LÉOPOLD FEJÉR

Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 28 (1911), p. 63-104
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__63_0>

SUR LES SINGULARITÉS

DE LA

SÉRIE DE FOURIER DES FONCTIONS CONTINUES,

PAR M. LÉOPOLD FEJÉR.

Introduction.

L'objet principal de ce Mémoire se rapporte aux fondements de la théorie de la convergence et de la sommabilité des séries de Fourier des fonctions continues.

La série de Fourier d'une fonction partout continue, et de période 2π, peut montrer la singularité de du Bois-Reymond. Par là, nous entendons que cette série de Fourier peut devenir divergente en un point, par exemple $x = 0$. C'est P. du Bois-Reymond qui découvrit l'existence d'une telle fonction continue (1876).

La série de Fourier d'une fonction partout continue, et de période 2π, peut montrer encore la singularité de M. Lebesgue. Par là, nous entendons que cette série de Fourier, tout en étant partout convergente, peut, dans le voisinage d'un point, tel que $x = 0$, *ne pas être uniformément convergente*. C'est M. H. Lebesgue qui découvrit l'existence d'une telle fonction continue (1905).

Mentionnons encore ici une troisième espèce de singularité. Il existe une telle fonction continue, dont la série de Fourier est *divergente* en un point (par exemple $x = 0$), et possède en outre la propriété que sa série trigonométrique *conjuguée* est aussi la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π. C'est M. A. Pringsheim qui a deviné l'existence d'une telle paire de séries conjuguées de Fourier. J'en ai démontré l'existence en 1910.

Dans ce Mémoire je définis une suite numérique infinie de nombres (*voir* n° 13), grâce à laquelle je fournis des exemples de séries de Fourier, présentant l'une où l'autre des singularités plus haut mentionnées, soit en un point isolé, soit en un ensemble de points partout dense dans un certain intervalle. Les exemples que je donne sont simples. Ils nous présentent clairement ces diverses singularités avec tous leurs détails. Mes démonstrations sont simples aussi ; c'est de la divergence de la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

que je déduis tout, d'une façon pour ainsi dire immédiate.

Mais ce que mes exemples offrent de tout à fait nouveau, c'est que je ne définis pas *la fonction* dont la série de Fourier présente les singularités susdites, mais que je définis directement cette *série de Fourier* (c'est-à-dire ses coefficients α_k), qui offre précisément la singularité en question. En d'autres termes donc, j'écris explicitement des séries de Fourier à coefficients numériques (dont la loi sera aussi simple que possible) qui présenteront les singularités en question.

Une fois en possession de tels exemples explicites, une certaine clarté se répandra sur le domaine de ces recherches abstraites.

La construction de mes exemples est basée sur les polynomes trigonométriques :

$$(\alpha) \qquad \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \ldots - \frac{\cos 2nx}{n},$$

$$(\beta) \qquad \frac{\sin x}{n} + \frac{\sin 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\sin nx}{1} - \frac{\sin(n+1)x}{1} - \ldots - \frac{\sin 2nx}{n}$$

($n =$ nombre entier positif).

Le polynome de cosinus (α) montre en quelque sorte *en germe* la singularité de du Bois-Reymond pour $x = 0$. En effet, la valeur absolue de ce polynome, pour toutes les valeurs réelles de x, est plus petite que 6, quelle que soit la valeur du nombre entier n (*voir* le n° 6). Examinons maintenant la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de ce polynome de cosinus, c'est-à-dire la somme

$$s_n(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1},$$

Dans l'intervalle

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon$$

(où ε est un nombre positif quelconque, aussi petit qu'on veut, mais fixe) cette somme a une valeur absolue plus petite que $\frac{2\pi}{\varepsilon}$, quelle que soit la valeur du nombre entier positif n (*voir* le n° 9). Voyons enfin la valeur de cette somme partielle pour $x = 0$. Celle-ci est

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1 > \log n.$$

Si maintenant n est très grand, alors la fonction (α) conserve une valeur absolue finie. Il en sera de même pour la valeur $|s_n(x)|$ dans l'intervalle $\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon$. *Mais $s_n(0)$ deviendra aussi grand qu'on voudra.*

De même le polynome de sinus (β) montre en germe la singularité de M. Lebesgue. En effet, la valeur absolue de ce polynome sera aussi plus petite que 6, pour toutes les valeurs réelles de x, pour toute valeur entière et positive de n (*voir* le n° 6). La $n^{\text{ième}}$ somme partielle de sa série de Fourier est

$$s_n(x) = \frac{\sin x}{n} + \frac{\sin 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\sin nx}{1}.$$

Dans l'intervalle

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon$$

cette somme a aussi une valeur absolue plus petite que $\frac{2\pi}{\varepsilon}$, quelle que soit la valeur du nombre entier positif n (*voir* le n° 9).

Pour $x = 0$ cette somme partielle est égale à

$$0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Mais, pour

$$x = \frac{\pi}{2n},$$

on a

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{n} + \frac{\sin 2\frac{\pi}{2n}}{n-1} + \ldots + \frac{\sin n\frac{\pi}{2n}}{1} > \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{n}{2}\right],$$

où $\left[\frac{n}{2}\right]$ signifie le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$ (*voir* le n° 10).

Si maintenant n est très grand, alors $|s_n(x)|$ dans l'intervalle $\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon$, de même qu'au point $x = 0$, aura une valeur finie; mais dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq \varepsilon$ il deviendra *très grand* (c'est en effet là que tombe le point $x = \frac{\pi}{2n}$ pour n suffisamment grand). Etc.

Il faut remarquer que l'application des polynomes (α) et (β) à la construction des séries de Fourier possédant les propriétés mentionnées plus haut est toute *naturelle*. En effet (*voir* le n° 6)

$$\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \ldots - \frac{\cos 2nx}{n}$$
$$= 2\sin(2n+1)\frac{x}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}.$$

Mais

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu} > 0,$$

si

$$0 < x < 2\pi,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Donc

$$\operatorname{sign.}\left(\frac{\cos x}{n} + \ldots - \frac{\cos 2nx}{n}\right) = \operatorname{sign.}\sin(2n+1)\frac{x}{2},$$
$$0 < x < 2\pi,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Mais on sait, depuis les recherches de M. Lebesgue, que la fonction sign. $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ joue un rôle important dans la question de la singularité de du Bois-Reymond (*voir* mon Mémoire : *Lebesgue-sche Konstanten und divergente Fourierreihen*, § I, et l'appendice du Mémoire actuel.)

Au sujet du contenu de ce travail, la Table des matières (p. 104) nous donne quelques indications. J'appelle spécialement l'attention du lecteur sur le paragraphe IX et sur l'Appendice.

J'ai marqué par des notes les relations de ce Mémoire avec ceux de mes travaux antérieurs [1] qui se rapportent au même domaine de recherches. Je fais remarquer cependant que la connaissance de ces articles n'est pas du tout nécessaire à la compréhension du Mémoire actuel.

En ce qui concerne l'historique de ces sujets, je renvoie aussi aux articles mentionnés ci-dessous.

Je dois insister sur ce point que, depuis du Bois-Reymond, c'est à M. H. Lebesgue que ces recherches sont redevables de leur plus grand progrès.

I. — Théorème sur les limites des sommes partielles de la série de Fourier. Applications.

1. Soit $f(x)$ une fonction *finie* et *intégrable* dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Désignons par M sa limite supérieure et m sa limite inférieure pour cet intervalle.

Considérons les sommes partielles de la série de Fourier de $f(x)$:

$$s_0(x), \quad s_1(x), \quad \ldots, \quad s_n(x), \quad \ldots. \tag{1}$$

Chaque somme partielle a pour l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ une limite supérieure et une limite inférieure. Je pose maintenant la question : *dans quelles relations, exprimables par des inégalités, les limites supérieures et inférieures des sommes partielles de la série de Fourier de $f(x)$ sont-elles avec la limite supérieure* M *et inférieure m de la fonction $f(x)$ elle-même ?*

---

[1] *Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe* (*Crelle J.*, Bd. 137). (Cité, en abrégé, comme Note I).

