

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Sur les principes de la mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 27 (1910), p. 491-528

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__491_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

ET

SUR LEUR APPLICABILITÉ

A DES

PHÉNOMÈNES QUI SEMBLENT METTRE EN DÉFAUT CERTAINS D'ENTRE EUX,

PAR M. J. BOUSSINESQ.



SOMMAIRE. — I. Résumé des principes fondamentaux de la Mécanique; leur combinaison nécessaire avec certains faits pouvant en être distincts, suggérés également par l'expérience. — II. Problème classique où une telle combinaison permet d'éliminer, de l'expression *simplifiée* d'une force, les vraies variables dont elle dépend. — III. Autres exemples d'éliminations analogues, relatifs aux expressions des forces élastiques et des frottements intérieurs. — IV. Exemples où de pareilles éliminations conduisent à introduire dans les problèmes, au lieu des masses *vraies*, certaines masses fictives *plus grandes*, fonctions de diverses circonstances assignées dans chaque cas. — V. Rôle capital de telles masses fictives pour l'éther, dans la théorie mécanique de la lumière. — VI. Rôle analogue de pareilles masses fictives pour les molécules pondérables, en vue de tenir compte de la résistance de l'éther entraîné par leurs translations rapides. — VII. Pourquoi l'excédent relatif de la masse fictive sur la masse vraie reste négligeable, tant que les molécules sont massives et, les vitesses, seulement de l'ordre des vitesses *planétaires* ou *stellaires*? — VIII. Disparition de ces raisons dans le cas des *rayons* ou *courants* cathodiques, susceptibles, dès lors, de manifester des masses *fictives* très supérieures aux masses *vraies* et variables avec la direction.

I. — Résumé des principes fondamentaux de la Mécanique; leur combinaison nécessaire avec certains faits pouvant en être distincts, suggérés également par l'expérience.

1. L'examen approfondi des phénomènes de mouvement, depuis trois siècles, a tendu sans cesse à faire admettre les principes suivants,

qui, devenus les bases de la Mécanique, paraissent applicables à tout système de *points* (ou éléments) *matériels* mis en présence les uns des autres et supposés seuls dans l'espace :

1° L'accélération géométrique de chaque point est, à tout instant, fonction de la *configuration* du système, ou rattachée d'une manière déterminée (en grandeur et en direction) à sa figure actuelle, que définissent complètement les distances réciproques de ses points ; et elle se trouve, par conséquent, indépendante de leurs vitesses, c'est-à-dire de leur mouvement actuel ;

2° A une même configuration peuvent, dans plusieurs systèmes supposés très éloignés les uns des autres, mais composés de points exactement pareils chacun à chacun, correspondre, suivant les cas, toutes les vitesses imaginables ;

3° Il existe, pour chaque point matériel, un *certain* coefficient constant, appelé sa *masse*, mesure de sa valeur dynamique comparativement aux autres points, tel que le demi-produit, par cette masse, du carré de la vitesse du point exprime son *énergie actuelle* de mouvement, c'est-à-dire une quantité dont la somme *arithmétique* pour tout le système, jointe à une certaine fonction des diverses distances mutuelles des points du système dite son *énergie potentielle*, donne, pour le système entier, une quantité (*énergie totale*) invariable d'un instant à l'autre.

Et il est même jusqu'à présent très probable (sans qu'il soit néanmoins nécessaire de l'admettre pour ce qui suit) que l'énergie potentielle est une somme pure et simple de termes, $F(r)$, ne dépendant chacun que d'une seule distance, d'une seule droite r de jonction des points du système, termes qui exprimeraient sa valeur si le système se réduisait au *couple* des deux points reliés par la droite r correspondante. Par conséquent, si l'énergie actuelle se décompose, comme il est évident, en autant de parties relativement indépendantes que le système comprend de points, l'énergie potentielle se décomposerait aussi en autant de termes distincts qu'il comprend de *couples* de points ou de droites r joignant ces couples ou, encore, de *rapports* (entre points) *élémentaires*, définis par ces droites mêmes.

2. Or il résulte des trois principes précédents que la *force motrice*

de chaque point, *produit de sa masse et de son accélération géométrique actuelle* représenté, en grandeur et direction, par une droite émanée du point suivant le sens de l'accélération, est la *résultante* (ou somme *géométrique*) de droites tirées de ce point vers chacun des autres et égales respectivement à la dérivée partielle, changée de signe, de l'énergie potentielle, par rapport à la distance r des deux points ainsi considérés. Cette droite partielle s'appelle *l'action* du point vers lequel on la tire sur le point d'où elle émane; elle est évidemment égale et contraire à la *réaction* analogue de celui-ci sur celui-là; et l'ensemble de ces deux *forces* constitue l'*action mutuelle* du couple des deux points (fonction de leur seule distance r , quand l'énergie potentielle totale se décompose en énergies partielles propres aux divers couples) (').

3. Dans la nature, l'énorme complication des systèmes, où il arrive le plus souvent qu'un grand nombre de points apparaissent peu, tout en ayant une influence appréciable sur les phénomènes étudiés, est cause que notre attention doit, eu égard à la faiblesse de nos intelligences, se porter presque exclusivement sur certains points *principaux* (réels ou fictifs), plus intéressants ou, parfois aussi, aptes à nous servir de repères pour tous les autres, et dont la situation, la vitesse, l'accélération, seront, dès lors, seules *notées*, seules mises en vue. Il y aura donc lieu d'éliminer des calculs la multitude des autres points, tout en tenant compte de leur action *globale* sur les points principaux.

Et les problèmes résolubles seront justement ceux où cette action globale admettra, *en fonction des quantités relatives aux points principaux*, une expression maniable, que des circonstances particulières à la question, généralement révélées par l'expérience, rendront suffisamment approchée, mais qui, ne contenant plus les variables r dont elle dépend directement, recevra de tout autres formes que sa forme naturelle et rigoureuse.

(¹) On peut voir ces déductions, précédées de l'exposé des principes mêmes, par exemple, dans les trois premières de mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale* (Paris, Gauthier-Villars; 1889).

II. — Problème classique, où une telle combinaison permet d'éliminer, de l'expression simplifiée d'une force, les vraies variables dont elle dépend.

4. Par exemple, dans le problème du mouvement, à travers l'atmosphère, d'un boulet lancé par une bouche à feu, l'action de la masse terrestre sur le projectile sera réduite à une fonction de la distance du centre du boulet au centre de la Terre, c'est-à-dire à une fonction de la situation du centre du boulet, ou même à une constante; et, d'autre part, l'action des couches d'air entourant le boulet, qui dépend de leur *inégal* rapprochement à sa surface *en avant et en arrière*, sera réduite à une fonction de la vitesse de translation du boulet, *pourvu que* cette vitesse V varie avec *assez de lenteur* pour permettre l'établissement à chaque instant, autour du boulet, d'un *régime* sensiblement *permanent* d'écoulement de l'air contre sa surface, régime dès lors fonction, si compliqué qu'il soit, de la variable unique qui le caractérise, savoir, la vitesse actuelle V du projectile.

Les équations de mouvement de celui-ci se formeront donc en condensant dans deux *forces*, l'une constante, l'autre uniquement fonction de la vitesse V , d'une part l'ensemble des actions de la masse terrestre sur lui, d'autre part celle des innombrables particules d'air, *toujours renouvelées*, en contact avec le boulet; ce qui permet d'éliminer fictivement cette masse et ces particules, ou de porter toute l'attention sur le mouvement même du boulet.

Or l'expression approchée en V , ainsi obtenue pour la résistance de l'air, semble une négation de la loi d'actions fonctions uniquement des distances r . Mais il n'en est rien cependant, car elle n'a pris sa forme paradoxale qu'en raison d'une élimination des vraies variables r dont elle dépend, rendue possible par la notion d'un certain régime d'écoulement du fluide autour du boulet. Et cette notion n'est pas moins suggérée par l'expérience que la loi fondamentale des actions fonctions des distances r . Aussi, quoique notre science imparfaite soit, jusqu'à présent, impuissante à la déduire de la loi fondamentale, ou à saisir leurs rapports intimes, on ne peut, dès lors, admettre aucune contradiction entre elles.

III. — Autres exemples d'éliminations analogues, relatifs aux expressions des forces élastiques et des frottements intérieurs.

5. Un autre exemple remarquable de réduction, pour les formules exprimant l'action globale d'une multitude presque infinie de points matériels sur une multitude analogue d'autres, se présente chez les corps (solides ou fluides) à l'état élastique. On les dit à cet état, lorsque la configuration intime de leurs *groupes moléculaires* (ou agglomérations complexes de molécules chimiques), de part et d'autre de la surface séparant deux portions contiguës d'une particule matérielle, et en tant que cette configuration détermine l'action (ou *pression*) d'une de ces portions sur l'autre, n'y dépend que des situations relatives des *centres de gravité* des divers groupes moléculaires, c'est-à-dire de la configuration *visible* de la particule, ou, par conséquent, des déformations perceptibles (toujours assez petites) qu'elle a éprouvées à partir d'un certain état primitif *donné*, qui est, chez les solides et les liquides, l'état *naturel* où resterait la particule supposée isolée et tranquille (à part son agitation calorifique interne).

En réalité, les situations de ces centres étant censées fixées, chaque groupe de molécules, extrêmement complexe, comporte encore une infinité de rotations et de déformations, entre les centres des groupes environnants qui ne le circonscrivent *que de bien loin*. Mais c'est une notion suggérée encore par l'expérience, que, *si* les déformations visibles du corps se font *assez lentement*, chaque groupe moléculaire aura eu sans cesse le temps de répartir ses molécules d'une certaine manière, la plus stable possible, d'après l'espace qui lui est ainsi assigné entre ses voisins. Ce qu'a d'invisible la configuration de la particule, *et qui est presque tout*, sera donc, en définitive, *fonction du peu qui est visible*, savoir des *six déformations élémentaires* d'ensemble bien connues (trois *dilatations* et trois *glissements*), définissant le changement survenu, à partir de l'état primitif censé donné, dans la configuration perceptible de la particule ⁽¹⁾. Par suite, les *pressions élastiques* seront exprimables au moyen de celles-ci.

