

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. FATOU

## **Sur une classe remarquable de séries de Taylor**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 27 (1910), p. 43-53

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1910\\_3\\_27\\_\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__43_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CLASSE REMARQUABLE  
DE  
SÉRIES DE TAYLOR,

PAR P. FATOU.

---

Le prolongement analytique d'une série de Taylor donnée par la loi de ses coefficients est un problème généralement difficile, en raison surtout de la nécessité de la recherche préalable des singularités de la fonction qu'on se propose de représenter dans tout son domaine d'existence. On ne peut obtenir une solution complète du problème que dans des cas très particuliers ; la plupart de ceux qui ont été étudiés dans ces dernières années se rapportent au cas où le  $n^{\text{ième}}$  coefficient de la série s'exprime en fonction de  $n$  à l'aide d'une fonction analytique possédant certains caractères particuliers ; nous citerons dans cet ordre d'idées les travaux de MM. Leau, Leroy, Mellin, Lindelöf, etc. (C.-S. LINDELÖF, *Leçons sur le calcul des résidus*, Paris, Gauthier-Villars, 1906 ; E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, ibid.).

Nous nous proposons de faire connaître ici une classe particulière de séries de Taylor représentant des fonctions méromorphes dont les pôles s'obtiennent immédiatement et dont on peut en conséquence obtenir une représentation dans tout le plan ; les coefficients de ces séries sont donnés non plus par une expression analytique simple en fonction de leur rang, mais par une *loi de récurrence* dont il ne paraît pas facile, en général, de déduire une telle expression.

Nous devons rappeler tout d'abord certaines définitions ou propositions relatives à l'*itération* que M. G. Kœnigs a fait connaître il y a

environ 25 ans <sup>(1)</sup>. Soit  $\theta(u)$  une fonction analytique de la variable  $u$  holomorphe dans un domaine  $D$ ; supposons que l'équation

$$\theta(u) - u = 0$$

admette dans ce domaine une racine  $\alpha$  pour laquelle  $|\theta'(\alpha)| < 1$ . Le point  $\alpha$  est un *point limite régulier* de la substitution  $[u | \theta(u)]$  qui jouit de la propriété suivante :

On peut trouver un cercle  $\Gamma$  de centre  $\alpha$ , de rayon non nul, à l'intérieur duquel la fonction  $\theta(u)$  est holomorphe et tel que, pour tout point  $u$  intérieur à ce cercle, on ait l'inégalité

$$|\theta(u) - \alpha| < K |u - \alpha| \quad (0 < K < 1).$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$\theta_2(u) = \theta[\theta(u)], \quad \dots, \quad \theta_n(u) = \theta[\theta_{n-1}(u)], \quad \dots,$$

les fonctions  $\theta(u)$ ,  $\theta_2(u)$ ,  $\theta_3(u)$ , ... tendent uniformément vers la constante  $\alpha$ , lorsque  $u$  est intérieur au cercle  $\Gamma$ . On démontre en outre que l'expression  $\frac{\theta_p(u) - \alpha}{[\theta'(\alpha)]^p}$  tend uniformément vers une fonction holomorphe dans  $\Gamma$ .

Ceci posé, considérons la série de Taylor

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

dans laquelle

$$u_0 = u, \quad u_1 = \theta(u), \quad \dots, \quad u_n = \theta_n(u), \quad \dots$$

Les hypothèses précédentes étant conservées, *cette série représente une fonction méromorphe de la variable  $z$ , qui est le quotient de deux fonctions entières de genre zéro, la fonction dénominateur ayant pour expression*

$$(1 - z)(1 - \alpha z)(1 - \alpha^2 z) \dots (1 - \alpha^n z) \dots \quad [\alpha = \theta'(\alpha)].$$

---

<sup>(1)</sup> Cf. KOENIGS, *Sur les substitutions uniformes* (B. D., 1884). — *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* (A. E. N., 3<sup>e</sup> série, 1883). Supplément : *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles*.

