L. Bachelier

Les probabilités à plusieurs variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 27 (1910), p. 339-360
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__339_0>

LES PROBABILITÉS A PLUSIEURS VARIABLES,

PAR M. L. BACHELIER.

Dans la théorie des probabilités continues, on suppose une suite d'épreuves en nombre si grand que la succession de ces épreuves puisse être considérée comme continue et que chaque épreuve puisse être considérée comme un élément.

On peut assimiler chaque élément à un élément de temps et alors la transformation des probabilités dans une suite d'épreuves peut être assimilée à un phénomène continu : on est ainsi conduit à la conception du mouvement des probabilités.

Cette conception n'est qu'une image, il n'y est pas fait allusion dans l'exposition de la théorie, mais cette image a été précieuse par les rapprochements qu'elle a permis avec certaines théories de la Physique mathématique.

La définition même de la probabilité conduit, par analogie, à une sorte de loi physique : *La somme des probabilités de tous les cas possibles a toujours pour valeur* un ; *elle conserve constamment cette valeur.* La définition de la probabilité peut donc être assimilée à un principe de conservation.

L'étude des transformations des probabilités, pendant un temps infiniment petit, est, en réalité, l'étude d'un phénomène élémentaire ; elle a l'avantage de mettre en évidence les caractéristiques du problème que l'on considère ; ces caractéristiques peuvent être des constantes, elles peuvent dépendre explicitement du temps ; elles peuvent dépendre de l'état actuel, des états antérieurs, etc.

Un autre avantage de la division en éléments infiniment petits est la possibilité d'appliquer directement à toutes les questions les principes du calcul des probabilités et les méthodes de l'analyse infinitésimale.

La seconde conception, qui constitue l'une des bases de la théorie des probabilités continues, est celle de l'unité du calcul des probabilités. Pour faire de cette théorie une science méthodique et rationnelle, formant une chaîne ininterrompue de déductions se suivant dans un ordre naturel et logique, il faut ramener toutes les questions à un même type afin de pouvoir les comparer.

La comparaison étant possible, les problèmes différeront les uns des autres par des caractères particuliers, et une classification logique de ces caractères permettra d'édifier une théorie à la fois méthodique et générale.

Nous ramenons toutes les questions à un type unique en supposant toujours qu'elles se rapportent à un jeu. Lorsqu'un problème n'est relatif qu'à des probabilités, nous supposons qu'à chacune de ces probabilités corresponde un gain ou une perte; le problème proposé rentre alors dans le cas ordinaire, et il est de plus généralisé. La théorie du jeu est plus générale que les théories classiques du calcul des probabilités.

Nous imaginerons un jeu fictif, continu, tel que, s'il doit être joué μ parties, les gains ou les pertes des joueurs soient supposés continus. Les probabilités correspondantes s'exprimeront par des fonctions continues et enfin la quantité μ sera continue elle-même.

Lorsque nous parlerons de la $\mu^{\text{ième}}$ et de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ partie [ou de la $\mu^{\text{ième}}$ et de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ épreuve], il faudra entendre que dans le second cas μ est remplacé par $\mu + d\mu$.

Ce que nous appellerons les *conditions du jeu pour une partie*, ce sera l'ensemble des variations possibles des gains ou des pertes des joueurs entre μ et $\mu + d\mu$.

Pour bien comprendre la continuité de la quantité μ, il suffit de la considérer comme désignant le temps; nous l'avons déjà remarqué.

Il est évident que les formules obtenues en supposant la continuité ne sont qu'approchées quand on les applique à des jeux discontinus.

Classification des probabilités. — Les conditions du jeu peuvent être identiques dans chaque élément $d\mu$ ou, si l'on veut, à chaque partie; on dit alors que le jeu est uniforme ou qu'il y a *uniformité*.

Les conditions peuvent être variables d'une partie à l'autre suivant une loi donnée d'avance dépendant uniquement du rang occupé par cette partie et indépendante des faits antérieurs à cette partie. On dit alors qu'il y a *indépendance*.

Lorsque les conditions relatives à un élément $d\mu$ ou, si l'on veut, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie dépendent des faits qui peuvent se produire antérieurement, on dit qu'il y a *connexité*.

On peut établir la classification en se plaçant à un second point de vue; s'il y a n joueurs, le problème dont on s'occupe peut être relatif à la détermination des gains de un, de deux,..., de $(n-1)$ joueurs. On dit alors que les probabilités sont à une, deux,..., $(n-1)$ variables.

Une troisième classification est également indispensable; lorsque toutes les variables peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, les probabilités sont dites du *premier genre*. Lorsqu'une des variables est limitée dans un sens, les probabilités sont dites du *deuxième genre;* lorsqu'une des variables est limitée dans les deux sens, les probabilités sont du *troisième genre*.

Les probabilités sont des *genres supérieurs* quand deux ou plusieurs variables sont limitées.

Le but du présent travail est l'étude des probabilités du premier genre à un nombre quelconque de variables.

Nous résoudrons le problème suivant :

Les joueurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *qui possèdent chacun une fortune infinie doivent jouer* μ *parties; quelle est la probabilité pour que le joueur* A_1 *perde la somme* x_1; *le joueur* A_2, *la somme* x_2; ..., *le joueur* A_{n-1}, *la somme* x_{n-1} ?

Le joueur A_n perd, dans ces conditions, la somme

$$x_n = -x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}.$$

Nous supposons que μ varie d'une façon continue; nous pouvons, par exemple, l'assimiler au temps; c'est là, en réalité, une image que ne nécessite pas la théorie mais qui a l'avantage d'être très claire.

Nous appellerons $\mu^{\text{ième}}$ partie l'intervalle compris entre μ et $\mu + d\mu$.

Nos formules seront exactes dans l'hypothèse de la continuité de μ; quand nous les appliquerons à des cas où il y a discontinuité, elles ne seront qu'approchées et d'autant plus approchées que μ sera plus grand.

