

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES RIQUIER

Sur les conditions d'intégrabilité complète de certains systèmes différentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 24 (1907), p. 535-645

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__535_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ COMPLÈTE

DE

CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS,

PAR M. CHARLES RIQUIER.

INTRODUCTION.

Dans un Mémoire publié il y a quelques années, nous avons formulé la définition des systèmes *orthonomes*, et établi un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pareil système soit complètement intégrable ⁽¹⁾. A cette règle on en peut substituer une autre, qui présente le double avantage d'être, dans bien des cas, notablement plus simple, et de s'appliquer à des systèmes différentiels notablement plus généraux.

Considérons d'abord un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et cela de telle façon qu'aucun des premiers membres n'y soit une dérivée de quelque autre; attribuons ensuite aux diverses

⁽¹⁾ *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica*, t. XXIII). Je dois ajouter que la définition des systèmes *orthonomes* est susceptible d'une légère simplification, consistant en ce que l'on peut, sans en restreindre la généralité, *supposer égale à 1 la cote première* (positive) *commune à toutes les variables indépendantes*. J'ai déjà eu l'occasion de présenter cette remarque dans un Mémoire plus récent ayant pour titre : *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta Mathematica*, t. XXV).

variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux fonctions inconnues des cotes respectives quelconques (positives, nulles ou négatives) : cela étant, l'application d'un procédé tout élémentaire permet de donner aux conditions initiales du système une forme telle, que diverses circonstances (un peu longues à énumérer, et dont on trouvera l'indication détaillée au n° 18) se trouvent réalisées. Nous conviendrons, en pareil cas, d'adopter, pour les conditions initiales, l'écriture à laquelle il vient d'être fait allusion, et nous désignerons alors par δ la cote minima des premiers membres du système proposé, par Γ la cote maxima des premiers membres des conditions initiales; enfin, adjoignant par la pensée aux équations du système toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations d'ordres quelconques, nous partagerons l'ensemble illimité résultant de cette adjonction en groupes limités successifs d'après les cotes croissantes $\delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots$ des premiers membres, et nous nommerons $S_\delta, S_{\delta+1}, S_{\delta+2}, \dots$ les groupes dont il s'agit.

Cela posé, nous formulerons la proposition suivante :

Considérons un système différentiel satisfaisant à la double condition ci-après :

1° *Le système est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, aucun des premiers membres n'est une dérivée de quelque autre, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale ;*

2° *En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies (positives, nulles ou négatives), chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Cela étant, et dans les limites où certaines restrictions d'inégalité (concernant les valeurs numériques des variables indépendantes, des inconnues, et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques) se trouvent satisfaites, il faut et il suffit, pour que le système soit complètement intégrable, qu'en éliminant entre les groupes

$$S_\delta, S_{\delta+1}, \dots, S_{\Gamma+1}, S_{\Gamma+2}$$

les diverses dérivées principales qui ont pour cote l'un ou l'autre des entiers (algébriques)

$$\delta, \delta + 1, \dots, \Gamma + 1, \Gamma + 2,$$

les relations résultantes soient vérifiées identiquement (c'est-à-dire pour toutes valeurs numériques des variables, des inconnues, et de leurs dérivées paramétriques).

Dans le cas où les diverses dérivées qui constituent les premiers membres du système proposé appartiennent à des inconnues toutes différentes, il n'y a pas de conditions d'intégrabilité; et dans celui où le système proposé est orthonome, aucune restriction d'inégalité n'est à formuler.

Voici un exemple très simple où la règle formulée ci-dessus présente un notable avantage sur la règle ancienne, tirée de la considération des dérivées *cardinales*. Supposons qu'un système, impliquant une fonction inconnue, u , des variables indépendantes x, y, \dots , ait pour premiers membres toutes les dérivées d'ordre m de u , les seconds membres ne contenant, avec les variables x, y, \dots , que l'inconnue u et ses dérivées d'ordre inférieur à m : pour ce système, visiblement orthonome, la nouvelle règle conduit à ne considérer que des dérivées d'ordre $m + 1$; l'ancienne, au contraire, si l'on observe que les dérivées cardinales ont pour ordre maximum $2m$, exigerait (sauf le cas de $m = 1$) un calcul beaucoup plus long, et, parmi les conditions obtenues, un grand nombre se trouveraient n'être que de simples conséquences des autres.

Ces résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 22 octobre 1906, et leur exposition détaillée constitue l'objet du présent Mémoire.

CHAPITRE I.

CORRÉLATION MULTIPLICATOIRE ENTRE LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS.

1. Étant donnés deux systèmes de relations (en nombre limité), nous dirons que le second est une *combinaison multiplicatoire* du premier, si, les seconds membres des deux systèmes ayant été réduits à zéro par la simple transposition de leurs termes dans les premiers membres, chacune des équations du second système peut s'obtenir en multipliant par des facteurs convenablement choisis les diverses équations du premier, et ajoutant les produits membre à membre.

Si chacun des deux systèmes proposés est une combinaison multiplicatoire de l'autre, nous dirons que les deux systèmes sont en *corrélation multiplicatoire*.

Par exemple, si un système de m équations, linéaire par rapport à m des variables qui s'y trouvent engagées, est résoluble par rapport à ces m variables conformément à l'algorithme de Cramer, il est en corrélation multiplicatoire avec le système constitué par les m formules de résolution : il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter au calcul élémentaire à l'aide duquel on passe du système donné aux formules de résolution et inversement.

Étant donnés trois systèmes, si le dernier est une combinaison multiplicatoire du second, et le second une combinaison multiplicatoire du premier, le dernier est aussi, comme on le voit sans peine, une combinaison multiplicatoire du premier. On en déduit que si deux systèmes, successivement comparés à un même troisième, sont avec lui en corrélation multiplicatoire, ils jouissent l'un par rapport à l'autre de la même propriété.

Enfin il est clair que deux systèmes en corrélation multiplicatoire admettent, par rapport aux quantités variables qui y figurent, les mêmes solutions numériques.

2. Considérons deux systèmes différentiels, S, T, impliquant les mêmes fonctions inconnues u, v, \dots des mêmes variables x, y, \dots ; sur chacune des équations de S exécutons, suivant la règle des fonctions composées, toutes les différentiations possibles des ordres 0, 1, 2, ..., m , puis opérons de même sur T; assimilons enfin, dans toutes ces relations, les variables x, y, \dots , les inconnues u, v, \dots et leurs dérivées à autant de variables indépendantes distinctes. Cela étant, *si les deux systèmes S, T sont en corrélation multiplicatoire, les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par toutes les différentiations possibles des ordres 0, 1, 2, ..., m jouissent de la même propriété.*

Notre proposition étant vraie d'elle-même pour $m = 0$ (puisque la conclusion est alors identique à l'hypothèse), il suffit de faire voir qu'en la supposant vraie pour une valeur quelconque de m , elle l'est encore pour la valeur suivante $m + 1$.

A cet effet, nommons S' et T' les groupes respectivement déduits de S et T par toutes les différentiations possibles du premier ordre; S'' et T'' les groupes respectivement déduits de S et T par toutes les différentiations possibles du second ordre; et ainsi de suite. On suppose que chacun des deux systèmes

$$\begin{aligned} (1) & \quad (S, S', \dots, S^{(m)}), \\ (2) & \quad (T, T', \dots, T^{(m)}) \end{aligned}$$

est une combinaison multiplicatoire de l'autre, et il s'agit de prouver que la même chose a lieu pour les deux systèmes

$$\begin{aligned} (3) & \quad (S, S', \dots, S^{(m)}, S^{(m+1)}), \\ (4) & \quad (T, T', \dots, T^{(m)}, T^{(m+1)}), \end{aligned}$$

que le système (4), par exemple, est une combinaison multiplicatoire du système (3).

Effectivement, le système (4) se compose du système (2) et du groupe $T^{(m+1)}$. Or, toute équation du système (2), étant, d'après l'hypothèse, une combinaison multiplicatoire de (1), est, par là même, une combinaison multiplicatoire de (3).

Considérons maintenant une équation quelconque du groupe $T^{(m+1)}$, ou, ce qui revient au même, une équation quelconque déduite de $T^{(m)}$

par différentiation première. En désignant par

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \dots, \quad L_k = 0$$

les équations du système (1), et par

$$\Lambda_1, \quad \Lambda_2, \quad \dots, \quad \Lambda_k$$

des multiplicateurs convenablement choisis, toute équation du groupe $T^{(m)}$ est de la forme

$$\Lambda_1 L_1 + \Lambda_2 L_2 + \dots + \Lambda_k L_k = 0.$$

En la différentiant par rapport à une variable quelconque, x par exemple, l'équation résultante peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & \Omega_x(\Lambda_1)L_1 + \Omega_x(\Lambda_2)L_2 + \dots + \Omega_x(\Lambda_k)L_k \\ & + \Lambda_1\Omega_x(L_1) + \Lambda_2\Omega_x(L_2) + \dots + \Lambda_k\Omega_x(L_k) = 0, \end{aligned}$$

où le symbole Ω_x désigne une différentiation première relative à x exécutée suivant la règle des fonctions composées. Cela étant, il suffit d'observer que les équations

$$\begin{aligned} & L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \dots, \quad L_k = 0, \\ & \Omega_x(L_1) = 0, \quad \Omega_x(L_2) = 0, \quad \dots, \quad \Omega_x(L_k) = 0 \end{aligned}$$

appartiennent toutes au système (3).

3. Si aux équations qui composent un système différentiel (limité) S on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations (d'ordres quelconques), le groupe illimité résultant de cette adjonction s'appellera le *système* S *prolongé*.

4. Soient

$$\begin{aligned} & x, \quad y, \quad \dots, \\ & u, \quad v, \quad \dots \end{aligned}$$

des notations (en nombre limité) désignant : les premières diverses variables indépendantes, les dernières diverses fonctions inconnues de ces variables. A chacune des quantités x, y, \dots, u, v, \dots faisons

correspondre un entier (positif, nul ou négatif), que nous nommerons la *cote* de cette quantité; puis, considérant une dérivée d'ordre quelconque r de l'une des fonctions u, v, \dots , nommons *cote* de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote de la fonction celles des r variables de différentiation.

Supposons actuellement que *les cotes respectives des diverses variables indépendantes* soient toutes *égales à 1*, celles des fonctions inconnues étant quelconques; puis, considérant, soit une fonction composée différentielle de u, v, \dots , soit une relation différentielle entre u, v, \dots , nommons *cote* de l'expression ou de la relation dont il s'agit la cote maxima des *inconnues et dérivées* qui y figurent *effectivement* (abstraction totale étant faite, dans cette évaluation, des variables indépendantes). Cela étant, il est clair que toute différentiation première exécutée, suivant l'algorithme des fonctions composées, sur l'expression ou la relation considérée, augmente d'une unité la cote de cette dernière.

En particulier, si l'on considère une relation différentielle ayant pour premier membre quelque dérivée d'inconnue et pour second membre quelque expression de cote au plus égale à celle du premier membre, et si sur cette relation on exécute des différentiations en nombre quelconque, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions de cotes respectivement inférieures ou égales à celles des dérivées dont il s'agit, le second membre de la relation résultante est, lui aussi, de cote au plus égale à celle de son premier membre.

5. Relativement aux systèmes différentiels où l'on *affecte*, comme il vient d'être dit, *les variables indépendantes de cotes respectives toutes égales à 1*, et les fonctions inconnues de cotes respectives quelconques (positives, nulles ou négatives), nous adopterons, une fois pour toutes, les conventions d'écriture suivantes. *Le système différentiel étant désigné par une lettre majuscule, S :*

1^o La notation s_c (lettre minuscule affectée de l'indice C) *désignera l'ensemble des équations qui, dans le système S, possèdent une cote égale à C* (n^o 4) (C est alors un entier algébrique au moins égal à la cote

minima des équations du système S et au plus égal à leur cote maxima).

2° La notation S_c (lettre majuscule affectée de l'indice C, qui y figure, comme dans 1°, en bas et à droite) désignera l'ensemble des équations qui, dans le système S prolongé (n° 3), possèdent une cote égale à C (C est alors un entier algébrique au moins égal à la cote minima des équations de S, et pouvant surpasser tout entier donné).

3° La notation ${}^{(C)}S$ (lettre majuscule affectée de l'indice C, qui y figure entre parenthèses en haut et à gauche) désignera l'ensemble des équations qui, dans le système S prolongé, possèdent une cote inférieure ou égale à C (ici encore, C est un entier algébrique au moins égal à la cote minima des équations de S, et pouvant surpasser tout entier donné).

6. Soient S et T deux systèmes différentiels impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes. Attribuant aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux fonctions inconnues des cotes respectives quelconques, désignons par δ et Δ les cotes respectivement minima et maxima des relations figurant dans les deux systèmes (n° 4), puis par C un entier algébrique quelconque (au moins égal à δ).

Cela étant, pour que les systèmes

$${}^{(C)}S, \quad {}^{(C)}T$$

(n° 5) soient en corrélation multiplicatoire quel que soit C, il suffit que cela ait lieu pour

$$C = \delta, \quad \delta + 1, \quad \dots, \quad \Delta.$$

Désignons, en effet, par λ la différence (positive ou nulle) $\Delta - \delta$, et par

$$s_{\delta+p}^{(n)}, \quad t_{\delta+p}^{(n)} \quad (p = 0, 1, 2, \dots, \lambda)$$

les ensembles de relations respectivement déduits de

$$s_{\delta+p}, \quad t_{\delta+p}$$

(n° 5) à l'aide de toutes les différentiations possibles de l'ordre n ; désignons en outre par k un entier positif quelconque, et, donnant

à C la valeur $\Delta + k$ ou $\delta + \lambda + k$, considérons le Tableau

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} s_{\delta}, & s'_{\delta}, & \dots, & s_{\delta}^{(\lambda)}, & s_{\delta}^{(\lambda+1)}, & \dots, & s_{\delta}^{(\lambda+k)}, \\ & s_{\delta+1}, & \dots, & s_{\delta+1}^{(\lambda-1)}, & s_{\delta+1}^{(\lambda)}, & \dots, & s_{\delta+1}^{(\lambda+k-1)}, \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ & & & s_{\delta+\lambda}, & s'_{\delta+\lambda}, & \dots, & s_{\delta+\lambda}^{(k)}. \end{array} \right.$$

Pour former, à l'aide du Tableau ci-dessus, les systèmes respectifs

$$^{(\delta)}S, \quad ^{(\delta+1)}S, \quad \dots, \quad ^{(\delta+\lambda)}S, \quad ^{(\delta+\lambda+1)}S, \quad \dots, \quad ^{(\delta+\lambda+k)}S,$$

il suffit d'en extraire les portions respectivement obtenues en prenant sur sa gauche les

$$1, \quad 2, \quad \dots, \quad \lambda+1, \quad \lambda+2, \quad \dots, \quad \lambda+k+1$$

premières colonnes verticales. On voit en outre qu'en effectuant sur les équations $^{(\delta+\lambda)}S$ toutes les différentiations possibles des ordres 0, 1, 2, ..., k, on obtient $^{(\delta+\lambda+k)}S$.

