

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. BACHELIER

## Les probabilités à plusieurs variables

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 27 (1910), p. 339-360

<[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1910\\_3\\_27\\_\\_339\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__339_0)>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES PROBABILITÉS A PLUSIEURS VARIABLES,

PAR M. L. BACHELIER.



Dans la théorie des probabilités continues, on suppose une suite d'épreuves en nombre si grand que la succession de ces épreuves puisse être considérée comme continue et que chaque épreuve puisse être considérée comme un élément.

On peut assimiler chaque élément à un élément de temps et alors la transformation des probabilités dans une suite d'épreuves peut être assimilée à un phénomène continu : on est ainsi conduit à la conception du mouvement des probabilités.

Cette conception n'est qu'une image, il n'y est pas fait allusion dans l'exposition de la théorie, mais cette image a été précieuse par les rapprochements qu'elle a permis avec certaines théories de la Physique mathématique.

La définition même de la probabilité conduit, par analogie, à une sorte de loi physique : *La somme des probabilités de tous les cas possibles a toujours pour valeur un ; elle conserve constamment cette valeur.* La définition de la probabilité peut donc être assimilée à un principe de conservation.

L'étude des transformations des probabilités, pendant un temps infiniment petit, est, en réalité, l'étude d'un phénomène élémentaire ; elle a l'avantage de mettre en évidence les caractéristiques du problème que l'on considère ; ces caractéristiques peuvent être des constantes, elles peuvent dépendre explicitement du temps ; elles peuvent dépendre de l'état actuel, des états antérieurs, etc.

Un autre avantage de la division en éléments infiniment petits est la possibilité d'appliquer directement à toutes les questions les prin-

cipes du calcul des probabilités et les méthodes de l'analyse infinitésimale.

La seconde conception, qui constitue l'une des bases de la théorie des probabilités continues, est celle de l'unité du calcul des probabilités. Pour faire de cette théorie une science méthodique et rationnelle, formant une chaîne ininterrompue de déductions se suivant dans un ordre naturel et logique, il faut ramener toutes les questions à un même type afin de pouvoir les comparer.

La comparaison étant possible, les problèmes différencieront les uns des autres par des caractères particuliers, et une classification logique de ces caractères permettra d'édifier une théorie à la fois méthodique et générale.

Nous ramenons toutes les questions à un type unique en supposant toujours qu'elles se rapportent à un jeu. Lorsqu'un problème n'est relatif qu'à des probabilités, nous supposons qu'à chacune de ces probabilités corresponde un gain ou une perte; le problème proposé rentre alors dans le cas ordinaire, et il est de plus généralisé. La théorie du jeu est plus générale que les théories classiques du calcul des probabilités.

Nous imaginerons un jeu fictif, continu, tel que, s'il doit être joué  $\mu$  parties, les gains ou les pertes des joueurs soient supposés continus. Les probabilités correspondantes s'exprimeront par des fonctions continues et enfin la quantité  $\mu$  sera continue elle-même.

Lorsque nous parlerons de la  $\mu^{\text{ième}}$  et de la  $(\mu + 1)^{\text{ième}}$  partie [ou de la  $\mu^{\text{ième}}$  et de la  $(\mu + 1)^{\text{ième}}$  épreuve], il faudra entendre que dans le second cas  $\mu$  est remplacé par  $\mu + d\mu$ .

Ce que nous appellerons les *conditions du jeu pour une partie*, ce sera l'ensemble des variations possibles des gains ou des pertes des joueurs entre  $\mu$  et  $\mu + d\mu$ .

Pour bien comprendre la continuité de la quantité  $\mu$ , il suffit de la considérer comme désignant le temps; nous l'avons déjà remarqué.

Il est évident que les formules obtenues en supposant la continuité ne sont qu'approchées quand on les applique à des jeux discontinus.

*Classification des probabilités.* — Les conditions du jeu peuvent être identiques dans chaque élément  $d\mu$  ou, si l'on veut, à chaque partie; on dit alors que le jeu est uniforme ou qu'il y a *uniformité*.

Les conditions peuvent être variables d'une partie à l'autre suivant une loi donnée d'avance dépendant uniquement du rang occupé par cette partie et indépendante des faits antérieurs à cette partie. On dit alors qu'il y a *indépendance*.

Lorsque les conditions relatives à un élément  $d\mu$  ou, si l'on veut, à la  $\mu^{\text{ième}}$  partie dépendent des faits qui peuvent se produire antérieurement, on dit qu'il y a *connexité*.

On peut établir la classification en se plaçant à un second point de vue; s'il y a  $n$  joueurs, le problème dont on s'occupe peut être relatif à la détermination des gains de un, de deux, ..., de  $(n - 1)$  joueurs. On dit alors que les probabilités sont à une, deux, ...,  $(n - 1)$  variables.

Une troisième classification est également indispensable; lorsque toutes les variables peuvent prendre toutes les valeurs de  $-\infty$  à  $+\infty$ , les probabilités sont dites du *premier genre*. Lorsqu'une des variables est limitée dans un sens, les probabilités sont dites du *deuxième genre*; lorsqu'une des variables est limitée dans les deux sens, les probabilités sont du *troisième genre*.

Les probabilités sont des *genres supérieurs* quand deux ou plusieurs variables sont limitées.

Le but du présent travail est l'étude des probabilités du premier genre à un nombre quelconque de variables.

Nous résoudrons le problème suivant :

*Les joueurs  $A_1, A_2, \dots, A_n$  qui possèdent chacun une fortune infinie doivent jouer  $\mu$  parties; quelle est la probabilité pour que le joueur  $A_1$  perde la somme  $x_1$ ; le joueur  $A_2$ , la somme  $x_2$ ; ..., le joueur  $A_{n-1}$ , la somme  $x_{n-1}$ ?*

Le joueur  $A_n$  perd, dans ces conditions, la somme

$$x_n = -x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}.$$

Nous supposons que  $\mu$  varie d'une façon continue; nous pouvons, par exemple, l'assimiler au temps; c'est là, en réalité, une image que ne nécessite pas la théorie mais qui a l'avantage d'être très claire.

