Pour les doubles signes le signe + correspond au cas où le tableau obtenu est d'une forme (A), le signe - au cas où il est d'une forme (B).

	Ligne	Tableau, supprimée.	Condition.	$u_1, u_2 - v_1, v_2$ .	Cas.	Colonne inutile.	Tableau obtenu.	Valeur de $x$ .
$\Lambda_1$	1 <sup>re</sup>	$\Lambda_1$ ou $\Lambda'_1$	$\beta > \gamma$	$\gamma'', \gamma - \beta'', \beta$	3 <sup>me</sup>	2	$\Lambda_3$ ou $B_1$	$\pm(-\alpha + l\gamma + m\beta)$
			$\beta < \gamma$	$\beta', \beta - \gamma', \gamma$			$\Lambda_2$ ou $B_2$	$\pm(-\alpha + l\beta + m\gamma)$
	2 <sup>me</sup>		$ \gamma'  >  \alpha' $	$\alpha, \alpha' - \gamma, \gamma'$	1 <sup>er</sup>	3	$\Lambda_3$ ou $\Lambda'_3$	$\beta - l\alpha + m\gamma$
			$ \gamma'  <  \alpha' $	$\gamma'', \gamma' - \alpha'', \alpha'$			$\Lambda_2$ ou $B_1$	$\beta + l\gamma + m\alpha$
	3 <sup>me</sup>		$ \beta''  >  \alpha'' $	$\alpha, \alpha'' - \beta, \beta''$	1 <sup>er</sup>	2	$\Lambda_2$ ou $\Lambda'_2$	$\gamma - l\alpha + m\beta$
			$ \beta''  <  \alpha'' $	$\beta', \beta'' - \alpha', \alpha''$			$\Lambda_3$ ou $B_2$	$\gamma + l\beta + m\alpha$
$\Lambda_2$	1 <sup>re</sup>		$\gamma > \beta$	$\beta', \beta - \gamma', \gamma$	1 <sup>er</sup>	3	$\Lambda_3$ ou $\Lambda'_3$	$\alpha + l\beta - m\gamma$
			$\gamma < \beta$	$\gamma'', \gamma - \beta'', \beta$			$\Lambda_1$ ou $B_2$	$\alpha - l\gamma - m\beta$
	2 <sup>me</sup>	$\Lambda_2$ ou $\Lambda'_2$	$ \gamma'  >  \alpha' $	$\alpha, \alpha' - \gamma, \gamma'$	3 <sup>me</sup>	3	$\Lambda_1$ ou $B_1$	$\beta + l\alpha - m\gamma$
			$ \gamma'  <  \alpha' $	$\gamma'', \gamma' - \alpha'', \alpha'$			$\Lambda_3$ ou $B_2$	$\beta - l\gamma + m\alpha$
	3 <sup>me</sup>		$ \alpha''  >  \beta'' $	$\beta', \beta'' - \alpha', \alpha''$	1 <sup>er</sup>	1	$\Lambda_1$ ou $\Lambda'_1$	$-\gamma + l\beta + m\alpha$
			$ \alpha''  <  \beta'' $	$\alpha, \alpha'' - \beta, \beta''$			$\Lambda_3$ ou $B_1$	$\pm(-\gamma + l\alpha - m\beta)$
$\Lambda_3$	1 <sup>re</sup>		$\beta > \gamma$	$\gamma'', \gamma - \beta'', \beta$	1 <sup>er</sup>	2	$\Lambda_2$ ou $\Lambda'_2$	$\alpha + l\gamma - m\beta$
			$\beta < \gamma$	$\beta', \beta - \gamma', \gamma$			$\Lambda_1$ ou $B_1$	$\alpha - l\beta - m\gamma$
	2 <sup>me</sup>		$ \alpha'  >  \gamma' $	$\gamma'', \gamma' - \alpha'', \alpha'$	1 <sup>er</sup>	1	$\Lambda_1$ ou $\Lambda'_1$	$-\beta + l\gamma + m\alpha$
			$ \alpha'  <  \gamma' $	$\alpha, \alpha' - \gamma, \gamma'$			$\Lambda_2$ ou $B_2$	$\pm(-\beta + l\alpha - m\gamma)$
	3 <sup>me</sup>	$\Lambda_3$ ou $\Lambda'_3$	$ \alpha''  >  \beta'' $	$\beta', \beta'' - \alpha', \alpha''$	3 <sup>me</sup>	1	$\Lambda_2$ ou $B_1$	$\gamma - l\beta + m\alpha$
			$ \alpha''  <  \beta'' $	$\alpha, \alpha'' - \beta, \beta''$			$\Lambda_1$ ou $B_2$	$\gamma + l\alpha - m\beta$
$B_1$	1 <sup>re</sup>		$\gamma > \beta$	$\beta', \beta - \gamma', \gamma$	1 <sup>er</sup>	3	$\Lambda_3$ ou $\Lambda'_3$	$\alpha + l\beta - m\gamma$
			$\gamma < \beta$	$\gamma'', \gamma - \beta'', \beta$			$\Lambda_1$ ou $B_2$	$\alpha - l\gamma - m\beta$
	2 <sup>me</sup>		$ \alpha'  >  \gamma' $	$\gamma'', \gamma' - \alpha'', \alpha'$	1 <sup>er</sup>	1	$\Lambda_1$ ou $\Lambda'_1$	$\beta + l\gamma + m\alpha$
			$ \alpha'  <  \gamma' $	$\alpha, \alpha' - \gamma, \gamma'$			$\Lambda_2$ ou $B_2$	$\pm(\beta + l\alpha - m\gamma)$
	3 <sup>me</sup>		$ \beta''  >  \alpha'' $	$\alpha, \alpha'' - \beta, \beta''$	1 <sup>er</sup>	2	$\Lambda_2$ ou $\Lambda'_2$	$\gamma - l\alpha + m\beta$
			$ \beta''  <  \alpha'' $	$\beta', \beta'' - \alpha', \alpha''$			$\Lambda_3$ ou $B_2$	$\gamma + l\beta + m\alpha$
$B_2$	1 <sup>re</sup>		$\beta > \gamma$	$\gamma'', \gamma - \beta'', \beta$	1 <sup>er</sup>	2	$\Lambda_2$ ou $\Lambda'_2$	$\alpha + l\gamma - m\beta$
			$\beta < \gamma$	$\beta', \beta - \gamma', \gamma$			$\Lambda_1$ ou $B_1$	$\alpha - l\beta - m\gamma$
	2 <sup>me</sup>		$ \gamma'  >  \alpha' $	$\alpha, \alpha' - \gamma, \gamma'$	1 <sup>er</sup>	3	$\Lambda_3$ ou $\Lambda'_3$	$\beta - l\alpha + m\gamma$
			$ \gamma'  <  \alpha' $	$\gamma'', \gamma' - \alpha'', \alpha'$			$\Lambda_2$ ou $B_1$	$\beta + l\gamma + m\alpha$
	3 <sup>me</sup>		$ \alpha''  >  \beta'' $	$\beta', \beta'' - \alpha', \alpha''$	1 <sup>er</sup>	1	$\Lambda_1$ ou $\Lambda'_1$	$\gamma + l\beta + m\alpha$
			$ \alpha''  <  \beta'' $	$\alpha, \alpha'' - \beta, \beta''$			$\Lambda_3$ ou $B_1$	$\pm(\gamma + l\alpha - m\beta)$

Les entiers  $l$  et  $m$  y sont positifs ou nuls,  $l$  pouvant exceptionnellement être égal à  $-1$ . On voit sur ces résultats que tout tableau réduit de deuxième espèce a pour voisins des tableaux de première espèce.