Les mêmes remarques sont applicables au Tableau

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} t_{\delta}, & t'_{\delta}, & \dots, & t_{\delta}^{(\lambda)}, & t_{\delta}^{(\lambda+1)}, & \dots, & t_{\delta}^{(\lambda+k)}, \\ & t_{\delta+1}, & \dots, & t_{\delta+1}^{(\lambda-1)}, & t_{\delta+1}^{(\lambda)}, & \dots, & t_{\delta+1}^{(\lambda+k-1)}, \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ & & & t_{\delta+\lambda}, & t'_{\delta+\lambda}, & \dots, & t_{\delta+\lambda}^{(k)}. \end{array} \right.$$

et aux systèmes

$$^{(\delta)}T, \quad ^{(\delta+1)}T, \quad \dots, \quad ^{(\delta+\lambda)}T, \quad ^{(\delta+\lambda+1)}T, \quad \dots, \quad ^{(\delta+\lambda+k)}T.$$

Cela étant, puisque les systèmes

$$^{(\delta+\lambda)}S, \quad ^{(\delta+\lambda)}T$$

sont, par hypothèse, en corrélation multiplicatoire, les systèmes

$$^{(\delta+\lambda+k)}S, \quad ^{(\delta+\lambda+k)}T$$

jouissent de la même propriété (n° 2).

7. Les mêmes notations étant adoptées qu'au numéro précédent, si l'on suppose que, pour

$$C = \delta, \delta + 1, \dots, \Delta,$$

les deux systèmes

$$(s_{\delta}, s_{\delta+1}, \dots, s_C)$$

et

$$(t_{\delta}, t_{\delta+1}, \dots, t_C)$$

soient en corrélation multiplicatoire, la même chose a lieu, quel que soit C, pour les deux systèmes

$$({}^{(C)}S, {}^{(C)}T).$$

Il suffit, en vertu du numéro précédent, de vérifier l'exactitude de notre conclusion pour $C = \delta, \delta + 1, \dots, \Delta$.

Pour $C = \delta$, elle résulte immédiatement de l'hypothèse, puisque les deux systèmes ${}^{(\delta)}S, {}^{(\delta)}T$ se déduisent respectivement des Tableaux (5) et (6) en prenant sur leur gauche la première colonne.

Pour $C = \delta + 1$, on remarquera, d'une part, qu'en vertu de notre hypothèse, combinée avec la proposition du n° 2, les deux systèmes

$$(s_{\delta}, s'_{\delta}) \quad \text{et} \quad (t_{\delta}, t'_{\delta})$$

sont en corrélation multiplicatoire; d'autre part, qu'en vertu de notre hypothèse, les deux systèmes

$$(s_{\delta}, s_{\delta+1}) \quad \text{et} \quad (t_{\delta}, t_{\delta+1})$$

jouissent de la même propriété. Les systèmes ${}^{(\delta+1)}S, {}^{(\delta+1)}T$, respectivement déduits des Tableaux (5) et (6) en prenant sur leur gauche les deux premières colonnes, ont donc entre eux la corrélation voulue.

Pour $C = \delta + 2$, on observera de même que les trois systèmes

$$\begin{aligned} & (s_{\delta}, s'_{\delta}, s''_{\delta}), \\ & (s_{\delta}, s_{\delta+1}, s'_{\delta}, s'_{\delta+1}), \\ & (s_{\delta}, s_{\delta+1}, s_{\delta+2}) \end{aligned}$$

sont respectivement en corrélation multiplicatoire avec les trois systèmes

$$\begin{aligned} & (t_{\delta}, t'_{\delta}, t''_{\delta}), \\ & (t_{\delta}, t_{\delta+1}, t'_{\delta}, t'_{\delta+1}), \\ & (t_{\delta}, t_{\delta+1}, t_{\delta+2}). \end{aligned}$$

Les systèmes

$$(\delta+2)S, \quad (\delta+2)T,$$

respectivement déduits des Tableaux (5) et (6) en prenant sur leur gauche les trois premières colonnes, ont donc entre eux la corrélation voulue.

Pour $C = \delta + 3$, on observera que les quatre systèmes

$$\begin{aligned} & (s_{\delta}^{\prime\prime}, s_{\delta}^{\prime}, s_{\delta}^{\prime\prime\prime}, s_{\delta}^{\prime\prime\prime\prime}), \\ & (s_{\delta}, s_{\delta+1}, s_{\delta}^{\prime}, s_{\delta+1}^{\prime}, s_{\delta}^{\prime\prime}, s_{\delta+1}^{\prime\prime}), \\ & (s_{\delta}, s_{\delta+1}, s_{\delta+2}, s_{\delta}^{\prime}, s_{\delta+1}^{\prime}, s_{\delta+2}^{\prime}), \\ & (s_{\delta}, s_{\delta+1}, s_{\delta+2}, s_{\delta+3}) \end{aligned}$$

sont respectivement en corrélation multiplicatoire avec les quatre systèmes

$$\begin{aligned} & (t_{\delta}, t_{\delta}^{\prime}, t_{\delta}^{\prime\prime}, t_{\delta}^{\prime\prime\prime}), \\ & (t_{\delta}, t_{\delta+1}, t_{\delta}^{\prime}, t_{\delta+1}^{\prime}, t_{\delta}^{\prime\prime}, t_{\delta+1}^{\prime\prime}), \\ & (t_{\delta}, t_{\delta+1}, t_{\delta+2}, t_{\delta}^{\prime}, t_{\delta+1}^{\prime}, t_{\delta+2}^{\prime}), \\ & (t_{\delta}, t_{\delta+1}, t_{\delta+2}, t_{\delta+3}). \end{aligned}$$

Et ainsi de suite jusques et y compris $C = \delta + \lambda = \Delta$.

8. Étant donné un système différentiel S , *résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues* qui s'y trouvent engagées, nous conviendrons de dire qu'une dérivée de ces fonctions est *principale* relativement au système, lorsqu'elle coïncide, soit avec quelque'un des premiers membres, soit avec quelque'une de leurs dérivées; nous conviendrons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique*. Les relations du système S prolongé (n° 3) ont ainsi pour premiers membres, avec répétitions possibles, mais sans omission, les diverses dérivées principales des inconnues.

9. Considérons actuellement un système différentiel, S , satisfaisant à la double condition ci-après :

A. Le système S est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale (n° 8).

B. En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies (positives, nulles ou négatives), chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne dépasse pas celle du premier membre correspondant.

Désignant alors par δ et Δ les cotes respectivement minima et maxima des équations de S, partageons ces équations en groupes successifs,

$$(7) \quad s_{\delta}, \quad s_{\delta+1}, \quad \dots, \quad s_{\Delta},$$

d'après les cotes croissantes,

$$\delta, \quad \delta + 1, \quad \dots, \quad \Delta,$$

de leurs premiers membres (n° 5). Considérant ensuite le système S prolongé (n° 3), partageons-en de même les relations en groupes (limités) successifs,

$$(8) \quad S_{\delta}, \quad S_{\delta+1}, \quad \dots, \quad S_{\Delta}, \quad S_{\Delta+1}, \quad \dots,$$

d'après les cotes croissantes de leurs premiers membres (n° 5). Relativement à ces groupes, nous noterons les observations suivantes :

1° Les groupes (7) se trouvent respectivement compris dans

$$S_{\delta}, \quad S_{\delta+1}, \quad \dots, \quad S_{\Delta},$$

et le premier d'entre eux, s_{δ} , est identique à S_{δ} .

2° Le groupe général, S_c , de la suite (8) a pour premiers membres (avec répétitions possibles, mais sans omission) les diverses dérivées principales de cote C; chaque second membre est indépendant de la dérivée principale qui constitue le premier membre correspondant, mais peut contenir, outre les variables x, y, \dots , d'autres quantités (inconnues et dérivées) de cote inférieure ou égale à C.

3° Le premier des groupes (8), S_{δ} , identique, comme nous l'avons dit, à s_{δ} , se trouve résolu par rapport aux dérivées *principales* de

cote δ ; chacun des groupes

$$S_{\delta+1}, \dots, S_{\Delta},$$

composé d'équations en nombre au moins égal à celui des dérivées *principales* de cote égale à son indice, est linéaire par rapport à ces dernières, et les coefficients des dérivées dont il s'agit (identiques à certaines dérivées partielles du premier ordre des seconds membres de S) dépendent uniquement des variables x, y, \dots , des inconnues u, v, \dots , et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres de S; enfin, chacun des groupes

$$S_{\Delta+1}, S_{\Delta+2}, \dots,$$

composé d'équations en nombre au moins égal à celui des dérivées *principales* de cote égale à son indice, est linéaire par rapport aux dérivées, *tant principales que paramétriques*, de même cote, et une remarque toute semblable à la précédente s'applique aux coefficients de ces dérivées.

4° Si du groupe S_c on extrait un groupe partiel composé d'équations en nombre exactement égal à celui des dérivées principales de cote G , ce groupe partiel possède, par rapport aux dérivées principales de cote G , un déterminant différentiel qui est une fonction des variables x, y, \dots , des inconnues u, v, \dots , et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres de S.

Désignons maintenant par Θ un entier (algébrique) déterminé, *au moins égal à Δ* , et, des groupes

$$S_{\delta}, S_{\delta+1}, \dots, S_{\Theta},$$

extrayons respectivement des groupes,

$$(9) \quad \iota_{\delta}, \iota_{\delta+1}, \dots, \iota_{\Theta},$$

possédant la double propriété de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta+1, \dots, \Theta,$$

et de contenir les groupes (7). (La chose est possible, dans tous les cas, d'une manière au moins, et, dans l'immense majorité des cas, de plusieurs manières.) Dans la suite des groupes (9), chaque groupe possède, par rapport aux dérivées principales de cote égale à son indice, un déterminant différentiel qui est une fonction des variables indépendantes, des inconnues, et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres de S; et l'ensemble de ces groupes possède, par rapport à l'ensemble de ces dérivées principales, un déterminant différentiel qui est le produit des précédents (en sorte que sa *non-nullité*, si elle a lieu, entraîne celle des précédents).

Cela étant, nous adjoindrons aux deux hypothèses A et B, ci-dessus énoncées, l'hypothèse suivante :

C. Il existe quelque suite, (9), remplissant les conditions ci-dessus indiquées, et telle que les groupes $t_{\delta}, t_{\delta+1}, \dots, t_{\Theta}$ soient successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes $\delta, \delta + 1, \dots, \Theta$.

En d'autres termes, nous supposons que le déterminant différentiel de l'ensemble de ces groupes par rapport aux dérivées dont il s'agit n'est pas identiquement nul, et nous nous astreignons à ne considérer les diverses quantités dont il dépend que dans les limites où sa valeur numérique reste différente de zéro.

Toutes ces conditions étant supposées satisfaites, il est clair que la résolution successive des groupes (9), effectuée par rapport aux dérivées principales de cotes $\delta, \delta + 1, \dots, \Theta$, fournira pour chacune d'elles une expression à la fois indépendante et de toute dérivée principale quelle qu'elle soit, et de toute dérivée paramétrique ou fonction inconnue dont la cote surpasserait celle du premier membre correspondant. En outre, les divers groupes (7), qui, par hypothèse, figurent dans (9), ne contenant dans leurs seconds membres aucune dérivée principale, ne peuvent manquer de figurer *tels qu'ils sont* dans les formules de résolution, en sorte que *ces dernières comprennent nécessairement toutes les équations du système S*. Nous désignerons alors par

$$(10) \quad \psi_{\delta}, \psi_{\delta+1}, \dots, \psi_{\Theta}$$

les formules de résolution dont il s'agit, par W un système extrait

de (10) sous la seule condition *de contenir les groupes* (7), et par \mathbb{C} un entier algébrique quelconque (au moins égal à δ).

Cela étant, *les deux systèmes*

(C)S, (C)W

$(n^\circ 5)$ sont en corrélation multiplicative quel que soit C .

I. Considérons les deux groupes de variables

$$(II) \quad u_1, u_2, \dots, u_k,$$

$$(12) \quad t, \dots$$

et soit P une fonction de ces diverses variables, de forme entière par rapport à celles du groupe (11). Considérons en même temps un groupe de formules

[illegible]

exprimant les variables (11) à l'aide des variables (12), et soit Q la fonction des seules variables (12) obtenue en remplaçant dans P les variables (11) par leurs expressions tirées des formules (13).

Cela étant, si l'on considère les deux équations

$$P = 0,$$

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} \right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} \right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} \right)$$

l'une quelconque d'entre elles est une combinaison multiplicatoire de l'autre et des formules (13).

Posons en effet

[illegible]

Si, dans la fonction P, entière en u_1, u_2, \dots, u_k , on remplace ces variables par leurs valeurs tirées de (14), et qu'on ordonne le résultat

par rapport à v_1, v_2, \dots, v_k , le terme indépendant est précisément égal à Q , et l'ensemble des termes restants peut s'écrire sous la forme

$$(15) \quad \Lambda_1 v_1 + \Lambda_2 v_2 + \dots + \Lambda_k v_k,$$

où les Λ sont entiers par rapport aux v , avec des coefficients fonctions de u, \dots . Si l'on effectue maintenant la substitution inverse, qui régénère évidemment la fonction Q , le terme Q , indépendant des v , reste tel qu'il est, et l'expression (15) prend la forme

$$L_1(u_1 - U_1) + L_2(u_2 - U_2) + \dots + L_k(u_k - U_k),$$

où les L sont entiers par rapport aux u , avec des coefficients fonctions de u, \dots . On a donc l'identité

$$P = Q + L_1(u_1 - U_1) + L_2(u_2 - U_2) + \dots + L_k(u_k - U_k),$$

laquelle entraîne immédiatement le double point que nous avons en vue.

II. Désignant par C un entier algébrique *inférieur* à Θ (et au moins égal à δ), remplaçons dans le groupe t_{C+1} (entier par rapport aux dérivées principales) les dérivées principales de cote inférieure à $C+1$ par leurs valeurs tirées de

$$(16) \quad \psi_\delta, \psi_{\delta+1}, \dots, \psi_C,$$

et nommons φ_{C+1} le groupe résultant. Cela étant, *l'un quelconque des deux groupes*

$$t_{C+1}, \varphi_{C+1}$$

est une combinaison multiplicatoire de l'autre et du système (16).

