G. TZITZÉICA

Sur certaines courbes gauches

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 28 (1911), p. 9-32

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR CERTAINES COURBES GAUCHES,

PAR M. G. TZITZÉICA.

Je me propose d'étudier, dans ce qui suit, les courbes gauches C jouissant de la propriété suivante : *La torsion en un point quelconque est proportionnelle au carré de la distance d'un point fixe de l'espace au plan osculateur.* Si je suppose le point fixe choisi pour origine des coordonnées et si je désigne par T le rayon de torsion en un point M de la courbe et par d la distance de l'origine au plan osculateur en M, on doit avoir

$$(1) \qquad \mathrm{T}d^2 = \text{const.}$$

le long de la courbe C considérée.

I.

1\. Supposons les coordonnées x, y, z du point M de la courbe C fonctions d'un paramètre t, que nous fixerons de la manière suivante : on peut considérer x, y, z comme intégrales linéairement indépendantes d'une même équation différentielle, linéaire et homogène, du troisième ordre. Je suppose que t a été choisi de manière que la dérivée seconde manque dans cette équation, qui sera par conséquent de la forme

$$\theta''' = p\theta' + q\theta, \tag{2}$$

p et q étant des fonctions connues de t, lorsque x, y, z sont données.

Cela étant, si l'on remplace dans (1) T et d par leurs expressions

$$T = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{|\,x''' \quad x'' \quad x'\,|}, \qquad d = \frac{|\,x'' \quad x' \quad x\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

où $|x''' x'' x'|$ et $|x'' x' x|$ désignent des déterminants réduits, pour abréger l'écriture, à leurs premières lignes, et A, B, C sont les mineurs du premier déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, on obtient

$$\frac{|\,x''' \quad x'' \quad x'\,|}{|\,x'' \quad x' \quad x\,|^2} = \text{const}.$$

Cette égalité donne, en remarquant que x, y, z sont des intégrales de (2), $q = \text{const}$. On voit aisément qu'on peut prendre $q = 1$ et l'on a alors le résultat suivant :

Toute courbe C jouissant de la propriété géométrique exprimée par l'égalité (1) *peut être définie à l'aide de trois intégrales linéairement indépendantes d'une équation de la forme*

$$\theta''' = p\theta' + \theta. \tag{3}$$

Dans le cas où on laisse au paramètre t toute sa généralité, on a le résultat suivant, théoriquement aussi simple que le précédent, mais moins commode dans les calculs.

La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe définie par trois intégrales de l'équation

$$\theta''' + p_1\theta'' + p_2\theta' + p_3\theta = 0$$

jouisse de la propriété (1) *est donnée par la relation*

2. Cette proposition a une conséquence importante. En effet, x, y, z étant trois intégrales linéairement indépendantes de l'équation (3), les fonctions

$$\left\{\begin{aligned} X &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ Y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ Z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

les a, b, c étant des constantes, le sont aussi, en supposant bien entendu $|a_1 b_1 c_1| \neq 0$. Elles définissent donc aussi une courbe admettant la propriété (1). On a alors la nouvelle proposition : *Une transformation linéaire de la forme* (4), *ne changeant pas l'origine ni le plan de l'infini* (*une transformation affine*), *transforme une courbe jouissant de la propriété* (1) *en une courbe ayant la même propriété.*

3. Nous allons considérer maintenant la courbe Γ, transformée de C par polaires réciproques, par rapport à la sphère de rayon 1 ayant son centre au point fixe choisi pour origine. Cette nouvelle courbe est l'arête de rebroussement de l'enveloppe du plan

$$xX + yY + zZ = 1.$$

Si nous désignons par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de Γ, nous trouvons aisément qu'elles sont définies par les équations suivantes :

$$S x\xi = 1, \qquad S x'\xi = 0, \qquad S x''\xi = 0, \tag{5}$$

où S — signe de *Lamé* — indique la sommation par rapport aux coordonnées.

Je suppose maintenant que x, y, z sont des intégrales de l'équation (3). D'autre part, on peut évidemment considérer ξ, η, ζ comme des intégrales d'une équation de la forme

$$\omega''' = \alpha\omega'' + \beta\omega' + \gamma\omega.$$

Il s'agit de trouver, à l'aide des relations (5), l'expression des coefficients α, β et γ. Or ceci est aisé et l'on obtient, par des dérivations successives des deux membres des égalités (5) et en tenant compte de (3),

$$\alpha = 0, \qquad \beta = p, \qquad \gamma = -1.$$

Donc, si x, y, z sont des intégrales linéairement indépendantes de l'équation (3), ξ, η, ζ sont des intégrales linéairement indépendantes de l'équation

$$\omega''' = p\omega' - \omega.$$

On a alors, en vertu de la proposition démontrée au paragraphe 1, le résultat suivant :

Si l'on transforme par polaires réciproques par rapport à une sphère de rayon 1 *et de centre l'origine une courbe* C *jouissant de la propriété* (1), *on obtient une courbe* Γ *ayant la même propriété.*

Si l'on tient compte du paragraphe 2, on voit qu'on a le même résultat si l'on fait la transformation par polaires réciproques par rapport à une quadrique quelconque ayant son centre à l'origine.

II.