Il y aurait lieu, comme pour le deuxième ordre, d'étudier l'ensemble des couples d'entiers  $l$  et  $m$ , et de rapprocher la méthode suivie d'autres méthodes de réduction possibles. Pour le cas  $\omega = 2$  et après introduction de tableaux réduits intermédiaires, on serait probablement amené aux ensembles de tableaux étudiés par M. Charve.

Enfin, j'ai supposé qu'il n'existait aucune relation linéaire, homogène, à coefficients entiers entre les termes d'une colonne de T. A part quelques modifications relatives à la forme des domaines des minima, les considérations précédentes s'étendraient encore, en général, aux cas particuliers non envisagés.

## DEUXIÈME PARTIE.

### TABLEAUX AYANT UNE COLONNE A TERMES RÉELS ET DEUX COLONNES A TERMES IMAGINAIRES CONJUGUÉS.

20. Soient maintenant des tableaux de la forme

$$\mathbf{T} = \begin{array}{ccc|ccc} a & a' & \overline{a'} & a & a'_0 + ia'_1 & a'_0 - ia'_1 \\ b & b' & \overline{b'} & b & b'_0 + ib'_1 & b'_0 - ib'_1 \\ c & c' & \overline{c'} & c & c'_0 + ic'_1 & c'_0 - ic'_1 \end{array}$$

La forme associée est une forme ternaire indécomposable, produit d'une forme linéaire par une forme quadratique définie, somme de deux carrés. On peut représenter les points du module  $\mathfrak{z}$  ayant T pour base par les points réels du module  $\mathfrak{z}_1$  ayant pour base

$$\mathbf{T}_1 = \begin{array}{ccc} a & a'_0 & a'_1 \\ b & b'_0 & b'_1 \\ c & c'_0 & c'_1 \end{array}$$

Il y a lieu de faire la même restriction que pour le deuxième ordre (Chap. II, n° 28) au sujet des dilatations opérées sur  $\mathfrak{z}$  et  $\mathfrak{z}_1$ .

Dans la fonction limite  $f$  d'Hermite, il n'y a plus que deux paramètres arbitraires  $\lambda, \frac{1}{\lambda}$  et, pour un point  $(\xi, \xi', \overline{\xi'})$  de  $\mathfrak{C}$ , cette fonction que je représenterai par  $f_\lambda(\xi, \xi')$ , est égale au plus grand des deux nombres :

$$\lambda|\xi|, \quad \frac{1}{\lambda}|\xi'|.$$

21. Je supposerai encore qu'il n'existe aucune relation linéaire, homogène à coefficients entiers, entre les termes d'une même colonne de  $T$  et je ne considérerai que les points de  $\mathfrak{C}$  ayant leur première coordonnée positive. A chaque valeur de  $\lambda$  correspond au moins un minimum de  $f$ , mais il peut se faire qu'il en existe plusieurs ayant même valeur absolue pour la deuxième coordonnée. En faisant une convention analogue à celle déjà faite, dans le cas du deuxième ordre pour les minima proprement dits (Chap. II, n° 3), d'après l'hypothèse précédente, à une valeur de  $\lambda$  correspond au plus deux minima simultanés proprement dits.

Pour rechercher les points de  $\mathfrak{C}$  minima, on peut encore se servir de la propriété : *La condition nécessaire et suffisante pour que  $(\alpha, \alpha', \overline{\alpha'})$  de  $\mathfrak{C}$  soit un minimum proprement dit de  $f$  est qu'il n'existe aucun point  $(\xi, \xi', \overline{\xi'})$  de  $\mathfrak{C}$  vérifiant simultanément les inégalités*

$$0 < \xi \leq \alpha, \quad |\xi'| \leq |\alpha'|,$$

*sauf le point nul  $(0, 0, 0)$ .*

On peut faire la même démonstration que dans le cas du deuxième ordre (Chap. II, n° 3) en introduisant encore des minima  $(\beta, \beta', \overline{\beta'})$ ,  $(\gamma, \gamma', \overline{\gamma'})$  précédant et suivant le point donné, et des valeurs  $\lambda_1, \lambda_2$ . On est conduit aussi de la même façon à l'existence d'une suite des minima, qui, d'après l'hypothèse faite, est illimitée dans les deux sens.

22. Deux minima successifs de la suite constituent une matrice, que j'appellerai *réduite* :

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \alpha' & \overline{\alpha'} \\ \beta & \beta' & \overline{\beta'}. \end{array}$$

Ses termes vérifient *a priori* les inégalités

$$(12) \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha > \beta, \quad |\alpha'| < |\beta'|,$$

ce qui prouve que l'un des mineurs n'est pas nul. D'après les conditions (B), une telle matrice pourrait donc constituer les deux premières lignes d'un tableau réduit.

On peut encore démontrer, au sujet des matrices, des théorèmes analogues à ceux énoncés pour les tableaux réduits du deuxième ordre : 1° *Pour qu'une matrice de  $\mathfrak{E}$  vérifiant les conditions précédentes (12) soit réduite, il faut et il suffit que tout point  $(\xi, \xi', \overline{\xi'})$  de  $\mathfrak{E}$  vérifie au moins l'une des inégalités*

$$|\xi| > \alpha \quad \text{ou} \quad |\xi'| > |\beta'|.$$

2° *Si une matrice est réduite, ses deux points sont des points de base du sous-module  $\mathfrak{M}$  de dimension 2 qu'elle définit.*

Il faut entendre par là que, si l'on considère, dans un espace de dimension 2, un module type  $\mathfrak{M}'$  isomorphe holoédriquement à  $\mathfrak{M}$ , les correspondants des deux points de la matrice constituent une base de  $\mathfrak{M}'$ . Enfin on peut indiquer comme inégalité nécessaire, en plus des conditions (12),

$$(13) \quad \Re \left( \frac{\beta'}{\alpha'} \right) < \frac{1}{2}.$$

Il suffit, pour le montrer, de considérer le point de  $\mathfrak{M}$  de coordonnées  $(\alpha - \beta, \alpha' - \beta', \overline{\alpha} - \overline{\beta'})$ . De plus, on a ainsi les seules conditions nécessaires, qu'on peut exprimer par des inégalités entre les termes de la matrice. En effet, en procédant comme pour le cas du deuxième ordre, on montre que les inégalités (12) et (13) entraînent les conditions de la propriété 1° précédente pour tous les points de  $\mathfrak{M}$ .