Nous supposerons encore que les conditions du jeu pour une partie sont indépendantes des résultats antérieurs du jeu; alors la probabilité pour que, entre les parties μ_1 et μ, le joueur A_1 perde la somme $x_1 - X_1$, le joueur A_2 la somme $x_2 - X_2$, ..., le joueur A_{n-1} la somme $x_{n-1} - X_{n-1}$, ne dépend que des quantités μ_1, μ, $x_1 - X_1$, $x_2 - X_2$, ..., $x_{n-1} - X_{n-1}$ et peut se représenter par

$$f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1}). \tag{1}$$

Si nous supposions que les conditions du jeu soient les mêmes à chaque partie, f ne dépendrait pas séparément de μ_1 et de μ mais seulement de la différence $\mu - \mu_1$.

Nous ne ferons pas cette hypothèse.

La probabilité pour que, en μ_1 parties, le joueur A_1 perde la somme X_1, le joueur A_2 la somme X_2, ..., le joueur A_{n-1} la somme X_{n-1} est

$$f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \tag{2}$$

(μ_0 est nul).

La probabilité pour que, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu x_1; le joueur A_2, x_2; ..., le joueur A_{n-1}, x_{n-1} est

$$f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{3}$$

La probabilité pour que les joueurs A_1, A_2, ..., A_{n-1} aient perdu les sommes X_1, X_2, ..., X_{n-1} à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie et finalement les sommes x_1, x_2, ..., x_{n-1} à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'obtient, d'après le principe des probabilités composées, en multipliant la probabilité (2) par la probabilité (1) :

$$f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})\, f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1}).$$

En sommant toutes les expressions analogues pour toutes les valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, on obtient, d'après le principe des probabilités totales, la probabilité

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$$
$$\times f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1})\, dX_1\, dX_2 \ldots dX_{n-1},$$

pour que finalement, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu x_1 ; le joueur A_2, x_2 ; ....

Cette probabilité s'exprime également par (3), on doit donc avoir

$$\begin{aligned} &f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ &\quad = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \\ &\qquad \times f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1})\, dX_1\, dX_2 \ldots dX_{n-1}. \end{aligned}$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f, elle doit être vérifiée quels que soient μ_1 et μ.

Si μ_1 et μ étaient entiers, l'équation qui précède admettrait une infinité de solutions, mais μ_1 et μ pouvant être quelconques, et en particulier $\mu - \mu_1$ pouvant être infinitésimal, l'équation suffit pour déterminer f.

Lorsque l'intervalle $\mu - \mu_1$ tend vers zéro, la probabilité pour que les écarts

$$x_1 - X_1 = u_1, \qquad x_2 - X_2 = u_2, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} - X_{n-1} = u_{n-1}$$

correspondant à cet intervalle soient compris entre des limites données $-\alpha_1, \alpha_2$; $-\beta_1, \beta_2$; ... ; $-\gamma_1, \gamma_2$, doit tendre vers *un;* on doit donc avoir

$$\lim \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{-\beta_1}^{\beta_2}\cdots\int_{-\gamma_1}^{\gamma_2} f(\mu_1, \mu, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1} = 1$$
$$\text{pour} \quad \mu - \mu_1 = 0,$$

quelque petites que soient les quantités positives (et fixes), α_1, α_2, β_1, ..., γ_2.

Ces deux équations de condition suffisent pour déterminer la fonction f par suite de la continuité de la variable μ.

Équation du mouvement des probabilités.

Nous supposerons que $\mu - \mu_1$ est un infiniment petit $\Delta\mu$, de sorte que $\mu_1 = \mu - \Delta\mu$ et nous désignerons par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ les quantités $x_1 - X_1$, $x_2 - X_2$, $\ldots$, $x_{n-1} - X_{n-1}$, la première équation deviendra alors

$$
\begin{aligned}
&f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu_0, \mu - \Delta\mu, x_1 - u_1, x_2 - u_2, \ldots, x_{n-1} - u_{n-1}) \\
&\qquad \times f(\mu - \Delta\mu, \mu, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Développons la première fonction f par la formule de Taylor en négligeant les termes qui contiennent en facteur le carré de $\Delta\mu$ qui est du deuxième ordre et, pour simplifier l'écriture, remplaçons par F la quantité $f(\mu - \Delta\mu, \mu, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$; l'équation devient

$$
\begin{aligned}
&f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\
&\quad = f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} \\
&\quad - \Delta\mu \frac{\partial f}{\partial \mu}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_1 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} - \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_{n-1} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \ldots,
\end{aligned}
$$

plus des termes contenant des dérivées troisièmes, par exemple

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\, \partial x_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 u_2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}
$$

et des termes contenant des dérivées d'ordres supérieurs.

On a d'abord

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} = 1,
$$

égalité qui supprime les deux premiers termes de la dernière équation.

Le second terme du second membre de la dernière équation se réduit à

$$-\frac{\partial f}{\partial \mu}\, d\mu.$$

La continuité supposée de la variable μ permet de prendre $\Delta\mu$ aussi petit qu'on veut, de sorte que les valeurs moyennes des quantités telles que $u_1^2\, u_2$ qui multiplient les dérivées du troisième ordre soient infiniment petites.

Nous ne supposerons pas que le jeu est uniforme mais nous supposerons qu'il est équitable; alors les intégrales qui multiplient les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots$ sont nulles et l'équation se réduit à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}\\
+\;&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_2^2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \ldots\\
+\;&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_{n-1}^2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}\\
+\;&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_1\, u_2\, \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} + \ldots\\
+\;&\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-2}\, \partial x_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_{n-2}\, u_{n-1} \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial \mu}.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier les intégrales qui figurent dans cette équation.