4. Nous voulons appliquer aux courbes ayant la propriété (1) une autre classe de transformations.

Deux courbes C et C_1 sont dites *transformées asymptotiques* l'une de l'autre, si elles sont lignes asymptotiques curvilignes d'une même surface réglée, c'est-à-dire si entre les points homologues M et M_1 des deux courbes C et C_1 on a la correspondance suivante : le plan osculateur en M passe par M_1 et réciproquement.

Je me propose de démontrer que, parmi les transformées asymptotiques d'une courbe C admettant la propriété (1), il y en a une infinité qui ont la même propriété.

Pour arriver à ce résultat j'ai besoin de certaines formules établies par M. Bianchi dans un Mémoire très intéressant (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. XXV, p. 292). Je rappelle ici tout ce qu'il faut pour mon but, en remarquant que les formules qui servent comme point de départ ont leur origine naturelle dans les formules bien connues de M. Lelieuvre. Considérons en effet une surface rapportée à ses lignes asymptotiques, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v},$$

et des formules analogues pour y et z (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 24 et suiv.). On a de plus

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=\frac{1}{\sqrt{-K}},$$

K étant la courbure totale de la surface.

Cela étant, supposons que pour $v=0$, par exemple, on obtienne la courbe C et que, pour cette même valeur de v, θ_1, θ_2, θ_3 deviennent $l(u)$, $m(u)$, $n(u)$; on aura le long de la courbe C

$$(6)\qquad x'=\begin{vmatrix} m' & n' \\ m & n \end{vmatrix},\qquad y'=\begin{vmatrix} n' & l' \\ n & l \end{vmatrix},\qquad z'=\begin{vmatrix} l' & m' \\ l & m \end{vmatrix},$$

où les accents signifient la dérivation par rapport à la variable u. En vertu du théorème d'Enneper, qui relie entre elles la courbure totale d'une surface et la torsion d'une ligne asymptotique, on aura pour le rayon de torsion T de la courbe C

$$(7)\qquad T=l^2+m^2+n^2,$$

où nous avons implicitement supposé la courbe à torsion positive. Dans le cas contraire on n'a qu'à prendre sa symétrique par rapport à l'origine.

Comme les formules (6) donnent

$$S\,lx'=0,\qquad S\,l'x'=0,$$

et comme de la première de ces formules on tire

$$S\,lx''=0,$$

il résulte que l, m, n sont des paramètres directeurs du plan osculateur à la courbe C.

5. Considérons maintenant une autre courbe C_1 étant avec C lignes asymptotiques d'une même surface réglée. De ce dernier fait il résulte que C_1 a comme C, par hypothèse, sa torsion positive et l'on a

$$(6')\qquad x'_1=\begin{vmatrix} m'_1 & n'_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix},\qquad y'_1=\begin{vmatrix} n'_1 & l'_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix},\qquad z'_1=\begin{vmatrix} l'_1 & m'_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix},$$

pareilles à (6). Comme le plan osculateur en $M(x, y, z)$ passe par $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et réciproquement, on a

$$S\, l(x_1 - x) = 0, \qquad S\, l_1(x_1 - x) = 0.$$

De ces deux relations on déduit

$$x_1 - x = k \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m & n \end{vmatrix}, \qquad y_1 - y = k \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n & l \end{vmatrix}, \qquad z_1 - z = k \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l & m \end{vmatrix},$$

k étant un facteur de proportionnalité. Dérivons chaque membre de ces trois égalités et multiplions-les respectivement une première fois par l, m, n, une deuxième fois par l_1, m_1, n_1, on obtient

$$(8) \qquad S\, l x'_1 - S\, l x = k \,|\, l \quad l_1 \quad l' \,|, \qquad S\, l_1 x'_1 - S\, l_1 x' = k \,|\, l_1 \quad l'_1 \quad l \,|.$$

Or, d'après les formules (6) et (6'), on a

$$S\, l x' = 0, \qquad S\, l_1 x'_1 = 0, \qquad S\, l x'_1 = |\, l \quad l'_1 \quad l_1 \,|, \qquad S\, l_1 x' = |\, l_1 \quad l' \quad l \,|;$$

les égalités (8) deviennent alors

$$|\, l \quad l'_1 \quad l_1 \,| = k \,|\, l \quad l_1 \quad l' \,|, \qquad -|\, l_1 \quad l' \quad l \,| = k \,|\, l_1 \quad l'_1 \quad l \,|,$$

ce qui donne $k^2 = 1$. En changeant au besoin les signes de l_1, m_1, n_1, ce qui ne change pas la courbe C_1, on peut prendre $k = 1$. On a par conséquent

$$(9) \qquad x_1 = x + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m & n \end{vmatrix}, \qquad y_1 = y + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n & l \end{vmatrix}, \qquad z_1 = z + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l & m \end{vmatrix}.$$

En dérivant ces formules et en tenant compte de (6) et (6'), on trouve sans difficulté que $l'_1 + l'$, $m'_1 + m'$, $n'_1 + n'$ sont proportionnels à $l_1 - l$, $m_1 - m$, $n_1 - n$, ou

$$(10) \qquad l'_1 + l' = \omega_1(l_1 - l), \qquad m'_1 + m' = \omega_1(m_1 - m), \qquad n'_1 + n' = \omega_1(n_1 - n),$$