(1) On remarquera que cette définition de l'élasticité, *l'invisible fonction du visible*,

6. C'est donc, là encore, la connaissance expérimentale *d'une sorte de régime se produisant sans cesse*, qui rendra possible la théorie de l'élasticité, tandis que l'altération plus ou moins profonde des groupes moléculaires, avec ou sans échange de molécules entre eux, mais avec *sauts* d'un état interne d'équilibre à un autre, etc., rendra intelligibles les déformations *persistantes* ou les faits de *plasticité*.

7. Et si les déformations visibles de la particule se font *trop vite* pour que la configuration interne, qui règle les pressions, soit sans cesse la configuration *élastique* (ou la plus stable) pour les situations relatives actuelles des centres des groupes moléculaires, on conçoit que les écarts entre cette configuration élastique *idéale* et la configuration *réelle* se trouveront d'autant plus grands que la vitesse de production des déformations visibles sera plus grande elle-même, donnant ainsi dans les formules des pressions, outre leur partie élastique, des termes correctifs, fonctions des *six* vitesses élémentaires (perceptibles) de déformation de la particule. Ainsi s'expliquera la présence, dans les corps, des *frottements intérieurs* (plus souvent appelés de nos jours *forces de viscosité*), fonctions d'un état *dynamique, de vitesses*, qui introduisent, dans les formules des pressions, des dérivées par rapport au temps et semblent, comme dans le cas d'un projectile mû à travers l'air, en contradiction avec la loi fondamentale des actions fonctions des distances.

Mais cette contradiction apparente résulte, comme on voit, cette fois encore, d'une élimination des vraies variables rendue possible par la notion d'un certain régime tendant à s'établir, *notion d'expérience* encore venue s'adjoindre à la loi fondamentale sans la nier, quoique nous soyons, au moins jusqu'à ce jour, hors d'état de l'en déduire ou de pénétrer les rapports intimes de ces deux faits capitaux.

8. Ce n'est donc pas seulement dans les grandes questions de Phi-

implique ou même exprime la *réversibilité* (retour au même état *interne* par le retour au même état *perceptible*), et que, comme elle, elle suppose, en toute rigueur abstraite, une lenteur *infinie* de changement, cette lenteur qu'utilisent essentiellement les démonstrations classiques par la réversibilité.

losophie morale ou religieuse que nous devons faire ce que dit Bossuet, *tenir fortement les deux bouts de la chaîne* et croire à sa continuité, malgré l'obscurité qui nous dérobe certains chaînons intermédiaires : c'est aussi dans les questions fondamentales de nos sciences physico-mathématiques. Les principes divers y trouvent leur unité, ou se joignent, à des profondeurs où n'atteint généralement pas notre vision distincte.

Parmi les grands faits particuliers, ou *principes accessoires* distincts des *principes généraux* énoncés aux n^{os} 1 et 2, qu'on adjoint à ceux-ci pour rendre abordables les problèmes, il n'y en a peut-être qu'un seul qui se rattache facilement à ces principes généraux ou qui, du moins, comporte par eux une explication simple. C'est le fait de la *conservation* (très approchée) *de la figure des solides*, sur lequel s'appuie, en Mécanique rationnelle, la théorie des corps rigides. Car il suffit, pour que les actions mutuelles, les unes attractives, les autres répulsives, entre molécules d'un corps très voisines, assurent à ce corps une configuration *pratiquement* constante, de les supposer assez rapidement variables avec les droites r de jonction des couples respectifs de molécules ; en sorte que les *pressions* (résultantes ou sommes de ces actions), seules accessibles à nos mesures, puissent, sans que la figure du corps éprouve des changements notables, varier dans de très larges limites de part et d'autre de leurs valeurs *d'état naturel*, qui sont nulles par neutralisation des attractions et des répulsions. Des déformations en quelque sorte infinitésimales suffisent donc alors pour amener toutes les pressions qui se réalisent effectivement.

IV. — Exemples où de pareilles éliminations conduisent à introduire dans les problèmes, au lieu des masses vraies, certaines masses fictives plus grandes, fonctions de diverses circonstances assignées dans chaque cas.

9. Mais arrivons à une catégorie, non moins importante peut-être, de phénomènes, où une évaluation approchée de la partie la plus gênante des actions en jeu revient à accroître *fictivement* la masse des points *principaux*, de ceux dont les coordonnées figurent dans les calculs ; en sorte que, si les actions ainsi éliminées, ou les particules

d'où elles émanent, passent inaperçues, l'observation semblera indiquer, pour ces points principaux, des masses plus fortes que les vraies, et *variables suivant les cas*.

10. Le plus simple est le mouvement transversal, ou même longitudinal, d'une corde élastique autour de laquelle on aurait préalablement enroulé, *sans le tendre notablement*, un fil très lourd, d'une masse comparable à la sienne par unité de longueur de la corde. Alors la partie de cette masse supplémentaire qui revêt un élément de longueur (ou *tronçon*) de la corde élastique prend sans cesse, durant le mouvement vibratoire, l'accélération même de cet élément (à des écarts négligeables près); et, d'autre part, la force qui la meut, produit de sa masse par l'accélération dont il s'agit, représente, à très peu près exclusivement (en raison de la non-tension du fil), l'action du même élément sur elle, égale et contraire à la réaction qu'elle exerce sur lui. Donc la présence du fil enroulé ajoute aux forces mouvant l'élément de la corde une action égale et contraire au produit de la masse du fil par son accélération (pareille à celle de l'élément même), expression qui, changée de membre dans les équations de mouvement de la corde élastique, accroîtra fictivement le terme *force motrice* de celle-ci dans le rapport de la masse du fil à la sienne propre, ou reviendra à raisonner comme si le fil n'existait pas, mais avait incorporé purement et simplement sa masse à celle de la corde, sans en changer l'élasticité.

11. L'accroissement fictif de masse se produit encore, mais moins simplement, dans le problème des petites oscillations d'un pendule *court*, ou à période très brève, au sein d'un fluide indéfini en repos, cas où s'évanouit presque, eu égard à la petitesse excessive des vitesses, la partie de la résistance dépendant de ces dernières, tandis que les accélérations y sont sensibles et produisent sur le pendule, par le rapide changement de l'état de mouvement du fluide voisin, une réaction (découverte par Du Buat), qui leur est sans cesse proportionnelle et de sens contraire. Seulement, les couches du fluide ambiant ne prenant ici qu'une fraction du mouvement du pendule décroissante avec leur proximité, tout se passe comme si la composante

tangentielle du poids apparent du pendule dans le fluide avait à mouvoir, avec le pendule même *et autant que lui*, une *poupe* et une *proue fluides* dont le volume total a un *certain* rapport à son propre volume (*un demi*, par exemple, quand le pendule est sphérique), rapport d'ailleurs variable avec la forme du pendule et aussi, quand le pendule n'est pas de révolution autour de son axe vertical, avec la direction ou l'azimut des oscillations.

La masse du pendule ne s'accroît donc ici, *fictivement*, que d'une fraction, déterminée dans chaque cas et généralement inégale suivant les divers sens, de celle du fluide qu'il ébranle par ses mouvements alternatifs ⁽¹⁾.

12. Les petites oscillations se faisant sans rotation ni abaissement (ou relèvement) *notables* de la lentille du pendule, le problème, réduit à sa plus simple expression, consistait, en définitive, à déterminer les réactions mutuelles d'un fluide homogène indéfini, sans pesanteur, ayant son unité de masse libre de toute action extérieure, et d'un solide immergé, soumis à des translations lentes, que définiront suffisamment, ici, les accélérations successives $\frac{d^2(x_0, y_0, z_0)}{dt^2}$, suivant les axes, de son centre (x_0, y_0, z_0) de gravité. On peut même, sans changer au fond la question, qui ne dépend que de mouvements relatifs, attribuer indifféremment les translations au fluide ou au

(1) J'ai étudié très complètement cet intéressant phénomène pour de petites translations quelconques (pendulaires ou autres) d'un solide au sein d'un fluide indéfini, dans un Mémoire que contient le Tome II (p. 199 à 264) de mon *Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences*. Les frottements intérieurs du fluide ajoutent, il est vrai, à cette partie de la résistance qui est proportionnelle à l'accélération, un terme en raison directe de la racine carrée de la période d'oscillation ; et ils introduisent, en outre, une partie proportionnelle à la vitesse, comprenant elle-même un terme inverse de la racine carrée de la période ; mais ces termes et la deuxième partie tout entière s'évanouissent, comparativement, quand la période devient assez brève.

Lorsque le mouvement, supposé toujours lent, du solide au sein du fluide, consiste en une translation non périodique, mais quelconque, la partie de la résistance due au frottement intérieur dépend, d'une manière très curieuse, non seulement de la vitesse actuelle, mais aussi de tous les changements antérieurs, qui l'ont amenée peu à peu à sa valeur présente et dont l'influence ne s'atténue qu'inversement à la racine carrée de leur ancienneté. C'est ce que j'avais reconnu déjà vers le commencement de 1885 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, t. C, 6 avril 1885, p. 935).

solide, ou mieux encore à l'un et à l'autre, en supposant appliquée à l'unité de masse du fluide une petite action extérieure *commune* fonction du temps t , de composantes données X, Y, Z ; en sorte que, p étant, au point (x, y, z) , la pression du fluide, ρ sa densité et u', v', w' les composantes de son accélération, les trois équations indéfinies classiques de son mouvement soient

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - u', \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - v', \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - w'.$$

Aux points infiniment distants du solide et soustraits à son influence, là où, par conséquent, le fluide obéit simplement à l'action accélératrice *commune* (X, Y, Z) et possède ainsi, à l'époque t , les trois vitesses, suivant les axes,

$$u = \int_{-\infty}^t X dt, \quad v = \int_{-\infty}^t Y dt, \quad w = \int_{-\infty}^t Z dt,$$

la pression p est uniforme et peut être supposée nulle. Nous y prendrons donc

$$(\text{à l'infini}) \quad p = 0.$$

Sur le corps, si (x, y, z) désigne le point *matériel* de sa surface qui touche, à l'époque t , une molécule fluide dont nous appellerons (x, y, z) les coordonnées lentement variables, cette molécule y glisse et possède, par conséquent, suivant une normale dn censée dirigée, à partir de (x, y, z) , vers l'intérieur du fluide et avoir trois cosinus directeurs donnés α, β, γ , la même vitesse, $u\alpha + v\beta + w\gamma$, que le point (x, y, z) entraîné dans la translation $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ du centre de gravité (x_0, y_0, z_0) . On y a donc la relation