Nous allons démontrer cette proposition et d'ailleurs préciser encore davantage les propriétés des fonctions entières auxquelles nous sommes conduits.

Remarquons d'abord que nous pouvons supposer  $\alpha = 0$ , car nous avons identiquement

$$f(z) - \frac{\alpha}{1-z} = (u_0 - \alpha) + (u_1 - \alpha)z + \dots + (u_n - \alpha)z^n + \dots$$

Or les  $u_n$  se calculent au moyen des formules

$$\begin{aligned} u_n &= \theta(u_{n-1}), \\ \theta(u) &= \alpha + a(u - \alpha) + b(u - \alpha)^2 + c(u - \alpha)^3 + \dots, \end{aligned}$$

d'où

$$u_n - \alpha = a(u_{n-1} - \alpha) + b(u_{n-1} - \alpha)^2 + \dots$$

Par conséquent les coefficients de la nouvelle série en  $z$  se calculent de proche en proche comme ceux de la première en remplaçant  $\alpha$  par zéro dans  $\theta(u)$ . Nous poserons donc

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots, \\ u_n &= \theta(u_{n-1}), \\ \theta(u) &= au + bu^2 + cu^3 + \dots \end{aligned}$$

Le rapport de deux coefficients consécutifs de la série  $\varphi(z)$ , c'est-à-dire  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , a pour limite  $\alpha$ . Il en résulte que le rayon de convergence est  $\frac{1}{|\alpha|}$ .

Multiplions  $\varphi(z)$  par  $(1 - \alpha z)$ , nous obtenons

$$\varphi(z)(1 - \alpha z) = u_0 + (u_1 - \alpha u_0)z + \dots + (u_n - \alpha u_{n-1})z^n + \dots$$

Formons le rapport d'un coefficient au précédent; comme on a

$$\begin{aligned} u_n - \alpha u_{n-1} &= bu_{n-1}^2 + cu_{n-1}^3 + \dots, \\ u_{n+1} - \alpha u_n &= bu_n^2 + cu_n^3 + \dots, \end{aligned}$$

il s'ensuit que si  $b \neq 0$  ce rapport a même limite que  $\frac{u_n^2}{u_{n-1}^2}$ , c'est-à-dire  $\alpha^2$ ; si  $b = 0$ ,  $c \neq 0$ , on trouverait  $\alpha^3$  comme limite, etc. En tout

cas le rayon de convergence de la nouvelle série est au moins  $\frac{1}{|a|^2}$ , et son terme général s'écrit (à partir du second)

$$h(u_n)z^{n+1},$$

en posant

$$h(u_n) = bu_n^2 + cu_n^3 + \dots$$

Multiplions de nouveau cette série par le binome  $1 - a^2 z$ . Nous obtenons (en ne tenant pas compte des deux premiers termes)

$$\sum [h(u_{n+1}) - a^2 h(u_n)] z^{n+2}$$

avec

$$\begin{aligned} h(u_{n+1}) - a^2 h(u_n) &= b(au_n + bu_n^2 + \dots)^2 + c(au_n + \dots)^3 - a^2(bu_n^2 + \dots) \\ &= a'u_n^3 + b'u_n^4 + \dots \\ &= h'(u_n). \end{aligned}$$

On voit comme tout à l'heure que le rayon de convergence de la nouvelle série est  $\geq \frac{1}{|a|^3}$ , et ainsi de suite.

D'une manière générale, en multipliant  $\varphi(z)$  par le produit des  $p$  facteurs binomes  $(1 - az)(1 - a^2 z) \dots (1 - a^p z)$ , on obtient une série de Taylor dont le rayon de convergence est au moins  $\frac{1}{|a^{p+1}|}$ . Il en résulte évidemment que  $\varphi(z)$  représente une fonction méromorphe ayant comme pôles les points  $z = a^{-p}$ , et comme le produit infini

$$(1 - az)(1 - a^2 z) \dots (1 - a^p z) \dots$$

est absolument et uniformément convergent et représente une fonction entière de genre zéro, on pourra écrire

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{(1 - az)(1 - a^2 z) \dots (1 - a^p z) \dots},$$

$\Phi(z)$  étant une fonction entière.