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_i^2 \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}$$

exprime la valeur moyenne du carré de la perte du joueur A_i dans l'intervalle $\mu - d\mu$, μ : valeur moyenne qui est une donnée du problème et qui est une des caractéristiques du jeu dans l'intervalle considéré.

La valeur moyenne du carré d'une somme de quantités indépendantes est la somme des valeurs moyennes des carrés de ses parties, quand la valeur moyenne de chaque partie est nulle. Il en résulte que la valeur moyenne du carré de la perte du joueur A_i pour μ parties est la somme des valeurs moyennes des carrés des pertes de ce joueur à chacune de ces parties considérée isolément.

Le double de la valeur moyenne du carré de la perte d'un joueur se nomme la *fonction d'instabilité* de son jeu (supposé équitable) parce que les gains et les pertes du joueur sont proportionnelles à la racine carrée de cette fonction.

Si $\varphi_i(\mu)$ désigne la fonction d'instabilité relative au joueur A_i pour l'ensemble de μ parties, la fonction d'instabilité de la $\mu^{\text{ième}}$ partie considérée isolément est $\varphi'(\mu)\,d\mu$; $\varphi'(\mu)$ désignant la dérivée de $\varphi(\mu)$.

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} u_i u_j \mathrm{F}\, du_1 \ldots du_{n-1}$$

exprime la valeur moyenne du produit $u_i u_j$ des pertes des joueurs A_i, A_j dans l'intervalle $\mu - d\mu$, μ et constitue une des données du problème.

Les valeurs moyennes des produits tels que $x_i x_j$ jouissent de la propriété d'addition, leur valeur pour l'ensemble de μ parties est la somme des valeurs analogues pour chacune des μ parties considérée isolément. Ce résultat a été démontré dans mon Mémoire sur la théorie des probabilités continues (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1906, p. 323).

Soit $\frac{1}{2}\chi_{i,j}(\mu)$ la valeur moyenne de $x_i x_j$ pour l'ensemble des μ parties; la valeur moyenne de $u_i u_j$ dans l'intervalle $\mu - d\mu$, μ est alors la différentielle $\frac{1}{2}\chi'_{i,j}(\mu)\,d\mu$.

Si, dans l'équation finale obtenue précédemment, on remplace les valeurs moyennes par leurs expressions, on obtient *l'équation aux dérivées partielles de la probabilité*,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\varphi'_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{4}\varphi'_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{1}{4}\varphi'_{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2}\\ &\quad + \frac{1}{2}\chi'_{1,2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{1}{2}\chi'_{1,3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_3} + \ldots + \frac{1}{2}\chi'_{n-2,n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-2}\,\partial x_{n-1}} = \frac{\partial f}{\partial \mu}.\end{aligned}$$

Les φ' et les χ' sont des fonctions données de μ.

Cette équation convient encore pour le cas où le jeu n'est pas équitable à la condition de modifier le sens attribué aux lettres x, φ, χ.

Lorsque le jeu n'est pas équitable, x_i ne désigne plus la perte du joueur A_i, mais cette perte augmentée de l'espérance mathématique $\psi_i(\mu)$ de ce joueur.

La quantité $\varphi_i(\mu)$ est la fonction d'instabilité du jeu de A_i : c'est, dans le cas du jeu non équitable, le double de la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes diminué du double du carré de la valeur moyenne des gains, c'est-à-dire diminué de la quantité $2[\psi_i(\mu)]^2$.

Lorsque le jeu n'est pas équitable, $\chi_{i,j}(\mu)$ ne désigne plus le double de la valeur moyenne du produit des pertes des joueurs A_i, A_j, mais le double de cette valeur moyenne diminué du double produit des espérances $\psi_i(\mu)$, $\psi_j(\mu)$ de ces joueurs. Cette quantité $\chi_{i,j}(\mu)$ possède la propriété d'addition; la démonstration de ce théorème a été donnée dans le Mémoire précité (n° 76).

Les quantités x, φ, χ étant ainsi définies, il suffit de considérer le cas du jeu équitable, l'équation ci-dessus convient dans tous les cas où il y a indépendance.

Cas d'une seule variable. Rayonnement particulaire des probabilités.

Dans le cas d'une seule variable, l'équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4}{\varphi'} \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Si le jeu reste identique à lui-même, φ' est constant et la fonction f doit vérifier une équation de Fourier.

C'est le résultat auquel je suis parvenu autrefois en exposant ce que j'ai nommé la *théorie du rayonnement des probabilités* (consulter mon Mémoire sur la *Théorie de la spéculation* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1900).

Lorsqu'il y a deux ou trois variables l'équation des probabilités contient des dérivées secondes obliques et la loi qui régit le mouvement des probabilités est plus complexe que celle du rayonnement particulaire.

Cas général.

La probabilité pour que, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu la somme x_1; le joueur A_2, la somme x_2; ...; le joueur A_{n-1}, la somme x_{n-1}, est donnée par l'expression

$$\frac{e^{-\frac{\sum a_k x_k^2 + 2\sum b_{h,l} x_h x_l}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{\Delta}} dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Telle est la formule fondamentale des probabilités à plusieurs variables.

La lettre Δ désigne le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & -\chi_{1,4} & \ldots & \pm\chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \chi_{2,4} & \ldots & \mp\chi_{2,n-1} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & -\chi_{3,4} & \ldots & \pm\chi_{3,n-1} \\ -\chi_{4,1} & \chi_{4,2} & -\chi_{4,3} & \varphi_4 & \ldots & \mp\chi_{4,n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \pm\chi_{n-1,1} & \mp\chi_{n-1,2} & \pm\chi_{n-1,3} & \mp\chi_{n-1,4} & \ldots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Dans les quantités χ on peut permuter les indices; nous avons écrit, par exemple, pour conserver la symétrie, $\chi_{2,1}$ au lieu de $\chi_{1,2}$.