23. Du classement des minima on déduit le rangement des matrices réduites en une suite doublement illimitée. On peut se proposer de déduire toutes les matrices de la suite d'un certain nombre d'entre elles. Ce problème peut se ramener au problème analogue traité pour les tableaux du troisième ordre à termes réels, en utilisant les résultats suivants :

I. Étant donné dans  $\mathfrak{E}$  un point minimum, le point correspondant de  $\mathfrak{E}_1$  est aussi un minimum.

II. Étant donnée une matrice réduite dans  $\mathfrak{E}$ , la matrice correspondante dans  $\mathfrak{E}_1$  peut être déduite d'un certain tableau réduit de  $\mathfrak{E}_1$  (de première ou de deuxième espèce) en supprimant la troisième ligne de ce tableau.

Ces propriétés sont des conséquences d'une remarque tout à fait analogue à celle qui a servi à montrer qu'un minimum de  $F$  était aussi un minimum de  $f$  (Chap. II, n° 14).

24. Pour avoir une suite de tableaux réduits, il faut ajouter une troisième ligne à chaque matrice réduite. On pourrait faire cette addition de façon qu'au tableau  $V$  ainsi obtenu corresponde dans  $\mathfrak{E}_1$  un tableau  $V_1$  réduit de première espèce ou adjoint à un tableau de deuxième espèce. Cette addition, d'après ce qui précède, est possible et d'une seule façon. En outre, d'après les relations qui lient respectivement  $T, T_1 - T_1, V_1 - V, V_1$ , le tableau  $V$  est équivalent à  $T$ .

On peut encore appliquer la méthode générale (conditions B). La valeur  $l$  étant déterminée par l'équation  $l\alpha = \frac{1}{7}|\beta'|$ , on peut déterminer un point  $u, u', \overline{u'}$  de  $\mathfrak{E}$  n'appartenant pas au sous-module  $\mathfrak{N}$  et tel que  $f_l(u, u')$  soit minimum. En cas d'ambiguïté, on ferait un choix comme pour un minimum ordinaire (n° 21). On obtient ainsi un tableau  $U[\Delta(U) \neq 0]$  et, étant donné un tel tableau, on vérifie aisément qu'il est nécessaire que tout point de  $\mathfrak{E}$  n'appartenant pas à  $\mathfrak{N}$  ne vérifie pas simultanément les inégalités

$$|\xi| < \max(\alpha, \beta, u), \quad |\xi'| < \max(|\alpha'|, |\beta'|, |u'|).$$

De cette propriété on déduit, en appliquant le même raisonnement qu'au Chapitre III, n° 8, que  $U$  est équivalent à  $T$ .

Le tableau  $U$  est donc aussi équivalent au tableau  $V$ , de sorte qu'ils sont liés par une égalité de la forme

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 0 & 0 \\ U = & 0 & 1 & 0 \\ & l & m & \pm 1 \end{array} \times V.$$

En cherchant à déterminer  $l$  et  $m$ , on serait conduit à un algorithme analogue à celui indiqué pour l'enchainement des tableaux à termes réels, mais on aurait dans le plan des variables complexes un pavage formé par des polygones curvilignes limités par des arcs de cercle.

## CHAPITRE IV.

### ORDRES D'ENTIERES ALGÈBRIQUES.

#### I. — Groupes abéliens de tableaux à termes entiers.

1. Je vais d'abord donner une application des principes indiqués au Chapitre I, paragraphe III, à l'étude des entiers des corps algébriques, ou des ordres d'entiers<sup>(1)</sup>. Considérons un tableau  $T$  à termes entiers<sup>(2)</sup>; son équation en  $\lambda$  est d'ordre  $n$ , à coefficients entiers, le coefficient de  $\lambda^n$  étant l'unité. Supposons cette équation irréductible, on peut mettre  $T$  sous la forme

$$T = A \times [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \times A^{-1};$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont des *entiers algébriques* conjugués d'ordre  $n$  et  $\Delta(T) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  est leur *norme* commune. Les rapports mutuels des termes de la première colonne de  $A$  sont des fonctions rationnelles de  $\lambda_1$ , à coefficients entiers, c'est-à-dire des nombres algébriques du corps  $K(\lambda_1)$ . Les rapports mutuels des termes des autres colonnes sont les nombres algébriques conjugués. On peut, en particulier, disposer de la dilatation arbitraire de façon que les termes de  $A$  soient des entiers conjugués et je supposerai qu'il en est toujours ainsi. Réciproquement, si l'on suppose  $A$  connu,  $\lambda_i$  est une fonction rationnelle entière, à coefficients entiers, des rapports des termes de la colonne de rang  $i$  de  $A$ .

2. Étant donné un tel tableau  $T$ , considérons l'ensemble de tous les

---

(1) Ordnung (Dedekind) ou Zahlring. Cf. HILBERT, *Jahresbericht* ..., 1894-1895, p. 237. Pour la bibliographie des ordres d'entiers algébriques je renvoie à ce dernier travail.

(2) Sur les matières du paragraphe I, cf. une Note aux *Comptes rendus*, 21 novembre 1910.

tableaux à termes entiers dont le produit par  $T$  soit commutatif. Ils admettent tous pour opérateur l'opérateur de  $T$ , soit  $A$ . Le produit de deux d'entre eux appartient à l'ensemble qui constitue par suite un *groupe abélien*  $G$ . Mais, en plus, la somme de deux tableaux de  $G$  appartient encore à  $G$  qui est donc aussi un *module de tableaux*.

En désignant par  $\varphi$  une fonction rationnelle à coefficients entiers, tout tableau de la forme  $\varphi(T)$  appartient donc à  $G$ , réciproquement tout tableau  $T'$  de  $G$  est de cette forme. En effet,  $\lambda'_i$  et  $\lambda_i$  étant respectivement des racines lambdaïques de  $T'$  et  $T$ ,  $\lambda'_i$  est une fonction rationnelle des rapports des termes de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ , qui sont eux-mêmes des fonctions rationnelles de  $\lambda_i$ . L'égalité  $\lambda'_i = \varphi(\lambda_i)$  entraîne alors l'égalité  $T' = \varphi(T)$ . Pour obtenir tous les tableaux de  $G$ , il suffit donc de chercher tous les tableaux de la forme  $\varphi(T)$ . D'après une remarque du n° 49, Chapitre I, il suffit de prendre pour  $\varphi$  toutes les fonctions de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 T + \dots + \alpha_{n-1} T^{n-1};$$

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  sont des fractions et l'on peut constater aisément que leurs dénominateurs sont limités.