Nous appellerons  $\mu^{\text{ième}}$  partie l'intervalle compris entre  $\mu$  et  $\mu + d\mu$ .

Nos formules seront exactes dans l'hypothèse de la continuité de  $\mu$ ; quand nous les appliquerons à des cas où il y a discontinuité, elles ne seront qu'approchées et d'autant plus approchées que  $\mu$  sera plus grand.

Nous supposerons encore que les conditions du jeu pour une partie sont indépendantes des résultats antérieurs du jeu; alors la probabilité pour que, entre les parties  $\mu_1$  et  $\mu$ , le joueur  $A_1$  perde la somme  $x_1 - X_1$ , le joueur  $A_2$  la somme  $x_2 - X_2$ , ..., le joueur  $A_{n-1}$  la somme  $x_{n-1} - X_{n-1}$ , ne dépend que des quantités  $\mu_1$ ,  $\mu$ ,  $x_1 - X_1$ ,  $x_2 - X_2$ , ...,  $x_{n-1} - X_{n-1}$  et peut se représenter par.

$$(1) \quad f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \dots, x_{n-1} - X_{n-1}).$$

Si nous supposons que les conditions du jeu soient les mêmes à chaque partie,  $f$  ne dépendrait pas séparément de  $\mu_1$  et de  $\mu$  mais seulement de la différence  $\mu - \mu_1$ .

Nous ne ferons pas cette hypothèse.

La probabilité pour que, en  $\mu_1$  parties, le joueur  $A_1$  perde la somme  $X_1$ , le joueur  $A_2$  la somme  $X_2$ , ..., le joueur  $A_{n-1}$  la somme  $X_{n-1}$  est

$$(2) \quad f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$$

( $\mu_0$  est nul).

La probabilité pour que, en  $\mu$  parties, le joueur  $A_1$  ait perdu  $x_1$ ; le joueur  $A_2$ ,  $x_2$ ; ..., le joueur  $A_{n-1}$ ,  $x_{n-1}$  est

$$(3) \quad f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

La probabilité pour que les joueurs  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  aient perdu les sommes  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  à la  $\mu_1^{\text{ième}}$  partie et finalement les sommes  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  à la  $\mu^{\text{ième}}$  partie s'obtient, d'après le principe des probabilités composées, en multipliant la probabilité (2) par

la probabilité (1) :

$$f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \dots, x_{n-1} - X_{n-1}).$$

En sommant toutes les expressions analogues pour toutes les valeurs de  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ , on obtient, d'après le principe des probabilités totales, la probabilité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) \\ \times f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \dots, x_{n-1} - X_{n-1}) dX_1 dX_2 \dots dX_{n-1},$$

pour que finalement, en  $\mu$  parties, le joueur  $A_1$  ait perdu  $x_1$ ; le joueur  $A_2$ ,  $x_2$ ; ....

Cette probabilité s'exprime également par (3), on doit donc avoir

$$f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) \\ \times f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \dots, x_{n-1} - X_{n-1}) dX_1 dX_2 \dots dX_{n-1}.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction  $f$ , elle doit être vérifiée quels que soient  $\mu_1$  et  $\mu$ .

Si  $\mu_1$  et  $\mu$  étaient entiers, l'équation qui précède admettrait une infinité de solutions, mais  $\mu_1$  et  $\mu$  pouvant être quelconques, et en particulier  $\mu - \mu_1$  pouvant être infinitésimal, l'équation suffit pour déterminer  $f$ .

Lorsque l'intervalle  $\mu - \mu_1$  tend vers zéro, la probabilité pour que les écarts

$$x_1 - X_1 = u_1, \quad x_2 - X_2 = u_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} - X_{n-1} = u_{n-1}$$

correspondant à cet intervalle soient compris entre des limites données  $-\alpha_1, \alpha_2; -\beta_1, \beta_2; \dots; -\gamma_1, \gamma_2$ , doit tendre vers un; on doit donc avoir

$$\lim \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{-\beta_1}^{\beta_2} \dots \int_{-\gamma_1}^{\gamma_2} f(\mu_1, \mu, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) du_1 du_2 \dots du_{n-1} = 1 \\ \text{pour } \mu - \mu_1 = 0,$$

quelque petites que soient les quantités positives (et fixes),  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \gamma_2$ .

Ces deux équations de condition suffisent pour déterminer la fonction  $f$  par suite de la continuité de la variable  $\mu$ .

### Équation du mouvement des probabilités.

Nous supposons que  $\mu - \mu_1$  est un infiniment petit  $\Delta\mu$ , de sorte que  $\mu_1 = \mu - \Delta\mu$  et nous désignerons par  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  les quantités  $x_1 - X_1, x_2 - X_2, \dots, x_{n-1} - X_{n-1}$ , la première équation deviendra alors

$$\begin{aligned} & f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu_0, \mu - \Delta\mu, x_1 - u_1, x_2 - u_2, \dots, x_{n-1} - u_{n-1}) \\ & \quad \times f(\mu - \Delta\mu, \mu, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) du_1 du_2 \dots du_{n-1}. \end{aligned}$$

Développons la première fonction  $f$  par la formule de Taylor en négligeant les termes qui contiennent en facteur le carré de  $\Delta\mu$  qui est du deuxième ordre et, pour simplifier l'écriture, remplaçons par  $F$  la quantité  $f(\mu - \Delta\mu, \mu, u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ ; l'équation devient

$$\begin{aligned} & f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ &= f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F du_1 \dots du_{n-1} \\ & \quad - \Delta\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F du_1 \dots du_{n-1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_1 F du_1 \dots du_{n-1} - \\ & \quad - \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_{n-1} F du_1 \dots du_{n-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 F du_1 \dots du_{n-1} + \\ & \quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 F du_1 \dots du_{n-1} + \dots, \end{aligned}$$

plus des termes contenant des dérivées troisièmes, par exemple

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 u_2 F du_1 \dots du_{n-1}$$

et des termes contenant des dérivées d'ordres supérieurs.