Eine stetige Funktion deren Fourier-sche Reihe divergiert (*Rendiconti di Palermo*, t. XXVIII) (Note II).

Lebesgue-sche Konstanten und divergente Fourierreihen (*Crelle J.*, Bd. 138) (Note III).

Ueber gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze (*Sitzungsberichte der k. bayerischen Akademie*, Jahrgang 1910) (Note IV).

Sur une paire de séries de Fourier conjuguées (*Comptes rendus*, 28 février 1910) (Note V).

Sur les sommes partielles de la série de Fourier (*Comptes rendus*, 23 mai 1910) (Note VI).

Je ne m'occupe pas ici en détail de cette question [1]. Je fais ici seulement quelques remarques sur ce sujet, pour éclaircir un peu le théorème que je vais donner tout de suite.

2. Considérons, au lieu de la suite (1) des sommes partielles de la série de Fourier, la suite des moyennes arithmétiques

$$(2)\qquad s_0(x),\quad \frac{s_0(x)+s_1(x)}{2},\quad \ldots,\quad \frac{s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_n(x)}{n+1},\quad \ldots.$$

Pour ces moyennes arithmétiques la question posée ci-dessus est facilement résoluble.

En effet

$$(3)\qquad s_n(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt,$$

donc [2]

$$(4)\qquad \begin{aligned} S_{n-1}(x) &= \frac{s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_{n-1}(x)}{n} \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^2 dt. \end{aligned}$$

Mais d'après l'hypothèse

$$m \leqq f(x) \leqq M,$$
$$0 \leqq x \leqq 2\pi;$$

donc, en appliquant le premier théorème de la moyenne pour les inté-

(1) Voir le paragraphe I de ma Note III et l'Appendice du travail actuel.

(2) Cela résulte immédiatement des propriétés élémentaires des intégrales définies et des identités suivantes

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos m\theta=\frac{\sin(2m+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\ldots+\sin(2m-1)\theta=\frac{(\sin m\theta)^2}{\sin\theta}.$$

grales définies, nous obtenons

$$S_{n-1}(x) \leqq M \int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt$$

et

$$S_{n-1}(x) \geqq m \int_0 \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt.$$

Mais en posant $f(x) \equiv 1$ dans l'équation (4) il suit

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt = 1,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$0 \leqq x \leqq 2\pi;$$

donc

$$m \leqq S_n(x) \leqq M, \tag{5}$$

lorsque

$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$
$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Nous avons donc démontré que la limite supérieure d'une quelconque des moyennes arithmétiques de la série de Fourier est $\leqq M$ *et que sa limite inférieure est* $\geqq m$ (¹). C'est peut-être le fait le plus facilement démontrable et le plus primitif de la théorie de la convergence et de la sommabilité de la série de Fourier.

De l'inégalité (5) résulte : si la fonction, intégrable dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$, est *bornée* (c'est-à-dire $|f(x)| \leqq G$ pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$), alors les moyennes arithmétiques $S_n(x)$ sont aussi *bornées*, c'est-à-dire

$$|S_n(x)| \leqq G,$$
$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(¹) *Voir* mon Mémoire : *Untersuchungen über Fourier-sche Reihen* (*Math. Annalen*, Bd. 58, p. 60).

3. Retournons aux sommes partielles de Fourier.

Pour les sommes de Fourier $s_n(x)$ l'inégalité (5) *n'est pas vraie* en général. Par exemple, la limite supérieure de la somme de Fourier $s_n(x)$ peut dépasser la limite supérieure M de la fonction $f(x)$ d'un nombre aussi grand qu'on veut. Un exemple très simple en est fourni par le polynome trigonométrique

$$f(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \ldots - \frac{\cos 2nx}{n}.$$

La valeur absolue de cette fonction $f(x)$ est plus petite que $5 \cdot 14 \ldots$, quelle que soit la valeur de la variable réelle x, et quelle que soit la valeur du nombre entier positif n (*voir* le n° 6). Pourtant la $n^{\text{ième}}$ somme de Fourier de cette fonction $f(x)$

$$\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1},$$

prend, pour $x = 0$, une valeur

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1,$$

qui pourra être très grande, si n est très grand.

En outre, c'est du Bois-Reymond qui a déjà démontré que les sommes de Fourier d'une fonction finie et partout continue peuvent être aussi grandes qu'on veut. En un mot : $f(x)$ étant borné, les sommes de Fourier $s_n(x)$ correspondantes ne sont pas nécessairement bornées.

Dans les lignes suivantes de cet alinéa je donne un critère, à l'aide duquel on peut démontrer dans des cas importants que les sommes de Fourier sont bornées. Ce théorème fournit aussi, dans ces cas, pour les sommes de Fourier *des limites assez étroites*.

Voici ce théorème [1] :

Soient $f(x)$ une fonction intégrable dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$, M sa limite supérieure, m sa limite inférieure pour cet intervalle. Soit de

---

[1] *Voir* ma Note VI.

plus

(6) $$|a_n| \leqq \frac{A}{n}, \qquad |b_n| \leqq \frac{B}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \infty).$$

Ici $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ *désignent les coefficients* (1) *de la série de Fourier de* $f(x)$, A *et* B *sont des constantes non négatives. Alors, en désignant par* $s_n(x)$ *la somme des premiers* $(n+1)$ *termes de la série de Fourier de* $f(x)$, *on a*

(7) $$m - (A + B) \leqq s_n(x) \leqq M + (A + B),$$

pour

$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \infty.$$

La démonstration de ce théorème est extrêmement simple.

Soit

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

une série infinie quelconque. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = \frac{(n+1)u_0 + nu_1 + \ldots + u_n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)u_0 + (n+1)u_1 + \ldots + (n+1)u_n}{n+1} - \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n+1} \\ &= s_n - \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$s_n = S_n + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu}{n+1}.$$

En appliquant cette formule à la série de Fourier de $f(x)$ nous obtenons

(8) $$s_n(x) = S_n(x) + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)}{n+1}.$$

(1) Le coefficient a_0 ne figure pas.

Mais d'après l'inégalité (5)

$$m \leqq \mathrm{S}_n(x) \leqq \mathrm{M},$$

et d'après la condition (6)

$$\left|\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu(a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)}{n+1}\right|$$

$$\leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu(|a_\nu| + |b_\nu|)}{n+1} \leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu\left(\frac{\mathrm{A}}{\nu} + \frac{\mathrm{B}}{\nu}\right)}{n+1} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} (\mathrm{A}+\mathrm{B})}{n+1} = \frac{n(\mathrm{A}+}{n+}$$

Donc, en effet,

$$m - (\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqq s_n(x) \leqq \mathrm{M} + (\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$
$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

et *le théorème est démontré.*

4. Voyons deux exemples simples. Soit

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2},$$
$$0 < x < 2\pi.$$

Alors on a

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} \ldots \tag{9}$$

et

$$\mathrm{M} = \frac{\pi}{2}, \qquad m = -\frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 1.$$

Notre théorème fournit donc

$$\left|\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}\right| < \frac{\pi}{2} + 1 = 2.57\ldots \tag{10}$$

Comme second exemple, nous prenons la série

$$(11) \qquad \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{2} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{n} + \ldots.$$

C'est la série des sinus de la fonction

$$(12) \qquad f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x + \sin x \log(2\sin x) \qquad (0 < x < \pi).$$

La limite supérieure de cette fonction pour l'intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ est $\frac{\pi}{2} = f(+0)$ et sa limite inférieure est $\log 2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Donc, la série (11) est la série de Fourier d'une fonction bornée dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$, pour laquelle

$$M = \frac{\pi}{2}, \qquad m = -\frac{\pi}{2} \quad (^1).$$

En appliquant maintenant la formule (8) [2] nous obtenons [3]

$$|s_{2n-1}(x)| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu-1)x}{\nu}\right| \leqq \frac{\pi}{2} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)\frac{1}{\nu}}{2n}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} 2 - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}}{2n} = \frac{\pi}{2} + \frac{2n - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}}{2n}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} < \frac{\pi}{2} + 1.$$

Nous avons donc démontré l'inégalité suivante qui nous sera très utile

---

(1) J'emprunte ces données à une lettre de M. Landau.