ω_1 étant une fonction arbitraire de u. On a donc le résultat suivant :

Si la courbe C est donnée et que les fonctions l, m, n des formules (6) *sont connues, alors les formules* (9) *où l_1, m_1, n_1 vérifient les relations* (10) *définissent une courbe C_1, transformée asymptotique de C.*

6. Nous allons déterminer maintenant toutes les autres lignes asymptotiques de la surface réglée décrite par la droite MM_1. Soit $\overline{C}$ une d'entre elles. Comme elle est une transformée asymptotique de C, on aura

$$(9') \qquad \overline{x} = x + \begin{vmatrix} \overline{m} & \overline{n} \\ m & n \end{vmatrix}, \qquad \overline{y} = y + \begin{vmatrix} \overline{n} & \overline{l} \\ n & l \end{vmatrix}, \qquad \overline{z} = z + \begin{vmatrix} \overline{l} & \overline{m} \\ l & m \end{vmatrix},$$

$\overline{l}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$ analogues à l_1, m_1, n_1 devant vérifier des relations de la forme

$$(10') \qquad \overline{l}' + l' = \overline{\omega}(\overline{l} - l), \qquad \overline{m}' + m' = \overline{\omega}(\overline{m} - m), \qquad \overline{n}' + n' = \overline{\omega}(\overline{n} - n).$$

Or, en écrivant que le point $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ se trouve sur la droite MM_1, on trouve que $\overline{l}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$ sont de la forme

$$\overline{l} = A l_1 + B l, \qquad \overline{m} = A m_1 + B m, \qquad \overline{n} = A n_1 + B n,$$

A et B étant des fonctions de u qu'il faut déterminer de manière que $\overline{l}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$ vérifient des équations (10'). Cette dernière condition donne

$$A = B + 1, \qquad A' = A(A - 1)\omega_1.$$

En posant $\omega_1 = \Psi'_1 : \Psi_1$ la deuxième de ces relations donne

$$A = \frac{1}{1 - c\Psi_1}, \qquad c = \text{const.},$$

et alors on tire de la première

$$B = \frac{c\Psi_1}{1 - c\Psi_1}.$$

Finalement on a

$$(11) \qquad \overline{l} = \frac{l_1 + c\Psi_1 l}{1 - c\Psi_1}, \qquad \overline{m} = \frac{m_1 + c\Psi_1 m}{1 - c\Psi_1}, \qquad \overline{n} = \frac{n_1 + c\Psi_1 n}{1 - c\Psi_1},$$

et les formules (9') deviennent

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\overline{x} = x + \frac{1}{1 - c\Psi_1} \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m & n \end{vmatrix}, \qquad \overline{y} = y + \frac{1}{1 - c\Psi_1} \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n & l \end{vmatrix}, \\ &\qquad\qquad \overline{z} = z + \frac{1}{1 - c\Psi_1} \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l & m \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Ces dernières formules donnent toutes les lignes asymptotiques de la surface réglée décrite par la droite MM_1. Spécialement pour $c = 0$ on a la courbe C_1 et pour $c = \infty$ la courbe C. Tous ces résultats sont empruntés au Mémoire de M. Bianchi.

7. Maintenant nous avons tous les éléments pour revenir à notre question. Il faut chercher tout d'abord la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C, vérifiant les formules (6), admette la propriété (1).

Or, on a

$$d = \frac{lx + my + nz}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

et comme d'après la formule (7) on a

$$T = l^2 + m^2 + n^2,$$

l'égalité (1) donne

$$lx + my + nz = \text{const.};$$

celle-ci est la condition cherchée.

8. Cela étant, remarquons que les formules (6) ne changent pas de forme si l'on change la variable indépendante u. Je suppose, pour simplifier les calculs, que cette variable ait été choisie de manière que l'équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre, admettant l, m, n comme intégrales, soit de la forme

$$\theta''' = p\theta' + q\theta, \tag{13}$$

et de plus que le déterminant $|l'' \, l' \, l|$ qui, en vertu de l'hypothèse précédente, a une valeur constante, ait la valeur 1. Enfin, on peut supposer, sans diminuer la généralité des résultats, qu'on a remplacé C par une courbe homothétique, qui aura aussi la propriété (1), de manière qu'on ait

$$lx + my + nz = 1. \tag{14}$$

Tout ceci étant posé, prenons les égalités suivantes :

$$S\,lx' = 0, \qquad S\,l'x' = 0$$

que nous avons déjà employées et qui résultent immédiatement de (6), et dérivons-les successivement. On en tire spécialement, en tenant compte de (14),

$$S\, l''' x + S\, l'' x' = 0$$

et celle-ci devient, à l'aide de (13) et (6),

$$q + |\; l''' \quad l' \quad l \;| = 0,$$

d'où, en vertu de l'hypothèse faite,

$$q = -1.$$

9. Cherchons maintenant si l'on peut déterminer la fonction arbitraire ω_1 des formules (10), pour que la courbe C_1, transformée asymptotique de C, admette aussi la propriété (1). Il faudra avoir, d'après le paragraphe 7,

$$S\, l_1 x_1 = a_1 = \text{const.},$$

ou, en remarquant qu'on a (§ 5)

$$S\, l_1 (x_1 - x) = 0,$$

on peut écrire

$$S\, l_1 x = a_1.$$

Or, il est clair qu'on peut trouver trois fonctions α, β, γ, de manière qu'on puisse écrire

$$l_1 = \alpha l + \beta l' + \gamma l'', \qquad m_1 = \alpha m + \beta m' + \gamma m'', \qquad n_1 = \alpha n + \beta n' + \gamma n''.$$