3. Cette génération montre entre le groupe  $G$  et les modules types une relation que je vais essayer de préciser davantage. En désignant par  $[\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n]$  le tableau élémentaire d'un tableau quelconque de  $G$ , les nombres  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$  définissent des points d'un espace à  $n$  dimensions qui constituent un module  $\mathcal{G}$ . L'équation en  $\lambda$  de  $T$  n'ayant pas de racine double,  $\mathcal{G}$  est de dimension  $n$ ; il est aussi d'ordre  $n$ , car les inégalités

$$|\lambda'_1| < \varepsilon, \quad |\lambda'_2| < \varepsilon, \quad \dots, \quad |\lambda'_n| < \varepsilon$$

entraînent des limites supérieures pour les fonctions symétriques élémentaires de  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ ; ces fonctions étant des nombres entiers, les inégalités n'ont qu'un nombre fini de solutions.

$\mathcal{G}$  est donc un module type, et d'après l'hypothèse de l'irréductibilité de l'équation en  $\lambda$ , de  $T$ , il y a isomorphisme holoédrique entre  $\mathcal{G}$  et le module de tableaux  $G$ . D'après cette même hypothèse, il y a aussi isomorphisme holoédrique entre  $\mathcal{G}$  et le module de nombres  $\mathfrak{M}$ .



constitué par les premières coordonnées des points de  $\mathfrak{G}$ . Ce module est formé d'entiers algébriques d'un corps; il contient tous les entiers rationnels (correspondant aux systèmes simples dans  $G$ ), c'est donc un ordre d'entiers.  $\mathfrak{N}$  et  $G$  sont aussi isomorphes holoédriquement, considérés soit comme modules, soit comme groupes. Pour pouvoir considérer également  $\mathfrak{G}$  comme un groupe, il serait nécessaire de définir comme produit de deux points  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  le point  $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_n\beta_n)$ . Cette convention étant faite, on peut transporter aux modules de points les définitions données par Dedekind pour certains modules de nombres et notamment la notion d'idéal <sup>(1)</sup>. En adoptant la dénomination de J. König,  $\mathfrak{G}$ ,  $G$  et  $M$  sont des *domaines holoïdes*.

4. Réciproquement, considérons un ordre d'entiers algébriques  $\mathfrak{N}$ . En faisant correspondre à chacun des entiers de  $\mathfrak{N}$  le point de l'espace à  $n$  dimensions ayant pour coordonnées ce nombre et ses  $n - 1$  entiers conjugués, on obtient un module type de points  $\mathfrak{G}$ , isomorphe holoédriquement à  $\mathfrak{N}$ . En faisant correspondre à chaque point  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  de  $\mathfrak{G}$  le tableau élémentaire  $E = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ , les tableaux  $E$  forment encore un domaine holoïde, de même que tous les tableaux  $AEA^{-1}$ ,  $A$  étant un tableau quelconque.

Pour que tous les tableaux  $AEA^{-1}$  soient à termes entiers, il faut et il suffit que  $A$  soit, à une dilatation près, une base d'un idéal de  $\mathfrak{G}$ , ou encore que les termes de la première colonne de  $A$  constituent, à un facteur près, une base d'un idéal de  $\mathfrak{N}$ . D'après une remarque déjà faite, si  $AEA^{-1}$  est à coefficients entiers, on peut supposer  $A$  formé d'entiers algébriques conjugués

$$A = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha''_1 & \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha'_2 & \alpha''_2 & \dots & \alpha_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha'_n & \alpha''_n & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Ceci posé, nous devons chercher la condition pour que, quel que soit

---

<sup>(1)</sup> Un idéal de  $\mathfrak{G}$  est un sous-module  $\mathfrak{A}$  de dimension  $n$  de  $\mathfrak{G}$ , tel que le produit d'un point de  $\mathfrak{A}$  par un point quelconque de  $\mathfrak{G}$  appartienne à  $\mathfrak{A}$ .

le point  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  de  $\mathfrak{G}$ , on ait  $n^2$  égalités de la forme

$$\alpha_j^{(i)} \lambda_i = \alpha_1^{(i)} x_1^j + \alpha_2^{(i)} x_2^j + \dots + \alpha_n^{(i)} x_n^j \quad [i = (1, 2, \dots, n), j = (1, 2, \dots, n)],$$

$x_k^{(j)}$  étant des entiers. Pour cela, il faut et il suffit que, quels que soient les entiers  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , on puisse trouver des entiers  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  tels qu'on ait

$$\lambda_i (\alpha_1^i X_1 + \alpha_2^i X_2 + \dots + \alpha_n^i X_n) = \alpha_1^i Y_1 + \dots + \alpha_n^i Y_n.$$

En employant le langage de la théorie des modules, il faut et il suffit que le produit d'un point quelconque de  $\mathfrak{G}$  par un point du sous-module  $\mathfrak{A}$  ayant  $A$  pour base soit un point de  $\mathfrak{A}$ , c'est-à-dire que  $\mathfrak{A}$  soit un idéal de  $\mathfrak{G}$ .

5. La démonstration montre en outre que, si  $\mathfrak{A}$  est encore un idéal d'un ordre  $\mathfrak{N}'$  admettant  $\mathfrak{N}$  comme *sous-ordre* (ou *multiple*, d'après Dedekind), l'ensemble  $G$  de *tous* les tableaux à termes entiers ayant  $A$  pour opérateur admet, parmi ses tableaux élémentaires, tous ceux qui sont constitués par les points de  $\mathfrak{N}'$  et par suite n'est pas isomorphe holoédriquement à  $\mathfrak{N}$ . Au contraire, si  $\mathfrak{A}$  n'est idéal dans aucun ordre diviseur de  $\mathfrak{N}$ , ces tableaux élémentaires sont constitués par les seuls points de  $\mathfrak{N}$ . Il en est notamment ainsi si  $\mathfrak{N}$  est l'ensemble de tous les entiers du corps, ou si  $\mathfrak{A}$  coïncide avec  $\mathfrak{N}$ .

Enfin, on déduit immédiatement de ces considérations une propriété indiquée par Dedekind. Étant donné un tableau  $A$  du module  $\mathfrak{G}$ , ce tableau est la base d'un idéal d'un certain ordre  $\mathfrak{G}_i$ , sous-module de  $\mathfrak{G}$ . En effet, cet ordre  $\mathfrak{G}_i$  est constitué par les tableaux élémentaires du groupe  $G_i$  de tous les tableaux à termes entiers ayant  $A$  pour opérateur.

## II. — Unités des ordres d'entiers algébriques.

6. Je me contenterai, dans cette étude, d'appliquer les notations précédentes à la recherche des unités des corps ou des ordres algébriques, en me servant de l'équivalence et de la réduction des tableaux étudiés dans les Chapitres précédents. J'indiquerai succinctement une

méthode générale, et j'en ferai ensuite l'application au deuxième et au troisième ordre.