On a d'abord

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F du_1 \dots du_{n-1} = 1,$$

égalité qui supprime les deux premiers termes de la dernière équation.

Le second terme du second membre de la dernière équation se réduit à

$$-\frac{\partial f}{\partial \mu} d\mu.$$

La continuité supposée de la variable  $\mu$  permet de prendre  $\Delta\mu$  aussi petit qu'on veut, de sorte que les valeurs moyennes des quantités telles que  $u_1^2, u_2$  qui multiplient les dérivées du troisième ordre soient infiniment petites.

Nous ne supposons pas que le jeu est uniforme mais nous supposons qu'il est équitable; alors les intégrales qui multiplient les dérivées premières  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots$  sont nulles et l'équation se réduit à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 F du_1 \dots du_{n-1} \\ + & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_2^2 F du_1 \dots du_{n-1} + \dots \\ + & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_{n-1}^2 F du_1 \dots du_{n-1} \\ + & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 F du_1 \dots du_{n-1} + \dots \\ + & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-2} \partial x_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_{n-2} u_{n-1} F du_1 \dots du_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier les intégrales qui figurent dans cette équation.

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_i^2 F du_1 \dots du_{n-1}$$

exprime la valeur moyenne du carré de la perte du joueur  $A_i$  dans l'intervalle  $\mu - d\mu$ ,  $\mu$  : valeur moyenne qui est une donnée du problème et qui est une des caractéristiques du jeu dans l'intervalle considéré.

La valeur moyenne du carré d'une somme de quantités indépendantes est la somme des valeurs moyennes des carrés de ses parties,



quand la valeur moyenne de chaque partie est nulle. Il en résulte que la valeur moyenne du carré de la perte du joueur  $A_i$  pour  $\mu$  parties est la somme des valeurs moyennes des carrés des pertes de ce joueur à chacune de ces parties considérée isolément.

Le double de la valeur moyenne du carré de la perte d'un joueur se nomme la *fonction d'instabilité* de son jeu (supposé équitable) parce que les gains et les pertes du joueur sont proportionnelles à la racine carrée de cette fonction.

Si  $\varphi_i(\mu)$  désigne la fonction d'instabilité relative au joueur  $A_i$  pour l'ensemble de  $\mu$  parties, la fonction d'instabilité de la  $\mu^{\text{ième}}$  partie considérée isolément est  $\varphi'(\mu) d\mu$ ;  $\varphi'(\mu)$  désignant la dérivée de  $\varphi(\mu)$ .

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} u_i u_j F du_1 \dots du_{n-1}$$

exprime la valeur moyenne du produit  $u_i u_j$  des pertes des joueurs  $A_i, A_j$  dans l'intervalle  $\mu - d\mu, \mu$  et constitue une des données du problème.

Les valeurs moyennes des produits tels que  $x_i x_j$  jouissent de la propriété d'addition, leur valeur pour l'ensemble de  $\mu$  parties est la somme des valeurs analogues pour chacune des  $\mu$  parties considérée isolément. Ce résultat a été démontré dans mon Mémoire sur la théorie des probabilités continues (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1906, p. 323).

Soit  $\frac{1}{2} \chi_{i,j}(\mu)$  la valeur moyenne de  $x_i x_j$  pour l'ensemble des  $\mu$  parties; la valeur moyenne de  $u_i u_j$  dans l'intervalle  $\mu - d\mu, \mu$  est alors la différentielle  $\frac{1}{2} \chi'_{i,j}(\mu) d\mu$ .

Si, dans l'équation finale obtenue précédemment, on remplace les valeurs moyennes par leurs expressions, on obtient l'équation aux dérivées partielles de la probabilité,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \varphi'_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{4} \varphi'_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{1}{4} \varphi'_{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2} \\ + \frac{1}{2} \chi'_{1,2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \chi'_{1,3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + \dots + \frac{1}{2} \chi'_{n-2,n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-2} \partial x_{n-1}} = \frac{\partial f}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Les  $\varphi'$  et les  $\chi'$  sont des fonctions données de  $\mu$ .

Cette équation convient encore pour le cas où le jeu n'est pas équitable à la condition de modifier le sens attribué aux lettres  $x$ ,  $\varphi$ ,  $\chi$ .

Lorsque le jeu n'est pas équitable,  $x_i$  ne désigne plus la perte du joueur  $A_i$ , mais cette perte augmentée de l'espérance mathématique  $\psi_i(\mu)$  de ce joueur.

La quantité  $\varphi_i(\mu)$  est la fonction d'instabilité du jeu de  $A_i$  : c'est, dans le cas du jeu non équitable, le double de la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes diminué du double du carré de la valeur moyenne des gains, c'est-à-dire diminué de la quantité  $2[\psi_i(\mu)]^2$ .

Lorsque le jeu n'est pas équitable,  $\chi_{i,j}(\mu)$  ne désigne plus le double de la valeur moyenne du produit des pertes des joueurs  $A_i$ ,  $A_j$ , mais le double de cette valeur moyenne diminué du double produit des espérances  $\psi_i(\mu)$ ,  $\psi_j(\mu)$  de ces joueurs. Cette quantité  $\chi_{i,j}(\mu)$  possède la propriété d'addition; la démonstration de ce théorème a été donnée dans le Mémoire précité (n° 76).

Les quantités  $x$ ,  $\varphi$ ,  $\chi$  étant ainsi définies, il suffit de considérer le cas du jeu équitable, l'équation ci-dessus convient dans tous les cas où il y a indépendance.

#### Cas d'une seule variable. Rayonnement particulière des probabilités.

Dans le cas d'une seule variable, l'équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4}{\varphi'} \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Si le jeu reste identique à lui-même,  $\varphi'$  est constant et la fonction  $f$  doit vérifier une équation de Fourier.

C'est le résultat auquel je suis parvenu autrefois en exposant ce que j'ai nommé la *théorie du rayonnement des probabilités* (consulter mon Mémoire sur la *Théorie de la spéculation* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1900).