Il nous reste, pour compléter ce résultat, à déterminer le mode de croissance de la fonction  $\Phi(z)$ ; les théorèmes aujourd'hui classiques de M. Hadamard nous permettront d'en déduire le genre de cette fonction.

Mais auparavant nous devons étudier d'une manière un peu plus approfondie la fonction entière

$$\Psi(z) = (1 - \alpha z)(1 - \alpha^2 z) \dots (1 - \alpha^n z) \dots$$

qui admet évidemment la fonction majorante

$$\Psi_1(z) = (1 + Az)(1 + A^2 z) \dots (1 + A^n z) \dots$$

(A désigne le module de  $\alpha$ ,  $0 < A < 1$ ).

Pour avoir une indication sur la valeur du module maximum de  $\Psi$ , et par suite de  $\Psi$ , nous diviserons le produit infini  $\Psi$ , en deux facteurs

$$\Psi_1(z) = \prod_{n=1}^h (1 + A^n z) \prod_{n=h+1}^{\infty} (1 + A^n z),$$

$z$  ayant une valeur positive très grande et l'entier  $h$  étant déterminé par la condition

$$\frac{1}{A} > A^h z \geq 1.$$

Le second facteur est évidemment plus petit que

$$e^{A^{h+1}z + A^{h+2}z + \dots} = e^{A^h z \frac{A}{1-A}} \leq e^{\frac{1}{1-A}}$$

et le premier est plus petit que

$$(1 + Az)^h < (z)^{\frac{1}{\beta} \log z},$$

car  $1 + Az < z$  dès que  $z$  surpasse  $\frac{1}{1-A}$ , et  $h < \frac{\log z}{\beta}$  ( $\beta = \log \frac{1}{A}$ ).

De ces inégalités résulte finalement

$$|\Psi_1(z)| < e^{K(\log |z|)^2},$$

$K$  désignant une constante positive, et *a fortiori*

$$|\Psi(z)| < e^{K(\log |z|)^2}.$$

D'ailleurs la même inégalité s'applique à la fonction formée par un nombre quelconque fini ou infini de facteurs primaires de  $\Psi$ .



Nous savons que  $B_p(u)$  est holomorphe pour  $|u| \leq R$ . En outre, nous avons vérifié que cette fonction est nulle pour  $u = 0$ , ainsi que ses  $p$  premières dérivées. Le développement (I) à partir du terme de degré  $p$  prend la forme

$$B_p(u)z^p + B_p(u_1)z^{p+1} + \dots + B_p(u_q)z^{p+q} + \dots$$

Évaluons le module maximum de  $B_p(u)$  pour  $|u| = R$ . D'après un théorème de M. Kœnigs rappelé au début de cet article,  $\frac{\theta_p(u)}{\alpha^p}$  a pour limite une fonction holomorphe et reste uniformément bornée pour  $|u| \leq R$ . On a donc

$$|\theta_p(u)| < MA^p$$

(M, K constantes positives indépendantes de  $p$  et de  $r$ ).

D'autre part,

$$|\lambda_{r,p}| < \frac{K}{r!}.$$

On a donc

$$|B_p(u)| < KM \left( A^p + \frac{A^{p-1}}{1} + \frac{A^{p-2}}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} \right),$$

$$|B_p(u)| < KM A^p \left( 1 + \frac{1}{A} \frac{1}{1!} + \frac{1}{A^2} \frac{1}{2!} + \dots \right);$$

d'où

$$|B_p(u)| < KM e^{\frac{1}{A}} A^p,$$

ou simplement

$$|B_p(u)| < K_1 A^p,$$

quels que soient  $p$  et  $|u| \leq R$ .