La somme $\Sigma a_k x_k^2$ désigne la quantité

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^2.$$

La quantité a_k s'obtient en supprimant, dans le déterminant Δ, la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

La somme $\Sigma b_{h,l} x_h x_l$ désigne la quantité

$$b_{1,2} x_1 x_2 + b_{1,3} x_1 x_3 + \ldots + b_{1,n-1} x_1 x_{n-1} + b_{2,3} x_2 x_3 + \ldots + b_{n-2,n-1} x_{n-2} x_{n-1}.$$

La quantité $b_{h,l}$ s'obtient en supprimant, dans le déterminant Δ, la $h^{\text{ième}}$ ligne et la $l^{\text{ième}}$ colonne.

Il faut prouver que la formule vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{4}\sum \varphi_1' \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sum \chi_{1,2}' \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Posons

$$f = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{\Delta}} = \frac{e^{-\frac{\sum a_k x_k^2 + 2\sum b_{h,l} x_k x_l}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{\Delta}},$$

où

$$\lambda = a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^2 + 2\, b_{1,2} x_1 x_2 + \ldots + 2\, b_{n-2,n-1} x_{n-2} x_{n-1};$$

l'équation à vérifier devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[\varphi_1'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right)^2 + \varphi_2'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \varphi_{n-1}'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-1}}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\chi_{1,2}' \frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_2} + \chi_{1,3}' \frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_3} + \ldots + \chi_{n-2,n-1}' \frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-2}}\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-1}}\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\Delta[a_1\varphi_1' + a_2\varphi_2' + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}' \\
&\qquad\qquad + 2\chi_{1,2}' b_{1,2} + 2\chi_{1,3}' b_{1,3} + \ldots + 2\chi_{n-2,n-1}' b_{n-2,n-1}] \\
&= -\frac{1}{2}\Delta\frac{\partial\Delta}{\partial\mu} - \Delta\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} + \lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}.
\end{aligned}$$

Les deux premiers crochets et les deux derniers termes du second membre contiennent des expressions en $x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2, x_1 x_2, \ldots$

Au contraire, le dernier crochet du premier membre et le premier terme du second dépendent exclusivement de μ.

Pour démontrer la formule, il faut :

1° Prouver que les termes indépendants des x sont égaux dans les deux membres ;

2° Prouver que les coefficients d'un terme quelconque en x, par exemple du terme en x_1^2, sont identiques dans les deux membres.

La première condition consiste à vérifier qu'on a

$$\begin{aligned}
(1)\qquad & a_1\varphi_1' + a_2\varphi_2' + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}' \\
&\quad + 2[b_{1,2}\chi_{1,2}' + b_{1,3}\chi_{2,3}' + \ldots + b_{n-2,n-1}\chi_{n-2,n-1}'] = \frac{\partial\Delta}{\partial\mu}.
\end{aligned}$$

D'après la règle de la dérivation des déterminants

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\mu} = \begin{vmatrix} \varphi_1' & -\chi_{1,2}' & \chi_{1,3}' & \cdots & \pm\chi_{1,n-1}' \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \cdots & \mp\chi_{2,n-1} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & \cdots & \pm\chi_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \pm\chi_{n-1,1} & \mp\chi_{n-1,2} & \pm\chi_{n-1,3} & \cdots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \cdots & \pm\chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1}' & \varphi_2' & -\chi_{2,3}' & \cdots & \mp\chi_{2,n-1}' \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & \cdots & \pm\chi_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \mp\chi_{n-1,1} & \mp\chi_{n-1,2} & \pm\chi_{n-1,3} & \cdots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \cdots & \pm\chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \cdots & \mp\chi_{2,n-1} \\ \chi_{3,1}' & -\chi_{3,2}' & \varphi_3' & \cdots & \pm\chi_{3,n-1}' \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \pm\chi_{n-1,1} & \mp\chi_{n-1,2} & \pm\chi_{n-1,3} & \cdots & \varphi_{n-1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \cdots & \chi_{1,n-1} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \cdots & \chi_{2,n-2} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & \cdots & \chi_{3,n-3} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots \\ \pm\chi_{n-1,1}' & \mp\chi_{n-1,2}' & \pm\chi_{n-1,3}' & \cdots & \varphi_{n-1}' \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant a pour valeur, d'après la définition des quantités a et b,

$$a_1\varphi_1' + b_{1,2}\chi_{1,2}' + b_{1,3}\chi_{1,3}' + b_{1,4}\chi_{1,4}' + \ldots + b_{1,n-1}\chi_{1,n-1}'.$$

Le second déterminant a pour valeur

$$b_{2,1}\chi_{2,1}' + a_2\varphi_2' + b_{2,3}\chi_{2,3}' + \ldots + b_{2,n-1}\chi_{2,n-1}';$$

le troisième a pour valeur

$$b_{3,1}\chi_{3,1}' + b_{3,2}\chi_{3,2}' + a_3\varphi_3' + \ldots + b_{3,n-1}\chi_{3,n-1}';$$

le $(n-1)^{\text{ième}}$ a pour valeur

$$b_{n-1,1}\chi_{n-1,1}' + b_{n-1,2}\chi_{n-1,2}' + b_{n-1,3}\chi_{n-1,3}' + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}'.$$

Si l'on ajoute ces quantités, on retrouve le premier membre, l'équation (1) est donc identiquement satisfaite.

Occupons-nous de la seconde condition : l'identité des termes indépendants des variables x étant reconnue, l'équation aux dérivées partielles se réduit à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\left[\varphi'_1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right)^2+\varphi'_2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\varphi'_{n-1}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-1}}\right)^2\right]\\&+\frac{1}{2}\left[\chi'_{1,2}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}+\chi'_{1,3}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}+\ldots+\chi'_{n-2,n-1}\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-2}}\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n-1}}\right]=-\Delta\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}+\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}.\end{aligned}$$

Nous devons prouver que les termes en x_1^2 sont identiques dans les deux membres.