(2) Il est préférable d'appliquer ici directement la formule (8) au lieu de l'inégalité (7).

(3) Dans ma Note II, j'ai donné pour

$$\left|\frac{\sin x}{1} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{n}\right|$$

la limite 17; dans le paragraphe 2 de ma Note III, la limite 12, 8. Pour ce qui va suivre, il n'est pas important de donner une limite aussi petite que possible; mais c'est peut-être une question intéressante en elle-même.

dans l'avenir

$$(13)\qquad \left|\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{2}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{n}\right|<\frac{\pi}{2}+1=2.57\ldots,$$
$$0\leqq x\leqq 2\pi,$$
$$n=1,\,2,\,3,\,\ldots.$$

M. Landau m'avait communiqué des démonstrations extrêmement *élémentaires* pour les inégalités (10) et (13). Avec sa méthode, il avait établi pour la première fois la constante $\frac{\pi}{2}+1=2.57\ldots$ comme limite supérieure de la valeur absolue des sommes de Fourier de la série (11).

5. *Remarque.* — Soit $f(x)$ une *fonction à variation bornée*, au sens de M. Jordan, dans l'intervalle $0\leqq x\leqq 2\pi$. Alors il est facile de démontrer l'existence de deux constantes non négatives A, B, telles que

$$|a_n|\leqq\frac{A}{n},\qquad |b_n|\leqq\frac{B}{n}\qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

En appliquant maintenant l'inégalité (7), on obtient le théorème :

Les sommes de Fourier d'une fonction quelconque à variation bornée dans l'intervalle $0\leqq x\leqq 2\pi$ sont bornées.

On peut déduire ce résultat aussi de l'intégrale de Dirichlet, qui exprime la somme de Fourier $s_n(x)$.

II. — Quelques inégalités se rapportant à certains polynomes trigonométriques.

6. Considérons le polynome des cosinus

$$(14)\quad \begin{aligned}\theta(n,r,x) &= \frac{\cos(r+1)x}{n}+\frac{\cos(r+2)x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos(r+n)x}{1}\\ &\quad -\frac{\cos(r+n+1)x}{1}-\frac{\cos(r+n+2)x}{2}-\ldots-\frac{\cos(r+2n)x}{n},\end{aligned}$$

et le polynome des sinus conjugué

$$(15)\quad \eta(n, r, x) = \frac{\sin(r+1)x}{n} + \frac{\sin(r+2)x}{n-1} + \ldots + \frac{\sin(r+n)x}{1} - \frac{\sin(r+n+1)x}{1} - \frac{\sin(r+n+2)x}{2} - \ldots - \frac{\sin(r+2n)x}{n}.$$

Ici n désigne un nombre entier quelconque, r un nombre entier non négatif quelconque, x un nombre réel quelconque. (Mais, naturellement, il suffit de restreindre la variable x à l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$.)

Alors

$$(16)\qquad |\theta(n, r, x)| < 5.14\ldots$$

et

$$(17)\qquad |\eta(n, r, x)| < 5.14\ldots.$$

En effet

$$\theta(n, r, x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos(r+n-\nu+1)x}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos(r+n+\nu)x}{\nu}$$
$$= 2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}.$$

Mais en tenant compte de l'inégalité (13) on a

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu} \right| < \frac{\pi}{2} + 1.$$

Donc

$$|\theta(n, r, x)| < 2\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = \pi + 2 = 5.14\ldots,$$
$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Pareillement

$$\eta(n, r, x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(r+n-\nu+1)x}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(r+n+\nu)x}{\nu}$$
$$= -2\cos\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \sum \frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}.$$

Donc en vertu de l'inégalité (13)

$$|\eta(n, r, x)| < 5.14\ldots,$$
$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$r = 0, 1, 2, \ldots.$$

7. *Remarque.* — Posons, dans les inégalités (16) et (17), sx au lieu de x, où s désigne un nombre entier positif quelconque. *On obtient les inégalités*

(18) $$|\theta(n, r, sx)| < 5.14\ldots,$$
(19) $$|\eta(n, r, sx)| < 5.14\ldots,$$
$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$r = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$s = 1, 2, 3, \ldots.$$

8. Considérons le polynome des cosinus

$$\lambda_1 \cos(r+1)x + \lambda_2 \cos(r+2)x + \ldots + \lambda_m \cos(r+m)x$$

et le polynome des sinus conjugué

$$\lambda_1 \sin(r+1)x + \lambda_2 \sin(r+2)x + \ldots + \lambda_m \sin(r+m)x.$$

Ici m désigne un nombre entier positif quelconque, r un nombre entier non négatif quelconque; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ désignent des nombres positifs quelconques, mais *jamais croissants* ou jamais *décroissants*. Enfin soit L un nombre positif, pas plus petit qu'un quelconque des nombres λ.

Supposons maintenant que

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon,$$

où ε désigne un nombre positif, aussi petit qu'on veut, mais fixe.

Alors on a

(20) $$|\lambda_1 \cos(r+1)x + \ldots + \lambda_m \cos(r+m)x| < \frac{2\pi L}{\varepsilon}$$

et

$$(21) \qquad |\lambda_1 \sin(r+1)x + \ldots + \lambda_m \sin(r+m)x| < \frac{2\pi L}{\varepsilon}.$$

Démonstration. — On sait que

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{r} \cos px = \frac{\sin(2r+1)\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Donc si

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon,$$

alors

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{r} \cos px\right| \leqq \frac{1}{2\sin\dfrac{\varepsilon}{2}} < \frac{1}{2\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{2}} = \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

Écrivons au lieu de r un nombre entier positif l, plus grand que r. Nous aurons

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{l} \cos px\right| < \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

Avec soustraction

$$\left|\sum_{p=r+1}^{l} \cos px\right| < 2\frac{\pi}{2\varepsilon} = \frac{\pi}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon,$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

$$l = r+1, r+2, \ldots.$$

En appliquant maintenant au polynome des cosinus

$$\lambda_1 \cos(r+1)x + \ldots + \lambda_m \cos(r+m)x$$

la sommation partielle d'Abel, nous obtenons immédiatement le théorème à démontrer.

Pareillement, en partant de l'identité

$$\sum_{p=1}^{r} \sin px = \frac{\sin\dfrac{r}{2}x \sin\dfrac{r+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}},$$

on pourra facilement démontrer l'inégalité (21).

9. *Des inégalités* (20) et (21) *résulte*

$$(22)\qquad \left|\frac{\cos(r+1)x}{l+1}+\frac{\cos(r+2)x}{l+2}+\ldots+\frac{\cos(r+m)x}{l+m}\right|<\frac{2\pi}{\varepsilon},$$

$$(23)\qquad \left|\frac{\cos(r+1)x}{l+m}+\frac{\cos(r+2)x}{l+m-1}+\ldots+\frac{\cos(r+m)x}{l+1}\right|<\frac{2\pi}{\varepsilon}$$

et

$$(24)\qquad \left|\frac{\sin(r+1)x}{l+1}+\frac{\sin(r+2)x}{l+2}+\ldots+\frac{\sin(r+m)x}{l+m}\right|<\frac{2\pi}{\varepsilon},$$

$$(25)\qquad \left|\frac{\sin(r+1)x}{l+m}+\frac{\sin(r+2)x}{l+m-1}+\ldots+\frac{\sin(r+m)x}{l+1}\right|<\frac{2\pi}{\varepsilon},$$

pour

$$\begin{gathered}\varepsilon\leqq x\leqq 2\pi-\varepsilon\qquad(\varepsilon>0),\\ m=1,\,2,\,3,\,\ldots,\\ r=0,\,1,\,2,\,\ldots,\\ l=0,\,1,\,2,\,\ldots.\end{gathered}$$

10. Considérons le polynome des cosinus

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{c}\dfrac{\cos(r+1)x}{n}+\dfrac{\cos(r+2)x}{n-1}+\ldots+\dfrac{\cos(r+n)x}{1}\\ (n=1,\,2,\,3,\,\ldots;\ r=0,\,1,\,2,\,\ldots).\end{array}\right.$$

Ce polynome prend pour $x=0$ la valeur

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1.$$

Cette valeur est plus grande que $\log n$ et devient donc infinie en même temps que n.