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = \frac{dx_0}{dt}\alpha + \frac{dy_0}{dt}\beta + \frac{dz_0}{dt}\gamma,$$

ou

$$(2) \quad \left(u - \frac{dx_0}{dt}\right)\alpha + \left(v - \frac{dy_0}{dt}\right)\beta + \left(w - \frac{dz_0}{dt}\right)\gamma = 0.$$

Mais, de plus, les mouvements étant censés assez lents pour qu'on puisse négliger les carrés et produits des quantités qui les expriment, la même molécule fluide superficielle reste un temps sensible dans le voisinage de la normale dn , de direction (α, β, γ) invariable; et l'on

peut, sans faire changer α, β, γ , différentier en t cette relation, ou écrire, en suivant durant l'instant dt une même molécule fluide,

$$(3) \text{ (à la surf. du corps) } \left(u' - \frac{d^2 x_0}{dt^2}\right) \alpha + \left(v' - \frac{d^2 y_0}{dt^2}\right) \beta + \left(w' - \frac{d^2 z_0}{dt^2}\right) \gamma = 0.$$

Il suffit, du reste, pour le voir, d'observer que les coordonnées de la molécule *superficielle* considérée vérifient *sans cesse* l'équation (2), prise avec α, β, γ variables, et que la dérivation de α en t , par exemple, n'y donnerait, vu le petit facteur $u - \frac{dx_0}{dt}$, que des termes non linéaires.

13. Cela posé, toutes les formules précédentes, même complétées par celle qui relie, dans chaque fluide, la pression p à la densité ρ et qui achève de déterminer le problème, ne conduiraient pas à la règle simple expérimentale de Du Buat que nous venons de rappeler, si l'on ne joignait pas, là encore, aux lois mécaniques fondamentales, un principe distinct, suggéré par l'observation et qui rend la question facile ou lui imprime, du moins, son caractère de simplicité le plus marquant.

Ce principe particulier consiste à observer que, dans les deux cas soit d'un gaz, soit surtout d'un liquide, la pression p ne varie pas assez pour entraîner des changements relatifs de la densité ρ ou, par suite, du volume de chaque particule fluide, qui soient comparables à ses changements de forme. La dilatation cubique relative de la particule durant un instant dt , qu'on sait être exprimée par la somme

$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) dt,$$

est donc négligeable comparativement aux trois dilatations linéaires de la particule suivant les x, y, z , qu'expriment de même les trois termes $\frac{du}{dx} dt, \frac{dv}{dy} dt, \frac{dw}{dz} dt$. Et l'on peut admettre, avec une approximation suffisante, la *conservation des volumes fluides*, c'est-à-dire l'équation

$$(4) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Or celle-ci, différenciée *sur place* par rapport au temps, donne

$$\frac{d}{dx} \frac{du}{dt} + \frac{d}{dy} \frac{dv}{dt} + \frac{d}{dz} \frac{dw}{dt} = 0,$$

ou bien, vu la lenteur admise des mouvements, qui permet de réduire à leurs parties linéaires les expressions, bien connues, des accélérations u' , v' , w' ,

$$(5) \quad \frac{du'}{dx} + \frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz} = 0.$$

La substitution, dans cette formule, à u' , v' , w' , de leurs valeurs tirées de (1), conduit enfin, pour régir la fonction p , à l'équation indéfinie des fonctions harmoniques,

$$(6) \quad \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_2 p = 0,$$

équation linéaire, éminemment simple et, surtout, *homogène*, c'est-à-dire sans terme indépendant de p . On sait qu'elle déterminera p , pourvu qu'on lui joigne, d'une part, la condition donnée, *également homogène*, $p = 0$, relative aux points du fluide situés à l'infini, et, d'autre part, la relation spéciale que devient (3) par l'élimination de u' , v' , w' au moyen de (1), savoir

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(à la surface du corps)} \quad \frac{dp}{dx} \alpha + \frac{dp}{dy} \beta + \frac{dp}{dz} \gamma \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dn} \\ \\ = \rho \left(X - \frac{d^2 x_0}{dt^2} \right) \alpha + \rho \left(Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2} \right) \beta + \rho \left(Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right) \gamma. \end{array} \right.$$

14. Les trois derniers termes de (7) sont les seuls de nos équations, toutes linéaires, qui s'opposent à l'annulation de p ; et il y figure les *données*, variables d'un cas à l'autre pour le même corps, $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2}$, qui expriment les *accélérations relatives*, suivant les x , y , z , *de l'ensemble du fluide par rapport au solide*.

Par suite, on composera l'intégrale p , du système linéaire, en superposant les trois solutions partielles qu'on aurait, si chacune de ces trois accélérations différait seule de zéro, cas où elles lui sont

visiblement proportionnelles. Donc, si l'on appelle P_x , P_y , P_z trois *certaines* fonctions de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ complètement déterminées pour le solide indépendamment tant de la densité ρ du fluide que de ses accélérations relatives, il viendra pour p une expression de la forme

$$(8) \quad p = \rho \left(X - \frac{d^2 x_0}{dt^2} \right) P_x + \rho \left(Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2} \right) P_y + \rho \left(Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right) P_z.$$

P_x , P_y , P_z dépendent des différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ et non des coordonnées absolues x , y , z , parce que ces *différences*, seules, *sont les mêmes, à toutes les époques t , pour chaque élément $d\sigma$ de la surface mobile où se vérifie la relation caractéristique (7).*

Il résulte assez facilement de (8) que les trois composantes de l'impulsion du fluide sur le solide, dans un certain système d'*axes principaux* relatifs au corps, sont les produits de trois *certaines* coefficients *positifs*, dépendant uniquement de la forme du corps, par la masse fluide que déplace statiquement le corps et par l'accélération, suivant l'axe correspondant, de l'ensemble du fluide relativement au corps. Or, cela revient bien à dire que cette impulsion ajoutera fictivement à la masse du corps, dans les trois équations respectives du mouvement de celui-ci par rapport au fluide, une masse supplémentaire, égale au produit du coefficient correspondant par la masse fluide que déplace statiquement le corps.

15. Mon but, ici, n'est pas de démontrer cette conséquence des formules (6) à (8) ⁽¹⁾. Je voulais seulement faire voir avec quelle simplicité, ou de quelle manière pour ainsi dire immédiate, la loi de résistance de Du Buat résulte du principe de la conservation des volumes fluides, par le fait même qu'il entraîne pour la pression p l'équation $\Delta_2 p = 0$ des fonctions harmoniques. Des lois analogues de résistance s'observeraient encore, évidemment, mais dans des conditions en général plus compliquées, toutes les fois que la pression p se trouverait définie par un système d'équations aux dérivées partielles,

⁽¹⁾ Je l'ai fait aux pages 206 à 211 du Tome II de mon *Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences de Paris*.

linéaires par rapport à p ou à d'autres inconnues corrélatives, pourvu que ces relations n'eussent, en fait de parties indépendantes des diverses fonctions inconnues, que des termes proportionnels, en chaque point (x, y, z) , aux trois accélérations relatives $X = \frac{d^2 x_0}{dt^2}$, $Y = \frac{d^2 y_0}{dt^2}$, $Z = \frac{d^2 z_0}{dt^2}$. Dans tous ces cas, et pour les mêmes raisons, l'impulsion, sur le solide, du milieu ambiant, aurait ses composantes fonctions linéaires des trois accélérations relatives, ou de même forme, dans les équations de mouvement du corps par rapport au fluide, que ses inerties, avec lesquelles on les réduirait en y introduisant ainsi des accroissements fictifs de masse.

Rien ne dit donc que le mode de calcul de résistances dû à Du Buat ne s'applique pas quelquefois aux milieux compressibles, chez lesquels la vitesse élastique de propagation des ondes est finie, et non plus censée infinie comme la suppose généralement l'hypothèse de conservation des volumes, ou d'*incompressibilité*.

Mais on conçoit, en outre, que, dans des cas encore plus complexes, ne permettant guère que des estimations approximatives, certaines analogies ou assimilations plus ou moins plausibles puissent conduire à employer, en tant qu'approché, le même mode de calcul, pour des résistances difficiles à évaluer autrement. Aussi l'emploierons-nous, à défaut de mieux, quand il s'agira d'exprimer certaines actions réciproques de l'éther et de la matière pondérable.

16. C'est dans une foule de circonstances, comme on sait, que le principe de conservation très approchée des volumes matériels s'applique, pour rendre accessibles les problèmes. Il n'y a guère, chez les fluides, que le phénomène des ondes sonores et l'écoulement des gaz dans des espaces où leur raréfaction soit grande, qui mettent en jeu des changements de volume comparables aux changements de forme, ou qui ne comportent pas l'emploi, au moins approché, de l'équation (4). Par exemple, dans la question si étendue des ondes liquides et dans celle de la veine fluide, où il y a un potentiel φ des vitesses dont les dérivées en x, y, z égalent les trois composantes u, v, w de la vitesse, la relation (4) donne encore, pour ce potentiel φ , l'équation $\Delta_2 \varphi = 0$ des fonctions harmoniques.

La même hypothèse de conservation des volumes s'applique aussi aux corps plastiques tels que le plomb, en train de se déformer d'une manière continue, et aux masses pulvérulentes, comme un amas de sable, dont les couches glissent plus ou moins les unes sur les autres avant de passer, s'il y a lieu, à l'état *ébouleux*. Aussi a-t-elle permis d'inaugurer, il y a une trentaine d'années, la mécanique de ces corps *semi-fluides*, restée, il est vrai, jusqu'ici, presque à l'état de simple ébauche ⁽¹⁾.

C'est donc une hypothèse des plus fécondes, traduisant l'un de ces faits d'expérience capitaux et simples, de ces principes particuliers, que nous qualifions d'*accessoires* uniquement parce qu'ils paraissent *distincts* des lois fondamentales énoncées aux n^{os} 1 et 2, mais qui sont, en réalité, indispensables bien souvent pour parvenir à des résultats saisissables, grâce à leur combinaison avec les lois fondamentales proprement dites.