Soit un ordre  $\mathfrak{g}$  et un groupe  $G$  de tableaux, isomorphe holoédriquement à  $\mathfrak{g}$ , formé de tous les tableaux à termes entiers ayant un même opérateur  $A$  (par exemple une base de  $\mathfrak{g}$ ). D'après une remarque déjà faite au Chapitre I (n° 20) qui résulte aussi de la propriété démontrée précédemment (n° 4), on peut remplacer  $A$  par tout tableau équivalent, et en particulier le supposer *réduit* [conditions (A) ou (B)]. Mais, d'autre part,  $A$  ayant, pour termes des lignes, des entiers algébriques conjugués et, pour termes des colonnes, des entiers d'un même corps, les tableaux réduits, en nombre infini, équivalents à  $A$ , se déduisent par dilatations d'un nombre fini d'entre eux. On peut donc trouver une infinité de tableaux unimodulaires  $\Sigma$ , auxquels correspondent des tableaux élémentaires  $E$  tels qu'on ait

$$\Sigma \times A = A \times E \quad \text{ou} \quad \Sigma = AEA^{-1}.$$

Un tel tableau  $\Sigma$  appartient à  $G$ , et il lui correspond un point de  $\mathfrak{g}$  dont la norme est  $\Delta(\Sigma) = \pm 1$ . Ce point, correspondant au tableau élémentaire  $E$ , est donc une *unité* de  $\mathfrak{g}$ .

7. Réciproquement,  $E$  étant un tableau élémentaire constitué par une unité de  $\mathfrak{g}$ , le tableau  $\Sigma = AEA^{-1}$  est unimodulaire. Donc  $A$  et  $AE$  sont équivalents ( $AE = \Sigma \times A$ ), mais les conditions de réduction étant invariantes pour une dilatation,  $A$  étant réduit,  $AE$  l'est également. (L'opération  $A \times E$  est bien une dilatation, car aux termes réels ou imaginaires conjugués de  $E$  correspondent des colonnes réelles ou imaginaires conjuguées de  $A$ .) Donc, on trouvera tous les tableaux modulaires de  $G$ , et les unités de  $\mathfrak{g}$ , en formant l'ensemble des tableaux réduits équivalents à  $A$ , et en cherchant ceux qui sont égaux entre eux à une dilatation près <sup>(1)</sup>.

8. Cette recherche des tableaux modulaires conduit à la résolution

---

(1) On pourrait déduire de cette méthode le théorème de Dirichlet sur le nombre d'entiers distincts.

d'un certain nombre d'autres problèmes. Tout tableau de  $G$  peut se mettre sous la forme

$$T = [x_1]T_1 + [x_2]T_2 + \dots + [x_n]T_n,$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  étant des entiers et  $T_1, T_2, \dots, T_n$  correspondant aux points d'une base de  $\mathcal{G}$ . La recherche des tableaux est équivalente à la résolution de l'équation diophantique  $\Delta(T) = \pm 1$  en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . En désignant par  $[\alpha'_i, \alpha''_i, \dots, \alpha_i^{(n)}]$  le tableau élémentaire de  $T_i$ , cette équation peut s'écrire, d'après les règles de calcul indiquées au Chapitre I,

$$\prod_{i=1}^{i=n} (\alpha'_i x_1 + \alpha''_i x_2 + \dots + \alpha_i^{(n)} x_n) = \pm 1.$$

Le premier membre est la forme  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  associée à un tableau de base de  $\mathcal{G}$ , et elle est à coefficients entiers. En changeant la base de  $\mathcal{G}$ , on remplace le premier membre de cette équation par une forme équivalente.

9. Considérons maintenant, au lieu de la forme à indéterminées entières associée au tableau de base de  $\mathcal{G}$ , la forme à indéterminées entières associée au tableau  $A$  (opérateur de  $G$ ), soit  $\Psi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . En multipliant  $A$  à gauche par  $\Sigma$  on effectue sur  $\Psi$  la substitution modulaire représentée par  $\Sigma$ , et, comme  $A$  est simplement dilaté et que  $\Delta(E) = 1$ ,  $\Psi$  n'est pas changée. Réciproquement, toute substitution laissant  $\Psi$  invariante, définit un tableau  $\Sigma$  tel que  $\Sigma A = AE$ . Donc les *tableaux modulaires de  $G$  définissent les substitutions semblables (Hermite) ou automorphes de la forme  $\Psi$* .

Contrairement à ce qui se passe pour le problème précédent, si l'on change d'opérateur  $A$ , on ne remplace pas nécessairement  $\Psi$  par une forme équivalente. Le problème des substitutions automorphes peut donc être identique pour des formes non équivalentes <sup>(1)</sup> (classes de formes de même discriminant pour le deuxième degré). D'après la propriété rappelée de Dedekind (n° 5), on peut d'ailleurs considérer  $\Psi$  comme une forme quelconque du  $n^{\text{ième}}$  ordre décomposable.

---

(1) La méthode suivie permet d'ailleurs de préciser les relations entre ces formes.

10. Enfin on peut énoncer la réciproque du principe rappelé sur les tableaux à termes algébriques. Si deux tableaux équivalents à un tableau A se déduisent l'un de l'autre par une dilatation, les rapports mutuels des termes des colonnes de A sont des nombres algébriques conjugués. En effet, pour un certain tableau de la forme  $U = \Sigma A$ , on a  $UE = \Sigma' U$ ; par suite  $AEA^{-1} = \Sigma^{-1} \Sigma' \Sigma$  et A est l'opérateur d'un tableau à termes entiers.

### III. — Ordres du deuxième degré.

11. Soit un tableau A du deuxième ordre ayant pour termes des couples d'entiers réels conjugués de deux corps conjugués du deuxième degré. La forme associée peut s'écrire

$$\psi(x, y) = (ax + by)(a'x + b'y) = ux^2 + vxy + wy^2,$$

$u, v, w$  étant des entiers rationnels, et l'on a l'égalité bien connue

$$|\Delta(A)|^2 = v^2 - 4uw.$$

Soit encore un tableau U réduit équivalent à A et la forme associée

$$\psi_1 = px^2 + qxy + ry^2 = (\alpha x + \beta y)(\alpha'x + \beta'y).$$

On peut démontrer, dans ce cas particulier, l'existence de limites supérieures pour  $p, q, r$ , soit en se servant de l'égalité qui donne  $|\Delta(A)|^2$  en fonction de  $p, q, r$ , soit en se servant des inégalités établies au Chapitre II (nos 5 et 7) :

$$\alpha > \beta > 0, \quad |\alpha'| < |\beta'|, \quad |\alpha\beta'| < |\Delta(A)|.$$