Considérons le polynome conjugué

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{c}\dfrac{\sin(r+1)x}{n}+\dfrac{\sin(r+2)x}{n-1}+\ldots+\dfrac{\sin(r+n)x}{1}\\ (n=1,\,2,\,3,\,\ldots;\ r=0,\,1,\,2,\,\ldots).\end{array}\right.$$

Ce polynome prend pour $x=0$ la valeur zéro.

Mais examinons la valeur du polynome (27) pour

$$x=\frac{\pi}{2(r+n)}.$$

[Cette valeur est très voisine de $x = 0$, si l'un des nombres r et n est très grand.]

Puisque

$$(r+\nu)\frac{\pi}{2(r+n)} \leqq \frac{\pi}{2},$$

si

$$\nu = 1, 2, \ldots, n,$$

donc ([1])

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(r+\nu)\dfrac{\pi}{2(r+n)}}{n-\nu+1} > \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \frac{\sin(r+\nu)\dfrac{\pi}{2(r+n)}}{n-\nu+1}.$$

Mais

$$\frac{\pi}{4} < (r+\nu)\frac{\pi}{2(r+n)} \leqq \frac{\pi}{2},$$

si

$$\nu = \left[\frac{n}{2}\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n;$$

donc

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(r+\nu)\dfrac{\pi}{2(r+n)}}{n-\nu+1} > \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \frac{1}{n-\nu+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-\left[\dfrac{n}{2}\right]}\right)$$

$$\geqq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\left[\dfrac{n}{2}\right]}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{n}{2}\right].$$

Nous avons donc trouvé pour le polynome des sinus (27) le résultat suivant :

Pour

$$x = \frac{\pi}{2(r+n)}, \tag{28}$$

([1]) Je suppose que $n > \left[\frac{n}{2}\right]+1$, c'est-à-dire que $n \geqq 3$. $\left[\frac{n}{2}\right]$ = le plus grand entier contenu en $\frac{n}{2}$.

on a

$$(29)\quad \frac{\sin(r+1)x}{n}+\frac{\sin(r+2)x}{n-1}+\ldots+\frac{\sin(r+n)x}{1}>\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{n}{2}\right],$$

où

$$n=3,4,5,\ldots,$$
$$r=0,1,2,\ldots,$$
$$\left[\frac{n}{2}\right]=\text{le plus grand entier contenu en }\frac{n}{2}.$$

III. — Introduction d'une notation nouvelle. Théorème sur les séries trigonométriques.

11. Soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

une série infinie quelconque, et soit

$$g_1,\quad g_2,\quad \ldots,\quad g_\nu,\quad \ldots$$

une suite infinie quelconque des nombres entiers positifs. Alors, je désigne par

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)_{g_\nu}$$

une série infinie nouvelle, qu'on obtient de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ en *réunissant* dans cette série les g_1 premiers termes, puis les g_2 termes suivants, puis les g_3 termes suivants, ..., puis les g_ν termes suivants, ... En équations :

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)_{g_\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu,$$

où

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1+u_2 &&+\ldots+u_{g_1},\\
v_2 &= u_{g_1+1} &&+\ldots+u_{g_1+g_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
v_\nu &= u_{g_1+g_2+\ldots+g_{\nu-1}+1} &&+\ldots+u_{g_1+\ldots+g_\nu},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si par exemple

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_\nu = \ldots = 2,$$

alors, par rapport à la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\right)_{g_\nu}$ signifie la série

$$0 + 0 + 0 + \ldots.$$

Si par exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

alors

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)_{g_\nu} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \ldots,$$

si l'on a de nouveau $g_\nu = 2$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$.

Si la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

est convergente, alors la série

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)_{g_\nu}$$

est aussi convergente, quelle que soit la suite des nombres entiers positifs g_ν, et l'on a

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)_{g_\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{30}$$

Mais la série

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)_{g_\nu}$$

pourra être convergente (pour un choix convenable des g_ν), tandis que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

est divergente.

12. On connaît le théorème classique :

Si la série trigonométrique

$$(31) \qquad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$, *alors la somme de cette série est une fonction* $f(x)$ *partout continue et de période* 2π, *et les coefficients*

$$a_0, \quad a_1, \quad b_1, \quad \ldots, \quad a_k, \quad b_k, \quad \ldots$$

sont les « constantes de Fourier » de la fonction $f(x)$: c'est-à-dire

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt\, dt,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt\, dt$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Une généralisation très simple mais importante de ce théorème est la suivante :

En supposant que la série

$$(32) \qquad a_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)_{g_\nu}$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$, *où*

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_\nu, \quad \ldots$$

est une certaine suite de nombres entiers positifs (en outre quelconque), et en désignant par $f(x)$ la somme (partout continue et de période 2π) de cette série (32), les

$$a_0, \quad a_1, \quad b_1, \quad \ldots, \quad a_k, \quad b_k, \quad \ldots$$

sont alors les constantes de Fourier de cette fonction $f(x)$. En d'autres termes, la série

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

est la série de Fourier de la somme $f(x)$ de la série (32).

La démonstration est très simple et est presque identique à celle du théorème classique cité plus haut.

IV. — Définition d'une suite infinie numérique.

13 [1]. *Considérons le groupe de $2n$ nombres*

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n-1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\ldots, \quad -\frac{1}{n}, \tag{33}$$

n étant un nombre entier positif. Formons successivement ce groupe pour les valeurs suivantes de n :

$$n = 2^{1^3}, \quad 2^{2^3}, \quad 2^{3^3}, \quad 2^{4^3}, \quad \ldots, \quad 2^{\nu^3}, \quad \ldots \tag{34}$$

et écrivons ces groupes de nombres, l'un après l'autre, dans une seule ligne, mais après avoir divisé les nombre du $\nu^{ième}$ groupe par ν^2. Nous obtenons ainsi une suite infinie bien déterminée :

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_k, \quad \ldots. \tag{35}$$

Ses premiers termes sont :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_3 = -1, \qquad \alpha_4 = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha_5 = \frac{1}{4 \cdot 2^8} = \frac{1}{1024}, \qquad \alpha_6 = \frac{1}{4(2^8 - 1)} = \frac{1}{1020}, \qquad \ldots.$$

[1] *Voir* ma Note III, p. 45-47; ma Note IV, § 2, et ma Note V.

C'est cette suite (35) que j'emploie dans les paragraphes V, VI, VII et VIII pour la construction de mes exemples.

V. — La singularité de du Bois-Reymond pour un seul point.

14 ([1]). *La série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx \tag{36}$$

représente la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π. Cette série de Fourier est divergente pour $x = 0$.

Démonstration. — La série (36) est en effet la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π. Pour le démontrer, prenons la série

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx\right)_{g_\nu} \tag{38}$$

où

$$g_1 = 2.2^{1^3}, \qquad g_2 = 2.2^{2^3}, \qquad \ldots, \qquad g_\nu = 2.2^{\nu^3}, \qquad \ldots. \tag{37}$$

La série (38) est uniformément (et absolument) convergente dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$. En effet, la valeur absolue du $\nu^{\text{ième}}$ terme de cette série est, en tenant compte de la définition des nombres α_k et de l'inégalité (16), plus petite que

$$\frac{6}{\nu^2},$$

et puisque la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{6}{\nu^2}$$

est convergente, donc la série (38) est pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$ uniformément (et absolument) convergente.