En ne conservant que ces coefficients, en remplaçant $\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}$ par sa valeur (1) et en supprimant les termes communs, l'identité à prouver se réduit à

$$\begin{aligned}(2)\quad a'_1=&\left(\varphi'_2\frac{a_1a_2-b^2_{2,1}}{\Delta}+\varphi'_3\frac{a_1a_3-b^2_{3,1}}{\Delta}+\ldots+\varphi'_{n-1}\frac{a_1a_{n-1}-b^2_{n-1,1}}{\Delta}\right)\\&+2\left[\chi'_{2,3}\frac{a_1b_{2,3}-b_{2,1}b_{3,1}}{\Delta}+\chi'_{2,4}\frac{a_1b_{2,4}-b_{2,1}b_{4,1}}{\Delta}+\ldots\right.\\&\left.+\chi'_{n-2,n-1}\frac{a_1b_{n-2,n-1}-b_{n-1,1}b_{n-2,1}}{\Delta}\right].\end{aligned}$$

Si l'on intègre f par rapport à x_1 entre $-\infty$ et $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\sum a_kx_k^2+2\sum b_{h,l}x_hx_l}{\Delta}}}{(\sqrt{\pi})^{n-1}\sqrt{\Delta}}dx_2\ldots dx_{n-1}\,dx_1,$$

on obtient l'expression F analogue à f mais relative à $n-2$ variables, $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$.

Cette intégration s'effectue par la formule connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(m_1x^2+m_2x+m_3)}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m_1}}e^{\frac{m_2^2-4m_1m_3}{4m_1}},$$

on obtient ainsi

$$\mathrm{F}=\frac{e^{-\frac{\sum\frac{a_ka_1-b_{k,1}^2}{\Delta}x_k^2+2\sum\frac{b_{h,l}a_1-b_{h,1}b_{l,1}}{\Delta}x_hx_l}{a_1}}}{(\sqrt{\pi})^{n-2}\sqrt{a_1}}dx_2\,dx_3\ldots dx_{n-1}$$

[k, h, l prennent les valeurs 2, 3, 4, ..., $(n-1)$].

Cette formule est analogue à celle qui exprime f mais elle est relative à $(n-2)$ variables.

L'équation (2) est, relativement à F, ce que l'équation (1) est relativement à f, c'est-à-dire qu'elle est identique.

Ainsi la quantité x_1^2 a le même coefficient dans les deux membres de l'équation aux dérivées partielles. Cette équation est donc satisfaite et la probabilité est bien exprimée par la formule que nous avons fait connaître.

Lorsque le jeu est uniforme, c'est-à-dire lorsque les parties successives sont identiques, la formule générale se réduit; on a

$$\varphi_1 = \mu\varphi'_1, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-1} = \mu\varphi'_{n-1}, \qquad \chi_{1,2} = \mu\chi'_{1,2}, \qquad \ldots,$$

$\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{n-1}, \chi'_{1,2} \ldots$ sont ici des constantes.

La quantité μ peut alors être mise en facteur dans les déterminants et la probabilité pour que, en μ parties, le joueur A_1 ait perdu la somme x_1; le joueur A_2, la somme x_2; ...; le joueur A_{n-1}, la somme x_{n-1}, est donnée par l'expression

$$\frac{e^{-\frac{\sum a_k x_k^2 + 2\sum b_{h,l} x_h x_l}{\mu \Delta'}}}{(\sqrt{\pi\mu})^{n-1}\sqrt{\Delta'}} dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

Δ' étant le déterminant Δ dont toutes les lettres sont accentuées; les coefficients a et b se déduisent de Δ' comme précédemment ils se déduisaient de Δ.

Application à la théorie des épreuves répétées.

A chaque épreuve, n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ peuvent se produire et s'excluent mutuellement; la probabilité de l'événement A_1 est $p_{1,1}$ à la première épreuve, $p_{1,2}$ à la deuxième, ..., $p_{1,\mu}$ à la $\mu^{\text{ième}}$; la probabilité de l'événement A_2 est $p_{2,1}$ à la première épreuve, $p_{2,2}$ à la deuxième, ..., $p_{2,\mu}$ à la $\mu^{\text{ième}}$; ...; la probabilité de l'événement A_{n-1} est $p_{n-1,1}$ à la première épreuve, $p_{n-1,2}$ à la deuxième, ..., $p_{n-1,\mu}$ à la $\mu^{\text{ième}}$.

Quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement A_1 se produise

$$p_{1,1} + p_{1,2} + \ldots + p_{1,\mu} + x_1 \text{ fois;}$$

l'événement A_2, $\quad p_{2,1} + p_{2,2} + \ldots + p_{2,\mu} + x_2$ fois;

. . . .,

l'événement A_{n-1}, $\quad p_{n-1,1} + p_{n-1,2} + \ldots + p_{n-1,\mu} + x_{n-1}$ fois?

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont les *écarts*. On suppose que, à chaque épreuve, il se produit nécessairement un des événements et un seul.

Si x_n désigne l'écart relatif à l'événement A_n, on a évidemment

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0.$$

Supposons que n joueurs $B_1, B_2, \ldots, B_n$ perdent des sommes égales aux écarts; la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ en μ épreuves est la probabilité pour que ces joueurs perdent les sommes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ en μ parties.

La question revient à calculer les fonctions φ et χ relatives aux jeux de $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$.

A la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve il y a probabilité $p_{1,\mu}$ pour que l'écart relatif à l'événement A_1 augmente de $(1 - p_{1,\mu})$ et probabilité $(1 - p_{1,\mu})$ pour que cet écart diminue de $p_{1,\mu}$; l'espérance du joueur B_1 est donc nulle et son jeu est équitable.