V. — Rôle capital de telles masses fictives pour l'éther,
dans la théorie mécanique de la lumière.

17. Le précédent phénomène de résistance (dans le problème du pendule) d'un fluide indéfini, à la translation relative d'un solide immergé à son intérieur, resterait évidemment le même, si c'était, au contraire, le fluide qui, autour du solide d'abord en repos, oscillât d'un mouvement *commun* (sauf au voisinage du solide que le fluide doit contourner). Or ce phénomène, sous la nouvelle forme ainsi considérée, offre le précieux avantage de servir très exactement de type à l'impulsion que l'éther impondérable vibrant lumineusement, dans un corps, par ondes de très grande longueur comparativement aux intervalles moléculaires, exerce sur chaque molécule du corps, que tout fait supposer relativement très éloignée de ses voisines et assez bien assimilable à un solide unique, noyé de la sorte au sein d'un fluide indéfini qu'animerait un mouvement oscillatoire commun.

Même la partie de la résistance qui se trouve proportionnelle à la

(1) Voir, par exemple, mon *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui de massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion* (in-4° de 180 pages, où il est aussi question des corps plastiques; 1876).

vitesse explique, avec une étonnante précision, les circonstances que présente l'absorption de la lumière par les cristaux translucides et par les métaux opaques (1).

18. Mais, dans la plupart des corps, eu égard à l'excessive brièveté des périodes vibratoires, qui annihile ici le rôle des vitesses, la seule partie notable de la résistance opposée par les molécules pondérables au mouvement lumineux est, du moins à une première approximation, celle qu'on peut supposer proportionnelle à l'accélération et sensiblement indépendante de la période. Or la poussière atomique qu'est l'éther a si peu de densité, par rapport aux corps et surtout par rapport à leurs molécules, disséminées çà et là dans son intérieur, que ces molécules prennent, dans les phénomènes lumineux, une fraction notable des quantités de mouvement sans (pour ainsi dire) remuer; de sorte que l'accélération relative de l'ensemble de l'éther ambiant par rapport à elles peut être confondue avec son accélération absolue tout entière.

La perturbation du mouvement de l'éther, causée par chaque molécule pondérable dans le voisinage immédiat de celle-ci, équivaut donc, sur l'ensemble de cet éther ambiant et, d'abord, quand la molécule est sphérique ou du moins *isotrope*, à une réaction exprimée par le produit d'une masse proportionnelle au volume de la molécule et de l'accélération générale de cet éther ambiant, réaction de sens d'ailleurs opposé à la même accélération. Et lorsque, au contraire, la molécule est *hétérotrape* ou non sphérique, elle admet toujours trois directions rectangulaires, suivant chacune desquelles la réaction équivaut encore, à part le signe, au produit d'une masse proportionnelle au volume de la molécule par l'accélération de même sens de l'ensemble de l'éther, mais avec trois coefficients de proportionnalité différents, vu la non-parité de la forme de la molécule par rapport aux trois axes. On peut donc raisonner comme si la perturbation locale due à la molécule

(1) Voir, par exemple, le Tome II de ma *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, p. 371 à 380, 481 à 493, 583 à 587, 600 à 625, et, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2^e série, t. XXIX, mai 1905), mon Mémoire *Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal, et sur la construction des rayons lumineux dans les milieux opaques*.

n'existait pas, mais que l'éther ambiant eût éprouvé, dans les trois équations du mouvement relatives aux axes principaux considérés, trois accroissements de masse bien définis.

19. En superposant toutes les réactions analogues, exercées sur un élément de volume d'éther par les molécules qui s'y trouvent immergées, on forme des équations de mouvement pareilles à celles qui auraient régi cet éther sans la présence des molécules pondérables, si, gardant en tous sens l'élasticité de l'éther libre isotrope, il avait eu sa densité accrue, suivant trois certains axes de symétrie de résistance relatifs à l'ensemble, de trois petites fractions *déterminées* des densités partielles afférentes à chaque espèce de molécules du corps.

Ainsi s'explique naturellement l'hypothèse de Fresnel, attribuant à l'éther de tout corps isotrope même élasticité qu'à l'éther libre, mais une densité plus grande. Fresnel paraît avoir parfois pressenti que cette supposition d'une densité plus grande revenait à tenir compte de la participation de la matière pondérable au mouvement vibratoire ou, ce qui revient au même, de ses résistances *d'inertie*, alternativement positives et négatives.

Si ces pressentiments étaient devenus plus nets dans son esprit, il n'aurait pas eu besoin de chercher d'autres bases, contradictoires à celles-là et reconnues depuis longtemps inadmissibles, pour expliquer la biréfringence. Car des accroissements purement fictifs de masse pouvant être différents, dans les trois équations de mouvement, quand les molécules ont des formes inégalement résistantes suivant les divers sens, il aurait admis pour l'éther des cristaux *trois* densités distinctes : ce qui conduisait justement aux véritables et définitives équations de la biréfringence, acceptées aujourd'hui par tout le monde. Mais, faute d'une vue assez précise de la *nature fictive* des densités paraissant manifestées ainsi par l'éther dans les divers corps, son bon sens n'a pu que reculer devant l'absurdité d'attribuer plusieurs masses distinctes à une seule et même matière.

20. Le mouvement vibratoire lumineux dans les corps transparents semble donc, quand on y oublie le rôle de la matière pondérable, mettre en défaut, de plusieurs manières, le principe de la constance

de la masse, savoir, en y accroissant dans des rapports notables la densité apparente de l'éther, et en l'accroissant inégalement, chez les cristaux biréfringents, pour les mouvements effectués suivant les divers axes dits (à tort) *d'élasticité*. Il est vraisemblable même que cette densité apparente dépendrait, en outre, de la vitesse actuelle de l'éther, si la petitesse supposée des déplacements ne permettait pas de réduire les équations à la forme linéaire, par la suppression des carrés et des produits de ces déplacements ou de leurs dérivées.

Nous ne serons donc pas surpris, un peu plus loin, que, dans des circonstances où les vitesses à considérer deviendront énormes, les masses fictives qui se joignent à la masse vraie pour exprimer des actions *oubliées* croissent, en effet, très vite avec la vitesse.

VI. — Rôle analogue de pareilles masses fictives pour les molécules pondérables, en vue de tenir compte de la résistance de l'éther entraîné par leurs translations rapides.

21. Mais ce n'est pas seulement par ses vibrations que l'éther est en conflit avec la matière pondérable : c'est aussi dans toute translation des corps à travers l'espace, où paraît se maintenir à peu près en repos (aux vibrations et tourbillonnements près) l'ensemble du fluide éthéré.

A la vérité, si l'on assimilait l'éther à un *liquide parfait*, dont les particules conserveraient *leur volume* et auraient des vitesses *bien continues*, tout autour de chaque molécule pondérable assimilée elle-même à un solide immergé, la pression y éprouverait, en raison des grandes vitesses relatives, une modification spéciale, partout proportionnelle, sauf une partie uniforme, au carré de ces vitesses, et dont on n'avait pas à tenir compte dans le cas des petits mouvements, où elle était de l'ordre des quantités non linéaires négligées.

C'est ce que nous allons d'abord reconnaître, en complétant ainsi notre analyse succincte des n^{os} 12 à 15.

22. Nous rapporterons le mouvement à des axes fixes des x, y, z ; et comme l'ensemble de l'éther, aux très grandes distances du corps, sera lui-même fixe, nous pourrons imaginer libre de toute action

extérieure l'unité de masse de ce fluide, assimilé de la sorte à un liquide incompressible sans pesanteur, où l'on aurait

$$(9) \quad (\text{à l'infini}) \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = 0.$$

Cela revient à faire $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ dans les équations (1) à (2) du n° 12 (p. 500), qui ne supposent nullement, comme plusieurs des suivantes, (3), (5), etc., la lenteur du mouvement relatif du solide par rapport au fluide.

Nous admettons, d'ailleurs, que le fluide a été mis en mouvement par le solide, dont les vitesses translatrices $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$, après avoir été nulles (pour $t = -\infty$), auront peu à peu grandi.

Or, dans ces conditions, le théorème de Lagrange-Cauchy sur l'existence d'un potentiel des vitesses s'applique. Ainsi, ce potentiel φ , qui a pour dérivées en x, y, z les trois composantes u, v, w de la vitesse, existe. Les relations qui le détermineront sont, d'abord, l'équation indéfinie déduite de la formule (4) (p. 501) de conservation des volumes, savoir

$$(10) \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

c'est-à-dire justement, comme pour la pression p au n° 13, l'équation simple des fonctions harmoniques, et, de plus, une condition spéciale à chaque frontière limitant le fluide. Or, il y aura comme telles limites, d'une part, la surface σ du solide, d'autre part, la sphère, de rayon infini, à laquelle s'appliquent les relations (9).

Nous nous donnerons, sur cette frontière idéale, la condition asymptotique

$$(11) \quad (\text{à l'infini}) \quad \varphi = 0;$$

ce qui sera la manière la plus simple d'y annuler les vitesses u, v, w , c'est-à-dire les trois dérivées partielles de φ en x, y, z .

Quant à la surface du solide, dont dn désignera encore une normale dirigée dans le fluide et ayant les cosinus directeurs α, β, γ , la relation (2) (p. 500) y deviendra immédiatement

$$(12) \quad \frac{d\varphi}{dn} = \frac{dx_0}{dt} \alpha + \frac{dy_0}{dt} \beta + \frac{dz_0}{dt} \gamma.$$

23. Or, ces trois équations (10), (11), (12) sont linéaires et identiques à celles, (6) à (7), que nous avons trouvées plus haut (p. 502) pour régir la pression p dans le cas des mouvements lents, à cela près que les trois produits $\rho\left(X - \frac{d^2x_0}{dt^2}\right)$, $\rho\left(Y - \frac{d^2y_0}{dt^2}\right)$, $\rho\left(Z - \frac{d^2z_0}{dt^2}\right)$ se trouvent remplacés ici par les trois composantes $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ de la vitesse translatrice du solide.