Car si, dans ces deux groupes, on considère deux relations *correspondantes*, il résulte immédiatement de l'alinéa I que l'une quelconque d'entre elles est une combinaison multiplicatoire de l'autre et du système (16).

III. *Pour*

$$C = \delta, \delta+1, \dots, \Theta,$$

les deux systèmes

$$(17) \quad (\iota_{\delta}, \iota_{\delta+1}, \dots, \iota_C)$$

et

$$(18) \quad (\psi_{\delta}, \psi_{\delta+1}, \dots, \psi_C)$$

sont en corrélation multiplicatoire.

La chose est évidente pour $C = \delta$, puisque ι_{δ} et ψ_{δ} sont l'un et l'autre identiques à s_{δ} . Il suffit donc de faire voir qu'en supposant C moindre que Θ , la corrélation spécifiée, si elle a lieu entre les systèmes (17) et (18), a nécessairement lieu entre les systèmes

$$(19) \quad (\iota_{\delta}, \iota_{\delta+1}, \dots, \iota_C, \iota_{C+1})$$

et

$$(20) \quad (\psi_{\delta}, \psi_{\delta+1}, \dots, \psi_C, \psi_{C+1}).$$

1° Le système (20) est une combinaison multiplicatoire de (19).

Effectivement, le système (20) se compose du système (18) et du groupe ψ_{C+1} .

Or, en vertu de ce qui est admis pour la valeur C , le système (18) est une combinaison multiplicatoire de (17), et, par là même, de (19).

Quant au groupe ψ_{C+1} , qui provient du groupe φ_{C+1} , défini à l'alinéa précédent, par la simple application de l'algorithme de Cramer, il en est, comme cela résulte d'une remarque élémentaire (n° 1), une combinaison multiplicatoire; à son tour, le groupe φ_{C+1} est, en vertu de l'alinéa II, une combinaison multiplicatoire de

$$(21) \quad (\psi_{\delta}, \psi_{\delta+1}, \dots, \psi_C, \iota_{C+1});$$

finaleme^{nt}, le système

$$(\psi_{\delta}, \psi_{\delta+1}, \dots, \psi_C)$$

est, comme nous l'avons dit, une combinaison multiplicatoire de

$$(\iota_{\delta}, \iota_{\delta+1}, \dots, \iota_C),$$

, d'où il résulte que (21) est une combinaison multiplicatoire de (19). On voit donc, de proche en proche, que le groupe ψ_{c+1} est, lui aussi, une combinaison multiplicatoire de (19).

2° Le système (19) est une combinaison multiplicatoire de (20).

Effectivement, le système (19) se compose du système (17) et du groupe t_{c+1} .

Or, en vertu de ce qui est admis pour la valeur C, le système (17) est une combinaison multiplicatoire de (18), et, par là même, de (20).

Quant au groupe t_{c+1} , il est, en vertu de l'alinéa précédent, une combinaison multiplicatoire de

$$(22) \quad (\psi_0, \psi_{c+1}, \dots, \psi_c, \varphi_{c+1});$$

à son tour, le groupe φ_{c+1} en est une de ψ_{c+1} , d'où il résulte que (22) est une combinaison multiplicatoire de (20). On voit donc, de proche en proche, que t_{c+1} est, lui aussi, une combinaison multiplicatoire de (20).

IV. Revenons à notre énoncé général.

Le système S faisant partie de W, le système ${}^{(c)}S$ fait partie de ${}^{(c)}W$, et, par suite, en est une combinaison multiplicatoire.

Réciproquement, désignons par Ψ et T les systèmes respectifs (10) et (9). Le système W faisant partie de Ψ , le système ${}^{(c)}W$ fait partie de ${}^{(c)}\Psi$, et, par suite, en est une combinaison multiplicatoire. D'ailleurs, les systèmes Ψ et T satisfaisant, en vertu de l'alinéa III, à toutes les conditions requises par notre énoncé du n° 7, l'un quelconque des deux systèmes ${}^{(c)}\Psi$, ${}^{(c)}T$, le premier par exemple, ${}^{(c)}\Psi$, est une combinaison multiplicatoire de l'autre, ${}^{(c)}T$. Enfin, ${}^{(c)}T$ comprend manifestement les mêmes équations que ${}^{(c)}S$. On voit donc, de proche en proche, que ${}^{(c)}W$ est une combinaison multiplicatoire de ${}^{(c)}S$.

10. Aux conventions d'écriture posées au n° 5 nous adjoindrons désormais la suivante.

Si sur un système différentiel (ou sur une fonction composée différentielle) on effectue un changement linéaire et homogène des variables indépendantes (c'est-à-dire un changement où les nouvelles variables s'expriment par des fonctions linéaires et homogènes

des anciennes, et inversement), le nouveau système (ou la nouvelle fonction composée) obtenu par l'application pure et simple des formules de la transformation sera désigné par la même notation mise deux fois entre crochets.

Supposons, notamment, qu'il s'agisse d'un système, S, où les variables indépendantes aient été affectées de cotes respectives toutes égales à 1 et les fonctions inconnues de cotes respectives quelconques; puis que, sur le système S, on effectue le changement de variables dont il s'agit, en attribuant de même aux nouvelles variables des cotes respectives toutes égales à 1, et en conservant aux fonctions inconnues les cotes respectives qu'elles avaient avant la transformation. Cela étant, la notation $^{(c)}[[S]]$, par exemple, désignera, parmi les relations appartenant au système transformé $[[S]]$ ou s'en déduisant par de simples différentiations d'ordres quelconques (relatives aux nouvelles variables), l'ensemble de celles dont la cote ne surpasse pas C; la notation $[[^{(c)}S]]$ désignera le groupe obtenu en considérant, parmi les relations qui appartiennent au système primitif S ou qui s'en déduisent par de simples différentiations d'ordres quelconques (relatives aux anciennes variables), l'ensemble de celles dont la cote ne surpasse pas C, et en effectuant sur elles le changement de variables; etc.

11. Si deux systèmes différentiels, S, T, impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes, sont en corrélation multiplicatoire, les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par un même changement de variables linéaire et homogène jouissent aussi de cette propriété.

Effectivement, si l'on désigne par

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \dots, \quad L_g = 0$$

les équations de S, il résulte de la corrélation supposée entre S et T que toute équation de T est de la forme

$$\Lambda_1 L_1 + \Lambda_2 L_2 + \dots + \Lambda_g L_g = 0,$$

où $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_g$ sont des multiplicateurs convenablement choisis.

Après le changement de variables, cette équation prendra donc la forme

$$[[\Lambda_1]] [[L_1]] + [[\Lambda_2]] [[L_2]] + \dots + [[\Lambda_g]] [[L_g]] = 0.$$

Ainsi, toute équation de $[[T]]$ est une combinaison multiplicatoire de $[[S]]$, et l'on prouverait de même la réciproque.

12. Soient S et T deux systèmes différentiels impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes.

Considérant les équations du système S, effectuons sur elles toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., m, puis, sur le système résultant, un changement de variables linéaire et homogène.

Considérant à leur tour les équations du système T, opérons dans l'ordre inverse, c'est-à-dire effectuons d'abord sur elles le changement de variables dont il s'agit, puis, sur les équations résultantes, toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., m (relativement aux nouvelles variables).

Cela étant, si les deux systèmes S, T sont en corrélation multiplicatoire, les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par les deux suites d'opérations ci-dessus définies jouissent aussi de cette propriété.

I. Étant donnée une relation différentielle, effectuons sur elle toutes les différentiations premières, puis sur les équations résultantes un changement de variables linéaire et homogène. Renversons maintenant l'ordre des deux opérations, c'est-à-dire effectuons d'abord sur la relation proposée le changement de variables dont il s'agit, puis sur l'équation transformée toutes les différentiations premières (relativement aux variables nouvelles). Je dis que *les deux systèmes ainsi obtenus* (dans lesquels il est inutile de comprendre l'équation transformée elle-même) *sont en corrélation multiplicatoire* (le passage de l'un à l'autre s'effectuant à l'aide de multiplicateurs constants).

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait trois variables indépendantes, et que les anciennes, x, y, z , soient liées aux nouvelles, x', y', z' ,

z' , par les relations

$$(23) \quad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{cases}$$

Soit, d'autre part,

$$(24) \quad \mathbf{F}\left(x, y, z, u, \dots, \frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g \partial y^h \partial z^k}, \dots\right) = 0$$

la relation différentielle proposée entre les inconnues u, \dots . Soit, enfin,

$$(25) \quad \frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g \partial y^h \partial z^k} = \sum \Lambda_{p',q',r'} \frac{\partial^{p'+q'+r'} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'} \partial z^{r'}}$$

la formule qui exprime la dérivée ancienne $\frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g \partial y^h \partial z^k}$ à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre : dans le second membre de cette formule, la sommation doit être étendue à toutes les valeurs des entiers p', q', r' pour lesquelles on a

$$p' + q' + r' = g + h + k,$$

et $\Lambda_{p',q',r'}$ désigne une fonction entière et homogène, de degré $g + h + k$, des coefficients de la transformation.

Effectuons d'abord sur l'équation proposée (24) les différentiations premières relatives à x, y, z , puis sur les trois équations résultantes la transformation (23). En posant, pour abréger,

$$\frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g \partial y^h \partial z^k} = u_{g,h,k},$$

il vient, par les différentiations,

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_{g,h,k}} \frac{\partial^{(g+1)+h+k} u}{\partial x^{g+1} \partial y^h \partial z^k} + \dots = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_{g,h,k}} \frac{\partial^{g+(h+1)+k} u}{\partial x^g \partial y^{h+1} \partial z^k} + \dots = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \dots + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_{g,h,k}} \frac{\partial^{g+h+(k+1)} u}{\partial x^g \partial y^h \partial z^{k+1}} + \dots = 0. \end{cases}$$

D'autre part, la formule qui exprime la dérivée ancienne $\frac{\partial^{(g+1)+h+k} u}{\partial x^{g+1} \partial y^h \partial z^k}$ à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre peut s'écrire

$$\frac{\partial^{(g+1)+h+k} u}{\partial x^{g+1} \partial y^h \partial z^k} = \frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial z'},$$

ou, si l'on a égard à la formule (25),

$$\frac{\partial^{(g+1)+h+k} u}{\partial x^{g+1} \partial y^h \partial z^k} = \sum \Lambda_{p',q',r'} \left(\alpha_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x^{p'+1} \partial y^{q'} \partial z^{r'}} + \alpha_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'+1} \partial z^{r'}} + \alpha_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'} \partial z^{r'+1}} \right);$$

et l'on aura, par un calcul semblable,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{g+h+(k+1)} u}{\partial x^g \partial y^{h+1} \partial z^k} &= \sum \Lambda_{p',q',r'} \left(\beta_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x^{p'+1} \partial y^{q'} \partial z^{r'}} + \beta_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'+1} \partial z^{r'}} + \beta_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'} \partial z^{r'+1}} \right), \\ \frac{\partial^{g+h+(k+1)} u}{\partial x^g \partial y^h \partial z^{k+1}} &= \sum \Lambda_{p',q',r'} \left(\gamma_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x^{p'+1} \partial y^{q'} \partial z^{r'}} + \gamma_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'+1} \partial z^{r'}} + \gamma_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'} \partial z^{r'+1}} \right), \end{aligned}$$

les sommations des seconds membres étant étendues aux mêmes valeurs de p', q', r' que précédemment. Cela étant, la transformation (23), appliquée aux formules (26), donnera

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x^{p'}} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y^{q'}} + \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial z^{r'}} \right) + \dots \\ & + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \sum \Lambda_{p',q',r'} \left(\alpha_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x^{p'+1} \partial y^{q'} \partial z^{r'}} + \alpha_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'+1} \partial z^{r'}} + \alpha_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'} \partial z^{r'+1}} \right) + \dots = 0, \\ & \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \left(\beta_1 \frac{\partial u}{\partial x^{p'}} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y^{q'}} + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial z^{r'}} \right) + \dots \\ & + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \sum \Lambda_{p',q',r'} \left(\beta_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x^{p'+1} \partial y^{q'} \partial z^{r'}} + \beta_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'+1} \partial z^{r'}} + \beta_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'} \partial z^{r'+1}} \right) + \dots = 0, \\ & \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u} \left(\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x^{p'}} + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial y^{q'}} + \gamma_3 \frac{\partial u}{\partial z^{r'}} \right) + \dots \\ & + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \sum \Lambda_{p',q',r'} \left(\gamma_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x^{p'+1} \partial y^{q'} \partial z^{r'}} + \gamma_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'+1} \partial z^{r'}} + \gamma_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x^{p'} \partial y^{q'} \partial z^{r'+1}} \right) + \dots = 0, \end{aligned} \right.$$

formules dans lesquelles $x, y, z, u_{g,h,k}, \dots$ doivent être remplacés par leurs valeurs provenant de la transformation.

Opérons maintenant dans l'ordre inverse, c'est-à-dire effectuons sur l'équation proposée (24) la transformation (23), puis sur l'équation transformée les différentiations premières relatives à x', y', z' . Il vient ainsi

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x'} + \dots \\ \quad + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \sum \Lambda_{p',q',r'} \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x'^{p'+1} \partial y'^{q'} \partial z'^{r'}} + \dots = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y'} + \dots \\ \quad + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \sum \Lambda_{p',q',r'} \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x'^{p'} \partial y'^{q'+1} \partial z'^{r'}} + \dots = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z'} + \dots \\ \quad + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \sum \Lambda_{p',q',r'} \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x'^{p'} \partial y'^{q'} \partial z'^{r'+1}} + \dots = 0, \end{array} \right.$$

formules dans lesquelles $x, y, z, u_{g,h,k}, \dots$ doivent encore être remplacés par leurs valeurs provenant de la transformation.

Cela étant, il suffit, pour obtenir la première formule (28), de multiplier les équations (27) respectivement par les constantes $\frac{\partial x}{\partial x'}, \frac{\partial y}{\partial x'}, \frac{\partial z}{\partial x'}$, et d'ajouter membre à membre en tenant compte des relations

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial x'}, \\ 0 &= \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_2 \frac{\partial z}{\partial x'}, \\ 0 &= \alpha_3 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_3 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_3 \frac{\partial z}{\partial x'} \quad (1). \end{aligned}$$

Un calcul semblable ferait retomber sur la deuxième formule (28), puis sur la troisième.

(1) Il suffit, pour obtenir ces relations, de considérer, dans les formules (23), x, y, z comme fonctions de x', y', z' , et de différentier par rapport à x' .

Inversement, il suffit, pour obtenir la première formule (27), de multiplier les équations (28) respectivement par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, et d'ajouter membre à membre en tenant compte des relations

$$(29) \quad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial x}{\partial z'} = 1, \\ \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial y}{\partial z'} = 0, \\ \alpha_1 \frac{\partial z}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial z}{\partial z'} = 0 \end{cases} \quad (1).$$

On obtiendra semblablement la deuxième et la troisième formule (27).