Lorsqu'il y a deux ou trois variables l'équation des probabilités contient des dérivées secondes obliques et la loi qui régit le mouvement des probabilités est plus complexe que celle du rayonnement particulière.

## Cas général.

La probabilité pour que, en  $\mu$  parties, le joueur  $A_1$  ait perdu la somme  $x_1$ ; le joueur  $A_2$ , la somme  $x_2$ ; ...; le joueur  $A_{n-1}$ , la somme  $x_{n-1}$ , est donnée par l'expression

$$e^{-\frac{\sum a_k x_k^2 + 2 \sum b_{h,l} x_h x_l}{\Delta}} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{n-1} \sqrt{\Delta}} dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

*Telle est la formule fondamentale des probabilités à plusieurs variables.*

La lettre  $\Delta$  désigne le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & -\chi_{1,4} & \dots & \pm \chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \chi_{2,4} & \dots & \mp \chi_{2,n-1} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & -\chi_{3,4} & \dots & \pm \chi_{3,n-1} \\ -\chi_{4,1} & \chi_{4,2} & -\chi_{4,3} & \varphi_4 & \dots & \mp \chi_{4,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm \chi_{n-1,1} & \mp \chi_{n-1,2} & \pm \chi_{n-1,3} & \mp \chi_{n-1,4} & \dots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Dans les quantités  $\chi$  on peut permuter les indices; nous avons écrit, par exemple, pour conserver la symétrie,  $\chi_{2,1}$  au lieu de  $\chi_{1,2}$ .

La somme  $\sum a_k x_k^2$  désigne la quantité

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2.$$

La quantité  $a_k$  s'obtient en supprimant, dans le déterminant  $\Delta$ , la  $k^{\text{ième}}$  ligne et la  $k^{\text{ième}}$  colonne.

La somme  $\sum b_{h,l} x_h x_l$  désigne la quantité

$$b_{1,2} x_1 x_2 + b_{1,3} x_1 x_3 + \dots + b_{1,n-1} x_1 x_{n-1} + b_{2,3} x_2 x_3 + \dots + b_{n-2,n-1} x_{n-2} x_{n-1}.$$

La quantité  $b_{h,l}$  s'obtient en supprimant, dans le déterminant  $\Delta$ , la  $h^{\text{ième}}$  ligne et la  $l^{\text{ième}}$  colonne.

Il faut prouver que la formule vérifie l'équation aux dérivées par-

tielles

$$\frac{1}{4} \sum \varphi'_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \sum \chi'_{1,2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Posons

$$f = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1} \sqrt{\Delta}} = \frac{e^{-\frac{\sum a_k x_k^2 + 2 \sum b_{h,l} x_h x_l}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1} \sqrt{\Delta}},$$

où

$$\lambda = a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 + 2 b_{1,2} x_1 x_2 + \dots + 2 b_{n-2,n-1} x_{n-2} x_{n-1};$$

l'équation à vérifier devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[ \varphi'_1 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \right)^2 + \varphi'_2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \varphi'_{n-1} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ \chi'_{1,2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \chi'_{1,3} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} + \dots + \chi'_{n-2,n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-2}} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}} \right] \\ & - \frac{1}{2} \Delta [a_1 \varphi'_1 + a_2 \varphi'_2 + \dots + a_{n-1} \varphi'_{n-1} \\ & \quad + 2 \chi'_{1,2} b_{1,2} + 2 \chi'_{1,3} b_{1,3} + \dots + 2 \chi'_{n-2,n-1} b_{n-2,n-1}] \\ & = -\frac{1}{2} \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} - \Delta \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Les deux premiers crochets et les deux derniers termes du second membre contiennent des expressions en  $x_1^2, \dots, x_{n-1}^2, x_1 x_2, \dots$

Au contraire, le dernier crochet du premier membre et le premier terme du second dépendent exclusivement de  $\mu$ .

Pour démontrer la formule, il faut :

1° Prouver que les termes indépendants des  $x$  sont égaux dans les deux membres;

2° Prouver que les coefficients d'un terme quelconque en  $x$ , par exemple du terme en  $x_i^2$ , sont identiques dans les deux membres.

La première condition consiste à vérifier qu'on a

$$(1) \quad a_1 \varphi'_1 + a_2 \varphi'_2 + \dots + a_{n-1} \varphi'_{n-1} + 2 [b_{1,2} \chi'_{1,2} + b_{1,3} \chi'_{1,3} + \dots + b_{n-2,n-1} \chi'_{n-2,n-1}] = \frac{\partial \Delta}{\partial \mu}.$$

D'après la règle de la dérivation des déterminants

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & -\chi'_{1,2} & \chi'_{1,3} & \dots & \pm \chi'_{1,n-1} \\ -\chi'_{2,1} & \varphi'_2 & -\chi'_{2,3} & \dots & \mp \chi'_{2,n-1} \\ \chi'_{3,1} & -\chi'_{3,2} & \varphi'_3 & \dots & \pm \chi'_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm \chi'_{n-1,1} & \mp \chi'_{n-1,2} & \pm \chi'_{n-1,3} & \dots & \varphi'_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \dots & \pm \chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \dots & \mp \chi_{2,n-1} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & \dots & \pm \chi_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mp \chi_{n-1,1} & \mp \chi_{n-1,2} & \pm \chi_{n-1,3} & \dots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \dots & \pm \chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \dots & \mp \chi_{2,n-1} \\ \chi'_{3,1} & -\chi'_{3,2} & \varphi'_3 & \dots & \pm \chi'_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm \chi'_{n-1,1} & \mp \chi'_{n-1,2} & \pm \chi'_{n-1,3} & \dots & \varphi'_{n-1} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \dots & \chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \dots & \chi_{2,n-2} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & \dots & \chi_{3,n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm \chi'_{n-1,1} & \mp \chi'_{n-1,2} & \pm \chi'_{n-1,3} & \dots & \varphi'_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant a pour valeur, d'après la définition des quantités  $a$  et  $b$ ,

$$a_1 \varphi'_1 + b_{1,2} \chi'_{1,2} + b_{1,3} \chi'_{1,3} + b_{1,4} \chi'_{1,4} + \dots + b_{1,n-1} \chi'_{1,n-1}.$$