D'après le théorème de l'alinéa 12, il suit immédiatement que la

([1]) *Voir* mes Notes III, IV et V.

série (36) est la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π. [Notamment celle de la fonction définie par la série uniformément et absolument convergente (38).]

Il reste à démontrer que la série de Fourier (36) montre effectivement la singularité de du Bois-Reymond pour $x = 0$, c'est-à-dire que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$$

est divergente. Mais cela est évident. En effet, la valeur de la $\left(g_1 + g_2 + \ldots + g_{\nu-1} + \frac{g_\nu}{2}\right)^{\text{ième}}$ somme partielle de cette série est

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \frac{1}{2^{\nu^3}-1} + \ldots + 1\right).$$

Cette valeur est plus grande que

$$\frac{1}{\nu^2}\log 2^{\nu^3} = \nu \log 2$$

et devient donc infinie en même temps que ν.

Le théorème relatif à la série (36) *est donc démontré.*

La série de Fourier (36), est pour $x = 0$ et par suite aussi pour $x = 2\pi$, divergente. *Il est intéressant de remarquer* ([1]) *que la série* (36) *est uniformément convergente dans l'intervalle*

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon,$$

où ε *désigne un nombre positif, aussi petit qu'on voudra, mais fixe.*

Démonstration. — Appelons, une fois pour toutes, les premiers g_1 termes de la série (36), *le premier groupe de termes;* les g_2 termes suivants, *le deuxième groupe de termes;* ...; les g_ν termes suivants, le $\nu^{\text{ième}}$ *groupe de termes*, ...

[Ici $g_1, \ldots, g_\nu, \ldots$ désignent de nouveau les entiers (37).]

Le $\nu^{\text{ième}}$ groupe de termes contient g_ν termes. Les premiers $\frac{g_\nu}{2}$

([1]) *Voir* ma Note V.

termes de ce groupe ont des coefficients positifs. Nous appelons l'ensemble de ces termes *le* $\nu^{\text{ième}}$ *groupe positif de termes*. Les autres $\frac{g_\nu}{2}$ termes du $\nu^{\text{ième}}$ groupe de termes ont des coefficients négatifs. Nous appelons leurs ensembles *le* $\nu^{\text{ième}}$ *groupe négatif de termes*.

Parfois nous appelons *groupe de termes* aussi *la somme* des termes qui constituent le groupe. Je ne crains pas qu'une confusion résulte de ce double emploi.

La formule du $\nu^{\text{ième}}$ *groupe de termes* est donc

$$\frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\cos(r+1)x}{n}+\frac{\cos(r+2)x}{n-1}+\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{\cos(r+2n-1)x}{n-1}-\frac{\cos(r+2n)x}{n}\right], \tag{39}$$

où

$$n=2^{\nu^3},$$
$$r=g_1+\ldots+g_{\nu-1}.$$

La formule du $\nu^{\text{ième}}$ *groupe positif de terme* est

$$\frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\cos(r+1)x}{n}+\frac{\cos(r+2)x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos(r+n)x}{1}\right], \tag{40}$$

où

$$n=2^{\nu^3},$$
$$r=g_1+g_2+\ldots+g_{\nu-1}.$$

La formule du $\nu^{\text{ième}}$ *groupe négatif de termes* est

$$\frac{1}{\nu^2}\left[-\frac{\cos(r+n+1)x}{1}-\ldots-\frac{\cos(r+2n)x}{n}\right], \tag{41}$$

où

$$n=2^{\nu^3},$$
$$r=g_1+g_2+\ldots+g_{\nu-1}.$$

Considérons maintenant le reste

$$R_{p,q}(x)=\sum_{k=p}^{k=q}\alpha_k\cos kx$$

de la série (36). (Ici $p<q$.) Désignons par ν_p l'indice du groupe de termes auquel appartient le premier terme $\alpha_p\cos px$ du reste $R_{p,q}(x)$, et par ν_q l'indice du groupe de termes auquel appartient le dernier

terme $\alpha_q \cos qx$ du reste $R_{p,q}(x)$. [Il est $\nu_r = \nu_q$ si les termes de $R_{p,q}(x)$ appartiennent au même groupe de termes de la série (36).]

Cela étant posé, $|R_{p,q}(x)|$ est certainement $\leqq$ la somme des valeurs absolues des groupes positifs de termes et des groupes négatifs de termes de la série (36), qui figurent dans la somme $R_{p,q}(x)$ + la valeur absolue de deux fragments de groupes de termes de la série (36), qui figurent aussi en général dans la somme $R_{p,q}(x)$.

Mais, en vertu des inégalités (22) et (23), la valeur absolue du $\nu^{\text{ième}}$ groupe positif de termes, ou du $\nu^{\text{ième}}$ groupe négatif de termes, ou la valeur absolue d'un fragment quelconque d'un de ces groupes, est plus petite que

$$\frac{1}{\nu^2}\frac{2\pi}{\varepsilon}$$

pour

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon.$$

Donc

$$\begin{aligned} |R_{p,q}(x)| &< 2\frac{2\pi}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\nu_p^2} + \frac{1}{(\nu_p+1)^2} + \ldots + \frac{1}{\nu_q^2}\right] \\ &< \frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\nu_p^2} + \frac{1}{(\nu_p+1)^2} + \ldots + \text{ad inf.}\right) \\ &< \frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{1}{\nu_p - 1}. \end{aligned}$$

Mais ν_p devient infini en même temps que p. Donc $|R_{p,q}(x)|$ devient aussi petit que l'on veut, si p est suffisamment grand, et x est contenu dans l'intervalle

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Nous avons donc démontré que la série de Fourier (36) est uniformément convergente dans l'intervalle $\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif fixe ε.

VI. — La singularité de M. Lebesgue pour un seul point.

15 [1]. *La série*

$$(42) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kx$$

[1] *Voir* ma Note V.

représente la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π. Cette série de Fourier est partout convergente, mais sa convergence est non uniforme dans chaque intervalle contenant la valeur $x = 0$.

Démonstration. — Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais fixé. Alors la série (42) est *convergente* dans l'intervalle

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon.$$

Elle est même uniformément convergente dans cet intervalle. On peut le démontrer tout à fait de la même manière que celle dont nous avons démontré la convergence uniforme de la série (36) pour le même intervalle.

Comme ε est aussi petit qu'on veut, la série de Fourier (1) (42) est convergente en chaque point dans l'intérieur de l'intervalle $(0, 2\pi)$. Mais elle est aussi convergente pour $x = 0$, parce que pour cette valeur de x la série (42) devient

$$0 + 0 + 0 + \ldots.$$

Donc la série de Fourier (42) est *partout* convergente.

Il reste à démontrer que la série de Fourier (42) présente la singularité de M. Lebesgue pour le voisinage de $x = 0$. En effet, je démontre que la série (42) ne converge pas uniformément dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq \rho$, où ρ désigne un nombre positif aussi petit qu'on veut mais fixe.