En écrivant la forme  $\psi_1$  :

$$\psi_1 = (\lambda\alpha x + \lambda\beta y) \left( \frac{1}{\lambda} \alpha'x + \frac{1}{\lambda} \beta'y \right), \quad \lambda\alpha = \frac{1}{\lambda} |\beta'|,$$

on déduit, des inégalités précédentes, que ses coefficients sont respectivement inférieurs à ceux de la forme

$$|\Delta(A)| \cdot (x + y)^2.$$

12. Considérons alors  $n + 1$  tableaux réduits consécutifs équivalents à A :

$$U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1},$$

tels que  $U_{n+1} = U_1 \times E$  et qu'il n'existe pas d'autres groupes de deux tableaux parmi les  $n + 1$  vérifiant la même propriété. Ceci posé, la suite des tableaux réduits est manifestement

$$\dots, U_n E^{-2}, U_1 E^{-1}, \dots, U_n E^{-1}, U_1, U_2, \dots, U_n, U_1 E, U_2 E, \dots, U_n E, U_1 E^2, \dots,$$

en vertu de l'invariance des conditions de réduction pour une dilatation. En outre, pour que deux tableaux de la suite

$$U_i E^p, \quad U_j E^q$$

ne diffèrent que par une dilatation, il faut que  $i = j$ , sinon on aurait

$$U_i = U_j E',$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il en résulte que, si dans un tableau A,  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{a'}{b'}$  sont les racines réelles d'une même équation du deuxième degré à coefficients entiers, la suite des quotients incomplets déduite du tableau est périodique, et réciproquement, en vertu de la remarque du n° 10. En rapprochant ces propriétés des résultats du Chapitre II (§ II), on en déduit le théorème de Lagrange sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle quadratique et la définition d'un ordre du deuxième degré par une *période de nombres entiers*. Les résultats des paragraphes III et V conduisent à la périodicité de la réduction continue.

13. Désignons encore par G le groupe abélien de tous les tableaux à termes entiers ayant A pour opérateur, et  $g$  l'ordre de points isomorphe. D'après ce qui précède, et d'après les principes généraux du paragraphe II, les unités de  $G$  sont données par tous les tableaux élémentaires  $\pm E^{\pm n}$ ,  $n$  étant un entier positif <sup>(1)</sup>, et les tableaux modulaires de  $G$  sont tous donnés par la formule  $\pm (AEA^{-1})^{\pm n}$ .

<sup>(1)</sup> Dans la méthode de réduction employée, on n'obtient que les tableaux E ayant le premier terme positif, d'où la nécessité du signe  $\pm$ .



On a la même règle pour les substitutions automorphes de  $\psi$ . Pour trouver les solutions de

$$\Phi(x, y) = 1,$$

$\Phi$  étant associée au tableau de base de  $\mathcal{G}$ , on peut poser, en appelant  $T$  et  $T'$  les tableaux de  $G$  correspondant aux deux points de cette base :

$$\Lambda E \Lambda^{-1} = x_1 T + y_1 T'.$$

Toutes les solutions  $(X, Y)$  seront données par la formule

$$(x_1 T + y_1 T')^{\pm n} = XT + YT'.$$

14. Appliquons par exemple ces résultats à l'ordre  $\mathfrak{N}$  formé par les entiers du corps  $K(\sqrt{d})$ ,  $d \not\equiv 1 \pmod{4}$  et sans facteur carré. On peut alors prendre pour base de  $\mathfrak{N}$   $(1, \sqrt{d})$  et pour base de  $\mathcal{G}$  le tableau

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{d} & -\sqrt{d} \end{pmatrix}.$$

Prenons ce tableau comme opérateur commun des tableaux de  $G$ . En désignant par  $\delta$  la partie entière de  $\sqrt{d}$ , le tableau  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{d}-\delta & -\sqrt{d}-\delta \end{pmatrix}$  est réduit. Déterminons la suite des quotients incomplets, on obtient une période  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , et posons

$$\Sigma = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les tableaux modulaires de  $G$  sont de la forme  $(1) \Sigma^{\pm n}$ . On a d'ailleurs

$$\Sigma = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 d & x_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma^{\pm n} = \begin{pmatrix} x_n & \pm y_n \\ \pm y_n d & x_n \end{pmatrix}.$$

Les unités de  $\mathcal{G}$  sont constituées par les racines lambdaïques de  $\Sigma^{\pm n}$ , c'est-à-dire  $(x_n \pm y_n \sqrt{d}, x_n \mp y_n \sqrt{d})$ , et  $(x_n, y_n)$  représente l'ensemble des systèmes de solutions de l'équation (équation de Pell-Fermat)

$$x^2 - dy^2 = \pm 1.$$

---

(1) On suppose pour cela que la période  $q_1, q_2, \dots, q_n$  n'est pas décomposable.

Enfin  $\Sigma^{\pm n}$  représente les substitutions automorphes de la forme

$$\psi = (x - \delta y)^2 - dy^2.$$

#### IV. — Ordres du troisième degré.

15. Considérons d'abord un tableau du troisième ordre A ayant pour termes des lignes des systèmes d'entiers conjugués réels de trois corps conjugués du troisième ordre. La forme associée  $\Psi(x, y)$  a ses coefficients entiers, en se servant des inégalités (1) et (2) du Chapitre III (nos 7 et 10), on montre, comme pour le deuxième degré, que ces coefficients sont inférieurs à ceux de la forme  $|\Delta(A)| \times (x + y + z)^3$ .

Si U et U' sont deux tableaux réduits de première espèce (d'après la démonstration précédente et la propriété générale du n° 6, il existe de tels tableaux) équivalents à A tels que  $U = U' \times [\theta, \theta', \theta'']$ ;  $\theta, \theta', \theta''$  est une unité de  $\mathcal{G}$ , mais  $\theta$  est positif. Ceci posé, en ayant égard à ce que tout tableau de deuxième espèce est voisin d'au moins un tableau de première espèce, on peut étendre la propriété de la construction des tableaux à partir d'un nombre fini d'entre eux, à l'ensemble des tableaux réduits de première et de deuxième espèce, les dilatations étant les unités de  $\mathcal{G}$ .

16. Soit  $U_1$  un premier tableau réduit correspondant à un point  $I_1$  du plan des  $\lambda$ . Adjoignons à  $U_1$  ceux de ses voisins qui sont distincts entre eux et distincts de  $U_1$  à un produit près par une unité de  $\mathcal{G}^{(1)}$ . On obtient un premier ensemble  $\mathcal{Q}_1$  de tableaux (en nombre au plus égal à 4). De  $\mathcal{Q}_1$  on déduit de même un ensemble  $\mathcal{Q}_2$  et ainsi de suite. On aboutit finalement à un ensemble  $\mathcal{Q}$  d'un nombre fini de tableaux, distincts entre eux, et tels que tout tableau voisin d'un tableau de  $\mathcal{Q}$ , ou appartient à  $\mathcal{Q}$ , ou est égal au produit d'un tableau de  $\mathcal{Q}$  par une unité. A cet ensemble correspond un ensemble  $\mathfrak{s}$  de points I du plan des  $\lambda$ ; deux points quelconques de  $\mathfrak{s}$  sont réunis par une ligne brisée dont les sommets de deux en deux appartiennent à  $\mathfrak{s}$ , les autres sommets étant des points J.

---

(1) Ce n'est pas à proprement parler une unité de  $\mathcal{G}$ , mais le tableau élémentaire défini par cette unité.