Le second déterminant a pour valeur

$$b_{2,1} \chi'_{2,1} + a_2 \varphi'_2 + b_{2,3} \chi'_{2,3} + \dots + b_{2,n-1} \chi'_{2,n-1};$$

le troisième a pour valeur

$$b_{3,1} \chi'_{3,1} + b_{3,2} \chi'_{3,2} + a_3 \varphi'_3 + \dots + b_{3,n-1} \chi'_{3,n-1};$$

le  $(n-1)^{\text{ième}}$  a pour valeur

$$b_{n-1,1} \chi'_{n-1,1} + b_{n-1,2} \chi'_{n-1,2} + b_{n-1,3} \chi'_{n-1,3} + \dots + a_{n-1} \varphi'_{n-1}.$$

Si l'on ajoute ces quantités, on retrouve le premier membre, l'équation (1) est donc identiquement satisfaite.

Occupons-nous de la seconde condition : l'identité des termes indépendants des variables  $x$  étant reconnue, l'équation aux dérivées partielles se réduit à

$$\frac{1}{4} \left[ \varphi'_1 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \right)^2 + \varphi'_2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \varphi'_{n-1} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \lambda'_{1,2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \lambda'_{1,3} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} + \dots + \lambda'_{n-2,n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-2}} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}} \right] = -\Delta \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \mu}.$$

Nous devons prouver que les termes en  $x_i^2$  sont identiques dans les deux membres.

En ne conservant que ces coefficients, en remplaçant  $\frac{\partial \Delta}{\partial \mu}$  par sa valeur (1) et en supprimant les termes communs, l'identité à prouver se réduit à

$$(2) \quad a'_1 = \left( \varphi'_2 \frac{a_1 a_2 - b_{2,1}^2}{\Delta} + \varphi'_3 \frac{a_1 a_3 - b_{3,1}^2}{\Delta} + \dots + \varphi'_{n-1} \frac{a_1 a_{n-1} - b_{n-1,1}^2}{\Delta} \right) + 2 \left[ \lambda'_{2,3} \frac{a_1 b_{2,3} - b_{2,1} b_{3,1}}{\Delta} + \lambda'_{2,4} \frac{a_1 b_{2,4} - b_{2,1} b_{4,1}}{\Delta} + \dots + \lambda'_{n-2,n-1} \frac{a_1 b_{n-2,n-1} - b_{n-1,1} b_{n-2,1}}{\Delta} \right].$$

Si l'on intègre  $f$  par rapport à  $x_1$  entre  $-\infty$  et  $+\infty$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\sum a_k x_k^2 + 2 \sum b_{h,l} x_h x_l}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1} \sqrt{\Delta}} dx_2 \dots dx_{n-1} dx_1,$$

on obtient l'expression F analogue à  $f$  mais relative à  $n-2$  variables,  $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ .

Cette intégration s'effectue par la formule connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(m_1 x^2 + m_2 x + m_3)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m_1}} e^{-\frac{m_2^2 - 4 m_1 m_3}{4 m_1}},$$

on obtient ainsi

$$F = \frac{e^{-\frac{\sum \frac{a_k a_l - b_{k,l}^2}{\Delta} x_k^2 + 2 \sum \frac{b_{h,l} a_l - b_{h,1} b_{l,1}}{\Delta} x_h x_l}{a_1}}{(\sqrt{\pi})^{n-2} \sqrt{a_1}} dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1}$$

[ $k, h, l$  prennent les valeurs 2, 3, 4, ...,  $(n-1)$ ].

Cette formule est analogue à celle qui exprime  $f$  mais elle est relative à  $(n - 2)$  variables.

L'équation (2) est, relativement à  $F$ , ce que l'équation (1) est relativement à  $f$ , c'est-à-dire qu'elle est identique.

Ainsi la quantité  $x_1^2$  a le même coefficient dans les deux membres de l'équation aux dérivées partielles. Cette équation est donc satisfaite et la probabilité est bien exprimée par la formule que nous avons fait connaître.

Lorsque le jeu est uniforme, c'est-à-dire lorsque les parties successives sont identiques, la formule générale se réduit; on a

$$\varphi_1 = \mu \varphi'_1, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} = \mu \varphi'_{n-1}, \quad \gamma_{1,2} = \mu \gamma'_{1,2}, \quad \dots,$$

$\varphi'_1, \dots, \varphi'_{n-1}, \gamma'_{1,2} \dots$  sont ici des constantes.

La quantité  $\mu$  peut alors être mise en facteur dans les déterminants et la probabilité pour que, en  $\mu$  parties, le joueur  $A_1$  ait perdu la somme  $x_1$ ; le joueur  $A_2$ , la somme  $x_2$ ; ...; le joueur  $A_{n-1}$ , la somme  $x_{n-1}$ , est donnée par l'expression

$$\frac{e^{-\frac{\sum a_k x_k^2 + 2 \sum b_{h,l} x_h x_l}{\mu \Delta'}}}{(\sqrt{\pi \mu})^{n-1} \sqrt{\Delta'}} dx_1 \dots dx_{n-1},$$

$\Delta'$  étant le déterminant  $\Delta$  dont toutes les lettres sont accentuées; les coefficients  $a$  et  $b$  se déduisent de  $\Delta'$  comme précédemment ils se déduisaient de  $\Delta$ .