La fonction d'instabilité pour la $\mu^{\text{ième}}$ partie est

$$2[p_{1,\mu}^2(1 - p_{1,\mu}) + (1 - p_{1,\mu})^2 p_{1,\mu}] = 2p_{1,\mu}(1 - p_{1,\mu}).$$

Les fonctions d'instabilité jouissant de la propriété d'addition, la fonction d'instabilité relative au joueur B_1 pour les μ parties est

$$\varphi_1 = 2\sum_{i=1}^{i=\mu} p_{1,i}(1 - p_{1,i}).$$

On obtiendrait des expressions analogues pour les autres joueurs.

Il s'agit maintenant de calculer les fonctions telles que $\chi_{1,2}$. Supposons que $\mu - 1$ parties soient jouées et que les écarts correspondant aux événements A_1 et A_2 soient x_1 et x_2.

A l'épreuve suivante il y a probabilité $p_{1,\mu}$ pour que l'événement A_1 se produise; alors l'écart x_1 augmente de la quantité $(1 - p_{1,\mu})$

l'écart x_2 diminue de $p_{2,\mu}$ et le produit des écarts augmente de la quantité

$$x_2(1-p_{1,\mu})-x_1p_{2,\mu}-p_{2,\mu}+p_{1,\mu}p_{2,\mu}.$$

Il y a de même probabilité $p_{2,\mu}$ pour que l'événement A_2 se produise; alors l'écart x_1 diminue de la quantité $p_{1,\mu}$, l'écart x_2 augmente de $(1-p_{2,\mu})$ et le produit des écarts augmente de la quantité

$$x_1(1-p_{2,\mu})-x_2p_{1,\mu}-p_{1,\mu}+p_{1,\mu}p_{2,\mu}.$$

Il y a enfin probabilité $1-p_{1,\mu}-p_{2,\mu}$ pour que les événements A_1 et A_2 ne se produisent pas, alors les écarts diminuent de $p_{1,\mu}$, $p_{2,\mu}$ respectivement et leur produit augmente de la quantité

$$-x_1p_{2,\mu}-x_2p_{1,\mu}+p_{1,\mu}p_{2,\mu}.$$

A la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve, le produit des écarts pour A_1 et A_2 augmente donc en moyenne de la quantité

$$\begin{aligned}&p_{1,\mu}[x_2(1-p_{1,\mu})-x_1p_{2,\mu}-p_{2,\mu}+p_{1,\mu}p_{2,\mu}]\\&+p_{2,\mu}[x_1(1-p_{2,\mu})-x_2p_{1,\mu}-p_{1,\mu}+p_{1,\mu}p_{2,\mu}]\\&+(1-p_{1,\mu}-p_{2,\mu})[-x_1p_{2,\mu}-x_2p_{1,\mu}+p_{1,\mu}p_{2,\mu}]=-p_{1,\mu}p_{2,\mu}.\end{aligned}$$

La valeur moyenne des produits jouissant de la propriété d'addition, la valeur moyenne du produit des écarts x_1, x_2 pour les μ épreuves est

$$-\sum_{i=1}^{i=\mu}p_{1,i}p_{2,i}.$$

La fonction $\chi_{1,2}$ relative au jeu de B_1 et B_2 a donc pour valeur

$$\chi_{1,2}=-2\sum_{i=1}^{i=\mu}p_{1,i}p_{2,i}.$$

Connaissant les fonctions φ et χ, il suffit, pour résoudre le problème, d'appliquer la formule générale; la probabilité pour que les joueurs B_1, B_2, ..., B_{n-1} perdent respectivement les sommes x_1, x_2, ..., x_{n-1}, c'est-à-dire *la probabilité pour que les écarts aient pour valeurs* x_1, x_2, ..., x_{n-1} *est exprimée par la formule*

$$\frac{e^{-\frac{\sum c_kx_k^2+2\sum g_{h,l}x_hx_l}{2M}}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{M}}dx_1\ldots dx_{n-1},$$

M désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\sum p_{1,i}(1-p_{1,i}) & \sum p_{1,i}p_{2,i} & -\sum p_{1,i}p_{3,i} & \sum p_{1,i}p_{4,i} & -\sum p_{1,i}p_{5,i} & \ldots \pm \sum p_{1,i}p_{n-1,i} \\
\sum p_{2,i}p_{1,i} & \sum p_{2,i}(1-p_{2,i}) & \sum p_{2,i}p_{3,i} & -\sum p_{2,i}p_{4,i} & \sum p_{2,i}p_{5,i} & \ldots \mp \sum p_{2,i}p_{n-1,i} \\
-\sum p_{3,i}p_{1,i} & \sum p_{3,i}p_{2,i} & \sum p_{3,i}(1-p_{3,i}) & \sum p_{3,i}p_{4,i} & -\sum p_{3,i}p_{5,i} & \ldots \pm \sum p_{3,i}p_{n-1,i} \\
\sum p_{4,i}p_{1,i} & -\sum p_{4,i}p_{2,i} & \sum p_{4,i}p_{3,i} & \sum p_{4,i}(1-p_{4,i}) & \sum p_{4,i}p_{5,i} & \ldots \mp \sum p_{4,i}p_{n-1,i} \\
-\sum p_{5,i}p_{1,i} & \sum p_{5,i}p_{2,i} & -\sum p_{5,i}p_{3,i} & \sum p_{5,i}p_{4,i} & \sum p_{5,i}(1-p_{5,i}) & \ldots \pm \sum p_{5,i}p_{n-1,i} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\pm \sum p_{n-1,i}p_{1,i} & \mp \sum p_{n-1,i}p_{2,i} & \pm \sum p_{n-1,i}p_{3,i} & \mp \sum p_{n-1,i}p_{4,i} & \sum p_{n-1,i}p_{5,i} & \ldots \quad \sum p_{n-1,i}(1-p_{n-1,i})
\end{vmatrix}$$

Les sommes s'étendent à toutes les valeurs $1, 2, \ldots, \mu$ de i.