Considérons pour ce but le $\nu^{\text{ième}}$ groupe positif de termes (2) de la série (42) :

$$(43) \qquad \frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\sin(r+1)x}{2^{\nu^3}} + \frac{\sin(r+2)x}{2^{\nu^3}-1} + \ldots + \frac{\sin(r+2^{\nu^3})x}{1}\right],$$

$$r = 2.2^{1^3} + 2.2^{2^3} + \ldots + 2.2^{(\nu-1)^3}.$$

---

(1) En effet, la série (42) est la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π, puisque la série

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx\right)_{g_\nu}$$

est uniformément (et absolument) convergente pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

(2) Nous transférons à la série (42) les dénominations fixées précédemment dans

Si la série (42) était uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq \rho$, il faudrait que la somme (43) converge uniformément vers zéro dans ce même intervalle, lorsque ν devient infini. Mait ce n'est pas le cas. Considérons en effet le point

$$x = \frac{\pi}{2(r + 2^{\nu^3})} = \frac{\pi}{2(2.2^{1^3} + 2.2^{2^3} + \ldots + 2.2^{(\nu-1)^3} + 2^{\nu^3})}.$$

[Ce point tombe certainement dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq \rho$, si ν est suffisamment grand. Il converge vers $x = 0$ si ν devient infini.] En vertu de l'inégalité (29) la valeur de la somme (43) est pour cette valeur de x plus grande que

$$\frac{1}{\nu^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \log\left[\frac{2^{\nu^3}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} (\log 2) \frac{\nu^3 - 1}{\nu^2}$$

et devient donc infinie lorsque ν devient infini. La somme (43) ne peut donc pas converger *uniformément* vers zéro dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq \rho$ lorsque ν devient infini, et par suite la série (42) n'est pas uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq \rho$.

Remarque. — La série de Fourier (36) montre la singularité de du Bois-Reymond; la série de Fourier (42) montre la singularité de M. Lebesgue. Considérons maintenant la série de puissances

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

La série (36) est la partie réelle de cette série pour $z = e^{i\theta}$; la série (42) est la composante imaginaire de cette série pour $z = e^{i\theta}$. *Nous voyons donc que les singularités de du Bois-Reymond et de M. Lebesgue se présentent respectivement pour les composantes réelle et imaginaire d'une même série de puissances à loi de coefficient simple. Les singularités se présentent sur ces deux séries conjuguées au même*

---

l'alinéa 14 pour la série (36). D'après cela, il nous faut seulement écrire, dans les équations (39), (40), (41), *sin* au lieu de *cos* pour obtenir la définition des divers groupes de nombres relatifs à la série (42).

point $\theta = 0$. Je remarque encore que la fonction, définie par la série de puissances $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$, est *continue dans le domaine parfait* $|z| \leqq 1$. (*Voir* § VIII.)

VII. — La singularité de du Bois-Reymond pour des points partout denses dans un intervalle.

16 [1]. *Prenons la série* (36). *Écrivons dans le premier groupe de termes* $1!\,x$ *au lieu de* x, *dans le deuxième groupe de termes* $2!\,x$ *au lieu de* x, ..., *dans le* $\nu^{\text{ième}}$ *groupe de termes* $\nu!\,x$ *au lieu de* x, ... *Nous obtenons ainsi une série trigonométrique nouvelle bien déterminée*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k x. \tag{44}$$

En équations :

$$\begin{array}{lll}
\lambda_k = 1!\,k & \text{si} & 1 \leqq k \leqq g_1, \\
\lambda_k = 2!\,k & \text{si} & g_1 + 1 \leqq k \leqq g_1 + g_2, \\
\dots\dots\dots & & \\
\lambda_k = \nu!\,k & \text{si} & g_1 + g_2 + \ldots + g_{\nu-1} + 1 \leqq k \leqq g_1 + \ldots + g_\nu, \\
\dots\dots\dots & &
\end{array}$$

La série trigonométrique (44) *est la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période* 2π. *Cette série de Fourier est divergente pour les valeurs*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{m}{n}\pi, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \end{array} \right. \tag{45}$$

Démonstration. — En vertu de l'inégalité (18), la série

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k x \right)_{g_\nu} \tag{46}$$

---

(1) *Voir* ma Note IV.

est uniformément (et absolument) convergente dans l'intervalle

$$0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

On conclut donc du théorème de l'alinéa 12 que la série (44) est en effet la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π [celle de la fonction définie par la série uniformément convergente (46)].

Considérons maintenant un point

$$x = \frac{m}{n}\pi. \tag{45}$$

Au point (45) la valeur du $\nu^{\text{ième}}$ groupe positif de termes de la série (44) est, *si* ν *est suffisamment grand*,

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \frac{1}{2^{\nu^3}-1} + \ldots + 1\right).$$

Puisque cette valeur devient infinie en même temps que ν, la série (44) est divergente au point considéré $\frac{m}{n}\pi$.

17 [1]. Je fais remarquer que la série conjuguée de la série des cosinus (44)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \lambda_k x \tag{47}$$

est aussi la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π. En effet la série

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \lambda_k x\right)_{g_\nu}$$

est uniformément (et absolument) convergente dans l'intervalle

$$0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

---

(1) *Voir* ma Note IV.

VIII. — La singularité relative à une paire de séries de Fourier conjuguées; pour un seul point et pour des points partout denses dans un intervalle.

18 ([1]). *Une série de puissances, convergente dans le cercle* $|z| < 1$ *et représentant pour* $|z| \leqq 1$ *une fonction partout continue, peut-elle être divergente dans un point de la circonférence* $|z| = 1$?

C'est M. Pringsheim qui a posé cette question. Elle est identique à la question suivante : Existe-t-il une paire conjuguée de séries de Fourier, dont chacune appartient à une fonction partout continue et de période 2π et telle qu'une au moins de ces deux séries de Fourier soit divergente pour une certaine valeur de la variable indépendante (par exemple pour la valeur zéro)?

La réponse est affirmative. En effet les séries de Fourier (36) et (42) forment une telle paire.

Nous voulons traiter ici cette question indépendamment des paragraphes V, VI, VII.

Considérons donc la série de puissances de la variable complexe z

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k. \tag{48}$$

Puisque

$$\lim_{k=\infty} \alpha_k = 0,$$

la série (48) est convergente pour $|z| < 1$. Je veux maintenant démontrer que la somme de la série (48) pour $|z| < 1$ *est continue dans le domaine parfait* $|z| \leqq 1$. Considérons en effet la série

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k\right)_{g_\nu} \tag{49}$$

où

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_\nu, \quad \ldots$$

([1]) *Voir* ma Note IV.

désignent de nouveau les nombres

$$2 . 2^{1^3}, \quad \ldots, \quad 2 . 2^{\nu^3}, \quad \ldots .$$

La série (49) est une série procédant suivant des polynomes entiers de la variable complexe z. Mais cette série est uniformément (et absolument) convergente sur la circonférence $|z| = 1$ [*voir* les inégalités (16), (17)]. Donc elle est aussi uniformément (et absolument) convergente dans le domaine total $|z| \leqq 1$, d'après des propriétés bien connues des fonctions harmoniques. Pour $|z| < 1$ les valeurs de cette série (49) et de la série (48) coïncident [*voir* l'équation (30)]; donc la somme de (48) pour $|z| < 1$ est effectivement continue dans le domaine parfait $|z| \leqq 1$.

Pour $z = 1$ la série (48) devient

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + \ldots .$$

Cette série est divergente. Donc le cercle $|z| = 1$ est le vrai cercle de convergence pour la série de puissances (48).

Nous avons donc obtenu le résultat :

La série de puissances

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

est convergente pour $|z| < 1$ *et sa somme est continue pour* $|z| \leqq 1$; *elle est pourtant divergente pour le point* $z = 1$ *de son cercle de convergence.*

En outre, la série de puissances (48) est à l'exception du point $z = 1$ partout convergente sur son cercle de convergence.

Elle est même uniformément convergente sur chaque arc

$$e^{i\theta}, \qquad \varepsilon \leqq \theta \leqq 2\pi - \varepsilon$$

de cette circonférence. Ici ε désigne un nombre positif, aussi petit qu'on veut, mais fixe.

19. La série de puissances (48) montre la singularité en question en un seul point de son cercle de convergence.

Considérons maintenant la série de puissances

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{\lambda_k}, \tag{50}$$

où les α_k désignent de nouveau les nombres définis dans l'alinéa 13, et les λ_k les nombres définis dans l'alinéa 16.