#### Application à la théorie des épreuves répétées.

A chaque épreuve,  $n$  événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  peuvent se produire et s'excluent mutuellement; la probabilité de l'événement  $A_1$  est  $p_{1,1}$  à la première épreuve,  $p_{1,2}$  à la deuxième, ...,  $p_{1,\mu}$  à la  $\mu^{\text{ième}}$ ; la probabilité de l'événement  $A_2$  est  $p_{2,1}$  à la première épreuve,  $p_{2,2}$  à la deuxième, ...,  $p_{2,\mu}$  à la  $\mu^{\text{ième}}$ ; ...; la probabilité de l'événement  $A_{n-1}$  est  $p_{n-1,1}$  à la première épreuve,  $p_{n-1,2}$  à la deuxième, ...,  $p_{n-1,\mu}$  à la  $\mu^{\text{ième}}$ .





l'écart  $x_2$  diminue de  $p_{2,\mu}$  et le produit des écarts augmente de la quantité

$$x_2(1 - p_{1,\mu}) - x_1 p_{2,\mu} - p_{2,\mu} + p_{1,\mu} p_{2,\mu}.$$

Il y a de même probabilité  $p_{2,\mu}$  pour que l'événement  $A_2$  se produise ; alors l'écart  $x_1$  diminue de la quantité  $p_{1,\mu}$ , l'écart  $x_2$  augmente de  $(1 - p_{2,\mu})$  et le produit des écarts augmente de la quantité

$$x_1(1 - p_{2,\mu}) - x_2 p_{1,\mu} - p_{1,\mu} + p_{1,\mu} p_{2,\mu}.$$

Il y a enfin probabilité  $1 - p_{1,\mu} - p_{2,\mu}$  pour que les événements  $A_1$  et  $A_2$  ne se produisent pas, alors les écarts diminuent de  $p_{1,\mu}$ ,  $p_{2,\mu}$  respectivement et leur produit augmente de la quantité

$$-x_1 p_{2,\mu} - x_2 p_{1,\mu} + p_{1,\mu} p_{2,\mu}.$$

A la  $\mu^{\text{ième}}$  épreuve, le produit des écarts pour  $A_1$  et  $A_2$  augmente donc en moyenne de la quantité

$$\begin{aligned} & p_{1,\mu} [x_2(1 - p_{1,\mu}) - x_1 p_{2,\mu} - p_{2,\mu} + p_{1,\mu} p_{2,\mu}] \\ & + p_{2,\mu} [x_1(1 - p_{2,\mu}) - x_2 p_{1,\mu} - p_{1,\mu} + p_{1,\mu} p_{2,\mu}] \\ & + (1 - p_{1,\mu} - p_{2,\mu}) [-x_1 p_{2,\mu} - x_2 p_{1,\mu} + p_{1,\mu} p_{2,\mu}] = -p_{1,\mu} p_{2,\mu}. \end{aligned}$$

La valeur moyenne des produits jouissant de la propriété d'addition, la valeur moyenne du produit des écarts  $x_1$ ,  $x_2$  pour les  $\mu$  épreuves est

$$-\sum_{i=1}^{i=\mu} p_{1,i} p_{2,i}.$$

La fonction  $\chi_{1,2}$  relative au jeu de  $B_1$  et  $B_2$  a donc pour valeur

$$\chi_{1,2} = -2 \sum_{i=1}^{i=\mu} p_{1,i} p_{2,i}.$$

Connaissant les fonctions  $\varphi$  et  $\chi$ , il suffit, pour résoudre le problème, d'appliquer la formule générale; la probabilité pour que les joueurs  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  perdent respectivement les sommes  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts aient pour valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{\sum c_k x_k^2 + 2 \sum g_{h,l} x_h x_l}{2M}}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1} \sqrt{M}} dx_1 \dots dx_{n-1},$$

M désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix}
 \sum p_{1,i}(1-p_{1,i}) & \sum p_{1,i}p_{2,i} & -\sum p_{1,i}p_{3,i} & \sum p_{1,i}p_{4,i} & -\sum p_{1,i}p_{5,i} & \dots \pm \sum p_{1,i}p_{n-1,i} \\
 \sum p_{2,i}p_{1,i} & \sum p_{2,i}(1-p_{2,i}) & \sum p_{2,i}p_{3,i} & -\sum p_{2,i}p_{4,i} & \sum p_{2,i}p_{5,i} & \dots \mp \sum p_{2,i}p_{n-1,i} \\
 -\sum p_{3,i}p_{1,i} & \sum p_{3,i}p_{2,i} & \sum p_{3,i}(1-p_{3,i}) & \sum p_{3,i}p_{4,i} & -\sum p_{3,i}p_{5,i} & \dots \pm \sum p_{3,i}p_{n-1,i} \\
 \sum p_{4,i}p_{1,i} & -\sum p_{4,i}p_{2,i} & \sum p_{4,i}p_{3,i} & \sum p_{4,i}(1-p_{4,i}) & \sum p_{4,i}p_{5,i} & \dots \mp \sum p_{4,i}p_{n-1,i} \\
 -\sum p_{5,i}p_{1,i} & \sum p_{5,i}p_{2,i} & -\sum p_{5,i}p_{3,i} & \sum p_{5,i}p_{4,i} & \sum p_{5,i}(1-p_{5,i}) & \dots \pm \sum p_{5,i}p_{n-1,i} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \pm \sum p_{n-1,i}p_{1,i} & \mp \sum p_{n-1,i}p_{2,i} & \pm \sum p_{n-1,i}p_{3,i} & \mp \sum p_{n-1,i}p_{4,i} & \sum p_{n-1,i}p_{5,i} & \dots \sum p_{n-1,i}(1-p_{n-1,i})
 \end{vmatrix}$$

Les sommes s'étendent à toutes les valeurs 1, 2, ...,  $\mu$  de  $i$ .

La somme  $\sum c_k x_k^2$  désigne la quantité

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_{n-1} x_{n-1}^2.$$

La quantité  $C_k$  s'obtient en supprimant dans le déterminant M la  $k^{\text{ième}}$  ligne et la  $k^{\text{ième}}$  colonne.

La somme  $\sum g_{h,l} x_h x_l$  désigne la quantité

$$g_{1,2} x_1 x_2 + g_{1,3} x_1 x_3 + \dots + g_{1,n-1} x_1 x_{n-1} + g_{2,3} x_2 x_3 + \dots + g_{n-2,n-1} x_{n-2} x_{n-1}.$$

La quantité  $g_{h,l}$  s'obtient en supprimant dans le déterminant M la  $h^{\text{ième}}$  ligne et la  $l^{\text{ième}}$  colonne.