La somme $\Sigma c_k x_k^2$ désigne la quantité

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \ldots + c_{n-1} x_{n-1}^2.$$

La quantité C_k s'obtient en supprimant dans le déterminant M la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

La somme $\Sigma g_{h,l} x_h x_l$ désigne la quantité

$$g_{1,2}x_1x_2 + g_{1,3}x_1x_3 + \ldots + g_{1,n-1}x_1x_{n-1} + g_{2,3}x_2x_3 + \ldots + g_{n-2,n-1}x_{n-2}x_{n-1}.$$

La quantité $g_{h,l}$ s'obtient en supprimant dans le déterminant M la $h^{\text{ième}}$ ligne et la $l^{\text{ième}}$ colonne.

Lorsque les μ épreuves sont identiques, la formule précédente se simplifie ; le déterminant M a pour valeur

$$M = \mu^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_{n-1}(1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{n-1}),$$

ou, en désignant par p_n la probabilité de l'événement A_n,

$$M = \mu^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n.$$

Le déterminant C_k se réduit à

$$C_k = \mu^{n-2} p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n \frac{p_k + p_n}{p_k p_n}.$$

Tous les déterminants g sont égaux, leur valeur est

$$g = \mu^{n-2} \frac{p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n}{p_n}.$$

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ en μ épreuves est donc

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\dots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n-1}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\dots+2x_{n-2}x_{n-1}}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu}\right)^{n-1}\sqrt{p_1p_2\dots p_{n-1}p_n}}\,dx_1\dots dx_{n-1}.$$

On peut mettre cette expression sous une forme plus symétrique en introduisant l'écart x_n qui correspond à l'événement A_n. De l'égalité

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = -x_n$$

on déduit

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-2}x_{n-1} = x_n^2$$

et l'expression de la probabilité devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\dots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu}\right)^{n-1}\sqrt{p_1p_2\dots p_{n-1}p_n}};$$

sous cette forme on peut l'obtenir par une autre méthode. [Consulter mon *Étude sur les probabilités des causes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908).]

Application à la théorie des probabilités mêlées.

A chaque épreuve, trois événements A_1, A_2, A_3 peuvent se produire : la probabilité pour que l'événement A_1 se produise seul est p_1, la probabilité pour que l'événement A_2 se produise seul est p_2, la probabilité pour que l'événement A_3 se produise seul est p_3. La probabilité pour que les événements A_1 et A_2 se produisent simultanément est q_3, la probabilité pour que les événements A_1 et A_3 se produisent simultanément est q_2, la probabilité pour que les événements

A_2 et A_3 se produisent simultanément est q_1. La probabilité pour que les trois événements A_1, A_2, A_3 se produisent simultanément est r et il y a probabilité $t = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - q_1 - q_2 - q_3 - r$ pour qu'aucun des événements ne se produise.

La probabilité pour que l'événement A_1 se produise à une épreuve est donc

$$p_1 + q_2 + q_3 + r = \varpi_1;$$

la probabilité pour que l'événement A_2 se produise est

$$p_2 + q_1 + q_3 + r = \varpi_2;$$

la probabilité pour que l'événement A_3 se produise est

$$p_3 + q_2 + q_1 + r = \varpi_3.$$

Si, sur un grand nombre μ d'épreuves, l'événement A_1 s'est produit $\mu\varpi_1 + x_1$ fois; l'événement A_2, $\mu\varpi_2 + x_2$ fois; l'événement A_3, $\mu\varpi_3 + x_3$ fois, on dit que les *écarts* sont x_1, x_2, x_3.

Quelle est la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, x_3 en μ épreuves?

Supposons que quatre joueurs B_1, B_2, B_3, B_4 jouent aux conditions suivantes : les joueurs B_1, B_2, B_3 perdent des sommes égales à x_1, x_2, x_3; le jeu du quatrième joueur B_4 est défini par l'égalité

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

le joueur B_4 perd la somme x_4.

Le jeu de B_4 est déterminé; supposons par exemple que, à une épreuve, les événements A_2 et A_3 se produisent simultanément (éventualité qui a pour probabilité q_1); le joueur B_2 perd alors l'augmentation de l'écart x_2, c'est-à-dire la somme $(1 - \varpi_2)$; le joueur B_3 perd de même la somme $(1 - \varpi_3)$; le joueur B_1 gagne la somme ϖ_1; la perte du joueur B_4 pour cette épreuve est la quantité x_4 définie par l'égalité

$$(1 - \varpi_2) + (1 - \varpi_3) - \varpi_1 + x_4 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x_4 = \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 - 2.$$

Le joueur B_4 a donc à chaque épreuve (ou à chaque partie) probabilité q_1 de perdre la somme $(\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 - 2)$. Le jeu de B_4 se définirait de même pour chacune des autres éventualités auxquelles correspondent les probabilités $p_1, p_2, p_3, q_2, q_3, r, t$.

Le jeu de B_4 est équitable en même temps que celui des joueurs B_1, B_2, B_3.

La question proposée revient à chercher la probabilité pour que, en μ parties, les joueurs B_1, B_2, B_3 perdent les sommes x_1, x_2, x_3.

Notre formule générale (dans le cas du jeu uniforme) résout le problème : il suffit de chercher l'expression des quantités φ' et χ'.

Déterminons par exemple la valeur de φ'_1. A une épreuve quelconque il y a probabilité ϖ_1 pour que l'événement A_1 se produise et par suite pour que x_1 augmente de la quantité $(1 - \varpi_1)$; il y a probabilité $(1 - \varpi_1)$ pour que l'événement A_1 ne se produise pas et par suite pour que x_1 diminue de ϖ_1.