D'après les alinéas 16 et 17, il est évident que :

La série de puissances

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{\lambda_k}$$

est convergente pour $|z| < 1$, *et sa somme est continue dans le domaine parfait* $|z| \leqq 1$.

Mais elle est divergente pour les points

$$z = e^{\frac{m}{n}\pi i},$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

qui sont partout denses sur son cercle de convergence.

En réunissant les résultats des alinéas 18 et 19, nous pouvons dire :

La série de puissances d'une fonction analytique peut être divergente sur son cercle de convergence même dans le cas où elle passe uniformément à des valeurs frontières partout continues sur ce cercle de convergence. La série de puissances peut être divergente dans un tel cas, non seulement dans un seul point du cercle de convergence, mais aussi dans des points partout denses de ce cercle.

IX. — Vérification sur l'exemple du paragraphe V de mon théorème sur les moyennes arithmétiques.

20. La série de Fourier d'une fonction $f(x)$ bornée et intégrable est *sommable* dans un point où la fonction $f(x)$ est continue; c'est-à-dire pour un tel point la suite des moyennes arithmétiques des

sommes de Fourier

$$s_0(x), \quad \frac{s_0(x)+s_1(x)}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_n(x)}{n+1}, \quad \ldots$$

est convergente, ayant comme limite la valeur $f(x)$.

La démonstration générale de ce théorème est, comme on sait, bien simple.

Depuis la communication de ce théorème (1900) j'ai cherché l'exemple d'une série de Fourier (appartenant à une fonction partout continue et de période 2π) pour laquelle on peut démontrer ce théorème par un calcul particulier. En d'autres termes, j'ai cherché à trouver une fonction $f(x)$ spéciale, ayant une série de Fourier, sur laquelle on puisse *vérifier* le théorème ci-dessus. Je crois que beaucoup de lecteurs ont senti le manque d'une telle série de Fourier à coefficients numériques (appartenant à une fonction partout continue), sur laquelle on puisse pour ainsi dire *voir* la convergence des moyennes arithmétiques vers la valeur $f(x)$ de la fonction développée. Un tel exemple, s'il est suffisamment simple, donne certainement une illustration très vive du théorème général. Je n'ai pas réussi à faire cette vérification sur les exemples de du Bois-Reymond, M. Schwarz, M. Lebesgue, etc.

Mais il est très facile de faire ce calcul vérificatif sur mon exemple

$$(36) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx,$$

et c'est ce que je veux montrer dans les lignes de cet alinéa.

La série (36) est la série de Fourier d'une fonction partout continue et de période 2π. Pour $x=0$ elle devient

$$(51) \qquad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+\ldots,$$

et cette série est divergente. Maintenant je veux montrer par un calcul direct que les moyennes arithmétiques de la série (51) convergent, et notamment vers la valeur $f(0)=0$ [1].

---

[1] On a $f(0)=0$. En effet

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx\right)_{g_\nu} \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi).$$

Donc

$$f(0) = 0+0+0+\ldots = 0.$$

Considérons d'abord la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1-1-\ldots-\frac{1}{n}. \tag{52}$$

[Sa valeur est égale à zéro.] Nous pouvons aussi la regarder comme série infinie dans le sens suivant :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1-1-\ldots-\frac{1}{n}+0+0+0+\ldots. \tag{52}$$

La $n^{\text{ième}}$ somme partielle de cette série

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1$$

est aussi grande qu'on veut, si n est suffisamment grand. J'affirme maintenant que les moyennes arithmétiques de la série (52) [1] sont toutes plus petites que 2, quelle que soit la valeur du nombre entier positif n.

Démonstration. — Désignons par

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_k, \quad \ldots$$

les sommes partielles de la série (52).

On a donc

$$\sigma_1=\frac{1}{n}, \qquad \sigma_2=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}, \qquad \ldots.$$

Je vais discerner trois cas :

(a). $1 \leqq k \leqq n$. Alors

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k}{k}=\frac{\dfrac{k}{n}+\dfrac{k-1}{n-1}+\ldots+\dfrac{k-(k-1)}{n-(k-1)}}{k}$$
$$<\frac{\dfrac{n}{n}+\dfrac{n-1}{n-1}+\ldots+\dfrac{n-(k-1)}{n-(k-1)}}{k}=\frac{1+1+\ldots+1}{k}=\frac{k}{k}=1.$$

---

[1] Ce sont des valeurs positives.

(*b*). $n < k \leqq 2n$, c'est-à-dire $k = n + r$, où $0 < r \leqq n$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k}{k} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n+r}}{n+r} \\
&= \frac{1}{n+r}\left(\frac{n+r}{n} + \frac{n+r-1}{n-1} + \ldots + \frac{r+1}{1} - \frac{r}{1} - \frac{r-1}{2} - \ldots - \frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{1}{n+r}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{r+\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{r}\frac{r-\nu+1}{\nu}\right) \\
&= \frac{1}{n+r}\left(\sum_{\nu=1}^{r}\frac{r+\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{r}\frac{r-\nu+1}{\nu} + \sum_{\nu=r+1}^{n}\frac{r+\nu}{\nu}\right) \\
&= \frac{1}{n+r}\left(\sum_{\nu=1}^{r}\frac{2\nu-1}{\nu} + \sum_{\nu=r+1}^{n}\frac{r+\nu}{\nu}\right) \\
&< \frac{1}{n+r}[r.2 + (n-r).2] \\
&= \frac{2n}{n+r} < 2.
\end{aligned}$$

(*c*) [1]. $2n < k < \infty$, c'est-à-dire $k = n + r$, où $n < r < +\infty$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k}{k} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n+r}}{n+r} \\
&= \frac{1}{n+r}\left(\frac{n+r}{n} + \frac{n+r-1}{n-1} + \ldots + \frac{r+1}{1}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{r}{1} - \frac{r-1}{2} - \ldots - \frac{r-n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n+r}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{r+\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{r-\nu+1}{\nu}\right) \\
&= \frac{1}{n+r}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2\nu-1}{\nu} < \frac{2n}{n+r} < \frac{2n}{2n} = 1.
\end{aligned}$$

Donc pour la série (52) on a

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k}{k} < 2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

[1] Je ne traite le cas (*c*) que pour être complet. Je n'en aurai pas besoin dans ce qui suit.

Cela étant posé je vais démontrer que les moyennes arithmétiques de la série (51) convergent vers zéro.

Désignons par

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_k, \quad \ldots$$

les sommes partielles de la série (51). Soit k une valeur quelconque de l'indice.

Divisons k en parties comme il suit [1] :

$$k = g_1 + g_2 + \ldots + g_\nu + r$$

où

$$0 \leqq r < g_{\nu+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_k}{k} &= \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_k}{g_1 + g_2 + \ldots + g_\nu + r}\\ &= \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{g_1} + s_{g_1+1} + \ldots + s_{g_1+g_2} + \ldots}{g_1 + g_2 + \ldots}\\ &= \frac{g_1 \dfrac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{g_1}}{g_1} + g_2 \dfrac{s_{g_1+1} + \ldots + s_{g_1+g_2}}{g_2} + \ldots}{g_1 + g_2 + \ldots}.\end{aligned}$$

Mais, d'après les inégalités sous (a) et (b),

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{g_1}}{g_1} < \frac{1}{1^2} 2,$$

$$\frac{s_{g_1+1} + \ldots + s_{g_1+g_2}}{g_2} < \frac{1}{2^2} 2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{s_{g_1+g_2+\ldots+g_\nu+1} + \ldots + s_{g_1+\ldots+g_\nu+r}}{r} < \frac{1}{(\nu+1)^2} 2;$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_k}{k} &< \frac{g_1 \dfrac{1}{1^2} 2 + g_2 \dfrac{1}{2^2} 2 + \ldots + g_\nu \dfrac{1}{\nu^2} 2 + r \dfrac{1}{(\nu+1)^2} 2}{g_1 + g_2 + \ldots + g_\nu + r}\\ &= 2\,\frac{\dfrac{g_1}{1^2} + \dfrac{g_2}{2^2} + \ldots + \dfrac{g_\nu}{\nu^2} + \dfrac{r}{(\nu+1)^2}}{g_1 + g_2 + \ldots + g_\nu + r}.\end{aligned}$$

---

[1] Nous prenons de nouveau $g_\nu = 2.2^{\nu^2}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Mais, d'après les théorèmes connus sur le centre de gravité, cette fraction converge vers zéro, lorsque ν (et par suite aussi k) devient infini.