La formule (8) du n° 14 (p. 503) deviendra donc, sans que les trois fonctions P_x, P_y, P_z de $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ aient à subir aucun changement,

$$(13) \quad \varphi = \frac{dx_0}{dt} P_x + \frac{dy_0}{dt} P_y + \frac{dz_0}{dt} P_z.$$

On voit que, en raison de l'*incompressibilité* admise, les vitesses $\frac{d\varphi}{d(x, y, z)}$, supposées ainsi bien continues, du fluide, dépendent uniquement des vitesses *actuelles données* $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ du solide et qu'elles ont, grandes ou petites, exactement la même expression, partout proportionnelle à la vitesse même du solide, pourvu que celle-ci garde son orientation, et se renversant simplement quand elle change de signe.

Observons que la vitesse *absolue* du fluide en chaque point (x, y, z) ou de l'intérieur de l'éther, ou de la surface du corps, vitesse que nous appellerons V , est pareille pour deux orientations exactement opposées de la translation de ce corps, ou, en d'autres termes, qu'elle est la même soit quand le point considéré (x, y, z) se trouve *en avant* du corps, soit quand il se trouve *en arrière*.

24. Occupons-nous maintenant de la pression p . Elle est reliée aux accélérations u', v', w' par les trois équations (1) d'Euler (p. 500), ici réduites à

$$(13 \text{ bis}) \quad \frac{d}{d(x, y, z)} \frac{p}{\rho} = -(u', v', w') \\ = -\frac{d}{d(x, y, z)} \left[\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2} \right) \right].$$

Multiplions-les respectivement, à l'époque t , par les trois projec-

tions dx, dy, dz de l'élément d'un chemin reliant tout point très éloigné (où p, φ s'annuleront asymptotiquement) au point quelconque (x, y, z) ; et, après les avoir ajoutées, intégrons le long de ce chemin. Si l'on observe que $\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}$, ou $u^2 + v^2 + w^2$, est le carré de la vitesse V en (x, y, z) , il viendra, en multipliant finalement par ρ ,

$$(14) \quad p = -\rho \frac{d\varphi}{dt} - \rho \frac{V^2}{2}.$$

Or, l'expression (13) de φ dépend de t , généralement, et par les facteurs $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ des fonctions P_x, P_y, P_z , et par les variables $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ de ces fonctions, où x_0, y_0, z_0 varient avec le temps, même quand les vitesses $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ de la translation sont constantes. La dérivée partielle de φ en t résultant du changement de ces variables est, comme on voit,

$$-\frac{d\varphi}{dx} \frac{dx_0}{dt} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy_0}{dt} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz_0}{dt}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad -u \frac{dx_0}{dt} - v \frac{dy_0}{dt} - w \frac{dz_0}{dt};$$

de sorte que la formule (14) revient à

$$(15) \quad \begin{aligned} p = & -\rho \left(\frac{d^2 x_0}{dt^2} P_x + \frac{d^2 y_0}{dt^2} P_y + \frac{d^2 z_0}{dt^2} P_z \right) \\ & + \rho \left(\frac{dx_0}{dt} u + \frac{dy_0}{dt} v + \frac{dz_0}{dt} w \right) - \frac{\rho}{2} V^2 \\ = & -\rho \left(\frac{d^2 x_0}{dt^2} P_x + \frac{d^2 y_0}{dt^2} P_y + \frac{d^2 z_0}{dt^2} P_z \right) \\ & + \frac{\rho}{2} \left(\frac{dx_0^2}{dt^2} + \frac{dy_0^2}{dt^2} + \frac{dz_0^2}{dt^2} \right) \\ & - \frac{\rho}{2} \left[\left(u - \frac{dx_0}{dt} \right)^2 + \left(v - \frac{dy_0}{dt} \right)^2 + \left(w - \frac{dz_0}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

On reconnaît, dans la partie de p où figurent les accélérations $\frac{d^2(x_0, y_0, z_0)}{dt^2}$ du solide, la formule même (8) (p. 503) de la pression, pour le cas des mouvements lents où les carrés et produits des vitesses se trouvaient, en effet, négligeables, et qui a donné une résis-

tance au mouvement du solide proportionnée à l'inertie de ce corps ou revenant, dans les équations de mouvement de celui-ci, à accroître fictivement sa masse suivant un rapport constant.

25. Il ne nous reste donc qu'à évaluer l'impulsion spéciale sur le solide fournie, du moins suivant le sens du mouvement de ce corps, par les autres termes de (15), où figurent au second degré, d'une manière homogène, les vitesses u, v, w et $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$. Si l'on adopte comme expression de p le troisième membre de (15) et qu'on appelle U la vitesse actuelle de la translation, ayant pour carré $\frac{dx_0^2}{dt^2} + \frac{dy_0^2}{dt^2} + \frac{dz_0^2}{dt^2}$, cette partie de p comprendra, d'abord, le terme *constant* $\frac{\rho}{2} U^2$, dont les effets sur toute la surface *fermée* σ du corps se détruiront, et, en outre, le terme négatif

$$-\frac{\rho}{2} \left[\left(u - \frac{dx_0}{dt} \right)^2 + \left(v - \frac{dy_0}{dt} \right)^2 + \left(w - \frac{dz_0}{dt} \right)^2 \right],$$

proportionnel, comme il a été annoncé (n° 21), au carré de la vitesse relative du fluide par rapport au solide, vitesse ayant les composantes $u - \frac{dx_0}{dt}$, $v - \frac{dy_0}{dt}$, $w - \frac{dz_0}{dt}$. Ce terme équivaudra donc, sur chaque élément $d\sigma$ de la couche superficielle du solide, à une attraction ou *suction* exercée par le fluide.

Les parties de p dont il s'agit, où figurent les vitesses, constitueraient toute la pression du fluide, si la translation était uniforme ou que, U désignant toujours sa vitesse et a, b, c étant ses cosinus directeurs, dès lors invariables, on eût

$$(16) \quad \frac{dx_0}{dt} = aU, \quad \frac{dy_0}{dt} = bU, \quad \frac{dz_0}{dt} = cU, \quad \varphi = U(aP_x + bP_y + cP_z),$$

et aussi, par suite, vu le second membre de (15),

$$(17) \quad p = \rho U(au + bv + cw) - \frac{\rho}{2} U^2.$$

Alors le mouvement, *autour du solide*, serait permanent; car φ et

ses dérivées u, v, w en x, y, z dépendraient seulement de $x - aUt$, $y - bUt$, $z - cUt$.

Sur un élément quelconque $d\sigma$ de la surface du corps, où la normale du menée vers le fluide a les cosinus directeurs α, β, γ , la pression considérée p ferait, avec la direction invariable (a, b, c) de la translation, un angle ayant pour cosinus $-(a\alpha + b\beta + c\gamma)$ et fournirait ainsi, sur le corps, la composante d'impulsion $-(a\alpha + b\beta + c\gamma)p d\sigma$. Il viendrait donc, pour l'impulsion *complémentaire totale à évaluer*, du fluide sur le solide, en appelant ainsi p la pression effective (17) *dans l'hypothèse d'une translation U rectiligne et uniforme*,

$$(18) \quad - \int_{\sigma} p(a\alpha + b\beta + c\gamma) d\sigma.$$

Quant au travail, par unité de temps, de cette impulsion, il en serait le produit par U , c'est-à-dire

$$(19) \quad - U \int_{\sigma} p(a\alpha + b\beta + c\gamma) d\sigma.$$

26. Cela posé, considérons d'abord le cas d'un solide pourvu d'un plan de symétrie, perpendiculaire à la vitesse translatrice U . Il est alors évident que le renversement de la translation U amène, sur chaque côté du plan de symétrie, des vitesses symétriques de celles qui avaient lieu d'abord de l'autre côté. Or, nous avons vu (n° 23) qu'un tel renversement de la translation invertit simplement, en chaque point, le sens de ces vitesses. Donc, elles y étaient déjà pareilles, mais à cosinus directeurs contraires de ceux de vitesses symétriques, ou à composantes $au + bv + cw$ égales suivant le sens (a, b, c) de la translation, qui est perpendiculaire au plan de symétrie. La valeur (17) de p est ainsi la même, sur les deux éléments symétriques $d\sigma$ où les cosinus $a\alpha + b\beta + c\gamma$ de l'angle de la normale avec la vitesse translatrice sont égaux et contraires.

Par suite, l'impulsion totale (18), due aux vitesses actuelles quelconques u, v, w , s'annule.

Le raisonnement suivant tend à montrer qu'il en est ainsi dans tous

les cas, ou, ce qui revient au même, que *le travail* (19) *de cette impulsion*, par unité de temps, *a toujours la valeur zéro*.

Observons, à cet effet, que le mouvement absolu du fluide est censé, ici, devenu permanent *autour du solide* et, la demi-force vive totale du fluide agité, dès lors *constante*, du moins *en supposant négligeable ce qui se passe aux distances infinies* où les vitesses sont insensibles. En conséquence, le travail total, dans l'unité de temps, des forces tant intérieures, qu'exercées par le solide sur la couche fluide contiguë, se réduit à zéro. Or on sait que, dans un fluide parfait incompressible, le travail des actions intérieures est nul. Donc celui des pressions exercées par la couche superficielle du corps, égal et contraire à (19), s'annulera aussi, et son quotient par $-U$, c'est-à-dire l'impulsion (18) du fluide sur le solide, égalera zéro.

27. Mais arrivons par l'Analyse, et plus nettement, au même résultat.

Construisons, à l'époque t , autour du centre (x_0, y_0, z_0) , une sphère σ' de rayon très grand; et soient ϖ le volume *fluide* qu'elle enferme (ou abstraction faite de celui du solide inclus), $d\sigma'$ un élément de sa surface, α', β', γ' les trois cosinus directeurs de sa normale, dn' , tirée vers le fluide extérieur. Multiplions par $p d\varpi$ l'équation d'incompressibilité (4) (p. 501); et intégrons les divers termes dans toute l'étendue ϖ , en substituant à $p \frac{du}{dx}$, $p \frac{dv}{dy}$, ..., les différences $\frac{dp u}{dx} - u \frac{dp}{dx}$, $\frac{dp v}{dy} - v \frac{dp}{dy}$, La transformation usuelle des expressions intégrables une fois en intégrales de surface, qui seront prises, ici, à la limite extérieure σ' et à la limite intérieure σ , donnera, vu la condition (2) (p. 500) et les notations (16),

$$(20) \quad \int_{\sigma'} p(u\alpha' + v\beta' + w\gamma') d\sigma' - \int_{\varpi} \left(u \frac{dp}{dx} + v \frac{dp}{dy} + w \frac{dp}{dz} \right) d\varpi \\ = U \int_{\sigma} p(a\alpha + b\beta + c\gamma) d\sigma.$$

Or les équations (13 bis) d'Euler permettent de remplacer, dans le second terme, les trois dérivées partielles de p en x, y, z par $-\rho u'$, $-\rho v'$, $-\rho w'$; et si l'on appelle M la masse $\rho d\varpi$ de toute particule fluide comprise, à l'époque t , dans la sphère σ' , ce second terme

de (20) devient $\sum M(uu' + vv' + ww')$, c'est-à-dire

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \sum M(u^2 + v^2 + w^2) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \sum \frac{M}{2} V^2 :$$

il représente la dérivée en t de la demi-force vive de ce fluide.