Mais  $B_p(u)$  étant nulle, ainsi que ses  $p$  premières dérivées, a pour fonction majorante

$$\frac{\mu \frac{u^{p+1}}{R^{p+1}}}{1 - \frac{u}{R}},$$

$\mu$  étant son module maximum pour  $|u| = R$ , c'est-à-dire

$$\frac{K_1 A^p \frac{u^{p+1}}{R^{p+1}}}{1 - \frac{u}{R}}.$$



Si nous faisons varier  $u$  dans un cercle de rayon  $R_1 < R$ , nous aurons

$$\left| \frac{B_p(u)}{u^{p+1}} \right| < K_2 \left( \frac{|u|}{R} \right)^p.$$

Nous aurons d'après cela

$$|B_p(u)z^p + B_p(u_1)z^{p+1} + \dots| < \frac{K_2 A^p}{R^p} (|u|^{p+1} |z|^p + |u_1|^{p+1} |z|^{p+1} + \dots).$$

Or :

$$|u_q| < A^q M.$$

En tenant compte de cette dernière inégalité dans celle qui précède, on trouve

$$\begin{aligned} & |B_p(u)z^p + B_p(u_1)z^{p+1} + \dots| \\ & < \frac{K_2 M^{p+1} A^p}{R^p} (|z|^p + A^{p+1} |z|^{p+1} + \dots + A^{(p+1)q} |z|^{p+q} + \dots) \\ & < K_3 M^p \frac{|z|^p}{1 - A^{p+1} |z|}. \end{aligned}$$

Supposons qu'on fasse varier  $z$  dans la couronne

$$\frac{1}{A^p} > |z| > \frac{1}{A^{p+1}}.$$

L'expression précédente reste inférieure à

$$(K_4 |z|)^p,$$

et comme  $p$  est de l'ordre de grandeur de  $\log |z|$ , on aura finalement

$$|B_p(u)z^p + B_p(u_1)z^{p+1} + \dots| < e^{K_4 (\log |z|)^2}.$$

Nous n'avons pas encore tenu compte des  $p$  premiers termes du développement (I), ce qui est facile. En effet, la série

$$|u| + |\theta(u)| + |\theta_2(u)| + \dots$$

est uniformément convergente pour  $|u| \leq R$ , et les coefficients  $\lambda_{r,s}$  restent bornés; on a donc

$$|u_h + \lambda_{1,p} u_{h-1} + \dots| < K_6.$$

Donc les  $p$  premiers termes du développement (I) fournissent une contribution moindre en valeur absolue que

$$K_6(1 + |z| + |z|^2 + \dots + |z|^p) = K_6 \frac{|z|^{p+1} - 1}{|z| - 1}.$$

On verrait, comme tout à l'heure, que cette quantité est de l'ordre de  $e^{K_7(\log |z|)^2}$ .

Enfin, pour obtenir  $\Phi(z)$ , nous devons multiplier le développement (I) par le produit infini

$$\prod_{p=1}^{\infty} (1 - \alpha^p z),$$

qui, comme nous l'avons déjà vu, est moindre en module que  $e^{K(\log |z|)^2}$ . On a donc bien

$$\Phi(z) < e^{C(\log |z|)^2}.$$

Il résulte de là que la fonction  $\Phi(z)$  est de genre zéro; en effet, d'après le premier théorème de M. Hadamard, si

$$M(r) < e^{Ar^\alpha},$$

$M(r)$  étant le module maximum d'une fonction entière,  $r$  le module de la variable,  $A$  et  $\alpha$  des constantes positives, on en déduit que le module  $r_n$  de la  $n^{\text{ième}}$  racine (les racines étant rangées par ordre de module croissant) vérifie l'inégalité

$$r_n > Cn^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Or, ici on peut prendre  $\alpha$  aussi petit qu'on veut. Donc la série  $\sum \frac{1}{r_n}$  est convergente et l'on a

$$\Phi(z) = e^{H(z)} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_i}\right).$$

En appliquant ensuite le second théorème de M. Hadamard, on trouve que  $e^{H(z)}$  se réduit à une constante <sup>(1)</sup>.