(1) Comme on a, en vertu de (23),

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Lambda_1}{\Delta} x' + \frac{\Lambda_2}{\Delta} y' + \frac{\Lambda_3}{\Delta} z', \\ y &= \frac{B_1}{\Delta} x' + \frac{B_2}{\Delta} y' + \frac{B_3}{\Delta} z', \\ z &= \frac{\Gamma_1}{\Delta} x' + \frac{\Gamma_2}{\Delta} y' + \frac{\Gamma_3}{\Delta} z' \end{aligned}$$

où Δ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} &\Lambda_1, \quad B_1, \quad \Gamma_1, \\ &\Lambda_2, \quad B_2, \quad \Gamma_2, \\ &\Lambda_3, \quad B_3, \quad \Gamma_3 \end{aligned}$$

les coefficients respectifs de ses éléments, on a aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x'} &= \frac{\Lambda_1}{\Delta}, & \frac{\partial x}{\partial y'} &= \frac{\Lambda_2}{\Delta}, & \frac{\partial x}{\partial z'} &= \frac{\Lambda_3}{\Delta}, \\ \frac{\partial y}{\partial x'} &= \frac{B_1}{\Delta}, & \frac{\partial y}{\partial y'} &= \frac{B_2}{\Delta}, & \frac{\partial y}{\partial z'} &= \frac{B_3}{\Delta}, \\ \frac{\partial z}{\partial x'} &= \frac{\Gamma_1}{\Delta}, & \frac{\partial z}{\partial y'} &= \frac{\Gamma_2}{\Delta}, & \frac{\partial z}{\partial z'} &= \frac{\Gamma_3}{\Delta}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les relations (29).

II. *La proposition formulée au début du présent numéro 12 est vraie pour $m = 0$.*

C'est ce qui a été démontré au n° 11.

III. *Si la proposition formulée au début du présent numéro 12 est vraie pour une valeur de m , elle l'est pour la valeur suivante $m + 1$.*

Considérons successivement les cinq suites d'opérations définies ci-après :

Première suite. — Effectuer sur S toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., m , $m + 1$, puis sur le système résultant un changement de variables linéaire et homogène.

Deuxième suite. — Effectuer sur S toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., m , sur le système résultant toutes les différentiations des ordres 0, 1, et sur le système obtenu en dernier lieu le changement de variables.

Troisième suite. — Effectuer sur S toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., m , sur le système résultant le changement de variables, et sur le système obtenu en dernier lieu toutes les différentiations des ordres 0, 1.

Quatrième suite. — Effectuer sur T le changement de variables, sur le système résultant toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., m , et sur le système obtenu en dernier lieu toutes les différentiations des ordres 0, 1.

Cinquième suite. — Effectuer sur T le changement de variables, et sur le système résultant toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., m , $m + 1$.

Des cinq systèmes différentiels respectivement obtenus par ces cinq suites d'opérations, le premier est visiblement identique au deuxième.

Si, au système

$$(S, S', S'', \dots, S^{(m)}),$$

déduit de S par toutes les différentiations des ordres

$$0, 1, 2, \dots, m,$$

on applique les conclusions de l'alinéa I, on voit que le deuxième de nos cinq systèmes est en corrélation multiplicatoire avec le troisième.

Considérons maintenant la troisième et la quatrième des cinq suites d'opérations décrites ci-dessus, et, pour les comparer entre elles, faisons d'abord abstraction, dans chacune, de la dernière partie, qui consiste à effectuer sur le système que l'on vient d'obtenir toutes les différentiations des ordres 0, 1. Il résulte alors de ce qui est admis pour la valeur m que les deux systèmes, Q, R, respectivement obtenus avant cette dernière partie de l'opération, sont en corrélation multiplicatoire, puis, du n° 2, que les deux systèmes respectivement déduits de Q et R par toutes les différentiations des ordres 0, 1 jouissent de la même propriété.

Enfin, le quatrième de nos cinq systèmes différentiels est visiblement identique au cinquième.

De ces comparaisons, faites de proche en proche, il résulte, en définitive, que le premier et le cinquième système sont en corrélation multiplicatoire : c'est ce qu'il s'agissait de prouver.

IV. Le simple rapprochement des alinéas II et III suffit à établir l'exactitude de notre énoncé.

13. Supposons actuellement que, dans les systèmes différentiels S et T, on ait attribué *aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1*, et aux fonctions inconnues des cotes respectives quelconques; désignons alors par δ la cote minima des équations du système, par Δ leur cote maxima, et par C un entier algébrique quelconque (au moins égal à δ); reportons-nous enfin aux conventions des n°s 5 et 10.

Cela étant, pour que les systèmes

$$[{}^C S], \quad {}^{(C)}[T]$$

soient en corrélation multiplicatoire quel que soit C, il suffit que cela ait

l'on suppose que, pour

$$C = \delta, \quad \delta + 1, \quad \dots, \quad \Delta,$$

les deux systèmes

$$(s_\delta, s_{\delta+1}, \dots, s_\Delta)$$

et

$$(t_\delta, t_{\delta+1}, \dots, t_\Delta)$$

soient en corrélation multiplicatoire, la même chose ne peut manquer d'avoir lieu, quel que soit C, pour les deux systèmes

$$[[{}^{(C)}S]], \quad {}^{(C)}[[T]].$$

Il suffit, en vertu du numéro précédent, de vérifier l'exactitude de notre proposition pour

$$C = \delta, \quad \delta + 1, \quad \dots, \quad \Delta.$$

Pour $C = \delta$, elle résulte immédiatement de l'hypothèse, combinée avec la proposition du n° 11, puisque les systèmes $[[{}^{(\delta)}S]]$, ${}^{(\delta)}[[T]]$ se déduisent respectivement des Tableaux (30) et (31) en prenant sur leur gauche la première colonne.

Pour $C = \delta + 1$, on remarquera, d'une part, qu'en vertu de notre hypothèse, combinée avec la proposition du n° 12, les deux systèmes

$$([s_\delta], [s'_\delta]) \quad \text{et} \quad ([t_\delta], [t'_\delta])'$$

sont en corrélation multiplicatoire; d'autre part, qu'en vertu de notre hypothèse, combinée avec la proposition du n° 11, les deux systèmes

$$([s_\delta], [s_{\delta+1}]) \quad \text{et} \quad ([t_\delta], [t_{\delta+1}])$$

jouissent de la même propriété. Les deux systèmes $[[{}^{(\delta+1)}S]]$, ${}^{(\delta+1)}[[T]]$, respectivement déduits des Tableaux (30) et (31) en prenant sur leur gauche les deux premières colonnes, ont donc entre eux la corrélation voulue.

Pour $C = \delta + 2$, on observera de même que les trois systèmes

$$\begin{aligned} &([s_\delta], [s'_\delta], [s''_\delta]), \\ &([s_\delta], [s_{\delta+1}], [s'_\delta], [s'_{\delta+1}]), \\ &([s_\delta], [s_{\delta+1}], [s_{\delta+2}]) \end{aligned}$$

sont respectivement en corrélation multiplicatoire avec les trois systèmes

$$\begin{aligned} & ([\iota_{\delta}], [\iota_{\delta}]', [\iota_{\delta}]''), \\ & ([\iota_{\delta}], [\iota_{\delta+1}], [\iota_{\delta}]', [\iota_{\delta+1}]'), \\ & ([\iota_{\delta}], [\iota_{\delta+1}], [\iota_{\delta+2}]). \end{aligned}$$

Les deux systèmes

$$[(\delta+2)\mathbf{S}], \quad (\delta+2)[\mathbf{T}],$$

respectivement déduits des Tableaux (30) et (31) en prenant sur leur gauche les trois premières colonnes, ont donc entre eux la corrélation voulue.

Pour $C = \delta + 3$, on observera que les quatre systèmes

$$\begin{aligned} & ([s_{\delta}], [s'_{\delta}], [s''_{\delta}], [s'''_{\delta}]), \\ & ([s_{\delta}], [s_{\delta+1}], [s'_{\delta}], [s'_{\delta+1}], [s''_{\delta}], [s''_{\delta+1}]), \\ & ([s_{\delta}], [s_{\delta+1}], [s_{\delta+2}], [s'_{\delta}], [s'_{\delta+1}], [s'_{\delta+2}]), \\ & ([s_{\delta}], [s_{\delta+1}], [s_{\delta+2}], [s_{\delta+3}]) \end{aligned}$$

sont respectivement en corrélation multiplicatoire avec les quatre systèmes

$$\begin{aligned} & ([\iota_{\delta}], [\iota_{\delta}]', [\iota_{\delta}]'', [\iota_{\delta}]'''), \\ & ([\iota_{\delta}], [\iota_{\delta+1}], [\iota_{\delta}]', [\iota_{\delta+1}]', [\iota_{\delta}]'', [\iota_{\delta+1}]''), \\ & ([\iota_{\delta}], [\iota_{\delta+1}], [\iota_{\delta+2}], [\iota_{\delta}]', [\iota_{\delta+1}]', [\iota_{\delta+2}]'), \\ & ([\iota_{\delta}], [\iota_{\delta+1}], [\iota_{\delta+2}], [\iota_{\delta+3}]). \end{aligned}$$

Et ainsi de suite jusques et y compris $C = \delta + \lambda = \Delta$.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DE CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS AU PREMIER ORDRE.

15. Si, dans une fonction schématique de x, y, \dots , on se propose d'effectuer une coupure à l'aide d'un ensemble E ne contenant aucun monome superflu ⁽¹⁾, l'application d'un procédé tout élémentaire (dont l'indication se trouve contenue dans la démonstration ci-après) fournit, pour le résidu, des termes schématiques (en nombre limité) de forme telle, et écrits les uns à la suite des autres dans un ordre tel, que les trois conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :

1° Tout monome extérieur du résidu (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelque autre monome extérieur par quelqu'une des différences étrangères à la fonction schématique (dégénérée ou non) qui correspond à ce dernier.

2° Tout monome de l'ensemble E s'obtient en multipliant quelque monome extérieur du résidu par quelqu'une des différences étrangères à la fonction schématique (dégénérée ou non) qui correspond à ce dernier.

3° Si, en multipliant un monome élémentaire (extérieur ou non), provenant d'un terme schématique, t , du résidu, par une des différences étrangères à la fonction schématique qui figure dans t , on obtient (au coefficient schématique près) quelque autre monome élémentaire du résidu, ce dernier monome élémentaire provient certainement de quelqu'un des termes schématiques écrits à la suite de t ⁽²⁾.

I. Notre proposition est exacte si dans l'ensemble E ne figure effective-

⁽¹⁾ Sur une question fondamentale du Calcul intégral, I^{re} Partie (*Acta Mathematica*, t. XXIII). — Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales répondant à des conditions initiales données, Chap. I (*Annales de l'École Normale*, 1904).

⁽²⁾ En particulier, un monome élémentaire provenant du dernier terme écrit ne reproduit jamais, par les multiplications indiquées, aucun monome élémentaire du résidu.

ment qu'une seule des différences

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \dots$$

Car l'ensemble E, ne contenant, par hypothèse, aucun terme superflu, se compose nécessairement ici d'un monome unique tel que $(x - x_0)^\alpha$; le résidu de la coupure peut alors s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & F_0(y, \dots) + (x - x_0) F_1(y, \dots) \\ & + (x - x_0)^2 F_2(y, \dots) + \dots + (x - x_0)^{\alpha-1} F_{\alpha-1}(y, \dots), \end{aligned}$$

où $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{\alpha-1}$ désignent α fonctions schématiques des seules variables y, \dots , et où les monomes extérieurs sont

$$(x - x_0)^0, \quad (x - x_0)^1, \quad (x - x_0)^2, \quad \dots, \quad (x - x_0)^{\alpha-1}.$$

On en déduit immédiatement le point à démontrer.

II. Si notre proposition est exacte dans le cas où l'ensemble E contient effectivement moins de $k + 1$ différences, elle l'est encore dans le cas où il en contient $k + 1$.

Supposant, pour fixer les idées, que $x - x_0$ soit une des $k + 1$ différences dont il s'agit, et désignant par α l'exposant maximum dont elle se trouve affectée dans l'ensemble, écrivons le résidu de la coupure E sous la forme

$$\begin{aligned} (1) \quad & T_0(y, \dots) + (x - x_0) T_1(y, \dots) + (x - x_0)^2 T_2(y, \dots) + \dots \\ & + (x - x_0)^{\alpha-1} T_{\alpha-1}(y, \dots) + (x - x_0)^\alpha T(x, y, \dots). \end{aligned}$$

Les expressions

$$(2) \quad T_0(y, \dots), \quad T_1(y, \dots), \quad T_2(y, \dots), \quad \dots, \quad T_{\alpha-1}(y, \dots)$$

s'obtiennent, comme nous l'avons établi ailleurs ⁽¹⁾, par certaines coupures pratiquées dans une fonction schématique des seules variables y, \dots à l'aide d'ensembles où ne figure pas la différence $x - x_0$, et que l'on peut toujours supposer débarrassés de leurs monomes

(1) Voir les Mémoires cités au début de ce Chapitre.

superflus; quant à l'expression

$$(3) \quad T(x, y, \dots),$$

ou bien elle est identiquement nulle, ou bien elle s'obtient par une coupure pratiquée dans une fonction schématique de toutes les variables x, y, \dots à l'aide d'un ensemble où *ne figure pas non plus la différence* $x - x_0$, et qu'on peut supposer, lui aussi, débarrassé de ses monomes superflus. En vertu de ce qui est admis, on peut donc écrire les résidus (2) et (3) de telle façon que, dans ces résidus et dans les ensembles qui les ont fournis, les trois propriétés formulées par l'énoncé général se trouvent satisfaites. *Les supposant désormais écrits ainsi*, nous rappellerons, conformément à ce qui a été établi dans un des Mémoires cités (1), que les deux premières propriétés se trouvent vérifiées pour l'ensemble E et le résidu correspondant (1), et il nous reste à faire voir que la troisième propriété l'est également.