Lorsque les  $\mu$  épreuves sont identiques, la formule précédente se simplifie; le déterminant M a pour valeur

$$M = \mu^{n-1} p_1 p_2 \dots p_{n-1} (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{n-1}),$$

ou, en désignant par  $p_n$  la probabilité de l'événement  $A_n$ ,

$$M = \mu^{n-1} p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n.$$

Le déterminant  $C_k$  se réduit à

$$C_k = \mu^{n-2} p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n \frac{p_k + p_n}{p_k p_n}.$$

Tous les déterminants  $g$  sont égaux, leur valeur est

$$g = \mu^{n-2} \frac{p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n}{p_n}.$$

La probabilité pour que les écarts soient  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  en  $\mu$  épreuves est donc

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu} \left[ \frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + \dots + 2x_{n-2} x_{n-1}}{p_n} \right]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1} \sqrt{p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n}} dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

On peut mettre cette expression sous une forme plus symétrique en introduisant l'écart  $x_n$  qui correspond à l'événement  $A_n$ . De l'égalité

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = -x_n$$

on déduit

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + \dots + 2x_{n-2} x_{n-1} = x_n^2$$

et l'expression de la probabilité devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu} \left[ \frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}} + \frac{x_n^2}{p_n} \right]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1} \sqrt{p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n}};$$

sous cette forme on peut l'obtenir par une autre méthode. [Consulter mon *Étude sur les probabilités des causes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908).]

#### Application à la théorie des probabilités mêlées.

A chaque épreuve, trois événements  $A_1, A_2, A_3$  peuvent se produire : la probabilité pour que l'événement  $A_1$  se produise seul est  $p_1$ , la probabilité pour que l'événement  $A_2$  se produise seul est  $p_2$ , la probabilité pour que l'événement  $A_3$  se produise seul est  $p_3$ . La probabilité pour que les événements  $A_1$  et  $A_2$  se produisent simultanément est  $q_3$ , la probabilité pour que les événements  $A_1$  et  $A_3$  se produisent simultanément est  $q_2$ , la probabilité pour que les événements

$A_2$  et  $A_3$  se produisent simultanément est  $q_1$ . La probabilité pour que les trois événements  $A_1, A_2, A_3$  se produisent simultanément est  $r$  et il y a probabilité  $t = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - q_1 - q_2 - q_3 - r$  pour qu'aucun des événements ne se produise.

La probabilité pour que l'événement  $A_1$  se produise à une épreuve est donc

$$p_1 + q_2 + q_3 + r = \varpi_1;$$

la probabilité pour que l'événement  $A_2$  se produise est

$$p_2 + q_1 + q_3 + r = \varpi_2;$$

la probabilité pour que l'événement  $A_3$  se produise est

$$p_3 + q_2 + q_1 + r = \varpi_3.$$

Si, sur un grand nombre  $\mu$  d'épreuves, l'événement  $A_1$  s'est produit  $\mu\varpi_1 + x_1$  fois; l'événement  $A_2$ ,  $\mu\varpi_2 + x_2$  fois; l'événement  $A_3$ ,  $\mu\varpi_3 + x_3$  fois, on dit que les *écarts* sont  $x_1, x_2, x_3$ .

*Quelle est la probabilité pour que les écarts soient  $x_1, x_2, x_3$  en  $\mu$  épreuves?*

Supposons que quatre joueurs  $B_1, B_2, B_3, B_4$  jouent aux conditions suivantes : les joueurs  $B_1, B_2, B_3$  perdent des sommes égales à  $x_1, x_2, x_3$ ; le jeu du quatrième joueur  $B_4$  est défini par l'égalité

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

le joueur  $B_4$  perd la somme  $x_4$ .

Le jeu de  $B_4$  est déterminé; supposons par exemple que, à une épreuve, les événements  $A_2$  et  $A_3$  se produisent simultanément (événement qui a pour probabilité  $q_1$ ); le joueur  $B_2$  perd alors l'augmentation de l'écart  $x_2$ , c'est-à-dire la somme  $(1 - \varpi_2)$ ; le joueur  $B_3$  perd de même la somme  $(1 - \varpi_3)$ ; le joueur  $B_1$  gagne la somme  $\varpi_1$ ; la perte du joueur  $B_4$  pour cette épreuve est la quantité  $x_4$  définie par l'égalité

$$(1 - \varpi_2) + (1 - \varpi_3) - \varpi_1 + x_4 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x_4 = \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 - 2.$$

Le joueur  $B_4$  a donc à chaque épreuve (ou à chaque partie) proba-

bilité  $q_1$  de perdre la somme  $(\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 - 2)$ . Le jeu de  $B_4$  se définirait de même pour chacune des autres éventualités auxquelles correspondent les probabilités  $p_1, p_2, p_3, q_2, q_3, r, t$ .

Le jeu de  $B_4$  est équitable en même temps que celui des joueurs  $B_1, B_2, B_3$ .

La question proposée revient à chercher la probabilité pour que, en  $\mu$  parties, les joueurs  $B_1, B_2, B_3$  perdent les sommes  $x_1, x_2, x_3$ .

Notre formule générale (dans le cas du jeu uniforme) résout le problème : il suffit de chercher l'expression des quantités  $\varphi'$  et  $\chi'$ .

Déterminons par exemple la valeur de  $\varphi'_1$ . A une épreuve quelconque il y a probabilité  $\varpi_1$  pour que l'événement  $A_1$  se produise et par suite pour que  $x_1$  augmente de la quantité  $(1 - \varpi_1)$ ; il y a probabilité  $(1 - \varpi_1)$  pour que l'événement  $A_1$  ne se produise pas et par suite pour que  $x_1$  diminue de  $\varpi_1$ .

Le jeu de  $B_1$  est donc équitable; la fonction d'instabilité est, par définition,

$$\varphi'_1 = 2[\varpi_1(1 - \varpi_1)^2 + (1 - \varpi_1)\varpi_1^2] = 2\varpi_1(1 - \varpi_1).$$

Cherchons maintenant la valeur de  $\chi'_{1,2}$  : supposons que les écarts soient  $x_1$  et  $x_2$  et qu'une nouvelle épreuve ait lieu.