---

(1) Voir par exemple E. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 71-87. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

En résumé, la série de Taylor  $\varphi(z)$  représente une fonction méromorphe qu'on peut mettre sous la forme

$$\varphi(z) = u_0 \frac{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_i}\right)}{\prod_{i=1}^{\infty} (1 - a^i z)}.$$

*Remarques.* — I. Si  $\alpha$  est différent de zéro, le résultat obtenu subsiste entièrement, seulement il figurera au dénominateur le facteur  $(1 - z)$ .

II. Il n'est nullement nécessaire de supposer que le point  $u_0$  est intérieur au cercle  $\Gamma$  qui est intervenu dans notre démonstration. Il suffit que le  $n^{\text{ième}}$  *conséquent* du point  $u_0$  se trouve à l'intérieur de ce cercle,  $n$  ayant une valeur finie quelconque, pourvu toutefois que  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  aient des valeurs finies. On vérifiera facilement que la proposition subsiste entièrement dans ce cas.

III. Il est facile de généraliser le résultat obtenu dans le cas où la substitution  $[u | \theta(u)]$  admet non plus un point limite régulier, mais un *groupe circulaire limite*, au sens que M. Koenigs attribue à ce mot dans les Mémoires précités. Dans ce cas, on a  $k$  points  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  tels que

$$\alpha_1 = \theta(\alpha_0), \quad \alpha_2 = \theta(\alpha_1), \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = \theta(\alpha_{k-2}), \quad \alpha_0 = \theta(\alpha_{k-1}),$$

avec la condition

$$|\theta'(\alpha_0) \theta'(\alpha_1) \theta'(\alpha_2) \dots \theta'(\alpha_{k-1})| < 1.$$

Si le point  $u_0$  appartient à un certain *domaine* de l'un des points  $\alpha_i$ , les *conséquents* de ce point,  $u_1, u_2, \dots$ , pris de  $k$  en  $k$  auront respectivement pour limites les  $k$  points du cycle. La série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

pourra alors se mettre sous la forme

$$\varphi_0(z^k) + z \varphi_1(z^k) + \dots + z^{k-1} \varphi_{k-1}(z^k),$$

les fonctions  $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots$ , appartenant à la classe déjà étudiée. Les fonctions  $z_i \varphi_i(z^k)$  seront encore des quotients de fonctions entières jouissant des mêmes propriétés au point de vue du genre et de la croissance : il en sera de même de leur somme.

En prenant pour  $\theta(u)$  une expression simple, par exemple une fraction rationnelle et du premier degré, on sera conduit à divers exemples dont quelques-uns sont dignes d'intérêt, tels que le suivant :

Si  $\frac{p_n}{q_n}$  représente la  $n^{\text{ième}}$  réduite du développement en fraction continue d'une irrationnelle quadratique réelle, la série de Taylor  $\sum \frac{p_n}{q_n} z^n$  représente une fonction méromorphe, quotient de deux fonctions entières de genre zéro (et qui ne peut pas se réduire à une fraction rationnelle) <sup>(1)</sup>.

Remarquons pour terminer que si l'on regarde la série

$$(1) \quad u + z \theta(u) + z^2 \theta_2(u) + \dots$$

non plus comme une fonction de  $z$ , mais comme une fonction de  $u$ , elle définit une fonction  $F(u)$  holomorphe dans le cercle  $\Gamma$ , vérifiant l'équation fonctionnelle

$$z F[\theta(u)] = F(u) - u.$$

On démontrera sans peine que c'est la seule solution régulière pour  $u = \alpha$ , lorsque  $z$  est quelconque. Mais pour  $z = \alpha^{-k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) il n'y aura pas en général de solution, ou, s'il y en a une, il y en aura une infinité. [Si  $|z|$  est supérieur au rayon de convergence de la série (1), c'est le prolongement analytique de cette série en  $z$  qui servira à définir la fonction  $F(u)$ .]

---

<sup>(1)</sup> La considération de séries analogues permet de répondre à une question posée par M. E. Borel, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (voir *I. M.*, 1909, p. 29).