Considérons, à cet effet, dans le résidu (1), un monome élémentaire (extérieur ou non) provenant de la portion

$$(4) \quad (x - x_0)^{\alpha'} T_{\alpha'}(y, \dots),$$

où α' est supposé $< \alpha$, et soient

$$(5) \quad (x - x_0)^{\alpha'} (y - y_0)^{\beta} \dots$$

le monome élémentaire dont il s'agit, t le terme du résidu (1) d'où il provient: ce terme t est le produit de $(x - x_0)^{\alpha'}$ par quelque terme, τ , du résidu $T_{\alpha'}(y, \dots)$, et le terme τ est, à son tour, le produit de quelque monome indépendant de $x - x_0$ par quelque fonction schématique indépendante de x . Cela étant, si, en multipliant le monome élémentaire (5) par $x - x_0$, on reproduit un monome élémentaire du résidu (1), ce monome

$$(x - x_0)^{\alpha'+1} (y - y_0)^{\beta} \dots$$

ne peut provenir que de la portion du résidu (1) qui contient le fac-

(1) *Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales répondant à des conditions initiales données*, Chap. I (*Annales de l'École Normale*, 1904).

teur $(x - x_0)^{\alpha'+1}$, et, par suite, que de l'un des termes de ce résidu écrits à la suite du terme ι . Si, en multipliant le monome élémentaire (5) par une des différences, autres que $x - x_0$, étrangères à la fonction schématique qui figure dans ι (et τ), on reproduit un monome élémentaire du résidu (1), ce monome élémentaire est fourni par la portion (4); il en résulte qu'en considérant le monome élémentaire

$$(y - y_0)^\beta \dots$$

fourni par le terme τ du résidu $T_\alpha(y, \dots)$, et le multipliant par la différence dont il s'agit (étrangère, comme nous venons de le dire, à la fonction schématique qui figure dans τ), on reproduit un monome élémentaire de $T_\alpha(y, \dots)$: en vertu de ce qui est admis, ce dernier est fourni par l'un des termes de $T_\alpha(y, \dots)$ écrits à la suite de τ ; donc le monome élémentaire de (1) sera fourni par l'un des termes de (1) écrits à la suite de ι .

Considérons maintenant un monome élémentaire provenant de la portion

$$(6) \quad (x - x_0)^\alpha T(x, y, \dots)$$

du résidu (1): si un pareil monome élémentaire existe, c'est, évidemment, que l'expression schématique $T(x, y, \dots)$ n'est pas identiquement nulle, et, dès lors, ainsi que nous l'avons rappelé, cette expression se déduit d'une fonction schématique de toutes les variables x, y, \dots par une coupure opérée à l'aide d'un ensemble où ne figure pas la différence $x - x_0$. Cela étant, soient

$$(7) \quad (x - x_0)^{\alpha+\alpha''} (y - y_0)^\gamma \dots \quad [\alpha'' \geq 0]$$

le monome élémentaire dont il s'agit, et ι le terme de (6) d'où il provient: ce terme ι est le produit de $(x - x_0)^\alpha$ par quelque terme, τ , du résidu $T(x, y, \dots)$, et le terme τ est, à son tour, le produit de quelque monome par quelque fonction schématique. Si, en multipliant le monome élémentaire (7) par une des différences étrangères à la fonction schématique qui figure dans ι (et τ), on reproduit un monome élémentaire du résidu (1), ce dernier monome ne peut provenir que de la portion (6), puisque l'exposant de $x - x_0$ y est au moins égal à α ; il en résulte qu'en considérant le monome élémentaire

taire

$$(x - x_0)^{\alpha''} (y - y_0)^{\gamma} \dots$$

fourni par le terme τ du résidu $T(x, y, \dots)$, et le multipliant par la différence dont il s'agit (étrangère, comme nous venons de le dire, à la fonction schématique qui figure dans τ), on reproduit un monome élémentaire de $T(x, y, \dots)$: en vertu de ce qui est admis, ce dernier est fourni par l'un des termes de $T(x, y, \dots)$ écrits à la suite de τ ; donc le monome élémentaire de (1) sera fourni par l'un des termes de (1) écrits à la suite de ι .

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II suffit à prouver l'exactitude de notre énoncé général.

16. *Dans une fonction schématique des variables x, y, \dots , effectuons une coupure à l'aide d'un ensemble E ne contenant aucun monome superflu, et supposons que les fonctions schématiques figurant dans l'expression du résidu se réduisent toutes à des constantes.* Une pareille expression, dont la forme est évidemment unique quand on y fait abstraction de l'ordre des termes, possède dès lors, en vertu du numéro précédent, les trois propriétés ci-après :

1° *Si l'on considère (abstraction faite de leurs coefficients schématiques) les monomes, en nombre essentiellement fini, du résidu, l'un quelconque d'entre eux (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelqu'un des autres par quelqu'une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$*

2° *Tout monome de l'ensemble E s'obtient en multipliant quelqu'un des monomes du résidu par quelqu'une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$*

3° *Les monomes du résidu peuvent être rangés les uns à la suite des autres dans un ordre tel, que si, en multipliant quelqu'un d'entre eux par quelqu'une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$, on reproduit quelqu'un des autres, ce dernier occupe toujours un rang plus éloigné que le premier ⁽¹⁾.*

(1) Il suffit, pour cela, que le degré n'aille jamais en diminuant lorsqu'on passe d'un monome au suivant. Et il va sans dire que le dernier d'entre eux n'en peut, par les multiplications indiquées, reproduire aucun autre.

17. Dans une fonction schématique des variables x, y, \dots , proposons-nous d'effectuer une coupure à l'aide d'un ensemble E ne contenant aucun monome superflu, et supposons que dans l'expression du résidu figure quelque fonction schématique non dégénérée. Cela étant, si l'on désigne par N un entier (arithmétique) convenablement choisi, et par P un entier supérieur ou égal à N , arbitraire d'ailleurs, l'application d'un procédé tout élémentaire fournit, pour le résidu, des termes schématiques (en nombre limité) de forme telle, et écrits les uns à la suite des autres dans un ordre tel, que les quatre conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :

1° Le degré maximum des monomes extérieurs est exactement égal à P ; à l'un au moins des monomes extérieurs de degré P correspond, dans l'expression du résidu, une fonction schématique non dégénérée, et à tous ceux de degré inférieur à P correspondent des constantes schématiques.

2° Tout monome extérieur (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelque autre monome extérieur (ce dernier de degré nécessairement inférieur à P) par quelque une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$

3° Tout monome de l'ensemble E s'obtient en multipliant quelque monome extérieur du résidu par quelque une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$, et cela de telle façon que, si au second de ces deux monomes correspond une fonction schématique non dégénérée, la différence par laquelle on doit le multiplier pour reproduire le premier soit étrangère à la fonction schématique dont il s'agit.

4° Si, en multipliant un monome élémentaire (extérieur ou non), provenant d'un terme schématique, t , du résidu, par une des différences étrangères à la fonction schématique (dégénérée ou non) qui figure dans t , on reproduit (au coefficient schématique près) quelque autre monome élémentaire du résidu, ce dernier monome élémentaire provient certainement de quelque un des termes schématiques écrits à la suite de t ⁽¹⁾.

1. En désignant par K un entier positif donné, le développement d'une fonction schématique des variables x, y, \dots peut être mis (sans omission

(¹) En particulier, un monome élémentaire provenant du dernier terme écrit ne reproduit jamais, par les multiplications indiquées, aucun monome élémentaire du résidu.

ni répétition de monomes élémentaires) sous la forme d'une somme de termes, en nombre limité, qui s'obtiennent :

Les uns, en multipliant respectivement par des constantes schématiques les divers monomes (à coefficient 1) de degrés 0, 1, 2, ..., K - 1 par rapport à l'ensemble des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$;

Les autres, en multipliant respectivement les divers monomes de degré K (à coefficient 1) par diverses fonctions schématiques (non dégénérées), dont une, et une seule, dépend à la fois de toutes les variables.

Ces termes peuvent d'ailleurs être rangés les uns à la suite des autres dans un ordre tel : 1° que le dernier d'entre eux contienne la fonction schématique dépendant de toutes les variables; 2° que le produit d'un monome élémentaire provenant d'un terme, t , autre que le dernier, par une des différences étrangères à la fonction schématique (dégénérée ou non) qui figure dans t , soit identique (au coefficient schématique près) à l'un des monomes élémentaires fournis par les termes suivants.

A. La propriété est vraie si le nombre des variables est égal à 1.

Car, en désignant par x la variable unique, par A_0, A_1, \dots, A_{K-1} des constantes schématiques, et par $\Pi(x)$ une fonction schématique de x , la proposée peut s'écrire sous la forme

$$A_0 + (x - x_0)A_1 + \dots + (x - x_0)^{K-1}A_{K-1} + (x - x_0)^K \Pi(x).$$

B. Si la propriété est vraie pour n variables, elle l'est aussi pour $n + 1$.

Désignons par x, y, \dots les $n + 1$ variables dont il s'agit, et distinguons dans le développement diverses portions comprenant : la première, les termes de degré zéro en $x - x_0$; la seconde, les termes de degré 1 en $x - x_0$; etc.; l'avant-dernière, les termes de degré $K - 1$ en $x - x_0$; la dernière, les termes de degré *au moins* égal à K en $x - x_0$. Nous aurons ainsi l'expression

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(y, \dots) + (x - x_0) F_1(y, \dots) + \dots \\ + (x - x_0)^{K-1} F_{K-1}(y, \dots) + (x - x_0)^K F(x, y, \dots), \end{array} \right.$$

où F_0, F_1, \dots, F_{K-1} désignent des fonctions schématiques de y, \dots , et F une fonction schématique de x, y, \dots .

Or, en vertu de ce qui est admis pour n variables :

La fonction schématique $F_0(y, \dots)$ peut s'obtenir en multipliant les divers monomes de degré K en $y - y_0, \dots$ par diverses fonctions schématiques (non dégénérées) de quelques-unes des n variables y, \dots , et ajoutant à cette somme de produits un polynome entier de degré $K - 1$ en $y - y_0, \dots$ à coefficients indéterminés, cela de telle façon que la circonstance spécifiée dans la dernière partie de l'énoncé du présent alinéa I se trouve réalisée;

La fonction schématique $F_1(y, \dots)$ peut s'obtenir de même en multipliant les divers monomes de degré $K - 1$ en $y - y_0, \dots$ par diverses fonctions schématiques (non dégénérées) de quelques-unes des n variables y, \dots , et ajoutant à cette somme de produits un polynome entier de degré $K - 2$ en $y - y_0, \dots$ à coefficients indéterminés, cela de telle façon que la circonstance spécifiée par la dernière partie de notre énoncé se trouve réalisée;

Etc.;

La fonction schématique $F_{k-1}(y, \dots)$ peut s'obtenir en multipliant les divers monomes du premier degré $y - y_0, \dots$ par diverses fonctions schématiques (non dégénérées) de quelques-unes des n variables y, \dots , et ajoutant à cette somme de produits une constante schématique, cela de telle façon que la circonstance spécifiée par la dernière partie de notre énoncé se trouve réalisée.

Enfin, la fonction schématique $F(x, y, \dots)$ sera laissée *telle qu'elle est*.

Cela étant, il est facile de voir, à l'aide de la formule (8), que la propriété ne cesse pas d'être vraie pour $n + 1$ variables.

Effectivement, l'expression (8) (après les substitutions qui viennent d'être indiquées sur F_0, F_1, \dots, F_{k-1}) s'obtient évidemment en multipliant les divers monomes de degré K en $x - x_0, y - y_0, \dots$ par diverses fonctions schématiques (non dégénérées) dont une seule dépend des $n + 1$ variables x, y, \dots , et ajoutant à cette somme de produits un polynome entier de degré $K - 1$ en $x - x_0, y - y_0, \dots$ à coefficients indéterminés. D'ailleurs, l'ordre dans lequel nous avons écrit les termes est tel, que la circonstance spécifiée par la dernière partie de notre énoncé se trouve réalisée, car : 1° la dernière fonction schématique $F(x, y, \dots)$ dépend de *toutes* les variables sans exception; 2° les multiplications indiquées portant sur des monomes élémen-

taires fournis par des termes où l'exposant de la différence $x - x_0$ est inférieur à K , il suffira de répéter, avec de légères modifications, le raisonnement fait dans la première partie de l'alinéa II du n° 15.

C. Le simple rapprochement de A et B suffit à établir le point que nous avons actuellement en vue.

Il est clair d'ailleurs que, dans l'expression schématique ainsi obtenue, tout monome extérieur (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelqu'un des autres monomes extérieurs par quelqu'une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$

II. Revenant à notre énoncé général, mettons le résidu de la coupure sous une forme, Φ , qui satisfasse à la triple condition formulée dans le n° 15, et désignons par N le degré maximum des monomes extérieurs qui y figurent, par P un entier supérieur ou égal à N , arbitraire d'ailleurs. Considérant ensuite un terme quelconque de ce résidu Φ , désignons par n le degré du monome extérieur qui y figure ($n \leq N \leq P$), et par K_n la différence (positive ou nulle) $P - n$. Si le terme considéré ne contient qu'une fonction schématique dégénérée, nous le laisserons tel qu'il est; dans le cas contraire (qui, d'après l'hypothèse, se produit forcément pour quelqu'un des termes), nous remplacerons, conformément à l'alinéa I, la fonction schématique (non dégénérée) par un polynome de degré K_n , entier par rapport aux différences dont elle dépend, et où les termes de degré inférieur à K_n aient pour coefficients des constantes arbitraires, tandis que les termes de degré K_n auront pour coefficients des fonctions schématiques non dégénérées (cela de telle façon, d'ailleurs, que la circonstance spécifiée dans la dernière partie de l'énoncé de l'alinéa I se trouve réalisée). En opérant ainsi sur tous les termes de Φ , il est facile de voir que les diverses conditions requises par notre énoncé général se trouveront satisfaites dans la nouvelle forme.

Effectivement :

1° Le degré maximum des monomes extérieurs est, d'après ce qui précède, exactement égal à P ($n + K_n = P$), et à tous ceux de degré inférieur à P correspondent des constantes schématiques; enfin, l'un au moins des monomes extérieurs de degré P se trouvera multiplié par une fonction schématique non dégénérée.

2° Tout monome extérieur figurant primitivement dans Φ se trouve remplacé, dans la nouvelle forme du résidu, par un groupe de monomes extérieurs : pour obtenir le groupe en question (abstraction faite des fonctions ou constantes schématiques qui correspondent à ses différents termes), il suffit de multiplier par le monome extérieur primitif les divers termes d'un certain polynome, entier par rapport à quelques-unes des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$, et ayant, avec un degré positif ou nul, tous ses coefficients égaux à 1. Cela étant, si nous considérons, dans la nouvelle forme du résidu, l'ensemble des monomes extérieurs qui figuraient primitivement dans Φ , il résulte du n° 15 que chacun d'entre eux (sauf celui de degré zéro) peut s'obtenir en multipliant quelqu'un des autres par quelque'une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$. Si nous considérons d'autre part le groupe par lequel se trouve actuellement remplacé l'un quelconque des monomes primitifs (groupe en tête duquel figure le monome primitif dont il s'agit), il résulte de la manière même dont on a obtenu le groupe en question que l'un quelconque de ses termes (sauf le monome primitif) s'obtient en multipliant quelqu'un des autres par quelque'une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$. On voit donc bien que, dans la nouvelle forme, tout monome extérieur (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelque autre monome extérieur par quelque'une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$.