En introduisant ces valeurs dans l'égalité précédente et en tenant compte qu'on a

$$S\, l x = 1, \qquad S\, l' x = 0, \qquad S\, l'' x = 0,$$

on obtient $\alpha = a_1$. Il faut ensuite déterminer β et γ de manière que l_1, m_1, n_1 vérifient les égalités (10).

Or on a, à l'aide de (13) où $q = -1$,

$$l'_1 = -\gamma l + (a_1 + \beta' + \gamma p) l' + (\beta + \gamma') l''.$$

La première égalité (10) devient

$$-\gamma l + (1 + a_1 + \beta' + \gamma p) l' + (\beta + \gamma') l'' = \omega_1 [(a_1 - 1) l + \beta l' + \gamma l''],$$

et l'on aura des deux autres des égalités analogues pour m et n. D'où l'on déduit que, ou bien $|l'' \, l' \, l| = 0$ et la courbe C se réduirait à une droite, ou bien toutes ces égalités deviennent des identités. Évidemment, nous ne prenons que le deuxième cas et l'on a d'abord

$$\gamma = -\omega_1(a_1 - 1), \qquad \beta = -\gamma' + \omega_1 \gamma,$$

ce qui détermine les coefficients β et γ; ensuite

$$1 + a_1 + \beta' + \gamma p = \omega_1 \beta,$$

ce qui constitue une équation différentielle du second ordre pour la fonction ω_1. Si ω_1 est une intégrale de cette dernière équation, la constante a_1 étant choisie d'avance, les fonctions β et γ sont déterminées, par conséquent l_1, m_1, n_1 le sont aussi, et finalement on aura la courbe C_1 à l'aide des formules (9). Par suite on a le résultat suivant :

Étant donnée une courbe C *admettant la propriété* (1), *il existe* ∞^3 *courbes* C_1, *transformées asymptotiques de* C, *ayant la même propriété.*

10. Le résultat du paragraphe précédent a besoin de quelques observations concernant certaines valeurs remarquables de la constante a_1.

Tout d'abord, on constate que pour $a_1 = +1$ on a $\beta = \gamma = 0$ et la dernière équation différentielle se réduit à $a_1 + 1 = 0$, ce qui est absurde.

Pour $a_1 = 0$, les valeurs de β, γ, l_1, m_1, n_1, x_1, y_1, z_1 ne sont pas singulières, et cependant, par la signification géométrique de cette constante et à l'aide d'un calcul facile, on démontre que la courbe C_1 se réduit à une droite passant par l'origine.

Supposons alors $a_1(a_1 - 1) \neq 0$ et cherchons si, parmi les autres lignes asymptotiques $\overline{C}$ de la surface réglée déterminée par les courbes C et C_1, il y en a qui admettent aussi la propriété (1). Il faudrait que l'on ait

$$S\overline{l}\overline{x} = \text{const.}$$

Or, d'après les formules (11) et (12) du paragraphe 6, on a

$$S\overline{l}\overline{x} = \frac{S l_1 x + c\Psi_1 S l x}{1 - c\Psi_1},$$

ou, parce que $Slx = 1$, $Sl_1x = a_1$,

$$S\overline{l}\overline{x} = \frac{a_1 + c\Psi_1}{1 - c\Psi_1}.$$

Comme Ψ_1 n'est pas constante, autrement on aurait $\omega_1 = \Psi'_1 : \Psi_1 = 0$ et la courbe C_1 coïnciderait avec C, on ne peut avoir $S\overline{l}\overline{x} = \text{const.}$, pour des valeurs de c différentes de 0 et de ∞, que si l'on a $a_1 = -1$. Dans ce cas on a $S\overline{l}\overline{x} = -1$ pour toute valeur de c, c'est-à-dire que toutes les lignes asymptotiques $\overline{C}$ de la surface réglée jouissent de la propriété (1).

Ces derniers résultats conduisent naturellement à des conclusions importantes que nous pouvons énoncer de la manière suivante :

Parmi les surfaces réglées R, *qui passent par une courbe* C *ayant la propriété* (1) *et admettant cette courbe pour ligne asymptotique, on peut distinguer trois catégories différentes :*

a. Des surfaces réglées qui dépendent d'une fonction arbitraire et qui n'admettent pas d'autre ligne asymptotique ayant la propriété (1) *que* C.

b. Des surfaces réglées qui dépendent de trois constantes arbitraires et qui admettent chacune, en dehors de C, *une seule autre ligne asymptotique* C_1 *ayant la propriété* (1).

c. Enfin, des surfaces réglées qui dépendent de deux constantes arbitraires et dont toutes les lignes asymptotiques ont la propriété (1).

Évidemment, de ces trois catégories de surfaces réglées, la deuxième et la troisième sont des plus importantes. Nous leur consacrerons la dernière partie de ce travail.