Donc

$$\lim_{k=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_k}{k} = 0.$$

Lorsque $f(x)$ est une fonction partout continue et de période 2π, alors les moyennes arithmétiques de la série de Fourier de $f(x)$ convergent *uniformément* vers $f(x)$ dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Je crois qu'on pourra aussi *vérifier* cette propriété sur la série de Fourier (36). Il faudra seulement faire un examen préalable des moyennes arithmétiques du polynome ([1])

$$\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1} - \ldots - \frac{\cos 2nx}{n}.$$

APPENDICE.

Nouvelle expression pour les constantes de M. Lebesgue.

Nous avons vu que la série de Fourier

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx \tag{36}$$

de la fonction partout continue et de période 2π

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx \right)_{g_\nu} \tag{38}$$

([1]) Ce paragraphe est à comparer au paragraphe IV de ma Note III. — Il est intéressant d'envisager la série $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx$, en employant dans la définition des nombres α_k (*voir* le paragraphe IV de ce travail), non pas les nombres

$$2^{1^3},\ 2^{2^3},\ \ldots,\ 2^{\nu^3},\ \ldots$$

mais les nombres

$$2^{1^2},\ 2^{2^2},\ \ldots,\ 2^{\nu^2},\ \ldots.$$

est divergente pour $x = 0$. Pour $x = 0$ la série (36) devient

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + \ldots.$$

Les sommes partielles de cette série sont des nombres non négatifs entre lesquels on trouve des nombres aussi grands que l'on veut, bien que la fonction, à laquelle la série (36) appartient comme série de Fourier, ait une valeur absolue plus petite que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{6}{\nu^2}.$$

Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle

$$0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Soit de plus

$$|f(x)| \leqq 1$$

pour

$$0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Nous posons la question : Quelle est la limite supérieure de $|s_n(x)|$, lorsque $f(x)$ parcourt l'ensemble des fonctions bornées et intégrables assujetties à la condition $|f(x)| \leqq 1$ pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$? Ici $s_n(x)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de $f(x)$, n une certaine valeur de l'indice, x une certaine valeur dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Dans le paragraphe I de ma Note III, j'ai démontré, en suivant M. Lebesgue, qu'une telle limite supérieure existe, qu'elle est indépendante de la valeur de x, et qu'elle a comme valeur

$$(53) \qquad \rho_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Puisque la limite supérieure est indépendante de x, nous nous restreignons à la considération de la valeur $x = 0$.

Alors la fonction

$$(54) \qquad \operatorname{sign.} \sin(2n+1)\frac{x}{2} \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

est celle dont la $n^{\text{ième}}$ somme de Fourier a pour $x = 0$ une valeur (positive) qui n'est pas plus petite que la valeur absolue de la $n^{\text{ième}}$ somme de Fourier pour $x=0$ d'une fonction $f(x)$ quelconque, satisfaisant pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$ à la condition $|f(x)| \leqq 1$. La valeur de $s_n(0)$ pour la fonction (54) est en effet égale à ρ_n.

A l'endroit cité j'ai aussi établi l'expression *asymptotique* pour ces constantes importantes

$$\rho_0, \quad \rho_1, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad \ldots$$

que j'ai nommées « les constantes de Lebesgue de la série de Fourier ». J'ai trouvé notamment

$$\rho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \varepsilon_n,$$

où

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int_0^1 \log \Gamma(t) \cos \pi t \, dt,$$

et

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Dans les lignes suivantes de cet Appendice je donnerai une nouvelle expression pour la constante de Lebesgue ρ_n.

Soit

$$\text{sign.} \sin (2n+1) \frac{x}{2} = l_0 + l_1 \cos x + \ldots + l_\nu \cos \nu x + \ldots \tag{55}$$

la série de Fourier de la fonction $\text{sign.} \sin(2n+1)\frac{x}{2}$. [C'est une série des cosinus, puisque

$$\text{sign.} \sin (2n+1) \frac{2\pi - x}{2} = \text{sign.} \sin (2n+1) \frac{x}{2}.\Big]$$

Alors

$$\rho_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_n.$$

Il faudra donc seulement établir la formule de l_ν.

On a

$$l_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign.} \sin (2n+1) \frac{x}{2} \cos \nu x \, dx \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Donc

$$\pi l_\nu = \left[\frac{\sin\nu x}{\nu}\right]_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} - \left[\frac{\sin\nu x}{\nu}\right]_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{2\frac{2\pi}{2n+1}} + \ldots + \left[\frac{\sin\nu x}{\nu}\right]_{2n\frac{2\pi}{2n+1}}^{(2n+1)\frac{2\pi}{2n+1}}$$

$$= \frac{2}{\nu}[\sin t - \sin 2t + \sin 3t - \sin 4t + \ldots + \sin(2n-1)t - \sin 2nt]_{t=\nu\frac{2\pi}{2n+1}}.$$

Mais

$$\sin t - \sin 2t + \ldots + \sin(2n-1)t - \sin 2nt = -\frac{\sin nt \cos\frac{2n+1}{2}t}{\cos\frac{t}{2}},$$

donc

$$\pi l_\nu = -\frac{2}{\nu}\,\frac{\sin n\nu\frac{2\pi}{2n+1}}{\cos\nu\frac{\pi}{2n+1}}\cos\nu\pi.$$

Mais

$$\cos\nu\pi = (-1)^\nu$$

et

$$\sin n\nu\frac{2\pi}{2n+1} = \sin\frac{2n\pi}{2n+1}\nu$$

$$= \sin\frac{2n+1-1}{2n+1}\pi\nu = \sin\left(\nu\pi - \frac{\nu\pi}{2n+1}\right)$$

$$= -\cos\nu\pi\sin\frac{\nu\pi}{2n+1} = -(-1)^\nu\sin\nu\frac{\pi}{2n+1};$$

donc

$$\pi l_\nu = \frac{2}{\nu}\,\frac{\sin\nu\frac{\pi}{2n+1}}{\cos\nu\frac{\pi}{2n+1}} = \frac{2}{\nu}\operatorname{tang}\nu\frac{\pi}{2n+1},$$

et nous obtenons [1]

$$(56)\qquad l_\nu = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\nu}\operatorname{tang}\nu\frac{\pi}{2n+1}\qquad(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

[1] Cette formule est en effet applicable, quelle que soit la valeur de l'entier positif ν. En effet $\nu\frac{\pi}{2n+1}$ ne peut pas être égale à $(2m+1)\frac{\pi}{2}$, où la fonction $\operatorname{tang} x$ devient singulière, puisque

$$\nu\frac{\pi}{2n+1} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

entraîne

$$2\nu = (2m+1)(2n+1),$$

ce qui est évidemment impossible.

C'est l_0 qu'il nous reste à calculer. On a

$$l_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{sign.} \sin(2n+1)\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\pi}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Nous avons donc trouvé, pour la constante ρ_n de Lebesgue, l'expression

$$(57) \qquad \rho_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\operatorname{tang}\nu\frac{\pi}{2n+1} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

On voit qu'on peut traiter les constantes ρ_n de Lebesgue au moyen de la courbe

$$y = \operatorname{tang} x,$$
$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Je crois qu'il ne serait pas difficile de déduire les propriétés des ρ_n de leur expression nouvelle (57).

TABLE DES MATIÈRES.