3° Il résulte du n° 15 que tout monome de l'ensemble E s'obtient en multipliant quelque monome extérieur de Φ par quelque'une des différences $x - x_0, y - y_0, \dots$. Or, ce monome extérieur figure aussi dans la nouvelle forme du résidu. D'ailleurs, pour que la fonction schématique qui lui correspond dans la nouvelle forme ne soit pas dégénérée, il est nécessaire que le monome extérieur soit de degré P, et, par suite, que la différence ci-dessus désignée par K_x se réduise pour lui à zéro : le terme de Φ où il figure est donc resté tel qu'il est dans le passage à la nouvelle forme, et, dès lors, en vertu du n° 15, la différence par laquelle on doit le multiplier pour reproduire le monome considéré de E est étrangère à la fonction schématique dont il s'agit.

4° La forme primitive Φ se compose d'un certain nombre de termes écrits dans un certain ordre; et, pour passer de cette forme à la nou-

velle, on y a remplacé chaque fonction schématique non dégénérée par un groupe de termes écrits, eux aussi, dans un certain ordre, conformément à l'alinéa I.

Cela étant, considérons, dans Φ , un terme qui n'ait pas changé dans le passage de la forme primitive à la nouvelle. Si, en multipliant un monome élémentaire provenant de ce terme par une différence étrangère à la fonction schématique correspondante (dégénérée ou non), on reproduit un monome élémentaire du résidu, ce dernier monome est certainement fourni, en vertu du n° 15, par quelqu'un des termes qui, dans la forme primitive, sont écrits à la suite du terme considéré : il en sera donc évidemment ainsi dans la forme nouvelle.

Considérons maintenant, dans Φ , un terme qui ne soit pas resté identique à lui-même dans le passage de la forme primitive à la nouvelle : ce terme primitif, ι , produit d'un monome extérieur primitif, m , par une fonction schématique primitive, F , se trouve remplacé par une suite de termes, ι' , ι'' , ..., obtenue en substituant à la fonction schématique primitive une expression construite conformément aux indications de l'alinéa I : cette expression est de la forme

$$m'F' + m''F'' + \dots,$$

où m' , m'' , ... désignent certains monomes extérieurs, et F' , F'' , ... certaines fonctions schématiques, en sorte que le groupe des termes ι' , ι'' , ... a lui-même la forme

$$mm'F' + mm''F'' + \dots$$

Cela étant, considérons un monome élémentaire provenant de l'un des termes ι' , ι'' , ..., par exemple du terme ι'' , et supposons qu'en le multipliant par une des différences étrangères à la fonction schématique F'' , qui figure dans le terme en question, on reproduise un des monomes élémentaires du résidu. Deux cas sont alors à distinguer.

Si la différence dont il s'agit est étrangère à la fonction schématique primitive F , le monome élémentaire qui provient de cette multiplication est fourni, dans la forme primitive Φ , par un des termes écrits à la suite de ι : il est donc fourni, dans la forme nouvelle, par un des groupes de termes qui viennent à la suite du groupe (ι', ι'', \dots) .

Supposons maintenant que la différence par laquelle on multiplie soit étrangère à F'' sans l'être à F [d'où résulte nécessairement que, dans le groupe (t', t'', \dots) , le terme t'' ne peut être le dernier écrit]. Il est clair que la multiplication d'un monome élémentaire provenant du terme primitif t par une différence non étrangère à la fonction primitive F donne un monome élémentaire provenant du même terme t : donc, la multiplication d'un monome élémentaire provenant de t'' par une différence qui soit étrangère à F'' sans l'être à F donne un monome élémentaire provenant du groupe de termes (t', t'', \dots) , c'est-à-dire de

$$mm'F' + mm''F'' + \dots;$$

il en résulte, en faisant abstraction du facteur m , que la multiplication d'un monome élémentaire provenant de $m''F''$ par la différence dont il s'agit donne un monome élémentaire provenant du groupe

$$m'F' + m''F'' + \dots$$

Si l'on a égard à la manière dont cette dernière expression a été construite, on voit qu'un pareil produit est nécessairement fourni par un des termes écrits à la suite de $m''F''$, d'où l'on conclut, en rétablissant le facteur m , que le produit considéré en premier lieu est fourni par un des termes écrits à la suite de $mm''F''$, c'est-à-dire de t'' .

18. Des propositions que nous venons d'établir, on en déduit aisément une autre relative à la forme des conditions initiales dans un système différentiel.

Soit S un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et tel qu'aucun des premiers membres n'y soit une dérivée de quelque autre. Aux diverses variables indépendantes attribuons des cotes respectives toutes égales à 1, et aux fonctions inconnues des cotes respectives quelconques ; puis, partageons les conditions initiales en groupes, suivant qu'elles se rapportent à telle ou telle inconnue. Cela posé, l'application d'un procédé tout élémentaire fournit, pour chaque groupe de conditions initiales, des relations de

forme telle, et écrites les unes à la suite des autres dans un ordre tel, que les diverses circonstances suivantes se trouvent à la fois réalisées :

1° *Si l'on désigne par Γ la cote maxima des premiers membres dans l'ensemble formé par les divers groupes de conditions initiales, chacune des conditions dont le premier membre est de cote inférieure à Γ a pour second membre une constante schématique.*

2° *Toute dérivée (d'ordre > 0) figurant comme premier membre dans quelqu'une des conditions initiales peut se déduire de quelque autre des conditions initiales (du même groupe) à l'aide de quelque dérivation première effectuée sur le premier membre de cette autre.*

3° *Tout premier membre du système S peut se déduire de quelqu'une des conditions initiales à l'aide de quelque dérivation première effectuée sur le premier membre de celle-ci, et cela de telle façon que, si la condition initiale dont il s'agit a pour second membre une fonction schématique non dégénérée, la dérivation première à effectuer sur le premier membre n'intéresse aucune des variables dont dépend la fonction schématique du second membre.*

4° *Considérant, dans l'un quelconque des groupes, l'une quelconque des conditions initiales, effectuons sur son premier membre une différentiation (d'ordre quelconque, positif ou nul) qui intéresse exclusivement les variables dont dépend la fonction schématique du second membre; effectuons ensuite sur le résultat (qui est une dérivée paramétrique ou une inconnue du système S) une différentiation première n'intéressant pas les variables dont il s'agit. Cela étant, si ce nouveau résultat est lui-même une dérivée paramétrique de S, il se déduit de quelqu'une des conditions initiales qui suivent (dans le groupe en question) en effectuant sur le premier membre de cette dernière une différentiation (d'ordre positif ou nul) relative aux seules variables dont dépend la fonction schématique du second membre ⁽¹⁾.*

Si l'on désigne par u l'une quelconque des inconnues engagées dans le système S, le groupe de conditions initiales relatif à l'inconnue u

(1) En particulier, le premier membre de la dernière condition initiale d'un groupe quelconque ne reproduit jamais, par les différentiations indiquées, aucune dérivée paramétrique.

s'obtient, comme il a été expliqué dans un travail antérieur, en pratiquant une certaine coupure dans une fonction schématique des variables indépendantes x, y, \dots ; d'ailleurs, pour avoir les divers termes de l'ensemble à l'aide duquel on doit effectuer la coupure, il suffit de prendre, parmi les premiers membres de S, ceux qui sont des dérivées de l'inconnue u , et d'en déduire respectivement, par la considération des ordres partiels de dérivation, certains monomes entiers par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \dots$. Or, puisque, par hypothèse, aucun des premiers membres du système S n'est une dérivée de quelque autre, l'ensemble ainsi obtenu ne contient aucun monome superflu.

Cela étant, si le résidu de la coupure ne contient que des constantes schématiques (auquel cas sa forme, abstraction faite de l'ordre des termes, est unique), nous désignerons par N_u le degré le plus élevé des monomes extérieurs qui y figurent; s'il contient quelque fonction schématique non dégénérée, nous désignerons par N_u l'entier (arithmétique) convenablement choisi dont il est question au n° 17; dans l'un et l'autre cas, nous désignerons par c_u la cote de l'inconnue u . Opérant ensuite pour chacune des inconnues v, w, \dots comme nous l'avons fait pour u , nous considérerons les divers entiers (algébriques)

$$N_u + c_u, \quad N_v + c_v, \quad N_w + c_w, \quad \dots,$$

et nous désignerons par Γ le plus grand d'entre eux : les différences

$$\Gamma - c_u, \quad \Gamma - c_v, \quad \Gamma - c_w, \quad \dots$$

seront, dès lors, au moins égales aux entiers arithmétiques

$$N_u, \quad N_v, \quad N_w, \quad \dots$$

Cela fait, considérons le résidu de la coupure relative à l'inconnue u .

Si ce résidu ne contient que des constantes schématiques, l'ordre maximum des premiers membres, dans le groupe correspondant de conditions initiales, sera N_u , et leur cote maxima $N_u + c_u \leq \Gamma$; tous les seconds membres se réduiront, d'ailleurs, à des constantes schématiques, et il en sera ainsi, notamment, de ceux d'entre eux qui correspondent à des premiers membres de cote inférieure à Γ ; enfin, il

résulte immédiatement du n° 16 qu'en écrivant les termes du résidu dans un ordre convenable, les conditions 2°, 3° et 4° de notre énoncé se trouvent satisfaites en ce qui concerne l'inconnue u .

Si le résidu de la coupure relative à cette inconnue contient quelque fonction schématique non dégénérée, nous le mettrons sous la forme spécifiée au n° 17, en prenant pour P la valeur $\Gamma - c_u$, au moins égale à N_u : dans le groupe correspondant de conditions initiales, l'ordre maximum des premiers membres sera alors $\Gamma - c_u$, et leur cote maxima $(\Gamma - c_u) + c_u = \Gamma$; à tous les premiers membres d'ordre inférieur à $\Gamma - c_u$, c'est-à-dire de cote inférieure à Γ , correspondront, comme seconds membres, des constantes schématiques ; enfin, les termes du résidu étant écrits dans l'ordre spécifié au n° 17, les conditions 2°, 3° et 4° de notre énoncé se trouveront encore satisfaites en ce qui concerne l'inconnue u .

Ce qui vient d'être dit pour cette inconnue doit être répété pour toutes les autres.

Il nous reste, pour achever notre démonstration, à faire voir que, dans les premiers membres des conditions initiales, la cote maxima est égale à Γ . Or, il résulte de ce que nous venons de dire que, dans le groupe partiel relatif à u , la cote maxima des premiers membres est égale à $N_u + c_u$ ou à Γ , suivant que les seconds membres se réduisent tous ou non à des constantes schématiques. Considérant alors l'ensemble des groupes, on voit que, si quelqu'un de leurs seconds membres est une fonction schématique non dégénérée, la cote maxima des premiers membres est Γ , et que, si tous leurs seconds membres sans exception se réduisent à des constantes schématiques, la cote maxima des premiers membres est le plus grand des entiers

$$N_u + c_u, \quad N_v + c_v, \quad N_w + c_w, \quad \dots,$$

c'est-à-dire encore Γ .

Observons, en terminant, qu'en vertu de l'avant-dernière partie, 3°, de notre énoncé, *l'entier $\Gamma + 1$ est au moins égal à la cote maxima des premiers membres de S .*

49. Soit S un système différentiel remplissant les diverses conditions ci-après :

A. Le système S est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, les seconds membres y sont indépendants de toute dérivée principale, et aucun des premiers membres n'y est une dérivée de quelque autre.

B. En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.

Mettons alors les conditions initiales du système S sous la forme spécifiée au n° 18, et désignons par δ et Δ les cotes respectivement minima et maxima des premiers membres de S, par Γ la cote maxima des premiers membres des conditions initiales : d'après ce qui a été vu, l'entier $\Gamma + 1$ est au moins égal à Δ . Cela étant, on peut, des groupes

$$S_{\delta}, S_{\delta+1}, \dots, S_{\Gamma+1}$$

du système S prolongé (nos 3 et 5), extraire respectivement des groupes,

$$(9) \quad t_{\delta}, t_{\delta+1}, \dots, t_{\Gamma+1},$$

possédant la double propriété de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta + 1, \dots, \Gamma + 1,$$

et de contenir les groupes

$$(10) \quad s_{\delta}, s_{\delta+1}, \dots, s_{\Delta}$$

du système S (la chose est possible, dans tous les cas, d'une manière au moins, et, dans l'immense majorité des cas, de plusieurs manières). Nous ferons alors l'hypothèse suivante :

C. Il existe quelque suite, (9), remplissant les conditions ci-dessus indiquées, et telle que les groupes

$$t_{\delta}, t_{\delta+1}, \dots, t_{\Gamma+1}$$

soient successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta + 1, \dots, \Gamma + 1.$$

En d'autres termes, nous supposons que le déterminant différentiel de l'ensemble de ces groupes par rapport à l'ensemble de ces dérivées est une fonction non identiquement nulle (des variables, des inconnues et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres de S); et nous nous astreignons à ne considérer les diverses quantités dont dépend cette fonction que dans les limites où sa valeur numérique reste différente de zéro.

Il importe d'observer que les trois hypothèses *A, B, C*, ci-dessus énoncées, ne se distinguent des trois hypothèses *A, B, C* du n° 9 que par les deux particularités suivantes : 1° Nous supposons expressément, ici, qu'aucun des premiers membres de S n'est une dérivée de quelque autre, ce qui n'avait pas forcément lieu au n° 9. 2° L'entier algébrique Θ , que, au n° 9, nous supposions simplement supérieur ou égal à Δ , reçoit ici la valeur particulière $\Gamma + 1 (\geq \Delta)$.

Cela étant, *on peut, du système S, déduire un système, Σ , du premier ordre, résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des inconnues qui s'y trouvent engagées, et jouissant, par rapport à S, de propriétés remarquables que nous indiquons ci-après* (alinéas I et V du présent numéro).

I. Formation du système Σ .

Étant donné un système différentiel du premier ordre, résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (*u*) et à la ligne (*x*).

Le système Σ étant, comme nous allons le voir, du premier ordre, nous en écrirons les diverses équations dans un quadrillage rectangu-

laire conformément aux indications ci-après, en ne nous occupant tout d'abord que des premiers membres.