III.

14. Pour étudier les surfaces réglées, rapportées à leurs lignes asymptotiques, nous emploierons les formules de M. Lelieuvre

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v}, \qquad \ldots,$$

où θ_1, θ_2, θ_3 sont des intégrales d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = h\theta. \tag{15}$$

Supposons que, sur la surface, les courbes $u =$ const. soient les génératrices rectilignes; on devra avoir

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} : \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} : \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} : \frac{\partial z}{\partial v}. \tag{16}$$

Or, on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \theta_2 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial v^2} - \theta_3 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial v^2},$$

et l'on peut évidemment supposer que θ_1, θ_2, θ_3 sont des intégrales d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial u} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial v} + \gamma\theta.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \alpha \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \right) + \beta \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right),$$

ou

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v},$$

et l'on aura aussi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -\alpha \frac{\partial y}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -\alpha \frac{\partial z}{\partial u} + \beta \frac{\partial z}{\partial v},$$

et alors les relations (16), qui expriment que la surface considérée est réglée, donnent

$$\alpha = 0.$$

Les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont par conséquent des intégrales communes à l'équation (15) et à la suivante :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \beta \frac{\partial \theta}{\partial v} + \gamma \theta. \tag{17}$$

Écrivons qu'on a

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}\right);$$

on trouve

$$h\frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial v}\theta = \beta h \theta + \frac{\partial \beta}{\partial u}\theta + \frac{\partial \gamma}{\partial u}\theta + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

Comme on ne peut pas avoir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \frac{\partial \theta_1}{\partial v} & \theta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

l'égalité précédente donne successivement

$$\gamma = 0, \qquad \beta = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 \log h}{\partial u\, \partial v} = h.$$

La dernière (équation de Liouville) s'intègre facilement et donne, en choisissant convenablement de nouvelles variables indépendantes, respectivement fonctions des anciennes,

$$h = \frac{2}{(u+v)^2},$$

et alors l'équation (17) devient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -\frac{2}{u+v}\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{2}{(u+v)^2}\mathrm{U},$$

U étant une fonction arbitraire de u. De cette dernière équation on déduit à l'aide de (15)

$$\frac{2}{(u+v)^2}\theta = \frac{2}{(u+v)^2}\mathrm{U}' - \frac{4}{(u+v)^3}\mathrm{U},$$

d'où

$$\theta = U' - \frac{2U}{u+v}.$$

On peut donc prendre pour θ_1, θ_2, θ_3

$$\theta_1 = U'_1 - \frac{2U_1}{u+v}, \qquad \theta_2 = U'_2 - \frac{2U_2}{u+v}, \qquad \theta_3 = U'_3 - \frac{2U_3}{u+v}.$$

Les formules de M. Lelieuvre deviennent

$$(18) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = U'_3 U''_2 - U'_2 U''_3 - (U_3 U''_2 - U_2 U''_3)\frac{2}{u+v} + (U_3 U'_2 - U_2 U'_3)\frac{2}{(u+v)^2},$$

$$(19) \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (U'_2 U_3 - U'_3 U_2)\frac{2}{(u+v)^2},$$

d'où

$$(20) \quad \begin{cases} x = (U_2 U'_3 - U_3 U'_2)\dfrac{2}{u+v} - \displaystyle\int (U'_2 U''_3 - U'_3 U''_2)\,du, \\ y = (U_3 U'_1 - U_1 U'_3)\dfrac{2}{u+v} - \displaystyle\int (U'_3 U''_1 - U'_1 U''_3)\,du, \\ z = (U_1 U'_2 - U_2 U'_1)\dfrac{2}{u+v} - \displaystyle\int (U'_1 U''_2 - U'_2 U''_1)\,du, \end{cases}$$

formules données pour la première fois par M. Goursat (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1896).

12. Je me propose de donner maintenant quelques indications sur les lignes *flecnodales* d'une surface réglée. Par définition, en un point flecnodal, on peut mener une tangente qui ait avec la surface quatre points communs confondus au point de contact. Évidemment cette tangente touche une des lignes asymptotiques qui se croisent au point flecnodal, et il est clair aussi qu'en ce point la ligne asymptotique en question se comporte comme une ligne droite, c'est-à-dire qu'en ce point son plan osculateur est indéterminé, ou bien encore que l'on a

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} : \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} : \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} : \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Pour tirer de ces relations un résultat simple, nous allons employer les considérations suivantes :

13. Supposons formée (ce que nous avons déjà fait maintes fois) l'équation différentielle linéaire du troisième ordre dont U_1, U_2 et U_3 sont des intégrales, et soit cette équation

$$U''' = p\,U'' + q\,U' + r\,U, \tag{22}$$

p, q, r étant des fonctions de u.

Or, en calculant $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ à l'aide de (18) et en tenant compte de (22) et de (19), on trouve

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left(p - \frac{2}{u+v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - \left(\frac{p}{u+v} + r\frac{u+v}{2} + q\right)\frac{\partial x}{\partial v},$$

et l'on aura des formules pareilles pour y et z. Les égalités (21) donnent alors en un point flecnodal

$$\frac{p}{u+v} + r\frac{u+v}{2} + q = 0$$

ou

$$r(u+v)^2 + 2q(u+v) + 2p = 0. \tag{23}$$

Pour une valeur donnée de u on a de cette équation deux valeurs pour v, donc sur chaque génératrice rectiligne de la surface il y a deux points flecnodaux. La ligne flecnodale se compose par conséquent de deux branches. On pourra dire que sur chaque surface réglée il y a deux lignes flecnodales.