28. Calculons cette dérivée en évaluant, comme il suit, la demi-force vive acquise, durant un instant dt , par le fluide en question. A l'époque $t + dt$, celui-ci occupe dans l'espace la même sphère fixe σ' , plus une mince étendue, à éléments *positifs* ou *négatifs* (c'est-à-dire *envahis* ou *abandonnés* par le fluide), ayant pour bases les éléments mêmes $d\sigma'$ de la sphère fixe, et pour hauteurs ou épaisseurs (positives ou négatives) les chemins $(u\alpha' + v\beta' + w\gamma')dt$, parcourus vers le dehors suivant les normales dn' . L'excès de la demi-force vive possédée, à l'époque $t + dt$, par le fluide ainsi sorti de la sphère fixe, sur celle du fluide entré, est, par suite, sauf erreur relative infiniment petite,

$$(22) \quad \frac{\rho}{2} \frac{dt}{dt} \int_{\sigma'} V^2 (u\alpha' + v\beta' + w\gamma') d\sigma'.$$

Pour avoir l'augmentation de la demi-force vive du fluide considéré, il faut évidemment y joindre l'accroissement, durant l'instant dt , de la demi-force vive qui existe, chez le fluide, à l'intérieur de la sphère *fixe* σ' , et que la *permanence* du mouvement *autour du solide* va nous permettre d'exprimer lui-même par une intégrale de surface.

Cette permanence implique, en effet, la constance de la demi-force vive du fluide à l'intérieur de la sphère σ' , supposée maintenant mobile, quand chaque élément $d\sigma'$ partage la translation du solide, ou envahit durant l'instant dt le volume élémentaire (positif ou négatif)

$$d\sigma' (aU dt.\alpha' + bU dt.\beta' + cU dt.\gamma').$$

Or, dans ce volume, le fluide aura la demi-force vive

$$(23) \quad \frac{\rho U}{2} \frac{dt}{dt} \int V^2 (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') d\sigma'.$$

La somme algébrique de ces quantités (23) pour toute la surface σ' , jointe à l'accroissement de demi-force vive du fluide, opéré dans la

sphère fixe σ' , est donc nulle. D'où il suit, pour l'accroissement à évaluer, la même somme changée de signe, savoir

$$(24) \quad -\frac{\varphi U dt}{2} \int_{\sigma'} V^2 (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') d\sigma'.$$

Ainsi, l'expression (21), second terme de (20), égale le quotient, par dt , de la somme des deux quantités (22) et (24); en sorte que l'équation (20) devient

$$(25) \quad \int_{\sigma} \left[\left(p + \frac{\rho}{2} V^2 \right) (u\alpha + v\beta + w\gamma) - \frac{\rho}{2} U V^2 (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') \right] d\sigma \\ = U \int_{\sigma} p (a\alpha + b\beta + c\gamma) d\sigma.$$

Remplaçons, au premier membre, p par sa valeur (17) et changeons les membres de place. Nous aurons enfin

$$(26) \quad U \int_{\sigma} p (a\alpha + b\beta + c\gamma) d\sigma \\ = \rho U \int_{\sigma} \left[(au + bv + cw) (u\alpha' + v\beta' + w\gamma') \right. \\ \left. - \frac{V^2}{2} (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') \right] d\sigma'.$$

29. Le premier membre, travail (19) de l'impulsion changé de signe, est indépendant des dimensions de la surface extérieure σ' . Donc le second membre n'en dépend pas davantage et l'on peut y faire σ' infini. Or l'expression des vitesses u, v, w dans le cas simple d'un solide sphérique, où l'intégration s'effectue aisément ⁽¹⁾, fait connaître que φ , aux points éloignés (x, y, z) , a l'ordre de petitesse du carré de l'inverse de la distance de ces points au centre (x_0, y_0, z_0) et que, par suite, les dérivées u, v, w de φ en x, y, z sont de l'ordre du cube du même inverse et, leurs produits deux à deux figurant sous le signe $\int_{\sigma}$ au second membre de (26), de l'ordre de sa sixième puissance. Comme l'aire $\int d\sigma'$ est seulement de l'ordre de grandeur du carré de

(1) Si R désigne le rayon de ce solide, les valeurs, immédiatement vérifiables, de P_x, P_y, P_z dans (13) sont alors $\frac{R^3}{2} \frac{d}{d(x, y, z)} \frac{1}{r}$, où r est la distance d'un point quelconque (x, y, z) du fluide au centre (x_0, y_0, z_0) .

la même distance au centre (x_0, y_0, z_0) , le second membre de (26) constitue donc un infiniment petit du quatrième ordre. Et la valeur constante des deux membres de (26) est zéro; ce qu'il fallait démontrer.

29 *bis*. Voici une analogie simple, empruntée à la théorie analytique de la chaleur, qui permet de prévoir, sans calcul, ce second ordre de petitesse de la fonction φ aux grandes distances r .

L'équation indéfinie $\Delta_2 \varphi = 0$ et la condition asymptotique $\varphi = 0$, relative aux points très distants de l'origine, sont celles des températures stationnaires d'un milieu athermane, homogène et isotrope, à la température zéro dans ses régions infiniment éloignées, tandis que la relation (12), spéciale à la surface σ , signifie que ce milieu athermane, extérieurement indéfini, mais limité intérieurement par la surface σ , déverse sans cesse à travers cette surface, dans notre solide, un flux de chaleur proportionnel, par unités d'aire et de temps, au second membre de (12). Si la somme de ces flux par unité de temps, savoir, ici,

$$\frac{dx_0}{dt} \int_{\sigma} \alpha d\sigma + \frac{dy_0}{dt} \int_{\sigma} \beta d\sigma + \frac{dz_0}{dt} \int_{\sigma} \gamma d\sigma,$$

n'était pas nulle, la nécessité, pour la sphère extérieure σ' , d'aire $4\pi r^2$, limitant *idéalement* le milieu, d'appeler du dehors une quantité égale de chaleur, propre à compenser cette perte finie éprouvée à la surface intérieure σ , obligerait la dérivée $\frac{d\varphi}{dr}$ à y être de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{r^2}$; et φ y serait, dès lors, comparable à $\frac{1}{r}$.

Mais les trois intégrales $\int_{\sigma} (\alpha, \beta, \gamma) d\sigma$ sont les projections totales de la surface σ sur les trois plans coordonnés, projections de signes contraires pour les parties de cette surface *fermée* qui correspondent, deux à deux, aux mêmes éléments d'un plan coordonné; de sorte que le flux total est nul. Or cette circonstance élève naturellement d'une unité les degrés respectifs de petitesse de φ et de $\frac{d\varphi}{dr}$. Le potentiel φ sera donc de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$.

En d'autres termes, le mouvement de la chaleur dans le milieu

athermane se réduit ici à une simple agitation locale, à des tourbillonnements ou perturbations autour de la surface σ , sans perte ni gain définitifs de chaleur pour le milieu. Les effets sur la température φ en chaque point lointain (x, y, z) , émanés des divers éléments $d\sigma$ de la surface perturbatrice, doivent donc *se neutraliser*, dans la mesure où les distances respectives de ces éléments $d\sigma$ *s'évanouissent* comparativement à leurs distances à (x, y, z) . Et l'on conçoit qu'ils s'y éteignent bien plus vite que dans le cas où, une introduction ou soustraction générale de chaleur ayant lieu, ces effets ne s'atténueraient au loin que *par simple dissémination*, sans se neutraliser.

30. Mais ce n'est pas seulement la résistance totale exercée par le fluide sur le solide, dans le sens inverse du mouvement (censé uniforme) de celui-ci, qui est nulle : c'est aussi la résistance totale *de translation* à l'opposé d'une direction quelconque, la direction des x , par exemple, c'est-à-dire l'intégrale $\int_{\sigma} p\alpha d\sigma$; car l'invariabilité admise de la quantité totale de mouvement du fluide suivant les x , autour du solide, implique l'absence de toute impulsion, suivant ce sens, du solide sur le fluide.

Pour le reconnaître, multipliant par l'élément $\rho d\omega$ ou M de masse fluide les trois équations d'Euler, écrivons-les sous la forme

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} d\omega = -M u' \text{ ou } -M \frac{du}{dt}, & \frac{dp}{dy} d\omega = -M \frac{dv}{dt}, \\ \frac{dp}{dz} d\omega = -M \frac{dw}{dt}, \end{cases}$$

où les dérivées en t qui figurent aux seconds membres sont des dérivées *complètes*, prises en suivant la particule M ; et intégrons, à la manière ordinaire, la première (27), pour tout le fluide *actuellement* intérieur à la sphère σ' , ou compris entre la surface σ du solide et cette sphère. Un changement de signes dans le résultat et la transposition d'un terme donneront

$$\int_{\sigma} p\alpha d\sigma = \int_{\sigma'} p\alpha' d\sigma' + \frac{d}{dt} \Sigma M u.$$

Or le dernier terme, multiplié par dt , serait l'accroissement élémentaire, pour tout le fluide compris à l'époque t dans la sphère σ' , de la

quantité de mouvement $\sum Mu$, où le facteur multipliant M a successivement, en raison de la permanence relative admise ici, la même valeur aux endroits situés de même par rapport au solide. On évaluera donc ce dernier terme exactement comme on a fait tout à l'heure pour la dérivée analogue de la demi-force vive $\sum M \frac{V^2}{2}$. Et il viendra

$$(28) \quad \int_{\sigma} p \alpha d\sigma = \int_{\sigma'} p \alpha' d\sigma' + \rho \int_{\sigma'} u [(u - U a) \alpha' + (v - U b) \beta' + (w - U c) \gamma'] d\sigma'.$$

Quand le rayon r de la sphère σ' devient très grand, les fonctions sous les signes $\int$ du second membre sont, toutes les deux, vu l'expression (17) de p , de l'ordre de petitesse de u , v , w , c'est-à-dire du troisième ou, du moins, supérieur au deuxième (p. 517); et comme $\int d\sigma'$ n'est que du deuxième ordre de grandeur, ce second membre reste évanouissant, ou a forcément pour valeur finale zéro. Donc le premier membre $\int_{\sigma} p \alpha d\sigma$, indépendant de r , est bien nul.