Le jeu de B_1 est donc équitable; la fonction d'instabilité est, par définition,

$$\varphi'_1 = 2[\varpi_1(1 - \varpi_1)^2 + (1 - \varpi_1)\varpi_1^2] = 2\varpi_1(1 - \varpi_1).$$

Cherchons maintenant la valeur de $\chi'_{1,2}$: supposons que les écarts soient x_1 et x_2 et qu'une nouvelle épreuve ait lieu.

A cette nouvelle épreuve il y a probabilité p_1 pour que A_1 se produise seul; alors x_1 augmente de $(1 - \varpi_1)$; x_2 diminue de ϖ_2 et le produit des écarts augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2.$$

Il y a de même probabilité p_2 pour que A_2 se produise seul; alors x_1 diminue de ϖ_1, x_2 augmente de $(1 - \varpi_2)$ et le produit des écarts augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1.$$

Il y a probabilité $(p_3 + t)$ pour que les événements A_1 et A_2 ne se produisent ni l'un ni l'autre; alors x_1 diminue de ϖ_1, x_2 diminue de ϖ_2 et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1.$$

Il y a probabilité q_1 pour que A_2 et A_3 se produisent simultanément, alors x_1 diminue de ϖ_1, x_2 augmente de $(1 - \varpi_2)$ et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1.$$

Il y a probabilité q_2 pour que A_1 et A_3 se produisent simultanément, alors x_1 augmente de $(1-\varpi_1)$, x_2 diminue de ϖ_2 et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2.$$

Il y a probabilité (q_3+r) pour que A_1 et A_2 se produisent simultanément, alors x_1 augmente de $(1-\varpi_1)$, x_2 augmente de $(1-\varpi_2)$ et le produit augmente de la quantité

$$\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 - \varpi_2 + x_1 + x_2 + 1.$$

Le produit $x_1 x_2$ augmente donc, en moyenne, à chaque épreuve, de la quantité

$$\begin{aligned}
& p_1(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2)\\
+ \; & p_2(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1)\\
+ \; & (p_3+t)(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1)\\
+ \; & q_1(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 x_2 - \varpi_1 + x_1)\\
+ \; & q_2(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_2 + x_2)\\
+ \; & (q_3+r)(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_1 x_2 - \varpi_2 x_1 - \varpi_1 - \varpi_2 + x_1 + x_2 + 1) = -\varpi_1\varpi_2 + q_3 + r.
\end{aligned}$$

On a donc, par définition,

$$\chi'_{1,2} = -2\varpi_1\varpi_2 + 2(q_3+r).$$

Pour résoudre le problème proposé, il suffit d'appliquer la formule générale. La probabilité pour que, en μ parties, les joueurs B_1, B_2, B_3 perdent respectivement les sommes x_1, x_2, x_3, c'est-à-dire *la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, x_3 en μ épreuves, est exprimée par la formule*

$$\frac{e^{-\frac{c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2 + 2g_{1,2}x_1x_2 + 2g_{1,3}x_1x_3 + 2g_{2,3}x_2x_3}{2\mu M}}}{(\sqrt{2\pi\mu})^3\sqrt{M}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

M désignant le déterminant

$$M = \begin{vmatrix}
\varpi_1(1-\varpi_1) & \varpi_1\varpi_2 - q_3 - r & -\varpi_1\varpi_3 + q_2 + r\\
\varpi_2\varpi_1 - q_3 - r & \varpi_2(1-\varpi_2) & \varpi_2\varpi_3 - q_1 - r\\
-\varpi_3\varpi_1 + q_2 + r & \varpi_3\varpi_2 - q_1 - r & \varpi_3(1-\varpi_3)
\end{vmatrix},$$

C_1 est le déterminant obtenu en supprimant dans M la première ligne et la première colonne; C_2 s'obtient en supprimant la deuxième ligne et la deuxième colonne; C_3, en supprimant la troisième ligne et la troisième colonne.

$g_{1,2}$ s'obtient en supprimant dans le déterminant M la première ligne et la deuxième colonne; $g_{1,3}$ s'obtient en supprimant la première ligne et la troisième colonne; $g_{2,3}$ en supprimant la deuxième ligne et la troisième colonne.

Pour obtenir des formules simples nous avons résolu le problème des probabilités mêlées en supposant l'uniformité et en considérant seulement le cas de trois variables; la méthode employée est absolument générale et s'applique à tous les cas.

Si n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont possibles, ces événements ne s'excluant pas et les probabilités différant à chaque épreuve, on forme comme précédemment la probabilité totale $\varpi_{1,1}$ pour que l'événement A_1 se produise à la première épreuve, la probabilité totale $\varpi_{1,2}$ pour qu'il se produise à la deuxième, ..., la probabilité totale $\varpi_{1,\mu}$ pour qu'il se produise à la $\mu^{\text{ième}}$.

On forme de même les probabilités totales $\varpi_{2,1}, \varpi_{2,2}, \ldots, \varpi_{2,\mu}$ pour que l'événement A_2 se produise à la première, la deuxième, ..., la μ^{ieme} épreuve et les probabilité analogues pour les événements $A_3, \ldots, A_n$.

Si, en μ épreuves, l'événement A_1 se produit

$$\varpi_{1,1} + \varpi_{1,2} + \ldots + \varpi_{1,\mu} + x_1 \text{ fois;}$$

l'événement A_2, $\varpi_{2,1} + \varpi_{2,2} + \ldots + \varpi_{2,\mu} + x_2$ fois; ...; l'événement A_n, $\varpi_{n,1} + \varpi_{n,2} + \ldots + \varpi_{n,\mu} + x_n$ fois, on dit que les *écarts* sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Assimilant les écarts à des pertes à un jeu, la question qui consiste à chercher la probabilité d'écarts donnés n'est plus qu'un cas particulier du problème général que nous avons résolu.

Toutes les questions analogues peuvent ainsi être résolues quelle que soit la complication des données.