Dans le cas où la valeur choisie de u annule la fonction p, l'équation (23) montre que pour une des valeurs de v on a $v + u = 0$ et les formules (20) montrent que le point flecnodal correspondant est rejeté à l'infini. Si l'on a en même temps $p = 0$, $q = 0$, les deux points flecnodaux de la génératrice considérée sont rejetés à l'infini.

14. Jusqu'ici la surface réglée a été arbitraire. Nous allons chercher maintenant si elle admet des lignes asymptotiques avec la propriété (1). En vertu du paragraphe 7, il faudra écrire que le long de l'une de ces asymptotiques on a

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z = \text{const.}$$

Remplaçons dans cette égalité les valeurs de θ_1, θ_2, θ_3 et x, y, z trouvées au paragraphe 11, en introduisant les notations suivantes :

$$(24)\qquad \begin{cases} f_1(u) = \int (U'_2 U''_3 - U'_3 U''_2)\, du, \\ f_2(u) = \int (U'_3 U''_1 - U'_1 U''_3)\, du, \\ f_3(u) = \int (U'_1 U''_2 - U'_2 U''_1)\, du; \end{cases}$$

$$S_0 = U_1 f_1(u) + U_2 f_2(u) + U_3 f_3(u), \quad S_1 = U'_1 f_1(u) + U'_2 f_2(u) + U'_3 f_3(u).$$

On obtient ainsi

$$S_1 - \frac{2 S_0}{u + v} = \text{const.},$$

c'est-à-dire que l'expression du premier membre doit rester constante pour la valeur de v qui définit la ligne asymptotique jouissant de la propriété (1) et par conséquent sa dérivée par rapport à u doit être nulle. On a donc

$$(25)\qquad S'_1 - \frac{2 S'_0}{u + v} + \frac{2 S_0}{(u + v)^2} = 0,$$

qui est une équation du second degré en v.

Il faut discuter cette équation. On a manifestement les cas suivants :

a. Le cas général où les deux valeurs de v tirées de (25) sont toutes les deux des fonctions de u : il n'y a alors aucune ligne asymptotique de la surface jouissant de la propriété (1).

b. Une des racines est constante, l'autre fonction de u : la surface a alors une seule ligne asymptotique admettant la propriété (1).

c. Les deux racines de (25) sont indépendantes de u : la racine a alors deux lignes asymptotiques jouissant de la propriété (1).

d. Enfin, l'équation (25) est identiquement vérifiée, quel que soit v : la surface a alors toutes ses lignes asymptotiques avec la propriété (1).

Nous retrouvons ainsi par une autre voie et sous une autre forme les résultats du paragraphe 10.

15. Nous nous occuperons des deux derniers cas, c et d. Commençons par le dernier. Il faut écrire que l'équation (25) est une identité. On voit aisément qu'on doit avoir

$$S_0 = 0, \qquad S'_1 = 0$$

ou

$$\Sigma U_1 f_1(u) = 0, \qquad [\Sigma U'_1 f_1(u)]' = 0.$$

La dernière équation donne, en tenant compte de (24),

$$\Sigma U''_1 f_1(u) = 0,$$

et de celle-ci on tire, en dérivant et en tenant toujours compte de (24),

$$\Sigma U'''_1 f_1(u) = 0,$$

qui devient à cause de (22)

$$q \Sigma U'_1 f_1(u) = 0.$$

Or, le coefficient de q ne peut pas être nul; autrement, à l'aide des relations précédentes, on déduirait

$$| U''_1 \quad U'_1 \quad U_1 | = 0,$$

ce qui est impossible pour une surface réglée proprement dite. On a donc

$$q = 0.$$

De même, de

$$\Sigma U_1 f_1(u) = 0$$

on tire en dérivant

$$S_1 + \Sigma U_1 f'_1(u) = 0,$$

et de là

$$S'_1 + \Sigma U_1 f''_1(u) + \Sigma U'_1 f'_1(u) = 0,$$

qui se réduit à

$$\Sigma U_1 f''_1(u) = 0,$$

ou, en remplaçant $f_1(u), f_2(u), f_3(u)$ par leurs valeurs (24), à

$$| U'''_1 \quad U'_1 \quad U_1 | = 0.$$

Or celle-ci donne, à l'aide de (22),

$$p = 0.$$

On a donc le résultat suivant :

Dans le cas où toutes les lignes asymptotiques d'une surface réglée ont la propriété (1), *on a nécessairement*

$$p = 0, \qquad q = 0,$$

c'est-à-dire, d'après le paragraphe 13, *les deux lignes flecnodales de la surface sont toutes les deux rejetées à l'infini.*

16. Je me propose de démontrer que ces conditions sont en même temps suffisantes, en d'autres mots que si les deux lignes flecnodales de la surface réglée sont rejetées à l'infini, toutes ses lignes asymptotiques jouissent de la propriété (1).