31. Essayons encore de voir à quelle expression conduit la même méthode pour l'impulsion totale *de rotation* du fluide sur le solide autour d'un axe parallèle à l'axe des x et issu du centre de gravité (x_0, y_0, z_0) , c'est-à-dire pour un moment égal et contraire à

$$(29) \quad \int_{\sigma} p [(y - y_0) \gamma - (z - z_0) \beta] d\sigma.$$

A cet effet, multiplions respectivement la troisième et la seconde des équations (27) par $y - y_0$, $-(z - z_0)$, et ajoutons-les; ce qui, vu, au second membre, les relations, ici évidentes,

$$\frac{d(y - y_0)}{dt} = v - U b, \quad \frac{d(z - z_0)}{dt} = w - U c,$$

donnera

$$(30) \quad \begin{aligned} & \frac{d p (y - y_0)}{d z} d w - \frac{d p (z - z_0)}{d y} d w \\ &= - \frac{d}{d t} \cdot M [(y - y_0) (w - U c) - (z - z_0) (v - U b)]. \end{aligned}$$

En intégrant dans toute l'étendue ω comprise entre σ et σ' , il vient

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & \int_{\sigma} p[(y-y_0)\gamma - (z-z_0)\beta] d\sigma \\
 &= \int_{\sigma'} p[(y-y_0)\gamma' - (z-z_0)\beta'] d\sigma' \\
 &+ \frac{d}{dt} \sum M[(y-y_0)(v-Uc) - (z-z_0)(v-Ub)].
 \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre s'annule, en raison de ce que le rayon r aboutissant à $d\sigma'$, et à projections $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ sur les axes, est identique en direction à la normale dn' ; d'où résultent pour $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ les valeurs $r\alpha'$, $r\beta'$, $r\gamma'$. Quant au dernier terme de (31), le facteur de M , sous le signe $\sum$, y aura encore, en raison de la permanence admise, les mêmes valeurs à toute époque aux points situés de même autour du solide. Donc ce terme s'évaluera comme on l'a fait pour la dérivée analogue en t des intégrales $\sum M \frac{V^2}{2}$, $\sum Mu$. Et l'on aura ainsi

$$\begin{aligned}
 & \int_{\sigma} p[(y-y_0)\gamma - (z-z_0)\beta] d\sigma \\
 &= \rho \int_{\sigma'} [(y-y_0)(v-Uc) - (z-z_0)(v-Ub)] \\
 &\quad \times [(u-Ua)\alpha' + (v-Ub)\beta' + (w-Uc)\gamma'] d\sigma',
 \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant, au second membre, $y-y_0$, $z-z_0$, par $r\beta'$, $r\gamma'$, puis groupant un peu autrement les termes entre crochets,

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & \int_{\sigma} p[(y-y_0)\gamma - (z-z_0)\beta] d\sigma \\
 &= -\rho r \int_{\sigma'} [U(b\gamma' - c\beta') - (v\gamma' - w\beta')] \\
 &\quad \times [U(a\alpha' + b\beta' + c\gamma') - (u\alpha' + v\beta' + w\gamma')] d\sigma'.
 \end{aligned}$$

On peut négliger dans le second membre, sous le signe $\int$, les produits de v , w par u , v , w , qui seraient du sixième ordre de petitesse

et, après multiplication de leurs valeurs moyennes par $r \int d\sigma'$, encore du troisième ordre, c'est-à-dire évanouissants pour r infini. Or on peut y négliger aussi les termes indépendants de u, v, w , c'est-à-dire le produit

$$U^2(b\gamma' - c\beta')(a\alpha' + b\beta' + c\gamma').$$

En effet, dans le développement de celui-ci, les parties proportionnelles au produit de deux cosinus α', β', γ' différents auraient, comme on sait, leurs valeurs moyennes, sur toute la surface σ' de la sphère, nulles; et les carrés de ces trois cosinus, carrés dont la somme vaut 1, prendraient même valeur moyenne, égale, par suite, à $\frac{1}{3}$. La valeur moyenne de ce produit serait donc, en tout, celle de sa partie $U^2(b\gamma'.c\gamma' - c\beta'.b\beta')$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}U^2(bc - cb)$ ou zéro.

32. Il restera ainsi à tenir compte seulement, dans le second membre, des termes linéaires en u, v, w ; ce qui réduira la formule (32), du moins pour r infini, à

$$\begin{aligned} (33) \quad & \int_{\sigma} p[(y - y_0)\gamma - (z - z_0)\beta] d\sigma \\ &= \rho U r \int_{\sigma'} [(b\gamma' - c\beta')(u\alpha' + v\beta' + w\gamma') \\ & \quad + (c\gamma' - w\beta')(a\alpha' + b\beta' + c\gamma')] d\sigma'. \end{aligned}$$

Mais on n'a pas besoin d'y faire r infini; car le second membre est indépendant de r . On le reconnaît au moyen des trois relations, presque évidentes,

$$\begin{aligned} & \frac{d(x - x_0)v}{dz} - \frac{d(x - x_0)w}{dy} = 0, \\ & \frac{d(y - y_0)v}{dz} - \frac{d(y - y_0)w}{dy} + \frac{d(z - z_0)u}{dx} + \frac{d(z - z_0)v}{dy} + \frac{d(z - z_0)w}{dz} = 0, \\ & -\frac{d(z - z_0)v}{dz} + \frac{d(z - z_0)w}{dy} + \frac{d(y - y_0)u}{dx} + \frac{d(y - y_0)v}{dy} + \frac{d(y - y_0)w}{dz} = 0, \end{aligned}$$

qui, en y effectuant les calculs et simplifiant, reviennent aux trois équations connues

$$v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}, \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Multiplions, en effet, par $d\omega$ ces trois relations où tous les termes sont des dérivées exactes en x, y, z , et intégrons à la manière ordinaire, dans tout l'espace ω compris entre la surface σ du corps et la sphère σ' . Il viendra immédiatement, vu que, sur la sphère σ' , $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ ont les valeurs $r\alpha', r\beta', r\gamma'$:

$$(34) \quad \int_{\sigma} (x - x_0) (v\gamma - w\beta) d\sigma = r \int_{\sigma'} \alpha' (v\gamma' - w\beta') d\sigma',$$

$$(35) \quad \begin{aligned} \int_{\sigma} [(y - y_0) (v\gamma - w\beta) + (z - z_0) (u\alpha + v\beta + w\gamma)] d\sigma \\ = r \int_{\sigma'} [\beta' (v\gamma' - w\beta') + \gamma' (u\alpha' + v\beta' + w\gamma')] d\sigma', \end{aligned}$$

$$(36) \quad \begin{aligned} \int_{\sigma} [-(z - z_0) (v\gamma - w\beta) + (y - y_0) (u\alpha + v\beta + w\gamma)] d\sigma \\ = r \int_{\sigma'} [-\gamma' (v\gamma' - w\beta') + \beta' (u\alpha' + v\beta' + w\gamma')] d\sigma'. \end{aligned}$$

Ajoutons celles-ci, préalablement multipliées par $a, b, -c$; et il vient la formule cherchée

$$(37) \quad \begin{aligned} \int_{\sigma} \{ [a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)] (v\gamma - w\beta) \\ + [b(z - z_0) - c(y - y_0)] (u\alpha + v\beta + w\gamma) \} d\sigma \\ = r \int_{\sigma'} [(v\gamma' - w\beta') (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') + (b\gamma' - c\beta') (u\alpha' + v\beta' + w\gamma')] d\sigma'. \end{aligned}$$

Son premier membre, intégrale relative à la limite intérieure σ , ne dépend pas de r , tandis que le second est, au facteur constant près ρU , identique au second de (33). Ainsi, la méthode qui nous a prouvé si simplement l'égalité à zéro de l'impulsion de translation du fluide sur le solide, suivant le sens quelconque des x , n'indique pas, en général, l'annulation de son impulsion de rotation autour d'un axe quelconque.

Le produit, par ρU , du premier membre de (37) constitue, on le voit, une nouvelle expression du moment (29) considéré, dû aux pressions du fluide sur le solide animé de la vitesse constante (Ua, Ub, Uc). Cette expression, où l'on remplacera d'ailleurs la composante normale $u\alpha + v\beta + w\gamma$ de la vitesse à la surface σ du corps par sa valeur

donnée $U(a\alpha + b\beta + c\gamma)$, sera même préférable, pour le calcul, à ce que devient la formule directe (29) quand on y substitue à p sa valeur (17), qui n'est pas linéaire en u , v , w . Au contraire, les vitesses inconnues u , v , w du fluide n'entreront, dans le premier membre de (37), sous le signe $\int$, que linéairement, et par le facteur $v\gamma - w\beta$, c'est-à-dire $\gamma \frac{d\varphi}{dy} - \beta \frac{d\varphi}{dz}$. L'intégration paraît ainsi devoir être facilitée.