Les conditions initiales du système S ayant été mises, comme nous l'avons dit plus haut, sous la forme spécifiée au n° 18, désignons par x, y, \dots les variables indépendantes, par u l'une des inconnues engagées dans S, par $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \dots}$ l'un des premiers membres qui figurent dans le groupe de conditions relatif à u , et par $F_{\alpha, \beta, \dots}$ le second membre correspondant. Cela étant, nous prendrons dans Σ , pour l'une de nos inconnues, la quantité $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \dots}$, que nous désignerons par $u_{\alpha, \beta, \dots}$; puis, en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes x, y, z, s, t , et que la fonction schématique $F_{\alpha, \beta, \dots}$ dépende de s, t , nous écrirons dans les cases $(x), (y), (z)$ de la colonne $(u_{\alpha, \beta, \dots})$ les premiers membres

$$\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial x} = \dots, \quad \frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial y} = \dots, \quad \frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial z} = \dots,$$

et nous laisserons vides les cases (s) et (t) de cette même colonne; au cas où $F_{\alpha, \beta, \dots}$ se réduirait à une simple constante schématique, les cases de la colonne considérée seraient ainsi toutes pleines. Ce que nous venons de faire pour l'une des conditions initiales appartenant au groupe relatif à u , nous le ferons pour toutes les autres du même groupe; et ce que nous aurons fait pour l'inconnue u , nous le ferons successivement pour toutes. Nous aurons ainsi un quadrillage rectangulaire contenant des cases pleines et des cases vides; d'ailleurs, quelques seconds membres que nous écrivions ultérieurement dans les cases pleines, on voit, dès maintenant, que, si l'on forme successivement, dans l'ancien système, puis dans le nouveau, un ensemble composé des inconnues et de leurs dérivées paramétriques, les deux ensembles ainsi obtenus se correspondront terme à terme, et que le second se déduira du premier par de simples changements de notations; de même, et toujours aux notations près, l'économie des conditions initiales sera identique dans les deux systèmes. Quant aux dérivées principales du nouveau système, elles coïncideront, aux notations près, les unes avec des dérivées principales, les autres avec des dérivées paramétriques de l'ancien.

Il va sans dire que *nous conservons aux variables indépendantes et aux anciennes inconnues les cotes respectives qu'elles avaient dans le système S*, et que *nous attribuons aux inconnues adjointes des cotes respectivement égales à celles des dérivées anciennes qu'elles admettent pour homonymes*. Cela étant, il convient d'observer que les fonctions inconnues du système Σ dont la cote tombe au-dessous de Γ n'ont, dans le système Σ , aucune dérivée paramétrique, puisqu'elles se trouvent, dans les conditions initiales, égalées à de simples constantes schématiques, et que, par suite, toutes les cases de leurs colonnes sont pleines. En conséquence, toute dérivée paramétrique du système Σ possède une cote au moins égale à $\Gamma + 1$, et toute dérivée paramétrique de cote $\Gamma + 1$ ne peut appartenir qu'à une fonction inconnue de cote Γ , par suite est du premier ordre.

Occupons-nous maintenant des seconds membres du système Σ .

A cet effet, nous désignerons par

$$(11) \quad \psi_0, \quad \psi_{\Gamma+1}, \quad \dots, \quad \psi_{\Gamma+1}$$

les groupes obtenus par la résolution successive de (9), et qui possèdent, eux aussi, la propriété de contenir les groupes (10) (n° 9).

Cela étant, considérons, pour fixer les idées, l'équation qui, dans Σ , a pour premier membre $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial x}$. A la notation près, ce premier membre coïncide avec une dérivée ancienne,

$$(12) \quad \frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\dots} u}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^{\beta} \dots},$$

dont la cote ne surpasse pas $\Gamma + 1$, et qui peut être, relativement à S, ou paramétrique, ou principale.

1° Si la dérivée (12) est paramétrique par rapport à S, il existe, dans le nouveau système, une dérivée paramétrique ou fonction inconnue, et une seule, qui, à la notation près, coïncide avec elle : nous égalons alors $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial x}$ à cette quantité, et nous aurons une relation dont les deux membres auront même cote que la dérivée (12). Si cette dernière est de cote inférieure ou égale à Γ , le second membre de notre relation sera une inconnue adjointe ; si elle est de cote $\Gamma + 1$, le second membre sera une dérivée paramétrique première du système Σ .

2° Si la dérivée (12) est principale par rapport à S, elle admet, en vertu des équations (11), une certaine expression à la fois indépendante, et de toute dérivée principale (de S) quelle qu'elle soit, et de toute dérivée paramétrique ou fonction inconnue (de S) dont la cote surpasserait la sienne propre; en outre, dans le cas particulier où la dérivée (12) coïncide avec un premier membre de S, l'expression dont il s'agit coïncide avec le second membre correspondant. Cela étant, dans l'expression considérée de la dérivée principale (12), nous remplacerons toutes les dérivées paramétriques de S par les dérivées paramétriques ou fonctions inconnues de Σ qui leur correspondent respectivement, et nous égalerons $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \dots}}{\partial x}$ à l'expression ainsi modifiée. Or, il est facile de voir que, après cette modification d'écriture, l'expression est, ou d'ordre zéro, ou du premier ordre, suivant que la dérivée (12) a une cote inférieure ou égale à $\Gamma + 1$. Dans le premier cas, en effet, elle ne peut contenir (outre les variables indépendantes) que les inconnues anciennes et les expressions nouvelles de leurs dérivées paramétriques de cote inférieure ou égale à Γ , ou, en d'autres termes, que les inconnues anciennes et nouvelles. Dans le second cas, elle ne peut contenir que les inconnues anciennes et les expressions nouvelles de leurs dérivées paramétriques de cote inférieure ou égale à $\Gamma + 1$, ou, en d'autres termes, que les inconnues anciennes et nouvelles avec des dérivées paramétriques premières. Dans l'un et l'autre cas d'ailleurs, s'il arrive que (12) coïncide avec un premier membre de S, l'équation considérée du système Σ coïncide, aux notations près, avec l'équation du système S qui a pour premier membre la dérivée (12).

Tel est le système *du premier ordre*, Σ , auquel fait allusion notre énoncé : on voit qu'il se trouve *résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées*, que *l'économie des conditions initiales y est la même, aux notations près, que dans le système S*, et enfin que *la cote de chaque second membre est au plus égale à celle du premier membre correspondant*.

II. Toute équation de S figure dans Σ , aux notations près.

Effectivement, les conditions initiales de S étant mises, comme

nous l'avons dit, sous la forme spécifiée au n° 18, les quantités qui y figurent comme premiers membres ont des cotes inférieures ou égales à Γ , et, d'autre part, chaque premier membre de S peut se déduire de l'une des quantités en question à l'aide d'une dérivation première, d'où résulte qu'il est de cote au plus égale à $\Gamma + 1$. Cela posé, considérons d'abord dans S un premier membre de cote inférieure à $\Gamma + 1$: la quantité dont il peut être considéré comme une dérivée première est alors de cote inférieure à Γ , et, comme les inconnues de Σ dont la cote tombe au-dessous de Γ n'ont dans Σ aucune dérivée paramétrique, on a été conduit, dans la formation de Σ , à écrire comme premier membre, à la notation près, le premier membre considéré de S . Considérons, en second lieu, dans S , un premier membre de cote $\Gamma + 1$: ce premier membre peut alors être considéré comme une dérivée première d'une quantité de cote Γ figurant dans les conditions initiales de S , et, comme cette dérivation première n'intéresse aucune des variables dont dépend la fonction schématique qui correspond à cette quantité, on a été conduit, cette fois encore, dans la formation de Σ , à écrire comme premier membre, à la notation près, le premier membre considéré de S .

Ainsi, tout premier membre de S figure, à la notation près, parmi les premiers membres de Σ , et, par suite, en vertu d'une remarque faite à l'alinéa I, toute équation de S figure, aux notations près, dans Σ .

III. *Si l'on considère l'une quelconque des inconnues adjointes de Σ , il existe dans le système Σ une relation où l'inconnue dont il s'agit se trouve égalée à une quantité homonyme, dérivée première de quelque inconnue ancienne ou adjointe.*

Effectivement, les inconnues anciennes et nouvelles de Σ ont respectivement pour homonymes les premiers membres des conditions initiales de S , et, dès lors, en vertu du point 2° formulé dans l'énoncé du n° 18, toute inconnue nouvelle de Σ a pour homonyme une dérivée première de quelque autre inconnue ancienne ou nouvelle ; comme, d'ailleurs, cette dernière inconnue a une cote nécessairement inférieure à celle de la première, par suite inférieure à Γ , elle n'admet dans le système Σ aucune dérivée paramétrique ; on a donc été

conduit, dans la formation de ce système, à évaluer entre elles les deux quantités dont il s'agit.

IV. Dans le système Σ , partageons les équations en deux groupes, Σ' , Σ'' , suivant que leur premier membre coïncide (soit exactement, soit à la notation près) avec une dérivée *paramétrique* ou avec une dérivée *principale* du système S : aux notations près, les équations de Σ' sont des identités, et celles de Σ'' comprennent toutes celles de S (II). D'autre part, désignons par H l'ensemble des relations obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Σ à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme : aux notations près, les équations H sont encore des identités. Cela posé, *les systèmes Σ'_c , H_c (n° 5) sont*, comme je vais l'établir, *en corrélation multiplicatoire* (les multiplicateurs étant tous égaux, soit à zéro, soit à l'unité, au signe près).

En premier lieu, toute équation de Σ'_c est une combinaison multiplicatoire de H_c : car, chaque équation de Σ' ayant pour premier et pour second membre deux quantités homonymes (nécessairement de même cote), une équation quelconque de Σ'_c a pour premier et pour second membre deux quantités homonymes de cote C ; dès lors, ou bien le système H_c contient l'équation considérée de Σ'_c , ou bien il contient deux équations égalant respectivement les deux quantités homonymes dont il s'agit à la quantité ancienne qu'elles ont pour homonyme commun, auquel cas une combinaison très simple des deux équations de H_c fait retomber sur l'équation considérée de Σ'_c .

Réciproquement, toute équation de H_c est une combinaison multiplicatoire de Σ'_c . Considérons, en effet, une relation de H_c ; dans cette relation, dont la cote est C, figure une dérivée, d'ordre positif ou nul, de quelque inconnue nouvelle. En vertu de l'alinéa III, il existe, dans le groupe Σ' , une relation égalant l'inconnue dont il s'agit à une quantité homonyme, dérivée première de quelque inconnue ancienne ou nouvelle. Si cette deuxième inconnue est elle-même nouvelle, il existe encore, dans le groupe Σ' , une relation l'égalant à quelque quantité homonyme, dérivée première d'une troisième inconnue. En continuant de cette manière, on finira par tomber sur une inconnue nouvelle qui, en vertu d'une relation de Σ' , se trouvera égale à quelque quantité homonyme, dérivée première d'une inconnue an-

cienne. Il est clair que les relations successivement considérées de Σ' ont des cotes qui décroissent progressivement d'une unité. Cela étant, il est très facile de voir que si, dans le groupe formé par ces relations et par celles qui s'en déduisent à l'aide de différentiations d'ordres quelconques, on considère celles de cote C, leur ensemble, qui fait partie de Σ'_c , régénère, moyennant une combinaison très simple, l'équation considérée de H_c .

V. *En attribuant à la notation H le même sens que dans l'alinéa IV, les deux systèmes*

$$({}^{(C)}\Sigma, \quad ({}^{(C)}H, \quad ({}^{(C)}S)$$

(n° 5) *sont en corrélation multiplicatoire.*

Nommons W le système déduit de Σ'' par la substitution aux nouvelles inconnues et à leurs dérivées de leurs synonymes anciens, et considérons les quatre systèmes successifs

$$\begin{aligned} ({}^{(C)}\Sigma \quad \text{ou} \quad ({}^{(C)}\Sigma', \quad ({}^{(C)}\Sigma''), \\ ({}^{(C)}H, \quad ({}^{(C)}\Sigma''), \\ ({}^{(C)}H, \quad ({}^{(C)}W), \\ ({}^{(C)}H, \quad ({}^{(C)}S). \end{aligned}$$

Il résulte, en premier lieu, de l'alinéa IV que le premier et le second de ces systèmes sont en corrélation multiplicatoire.

Il résulte, en second lieu, de la définition de W que $({}^{(C)}W$ se déduit de $({}^{(C)}\Sigma''$ par la substitution aux nouvelles inconnues et à leurs dérivées de leurs synonymes anciens. Cela étant, si l'on désigne par

$$z'_1, \quad z'_2, \quad \dots, \quad z'_m$$

les diverses quantités *nouvelles* qui figurent dans $({}^{(C)}\Sigma''$, par

$$z_1, \quad z_2, \quad \dots, \quad z_m$$

leurs homonymes *anciens* (dont quelques-uns peuvent être identiques entre eux), et que l'on pose

$$z'_1 - z_1 = \zeta_1, \quad z'_2 - z_2 = \zeta_2, \quad \dots, \quad z'_m - z_m = \zeta_m,$$

d'où

$$z'_1 = z_1 + \zeta_1, \quad z'_2 = z_2 + \zeta_2, \quad \dots, \quad z'_m = z_m + \zeta_m,$$

le développement de Taylor, appliqué aux équations ${}^{(C)}\Sigma''$ à partir de z_1, z_2, \dots, z_m , nous montrera, comme à l'alinéa I du n° 9, que, deux équations correspondantes étant prises respectivement dans ${}^{(C)}\Sigma''$ et ${}^{(C)}W$, l'une quelconque est une combinaison multiplicatoire de l'autre et du système ${}^{(C)}H$. Le second et le troisième de nos quatre systèmes sont donc évidemment en corrélation multiplicatoire.

Enfin, puisque, aux notations près, Σ'' est extrait de (11) et contient toutes les équations de S (II), il est clair que, après le retour aux anciennes notations, W jouit des deux mêmes propriétés, et que, dès lors (n° 9), les systèmes ${}^{(C)}W$, ${}^{(C)}S$ sont en corrélation multiplicatoire; il en est donc de même de nos troisième et quatrième systèmes.

On voit ainsi, de proche en proche, que le premier système et le dernier sont en corrélation multiplicatoire.

20. Dans le cas où le système différentiel proposé S est *orthonome* ⁽¹⁾, sans qu'aucun des premiers membres soit une dérivée de quelque autre, les deux conditions A et B du n° 19 se trouvent satisfaites, et il suffit, pour que les groupes

$$(13) \quad t_{\delta}, \quad t_{\delta+1}, \quad \dots, \quad t_{\Gamma+1},$$

respectivement extraits de

$$S_{\delta}, \quad S_{\delta+1}, \quad \dots, \quad S_{\Gamma+1},$$

satisfassent à la condition C, de supposer qu'ils sont formés d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \dots, \quad \Gamma+1,$$

qu'ils ont pour premiers membres les dérivées dont il s'agit et qu'ils comprennent les groupes

$$(14) \quad s_{\delta}, \quad s_{\delta+1}, \quad \dots, \quad s_{\Delta}$$

(1) Voir la note de l'Introduction.

du système S ; le déterminant spécifié dans l'hypothèse C est alors, en effet, identiquement égal à 1, et la condition qui lui est imposée d'être différent de zéro se trouve satisfaite d'elle-même pour toutes valeurs numériques des quantités figurant dans les seconds membres de S .