En partant de

$$S_0 = \Sigma U_1 f_1(u),$$

en dérivant successivement et en tenant compte de l'équation (22) et de l'hypothèse $p = 0$, on trouve

$$S_0'' = S_1'. \tag{26}$$

De la même manière on déduit de

$$S_1 = \Sigma U_1' f_1(u),$$

en tenant compte de $p = 0$, $q = 0$,

$$S_1'' = r S_0,$$

qui, à l'aide de (26), devient

$$S_0''' = r S_0.$$

Or, dans notre hypothèse, ceci prouve que S_0 vérifie la même équation (22) que U_1, U_2 et U_3. Il en résulte alors

$$S_0 = a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3, \qquad a_i = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ce qui peut s'écrire

$$\Sigma U_1[f_1(u) - a_1] = 0. \tag{27}$$

Prenons maintenant l'équation (26) et remplaçons-y S''_0 et S'_1 par leurs valeurs

$$S''_0 = \Sigma a_1 U'', \qquad S'_1 = \Sigma U''_1 f_1(u);$$

on obtient

$$\Sigma U''_1 [f_1(u) - a_1] = 0. \tag{28}$$

Or, les fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$ ne sont définies par les égalités (24) qu'à des constantes additives près. Donc on peut choisir ces constantes, ou, en remarquant les formules (20), on peut faire subir à la surface une translation, de manière que les équations (27) et (28) se réduisent à

$$S_0 = 0, \qquad S'_1 = 0,$$

ce qui prouve que l'équation (25) est une identité, donc toutes les lignes asymptotiques de la surface jouissent de la propriété (1).

17. Je ferai une remarque finale sur la classe précédente de surfaces réglées. On a

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z = - S_1,$$

donc

$$T d^2 = S_1^2,$$

et de là, à l'aide du théorème d'Enneper, on tire

$$K : d^4 = - \frac{1}{S_1^4} = \text{const.}, \tag{29}$$

où K désigne la courbure totale de la surface réglée et d signifie maintenant la distance de l'origine au plan tangent. Le premier membre de cette égalité est constant à cause de $S'_1 = 0$.

On conclut de ce qui précède :

La condition nécessaire et suffisante pour que le long d'une surface réglée on ait la relation (29) est que ses deux lignes flecnodales soient rejetées à l'infini.

18. Il nous reste à étudier la classe des surfaces réglées admettant seulement deux lignes asymptotiques avec la propriété (1). Pour cela il faut et il suffit que les deux racines de l'équation (25) en v soient indépendantes de u. On doit donc avoir

$$\frac{S'_0}{S'_1} - u = a, \qquad u^2 - 2u\frac{S'_0}{S'_1} + 2\frac{S_0}{S'_1} = b, \tag{30}$$

a et b désignant des constantes. De ces égalités on tire

$$\frac{S'_0}{S'_1} = u + a, \qquad 2\frac{S_0}{S'_1} = u^2 + 2au + b$$

et de là

$$\frac{S'_0}{S_0} = \frac{2(u+a)}{u^2+2au+b},$$

d'où en intégrant

$$S_0 = c(u^2 + 2au + b), \qquad c = \text{const.}$$

On en déduit aisément

$$S'_1 = 2c = S''_0. \tag{31}$$

Or on a, de d'abord

$$S_0 = \Sigma U_1 f_1(u),$$

$$S'_0 = \Sigma U_1 f'_1(u) + S_1$$

et de là

$$S''_0 = \Sigma U_1 f''_1(u) + S'_1.$$

On en tire donc, à l'aide de (31),

$$\Sigma U_1 f''_1(u) = 0,$$

qui donne, à l'aide de (22),

$$p = 0,$$

ce qui prouve que *l'une des lignes flecnodales de la surface est rejetée à l'infini.*

19. Partons de l'égalité (31)

$$S'_1 = 2c,$$

d'où l'on tire

$$S_1'' = 0.$$

Or

$$S_1 = \Sigma U_1' f_1(u),$$

donc

$$S_1' = \Sigma U_1'' f_1(u)$$

et alors

$$S_1'' = 0 = \Sigma U_1''' f_1(u)$$

qui devient à l'aide de l'équation (22), où, d'après le résultat du paragraphe 18, on a $p = 0$,

$$(32) \qquad q S_1 + r S_0 = 0.$$

Je veux démontrer que cette égalité (32) a une signification géométrique aussi simple que $p = 0$.

Remarquons à cet effet, tout d'abord, que l'équation (25) se réduit à cause de (30) à

$$(25') \qquad v^2 - 2av + b = 0.$$

Désignons par v_1 et v_2 les racines, manifestement constantes, de cette équation. Les lignes asymptotiques C_1 et C_2 correspondantes seront alors définies par

$$x_1 = (U_2 U_3' - U_3 U_2')\frac{2}{u + v_1} - f_1(u),$$

$$y_1 = (U_3 U_1' - U_1 U_3')\frac{2}{u + v_1} - f_2(u),$$

$$z_1 = (U_1 U_2' - U_2 U_1')\frac{2}{u + v_1} - f_3(u);$$

$$x_2 = (U_2 U_3' - U_3 U_2')\frac{2}{u + v_2} - f_1(u),$$

$$y_2 = (U_3 U_1' - U_1 U_3')\frac{2}{u + v_2} - f_2(u),$$

$$z_2 = (U_1 U_2' - U_2 U_1')\frac{2}{u + v_2} - f_3(u),$$

les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ se trouvant sur la même génératrice rectiligne de la surface.