A cette nouvelle épreuve il y a probabilité  $p_1$  pour que  $A_1$  se produise seul; alors  $x_1$  augmente de  $(1 - \varpi_1)$ ;  $x_2$  diminue de  $\varpi_2$  et le produit des écarts augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1x_2 - \varpi_2x_1 - \varpi_2 + x_2.$$

Il y a de même probabilité  $p_2$  pour que  $A_2$  se produise seul; alors  $x_1$  diminue de  $\varpi_1$ ,  $x_2$  augmente de  $(1 - \varpi_2)$  et le produit des écarts augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2x_1 - \varpi_1x_2 - \varpi_1 + x_1.$$

Il y a probabilité  $(p_3 + t)$  pour que les événements  $A_1$  et  $A_2$  ne se produisent ni l'un ni l'autre; alors  $x_1$  diminue de  $\varpi_1$ ,  $x_2$  diminue de  $\varpi_2$  et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1x_2 - \varpi_2x_1.$$

Il y a probabilité  $q_1$  pour que  $A_2$  et  $A_3$  se produisent simultanément, alors  $x_1$  diminue de  $\varpi_1$ ,  $x_2$  augmente de  $(1 - \varpi_2)$  et le produit

augmente de la quantité

$$\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1.$$

Il y a probabilité  $q_2$  pour que  $A_1$  et  $A_3$  se produisent simultanément, alors  $x_1$  augmente de  $(1 - \varpi_1)$ ,  $x_2$  diminue de  $\varpi_2$  et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2.$$

Il y a probabilité  $(q_3 + r)$  pour que  $A_1$  et  $A_2$  se produisent simultanément, alors  $x_1$  augmente de  $(1 - \varpi_1)$ ,  $x_2$  augmente de  $(1 - \varpi_2)$  et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 - \varpi_2 + x_1 + x_2 + 1.$$

Le produit  $x_1 x_2$  augmente donc, en moyenne, à chaque épreuve, de la quantité

$$\begin{aligned} & p_1(\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2) \\ + & p_2(\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1) \\ + & (p_3 + r)(\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1) \\ + & q_1(\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1) \\ + & q_2(\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2) \\ + & (q_3 + r)(\varpi_1 \varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 - \varpi_2 + x_1 + x_2 + 1) = -\varpi_1 \varpi_2 + q_3 + r. \end{aligned}$$

On a donc, par définition,

$$\chi'_{1,2} = -2\varpi_1 \varpi_2 + 2(q_3 + r).$$

Pour résoudre le problème proposé, il suffit d'appliquer la formule générale. La probabilité pour que, en  $\mu$  parties, les joueurs  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  perdent respectivement les sommes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts soient  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  en  $\mu$  épreuves, est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + 2g_{1,2} x_1 x_2 + 2g_{1,3} x_1 x_3 + 2g_{2,3} x_2 x_3}{2\mu M}}}{(\sqrt{2\pi\mu})^3 \sqrt{M}} dx_1 dx_2 dx_3,$$

M désignant le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} \varpi_1(1 - \varpi_1) & \varpi_1 \varpi_2 - q_3 - r & -\varpi_1 \varpi_3 + q_2 + r \\ \varpi_2 \varpi_1 - q_3 - r & \varpi_2(1 - \varpi_2) & \varpi_2 \varpi_3 - q_1 - r \\ -\varpi_3 \varpi_1 + q_2 + r & \varpi_3 \varpi_2 - q_1 - r & \varpi_3(1 - \varpi_3) \end{vmatrix},$$

$C_1$  est le déterminant obtenu en supprimant dans  $M$  la première ligne et la première colonne;  $C_2$  s'obtient en supprimant la deuxième ligne et la deuxième colonne;  $C_3$ , en supprimant la troisième ligne et la troisième colonne.

$g_{1,2}$  s'obtient en supprimant dans le déterminant  $M$  la première ligne et la deuxième colonne;  $g_{1,3}$  s'obtient en supprimant la première ligne et la troisième colonne;  $g_{2,3}$  en supprimant la deuxième ligne et la troisième colonne.

Pour obtenir des formules simples nous avons résolu le problème des probabilités mêlées en supposant l'uniformité et en considérant seulement le cas de trois variables; la méthode employée est absolument générale et s'applique à tous les cas.

Si  $n$  événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont possibles, ces événements ne s'excluant pas et les probabilités différant à chaque épreuve, on forme comme précédemment la probabilité totale  $\varpi_{1,1}$  pour que l'événement  $A_1$  se produise à la première épreuve, la probabilité totale  $\varpi_{1,2}$  pour qu'il se produise à la deuxième, ..., la probabilité totale  $\varpi_{1,\mu}$  pour qu'il se produise à la  $\mu^{\text{ième}}$ .

On forme de même les probabilités totales  $\varpi_{2,1}, \varpi_{2,2}, \dots, \varpi_{2,\mu}$  pour que l'événement  $A_2$  se produise à la première, la deuxième, ..., la  $\mu^{\text{ième}}$  épreuve et les probabilités analogues pour les événements  $A_3, \dots, A_n$ .

Si, en  $\mu$  épreuves, l'événement  $A_1$  se produit

$$\varpi_{1,1} + \varpi_{1,2} + \dots + \varpi_{1,\mu} + x_1 \text{ fois;}$$

l'événement  $A_2$ ,  $\varpi_{2,1} + \varpi_{2,2} + \dots + \varpi_{2,\mu} + x_2$  fois; ...; l'événement  $A_n$ ,  $\varpi_{n,1} + \varpi_{n,2} + \dots + \varpi_{n,\mu} + x_n$  fois, on dit que les *écarts* sont  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Assimilant les écarts à des pertes à un jeu, la question qui consiste à chercher la probabilité d'écarts donnés n'est plus qu'un cas particulier du problème général que nous avons résolu.

Toutes les questions analogues peuvent ainsi être résolues quelle que soit la complication des données.