Désignons par  $U_1, U_2, \dots, U_N$  les tableaux de  $\mathfrak{Q}$  et soit  $E = [0, 0', 0'']$  un tableau élémentaire correspondant à une unité quelconque de  $\mathfrak{G}$  ( $0 > 0$ ). Les tableaux  $U_1 \times E, U_2 \times E, \dots, U_N \times E$  forment un nouvel ensemble  $\mathfrak{Q}$  de tableaux réduits distincts entre eux et distincts des précédents. L'ensemble de points  $s'$  correspondant se déduit de  $s$  par une translation définie par ses projections sur  $Mx, My, Mz$  :

$$\log |0|, \quad \log |0'|, \quad \log |0''|.$$

En faisant varier  $E$ , les divers ensembles  $\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \dots$  trouvés constituent l'ensemble de tous les tableaux réduits. Il suffit pour le voir de procéder par cheminement, en montrant qu'on obtient ainsi les voisins de tableaux de  $\mathfrak{Q}$ , puis les voisins de ces voisins et ainsi de suite. En outre, pour que deux tableaux  $U_i \times E, U_j \times E$  se déduisent l'un de l'autre par une dilatation, il est nécessaire que  $i = j$ , sinon on aurait  $U_i = U_j \times E''$ , ce qui est contraire à la définition de  $\mathfrak{Q}$ .

47. Considérons donc l'ensemble de tous les tableaux élémentaires correspondant aux unités de  $\mathfrak{G}$  :

$$(\theta, \theta', \theta''), \quad \text{où} \quad \theta > 0.$$

Il forme évidemment un groupe auquel correspond dans le plan des  $\lambda$  un groupe de translations. Toutes les translations de ce groupe, appliquées à l'ensemble  $s$  de points, donnent l'ensemble des points  $l$  du plan, et chacun de ces points n'est obtenu qu'une fois.

Les deux premières coordonnées de ces translations,

$$\iota = \log |\theta|, \quad \iota' = \log |\theta'|,$$

constituent un module de points. Ce module est de dimension 2, car on peut manifestement trouver deux translations  $(\iota_1, \iota'_1, \iota''_1), (\iota_2, \iota'_2, \iota''_2)$  non parallèles et par suite un tableau à déterminant non nul :

$$\begin{vmatrix} \iota_1 & \iota'_1 \\ \iota_2 & \iota'_2 \end{vmatrix}.$$

Il est, de plus, d'ordre 2, car les inégalités

$$|\iota| < \Pi, \quad |\iota'| < \Pi,$$

entraînent les limitations pour  $\theta, \theta', \theta''$ :

$$e^{-n} < |\theta| < e^n, \quad e^{-n} < |\theta'| < e^n, \quad e^{-\frac{n}{2}} < |\theta''| < e^{\frac{n}{2}};$$

elles n'ont par suite qu'un nombre fini de solutions. Donc toute translation a des coordonnées de la forme

$$x t_1 + y t_2, \quad x t'_1 + y t'_2, \quad x t''_1 + y t''_2,$$

$x, y$  étant des entiers et  $(t_1, t'_1, t''_1) - (t_2, t'_2, t''_2)$  des translations convenablement choisies qui constituent une *base* de l'ensemble des translations.

Il en résulte que toutes les unités de  $\mathcal{G}$  sont données par tous les tableaux élémentaires:  $\pm E_1^m E_2^n$ ,  $m$  et  $n$  étant des entiers, positifs, négatifs ou nuls, et  $E_1, E_2$  les tableaux correspondant aux translations de base; on peut d'ailleurs les remplacer par:

$$E'_1 = E_1^p E_2^q, \quad E'_2 = E_1^{p'} E_2^{q'},$$

$p, q, p', q'$  formant un tableau modulaire. De même les tableaux modulaires de  $G$  ou les substitutions automorphes de  $\Psi$  sont:

$$\pm \Sigma_1^m \Sigma_2^n \quad (\Sigma_1 = A E_1 A^{-1}, \Sigma_2 = A E_2 A^{-1}).$$

18. Je vais appliquer ces résultats à un exemple<sup>(1)</sup>. Considérons l'équation du troisième degré

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Soit  $\alpha$  la plus petite de ses racines positives,  $\alpha'$  sa racine négative et  $\alpha''$  la troisième racine. Posons

$$A = \begin{array}{ccc} & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ 1 - \alpha^2 & 1 - \alpha'^2 & 1 - \alpha''^2 \end{array}.$$

On peut prendre  $A$  pour opérateur d'un groupe  $G$  qui sera isomorphe de l'ordre  $\mathcal{G}$  ayant également  $A$  pour base. Les tableaux de  $G$  corres-

---

(1) Cet exemple a été utilisé par M. CHARVE (*loc. cit.*) et repris par MINKOWSKI (*Ann. École Normale*, 1896). L'ordre  $\mathcal{G}$  est formé de tous les entiers du corps  $K(\alpha)$ , et ce corps est abélien.

pendant aux points de base de  $\mathcal{G}$  sont :

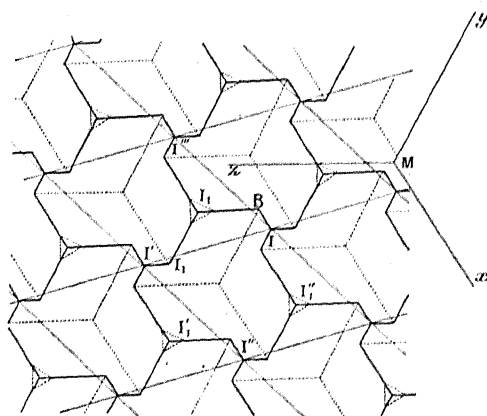
$$\begin{array}{rcccl}
 \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} & , & \begin{array}{c} A \times [\alpha, \alpha', \alpha''] \times A^{-1} = \\ \\ A \times [1 - \alpha^2, 1 - \alpha'^2, 1 - \alpha''^2] \times A^{-1} = \end{array} & \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

Ceci posé, on constate aisément, en prenant des valeurs approchées <sup>(1)</sup> de  $\alpha, \alpha', \alpha''$ , que  $A$  est réduit de première espèce, et que l'un de ses voisins est le tableau réduit de deuxième espèce :

$$\Lambda_1 = \begin{array}{ccc} 1 - \alpha^2 & 1 - \alpha'^2 & 1 - \alpha''^2 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ 1 - \alpha^2 - \alpha & 1 - \alpha'^2 - \alpha' & 1 - \alpha''^2 - \alpha'' \end{array} .$$

Les tableaux voisins de  $A$  et  $\Lambda_1$  sont identiques à l'un d'eux, à une dilatation près, et l'ensemble des points  $I$  se déduit par translation de  $I, I_1$  (voir *fig. 5*). Les domaines de chaque minimum sont égaux

Fig. 5.



entre eux; on peut remarquer en outre que chacun d'eux présente une symétrie ternaire, qui résulte de ce que le corps est abélien.

(1) On peut prendre pour ces valeurs approchées,  $\alpha = 0,45$ ,  $\alpha' = -1,25$ ,  $\alpha'' = 1,80$ . C'est en utilisant ces valeurs qu'ont été construites les figures (5) et (1).