33. On obtient une formule assez curieuse, en ajoutant (35) et (36), multipliées respectivement par c et par b , à l'égalité, multipliée elle-même par a ,

$$\int_{\sigma} [-\varphi\alpha + (x-x_0)(u\alpha + v\beta + w\gamma)] d\sigma = r \int_{\sigma'} \alpha' \left(-\frac{\varphi}{r} + u\alpha' + v\beta' + w\gamma' \right) d\sigma',$$

qui se déduit immédiatement, par le même procédé, de la relation

$$-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d(x-x_0)u}{dx} + \frac{d(x-x_0)v}{dy} + \frac{d(x-x_0)w}{dz} = 0,$$

conséquence immédiate des deux

$$u = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Cette formule est

$$\begin{aligned} & -a \int_{\sigma} \varphi\alpha d\sigma + \int_{\sigma} \{ [a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)](u\alpha + v\beta + w\gamma) \\ & \quad - [c(y-y_0) - b(z-z_0)](w\beta - v\gamma) \} d\sigma \\ & = -a \int_{\sigma'} \varphi\alpha' d\sigma' + r \int_{\sigma'} [(a\alpha' + b\beta' + c\gamma')(u\alpha' + v\beta' + w\gamma') - (c\beta' - b\gamma')(w\beta' - v\gamma')] d\sigma'. \end{aligned}$$

Une autre formule, plus simple, résulte de l'égalité constante, quel que soit r , des deux membres de (33). Retranchons (33) de (32): il ne restera au second membre du résultat, sous le signe $\int$, que les termes non linéaires en u , v , w . Et l'on aura ainsi

$$\int_{\sigma'} (u\alpha' + v\beta' + w\gamma')(v\gamma' - w\beta') d\sigma' = 0.$$

Il viendrait deux relations analogues en $w\alpha' - u\gamma'$ et en $u\beta' - v\alpha'$.

On voit, en résumé, que tous les calculs de ce numéro et des numéros précédents avaient pour but de transformer des intégrations, se rapportant à la surface intérieure σ , en des intégrations analogues, à effectuer sur la sphère σ' , où elles peuvent être plus faciles, en raison soit de la forme simple de cette surface, soit de son rayon r susceptible de devenir infini et de faire alors évanouir u , v , w .

34. Revenons maintenant aux résultats obtenus plus haut pour la résistance totale *de translation*, exercée suivant un sens quelconque. Quelque grandes que soient les vitesses, supposées bien continues, prises par un liquide parfait indéfini que pousse un solide animé de translations rapides, sa résistance n'équivaut donc toujours qu'à une fraction constante de l'inertie actuelle de ce solide, ou ne produit sur celui-ci que l'effet d'un accroissement *constant* de sa masse.

Mais il n'existe ni incompressibilité parfaite, ni fluidité parfaite, sans compter que les vitesses effectives deviennent tourbillonnantes et discontinues à l'aval d'un solide immergé, dès que ces vitesses atteignent des valeurs un peu grandes. Et l'on conçoit que, d'une part, les *frottements*, ou d'autres forces intérieures, d'autre part les condensations ou dilatations cubiques, interviennent dans les quantités de matière d'un milieu résistant auxquelles un mobile, en se déplaçant dans ce milieu, communique des fractions déterminées de ses accélérations. Par suite, la proportion suivant laquelle la masse à mouvoir sera augmentée par ces communications de mouvement, ou suivant laquelle l'inertie du mobile se trouvera accrue, doit bien dépendre, en général, de la vitesse de ce dernier par rapport au milieu.

35. En particulier, l'entraînement de l'éther libre par un corps qui s'y meut doit, ce semble, équivaloir à la communication, de fractions déterminées des accélérations de celui-ci, à des masses d'éther d'autant plus grandes que la vitesse du corps est plus grande elle-même ⁽¹⁾. Or cela revient à dire que la résistance de l'éther produira, sur le mobile, l'effet d'une surcharge *relative* d'inertie, ou

(1) La justification de cette assertion, en tant que bien probable, sera donnée à la fin du n° 39.

d'une masse supplémentaire qui lui semblerait incorporée, croissante avec sa propre vitesse.

VII. — Pourquoi l'excédent relatif de la masse fictive sur la masse vraie reste négligeable, tant que les molécules sont massives et, les vitesses, seulement de l'ordre des vitesses planétaires ou stellaires?

36. Il y a deux raisons pour que, dans les circonstances ordinaires, cet accroissement fictif de masse soit totalement insensible.

La première consiste dans l'excessive petitesse, inimaginable, de la densité de l'éther libre, par rapport à celle des molécules pondérables, qu'il contourne, sans doute, individuellement durant leur passage; en sorte que l'éther ambiant pourrait prendre toute la vitesse même de la molécule, sans réduire d'une manière appréciable la quantité de mouvement de celle-ci. Or, de plus, l'éther ambiant ainsi dérangé par la molécule se trouve, pour ainsi dire, réduit au minimum par l'excessive ténuité de ses éléments, par ses *divisibilité* et *pénétrabilité* presque infinies, permettant à ses points matériels *directement* heurtés par la molécule de s'écarter sans ébranler notablement leurs voisins.

Aussi faudrait-il, peut-être, une matière pondérable presque aussi morcelée ou tenue que l'éther même, pour communiquer son mouvement à la totalité de l'éther qu'elle traverse.

37. La seconde raison, la plus importante peut-être et certainement corrélative à cette pénétrabilité, consiste dans l'impossibilité où est l'éther, au moins sous sa densité normale, de transmettre les ondes à vibrations longitudinales, les condensations et dilatations cubiques. Cette *mollesse* infinie de l'éther, quand il s'agit de résister, entre certaines limites, au rapprochement et à l'éloignement de ses couches, tient sans doute à ce que, malgré la ténuité incomparable de ses atomes ou points matériels, les plus proches d'entre eux sont à des distances les uns des autres excédant celles où s'exercent les plus énormes répulsions dont nous ayons connaissance, savoir, ces répulsions interatomiques ou *chimiques* qui, dans chaque molécule pondé-

nable, maintiennent à quelque distance ses atomes, rapprochés par les attractions chimiques (*affinité*) s'exerçant à des distances un peu plus grandes, et conservent ainsi à la molécule un certain volume.

Grâce à cette absence des fortes répulsions chimiques, les attractions chimiques ou interatomiques sont neutralisées surtout, dans l'éther à l'état naturel, par les répulsions *physiques* exercées de plus loin que les dimensions d'une molécule pondérable ordinaire et qui (avec les attractions *physiques* exercées de plus loin encore) constituent l'élasticité habituelle ou intermoléculaire des corps. C'est ainsi qu'on peut se figurer cette poussière atomique, qu'est l'éther, à la fois résistant aux *très petits* glissements mutuels de ses couches et indifférente à leurs petits rapprochements (¹), c'est-à-dire propre à transmettre les vibrations transversales de faible amplitude, à l'exclusion des vibrations longitudinales.

Et l'on comprend, du même coup, l'inévitable morcellement, *en molécules éparses çà et là*, de la matière *dense*; car une molécule *dense*, dont le diamètre égalerait les distances auxquelles s'exercent les fortes répulsions physiques, ferait explosion sous le *double* effort de ces répulsions (entre ses atomes éloignés) et des répulsions chimiques (entre ses atomes proches), que ne pourraient pas compenser les attractions chimiques (exercées aux distances intermédiaires).

38. On conçoit donc, par les deux raisons précédentes, que, même à des vitesses de l'ordre du dix-millième de celle de la lumière, comme est la vitesse de la Terre dans son orbite (produisant *l'aberration*), et comme sont les vitesses de presque tous les objets terrestres de nos expériences, sensiblement entraînés par la Terre, les corps puissent n'éprouver, de la part de l'éther, aucune résistance appréciable.

(¹) Voir, à ce sujet, les pages 37 et 38, 41 et 42 du Tome I de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière* (Gauthier-Villars, 1901).

VIII. — Disparition de ces raisons dans le cas des rayons ou courants cathodiques, susceptibles, dès lors, de manifester des masses fictives très supérieures aux masses vraies et variables avec la direction.

39. Mais imaginons un courant de matière pondérable, animé de vitesses beaucoup plus grandes encore que ces vitesses *planétaires* ou *stellaires*; et attribuons à sa matière une ténuité rappelant celle de l'éther. Alors les deux raisons d'extrême petitesse de la résistance disparaîtront à la fois; car les particules d'un tel courant auront *ensemble* assez de surface pour atteindre la presque totalité de l'éther qu'il traverse; et, d'autre part, cet éther pourra être, à l'avant des particules, assez refoulé ou *condensé* pour acquérir, avec une densité sensible, les énormes répulsions chimiques entre ses atomes les plus proches et, par suite, une résistance au courant, *croissante incomparablement plus vite que la première puissance de la vitesse*.

40. Or tels sont justement les caractères que présentent, dans un tube de Crookes où l'on a fait un vide presque parfait, les *rayons* ou, plutôt, les *courants* dits *cathodiques*, composés de points *deux mille* fois environ moins massifs que l'atome d'hydrogène, et dont la vitesse peut excéder, semble-t-il, jusqu'aux *neuf dixièmes* de celle de la lumière (du moins dans le cas des rayons β du radium). Il n'y a donc pas lieu d'être surpris que la résistance de l'éther y équivaille, pour ces points, à une surcharge d'inertie rendant leur masse *apparente* supérieure, même dans un très grand rapport, à leur masse *réelle*.

Et si le courant est rendu courbe par le voisinage d'un aimant, dont l'influence sur l'éther ambiant pourra être peu sensible, rien n'obligera l'éther entraîné, qui, dès lors, devra plus ou moins tendre à traverser le courant suivant une corde menée entre ses bords, à décrire des trajectoires *aussi courbées* que celles de la matière cathodique. C'est donc *principalement* (ou surtout) *suivant la tangente* à celles-ci que se fera sentir l'inertie de cet éther entraîné et *que paraîtra s'accroître la masse du courant*, conformément aux faits paradoxaux constatés, qui ont porté tant de jeunes géomètres et

physiciens à mettre en doute la généralité du principe de la constance de la masse.

Mais que de complications semble pouvoir produire la condensation de l'éther, avec l'*instabilité*, et la *tendance au morcellement* en molécules *très espacées*, que doit y amener aussitôt, comme on a pu l'entrevoir ci-dessus, l'entrée en scène des répulsions chimiques ? Peut-être toutes les théories électromagnétiques trouvent-elles place dans les phénomènes en résultant ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Ce Mémoire a été résumé dans trois Notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. CL, p. 1639 et 1721 ; t. CLI, p. 5 ; 20, 27 juin et 4 juillet 1910).