Cela étant, considérons la ligne flecnodale à distance finie, déterminée par l'égalité (23), où nous devons poser $p = 0$ et supprimer le facteur $u + v$ qui donne la ligne flecnodale rejetée à l'infini. On a donc

$$\frac{2}{u+v} = -\frac{r}{q},$$

le long de cette ligne flecnodale, qui est par conséquent définie par

$$x_0 = -(U_2U'_3 - U_3U'_2)\frac{r}{q} - f_1(u),$$

$$y_0 = -(U_3U'_1 - U_1U'_3)\frac{r}{q} - f_2(u),$$

$$z_0 = -(U_1U'_2 - U_2U'_1)\frac{r}{q} - f_3(u),$$

le point M_0 se trouvant ainsi sur la droite M_1M_2.

Calculons le rapport

$$k = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{M_0M_2}} = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0},$$

on trouve

$$(33) \qquad k = \frac{\dfrac{2}{u+v_1} + \dfrac{r}{q}}{\dfrac{2}{u+v_2} + \dfrac{r}{q}}$$

ou

$$k = \frac{r(u+v_1)(u+v_2) + 2q(u+v_2)}{r(u+v_1)(u+v_2) + 2q(u+v_1)}.$$

Or, v_1 et v_2 étant racines de l'équation (25'), on a

$$(u+v_1)(u+v_2) = u^2 + 2au + b^2 = \frac{1}{c}S_0;$$

en supposant $c \neq 0$, ce qui est légitime, autrement on aurait $S_0 = 0$ et de (31) $S'_1 = 0$ et la surface appartiendrait à la classe que nous avons étudiée précédemment.

De même, comme de (31) on tire

$$S_1 = 2c(u+d),$$

on a

$$u + v_1 = u + a + \sqrt{a^2 - b} = \frac{1}{2c} S_1 + a - d + \sqrt{a^2 - b},$$

$$u + v_2 = u + a - \sqrt{a^2 - b} = \frac{1}{2c} S_1 + a - d - \sqrt{a^2 - b}.$$

La valeur de k devient alors

$$k = \frac{\frac{1}{c} r S_0 + \frac{1}{c} q S_1 + 2q\left(a - d + \sqrt{a^2 - b}\right)}{\frac{1}{c} r S_0 + \frac{1}{c} q S_1 + 2q\left(a - d - \sqrt{a^2 - b}\right)},$$

qui se réduit à cause de (32) à

$$k = \frac{a - d - \sqrt{a^2 - b}}{a - d + \sqrt{a^2 - b}}. \tag{34}$$

On a donc le résultat suivant :

Pour la classe de surfaces réglées ayant seulement deux lignes asymptotiques avec la propriété (1), *une des lignes flecnodales est rejetée à l'infini, l'autre partage le segment de la génératrice rectiligne compris entre* C_1 *et* C_2 *dans un rapport constant.*

20. Nous finirons cette étude par quelques remarques sur la valeur constante de k.

Tout d'abord, on ne peut pas avoir $k = 1$, parce qu'on aurait de (34) $a^2 - b = 0$ et les deux lignes asymptotiques C_1 et C_2 ne seraient plus distinctes.

On ne peut pas avoir non plus $k = -1$, parce qu'on aurait

$$d = a;$$

donc

$$S_1 = 2c(u + d) = 2c(u + a),$$

c'est-à-dire

$$S_1 = S'_0.$$

Or on a de

$$S_0 = \Sigma U_1 f_1(u),$$

en dérivant,

$$S'_0 = \Sigma U_1 f'_1(u) + S_1;$$

il en résulterait alors

$$\Sigma U_1 f_1''(u) = | U_1 \quad U_1' \quad U_1'' | = 0,$$

ce qui est impossible.

Calculons maintenant l'expression

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z = \Sigma \theta_1 x$$

le long des lignes C_1 et C_2. Comme ces courbes jouissent de la propriété (1), cette expression restera constante pour chacune d'entre elles. Mais on a

$$(\Sigma \theta_1 x)_1 = -S_1 + \frac{2 S_0}{u + c_1},$$

$$(\Sigma \theta_1 x)_2 = -S_1 + \frac{2 S_0}{u + c_2};$$

donc, en vertu de (32) et de (33),

$$\frac{(\Sigma \theta_1 x)_1}{(\Sigma \theta_1 x)_2} = \frac{\dfrac{2}{u + c_1} - \dfrac{S_1}{S_0}}{\dfrac{2}{u + c_2} - \dfrac{S_1}{S_0}} = \frac{\dfrac{2}{u + c_1} + \dfrac{r}{q}}{\dfrac{2}{u + c_2} + \dfrac{r}{q}} = k.$$

On a donc le résultat suivant :

La valeur constante du rapport k est le quotient entre les valeurs constantes de l'expression $\Sigma \theta_1 x$ le long des lignes asymptotiques C_1 et C_2 respectivement.