On peut engendrer le groupe de translations au moyen des deux translations qui font passer de I aux deux voisins de I, c'est-à-dire I' et I''. A ces translations correspondent les unités

$$[1 - \alpha^2, 1 - \alpha'^2, 1 - \alpha''^2], [\alpha, \alpha', \alpha''].$$

Les tableaux correspondants de G étant précisément ceux indiqués comme bases, tout tableau modulaire de G est de la forme

$$\begin{aligned} \Sigma_{m,p} = & \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^m \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^p \\ & \pm x_{mp} \quad \pm y_{mp} \quad \pm z_{mp} \\ = & \pm y_{mp} \quad \pm x_{mp} \mp z_{mp} \quad \mp y_{mp} \pm z_{mp} \\ & \pm z_{mp} \quad \mp y_{mp} \pm z_{mp} \quad \pm x_{mp} \pm y_{mp} \mp z_{mp} \end{aligned}$$

$\Sigma_{mp}$  représente aussi les substitutions automorphes de la forme

$$\Psi(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3 + x^2y - y^2z - z^2x - 2x^2z - 2y^2x + 2z^2y + xyz,$$

et le système  $(\pm x_{mp}, \pm y_{mp}, \pm z_{mp})$  est la solution générale de l'équation  $\Psi(x, y, z) = \pm 1$ .

19. Considérons enfin un tableau A, du troisième ordre, ayant une colonne réelle et deux colonnes imaginaires conjuguées, et tel que  $a, a', \bar{a}' = b, b', \bar{b}' = c, c', \bar{c}'$  soient des systèmes d'entiers conjugués de trois corps conjugués du troisième degré. Soit un tableau U réduit (au sens du n° 24, Chap. III) équivalent à A. Je n'ai pas démontré directement l'existence d'une limite supérieure du produit  $\alpha|\beta'| \cdot |u'|$ , mais elle résulte du deuxième théorème arithmétique de Minkowski<sup>(1)</sup> sur les systèmes de Strahldistances minima. En posant

$$\begin{aligned} f_l(x, y, z) = \max. & \left( l|\alpha x + \beta y + u z|, \frac{1}{l}|\alpha' x + \beta' y + u' z| \right). \\ l\alpha = & \frac{1}{\sqrt{l}}|\beta'|, \end{aligned}$$

$f_l(x, y, z)$  est une Strahldistance, et  $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = m$ ,

<sup>(1)</sup> *Geom. der Zahlen*, Chap. V, p. 53.

$f(o, o, 1) = m_1$ , constituent un système de Strahldistances minima. On a, d'après le théorème rappelé,

$$\alpha |\beta'| \cdot |u'| = m^2 m_1 < K |\Delta(U)|,$$

$K$  étant un coefficient numérique qu'il est inutile d'expliciter. On vérifie immédiatement que chaque terme du développement de  $\Delta(U)$  est au plus égal à  $\alpha |\beta'| \cdot |u'|$ , de sorte que les coefficients de la forme  $\Psi(x, y, z)$  associée à  $U$  sont inférieurs à ceux de

$$K \times |\Delta(U)| \times (x + y + z)^3.$$

La méthode générale de recherche des unités est donc encore applicable.

20. Comme pour le deuxième ordre, la suite des tableaux réduits est

$$\dots, U_n E^{-2}, U_1 E^{-1}, \dots, U_n E^{-1}, U_1, U_2, \dots, U_n, U_1 E, \dots, U_n E, U_1 E^2, \dots,$$

et les unités de  $\mathcal{G}$  ont pour coordonnées les termes de tous les tableaux élémentaires  $\pm E^n$ ,  $n$  étant un entier positif, négatif ou nul.

On en déduit les mêmes résultats que dans le cas du deuxième ordre pour les tableaux unimodulaires de  $G$ , les substitutions automorphes d'une forme  $\Psi$ , ou les solutions de l'équation diophantique

$$\Phi(x, y, z) = \pm 1.$$

21. Appliquons encore ces résultats à un exemple. Considérons l'équation du troisième degré

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Elle a une racine réelle  $\alpha$  et deux racines imaginaires conjuguées  $\alpha', \overline{\alpha'}$ . Considérons le tableau

$$A = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} 1 \\ \alpha \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \alpha' \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \overline{\alpha'} \end{array} \\ & \alpha^2 & \alpha'^2 & \overline{\alpha'^2} \end{array}.$$

On peut le prendre comme opérateur d'un groupe  $G$ , isomorphe d'un

ordre de points  $\mathfrak{g}$  ayant pour base A. Les tableaux de G correspondants aux points de base de  $\mathfrak{g}$  sont :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0, \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0, \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Ceci posé, on constate aisément que les tableaux (1)

$$U = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 - 1 & \alpha'^2 - 1 & \overline{\alpha'^2} - 1, \\ \alpha & \alpha' & \overline{\alpha'} \end{array}, \quad U_1 = \begin{array}{ccc} \alpha^2 - 1 & \alpha'^2 - 1 & \overline{\alpha'^2} - 1 \\ 1 - \alpha^2 + \alpha & 1 - \alpha'^2 + \alpha' & 1 - \overline{\alpha'^2} + \overline{\alpha'} \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

sont réduits consécutifs, les points

$$\begin{aligned} &(\alpha, \alpha', \overline{\alpha'}), \quad (1, 1, 1), \quad (\alpha^2 - 1, \alpha'^2 - 1, \overline{\alpha'^2} - 1), \\ &(1 - \alpha^2 + \alpha, 1 - \alpha'^2 + \alpha', 1 - \overline{\alpha'^2} + \overline{\alpha'}) \end{aligned}$$

étant des minima successifs. D'autre part,  $U_1$  se déduit de  $U$  par une dilatation

$$U_1 = U \times [\alpha^2 - 1, \alpha'^2 - 1, \overline{\alpha'^2} - 1];$$

aux puissances de cette dilatation correspondent les unités de  $\mathfrak{g}$  et les tableaux modulaires de G :

$$\pm \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{array}{ccc} \pm x_n & \pm y_n & \pm z_n \\ \pm z_n & \pm x_n \pm z_n & \pm y_n \\ \pm y_n & \pm y_n \pm z_n & \pm x_n \pm z_n \end{array}$$

Les formes  $\Phi$  et  $\Psi$  sont identiques à

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2x^2z - y^2x - z^2y + xz^2 - 3xyz,$$

et les nombres  $(\pm x_n, \pm y_n, \pm z_n)$  constituent la solution générale de l'équation  $\Phi(x, y, z) = +1$ . Ces solutions sont successivement, pour

(1) On peut faire cette constatation en employant des valeurs approchées des racines, par exemple pour  $\alpha : 1,325$ ; pour  $\alpha' : -0,66 + i 0,57$ .

$n$  positif :

$(-1, 0, 1), (1, 1, -1), (0, -1, 1), (-1, 1, 0), (2, 0, -1), (-2, -1, 2), \dots,$

et pour  $n$  négatif :

$(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1), \dots$

La loi de formation de ces suites est évidente.