Cela posé, et *étant donné un système orthonome, S , tel qu'aucun des premiers membres n'y soit une dérivée de quelque autre, on en peut, comme nous allons le voir, déduire, à l'aide du mécanisme décrit au numéro précédent, un système du premier ordre, Σ , qui est lui-même orthonome.*

Tout d'abord, les groupes (13), qui comprennent les groupes (14), se composent exclusivement de relations *normales* ⁽¹⁾, et la même chose a lieu pour les groupes

$$(15) \quad \psi_{\delta}, \quad \psi_{\delta+1}, \quad \dots, \quad \psi_{\Gamma+1},$$

obtenus en effectuant la résolution successive des groupes (13) par rapport aux dérivées principales de cotes (premières)

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \dots, \quad \Gamma+1.$$

Cela étant, si l'on applique le mécanisme décrit à l'alinéa I du n° 19, le système du premier ordre, Σ , ainsi obtenu, peut, comme nous l'avons dit (n° 19, IV), se partager en deux groupes, Σ' , Σ'' , suivant que ses équations ont pour premiers membres (soit exactement, soit aux notations près) des dérivées *paramétriques* ou des dérivées *principales* du système S : aux notations près, les équations de Σ' sont des identités, et celles de Σ'' , extraites de (15), sont des relations normales.

Conservons alors à chacune des variables indépendantes et des anciennes inconnues les p cotes successives qu'elle avait dans le système orthonome S , et attribuons à chaque inconnue adjointe p cotes successives respectivement égales à celles de la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme : il est clair qu'avec un pareil choix toutes les équations de Σ'' sont normales; mais cela ne suffit pas pour les équations

(1) Cette dénomination fait partie de la terminologie que j'ai cru devoir adopter pour exposer plus commodément les propriétés des systèmes orthonomes.

de Σ' , car chacune d'elles étant, aux notations près, une identité, les p cotes successives de ses deux membres sont égales chacune à chacune, et l'adjonction de cotes supplémentaires (convenablement choisies) devient absolument nécessaire.

Observons, à cet effet, que les inconnues de Σ ne sont autres, aux notations près, que les premiers membres des conditions initiales de S , et que ces dernières, si on les suppose écrites conformément à l'énoncé du n° 18, se partagent en un certain nombre de groupes, dans chacun desquels les conditions se succèdent suivant un ordre déterminé. Dans chaque groupe, faisons abstraction des seconds membres, remplaçons les premiers par leurs notations nouvelles, et *attribuons au groupe d'inconnues de Σ ainsi obtenu des cotes $(p + 1)^{\text{ièmes}}$ distinctes et décroissantes; attribuons enfin aux variables indépendantes x, y, \dots des cotes $(p + 1)^{\text{ièmes}}$ toutes nulles*. Cela étant, il est facile de voir, en se reportant, dans l'énoncé du n° 18, à la condition 4°, que, dans toute équation de Σ' , la cote $(p + 1)^{\text{ième}}$ du premier membre est supérieure à celle du second. En conséquence, le système Σ est lui-même orthonome, ainsi que nous l'avions annoncé.

21. Considérons actuellement un système différentiel, S , où se trouvent vérifiées les hypothèses générales A, B et C du n° 19, et désignons par Σ le système du premier ordre que l'on déduit de S à l'aide du mécanisme indiqué (n° 19, I); imaginons ensuite que l'on effectue sur le système Σ un changement linéaire et homogène des variables indépendantes, et, dans le système transformé, convenons, d'une part, d'attribuer aux nouvelles variables des cotes respectives toutes égales à 1 (comme nous l'avions fait dans Σ pour les anciennes), d'autre part, de conserver aux fonctions inconnues les cotes qu'elles avaient avant la transformation.

Cela posé, *si, dans le système du premier ordre Σ , les valeurs initiales des variables, des inconnues et des dérivées paramétriques premières satisfont à certaines restrictions d'inégalité, on peut, par un changement linéaire et homogène des variables indépendantes, suivi d'une résolution convenable (par rapport à certaines dérivées premières), le transformer en un autre, Ω , jouissant des deux propriétés suivantes :*

1° Les cotes (premières) des variables et des inconnues étant fixées, dans le système Ω , comme nous venons de l'indiquer (voir les quelques lignes qui précèdent le présent énoncé), et des cotes secondes convenablement choisies leur étant adjointes au besoin, le système Ω satisfait à la définition de l'orthonomie.

2° Le nombre des quantités paramétriques (inconnues et dérivées) de cote C est, quel que soit C, exactement le même dans Ω que dans Σ ⁽¹⁾.

I. Étant donné un système du premier ordre résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, nous dirons que son *Tableau*, construit comme nous l'avons indiqué à l'alinéa I du n° 19, est *régulier*, si l'on peut adopter pour les lignes de ce Tableau, c'est-à-dire pour les variables du système, un ordre tel, que les cases vides de chaque colonne se trouvent toutes situées au bas de cette colonne.

Étant donné un système du premier ordre à *Tableau régulier*, si, en attribuant aux variables des cotes premières toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes premières convenablement choisies, on peut faire en sorte que les cotes premières des inconnues et dérivées figurant dans chaque second membre ne surpassent pas celle du premier membre correspondant, on peut aussi, en adjoignant à ces cotes premières des cotes secondes convenablement choisies, faire en sorte que le système proposé satisfasse à la définition de l'orthonomie.

Ce n'est là, en effet, qu'un cas particulier d'une proposition établie dans un Mémoire antérieur ⁽²⁾.

II. Nous allons actuellement faire voir qu'en imposant aux valeurs initiales dont parle l'énoncé certaines restrictions d'inégalité, on peut, à l'aide des opérations indiquées, *transformer le système Σ en un système à Tableau régulier, Ω , dont les colonnes comprennent respective-*

(1) Pour la commodité de notre énoncé, nous assimilons les inconnues du système Σ à des dérivées paramétriques (d'ordre zéro).

(2) Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales (*Annales de l'École Normale*, 1901, p. 466 et suiv.).

ment les mêmes nombres d'équations que celles de Σ . Nous ferons voir en même temps que, dans ce système Ω , la cote première (évaluée conformément aux indications ci-dessus) de chaque second membre est au plus égale à celle du premier membre correspondant.

Observons à cet effet que, dans le système Σ , les premiers membres sont de cote au plus égale à $\Gamma + 1$, et chaque second membre de cote au plus égale au premier membre correspondant; que les équations de cote inférieure à $\Gamma + 1$ correspondent à certaines colonnes, entièrement pleines, du Tableau, et que leurs seconds membres sont indépendants de toute dérivée; enfin, que les équations de cote $\Gamma + 1$ ne peuvent contenir d'autres dérivées que celles de cote $\Gamma + 1$ (n° 19).

Cela posé, effectuons sur Σ la transformation linéaire et homogène

$$(16) \quad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \dots, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \dots, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

où x, y, \dots désignent les anciennes variables indépendantes, x', y', \dots les nouvelles, et $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_2, \beta_2, \dots$, etc. des constantes numériques provisoirement indéterminées.

Si l'on considère d'abord les diverses équations de cote inférieure à $\Gamma + 1$ contenues dans une même colonne (entièrement pleine) du Tableau de Σ , ces équations ont pour premiers membres les diverses dérivées premières (anciennes) d'une même fonction inconnue, avec des seconds membres indépendants de toute dérivée; dès lors (pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots \\ \alpha_2 & \beta_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

de la transformation soit différent de zéro), les équations dont il s'agit pourront, après leur transformation, être résolues par rapport aux nouvelles dérivées premières de la même fonction (cela, quelles que soient les valeurs numériques que l'on attribue aux variables et aux inconnues); d'ailleurs, les seconds membres des formules de résolution ne contiendront, outre les nouvelles variables, que des incon-

nues de cote (première) au plus égale à la cote (première) commune des premiers membres.

Reste donc à considérer, dans le système Σ , le groupe, $\sigma_{\Gamma+1}$, formé par les équations de cote $\Gamma+1$. Pour que ce groupe puisse, par l'application des formules (16), suivie d'une résolution convenable, être transformé en un système à Tableau régulier dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes de $\sigma_{\Gamma+1}$, il faut que le système déduit de $\sigma_{\Gamma+1}$ par l'application pure et simple des formules de la transformation (sans résolution ultérieure) possède des solutions numériques n'annulant pas un certain déterminant.

Ce déterminant, D, peut être considéré comme une fonction :

Soit des constantes indéterminées de la transformation, des anciennes variables x, y, \dots , des inconnues de Σ , et de leurs anciennes dérivées paramétriques premières (qui sont toutes de cote $\Gamma+1$) ;

Soit des constantes indéterminées de la transformation, des nouvelles variables x', y', \dots , des inconnues de Σ , et de leurs nouvelles dérivées premières de cote $\Gamma+1$.

En le considérant, tout d'abord, comme une fonction du premier groupe de quantités, il est facile de voir qu'il est entier et homogène par rapport aux constantes de la transformation, et qu'il a pour coefficients certaines fonctions de x, y, \dots , des inconnues de Σ , et de leurs anciennes dérivées paramétriques premières. Si l'une, au moins, de ces fonctions n'est pas identiquement nulle, on pourra trouver pour les constantes de la transformation des valeurs numériques telles que D ne soit pas identiquement nul, et qu'en même temps le déterminant de la transformation soit différent de zéro. Les valeurs de ces constantes étant fixées comme il vient d'être dit, et le déterminant D étant considéré comme une fonction de x, y, \dots , des inconnues de Σ , et des anciennes dérivées paramétriques premières, le groupe $\sigma_{\Gamma+1}$ possède des solutions numériques n'annulant pas ce déterminant. Si donc on considère D comme une fonction de x', y', \dots , des inconnues de Σ , et de leurs nouvelles dérivées premières de cote $\Gamma+1$, le groupe déduit de $\sigma_{\Gamma+1}$ par application pure et simple des formules de la transformation possède des solutions numériques n'annulant pas le déterminant dont il s'agit, ce qui permet d'effectuer la résolution voulue : il est clair

d'ailleurs que, dans le groupe, $\omega_{\Gamma+1}$, finalement obtenu, chaque premier membre est une dérivée de cote $\Gamma+1$, et que le second membre correspondant est de cote inférieure ou égale.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II montre que le système Ω , déduit de Σ à l'aide du mécanisme ci-dessus décrit, satisfait à la première des deux conditions formulées par notre énoncé général. Il satisfait, d'ailleurs, à la seconde, c'est-à-dire que le nombre des quantités paramétriques (inconnues et dérivées) de cote Γ est, dans Ω , exactement le même que dans Σ . Effectivement, la chose est évidente en ce qui concerne les seules inconnues. D'autre part, en vertu de ce qui précède, les dérivées paramétriques (d'ordre > 0) ne peuvent appartenir qu'aux fonctions inconnues de cote Γ , c'est-à-dire à celles dont les dérivées principales premières (de cote $\Gamma+1$) figurent comme premiers membres dans le groupe $\sigma_{\Gamma+1}$ s'il s'agit du système Σ , ou dans le groupe $\omega_{\Gamma+1}$ s'il s'agit de Ω ; or, ces inconnues étant les mêmes de part et d'autre, et les colonnes de $\omega_{\Gamma+1}$ contenant respectivement les mêmes nombres de cases vides que les colonnes de $\sigma_{\Gamma+1}$, on en déduit immédiatement le point que nous avons en vue.

Ainsi se trouve établie notre proposition. Pour que les restrictions d'inégalité qu'elle impose aux valeurs numériques des diverses quantités figurant dans les seconds membres de Σ puissent être vérifiées, il faut, d'après le raisonnement ci-dessus, que certaines fonctions de ces quantités ne soient pas toutes identiquement nulles, ce qui n'arrive pas nécessairement.

CHAPITRE III.

DE LA PASSIVITÉ.

22. Considérant un système différentiel, S , composé d'un nombre limité d'équations, et, dans ce système, un groupe d'*intégrales*, nous dirons de celles-ci qu'elles sont *ordinaires*, s'il existe quelque domaine tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient dévelop-

pables par la formule de Taylor, mais encore que leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où les premiers et les seconds membres du système donné soient à la fois développables.

Un groupe quelconque d'intégrales ordinaires du système S satisfait identiquement à toutes les relations du système S prolongé (n° 3) : dès lors, si l'on convient de considérer pour un instant les variables x, y, \dots , les fonctions inconnues u, v, \dots et leurs dérivées de tous ordres comme autant de variables indépendantes distinctes, le système S prolongé ne peut manquer d'être *numériquement* vérifié par des valeurs particulières quelconques, x_0, y_0, \dots , de x, y, \dots , prises conjointement avec les valeurs correspondantes des intégrales considérées et de leurs dérivées de tous ordres (cela, bien entendu, dans les limites assignées par la définition même des intégrales ordinaires).

Inversement, supposons que, dans un domaine où les premiers et les seconds membres de S soient à la fois développables, le système S prolongé admette quelque solution *numérique*; supposons en outre que, en désignant par x_0, y_0, \dots les valeurs numériques de x, y, \dots qui figurent dans la solution considérée, les développements, entiers en $x - x_0, y - y_0, \dots$, qui ont pour coefficients, aux facteurs numériques connus près, les valeurs numériques de u, v, \dots et de leurs dérivées de tous ordres, soient *convergens*. Cela étant, *les sommes des développements dont il s'agit constituent un groupe d'intégrales (évidemment ordinaires) du système S.*

Désignons en effet par U, V, \dots les sommes de ces développements, et considérons, autour des valeurs x_0, y_0, \dots , un domaine \mathfrak{D} dont les rayons soient suffisamment petits pour que les fonctions de x, y, \dots en lesquelles se transforment, par la substitution de U, V, \dots à u, v, \dots , les deux membres des diverses équations S, soient toutes développables dans le domaine dont il s'agit. Par la manière même dont les développements U, V, \dots ont été construits, les valeurs initiales de x, y, \dots de U, V, \dots et de leurs dérivées de tous ordres constituent la solution numérique dont l'existence a été supposée dans le système S prolongé. Donc les fonctions de x, y, \dots qui, après la substitution, figurent dans les deux membres d'une équation quelconque du sys-

tème S, sont égales, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0,$$

et, par suite, sont identiquement égales entre elles dans toute l'étendue du domaine \mathfrak{D} .

23. Le théorème précédent montre quel intérêt il peut y avoir, étant donné un système différentiel limité (c'est-à-dire composé d'un nombre limité d'équations), à considérer, au point de vue des solutions numériques, tel ou tel des systèmes illimités qui s'en déduisent. Il convient de poser à cet égard la définition suivante :

Considérons deux systèmes différentiels, limités ou illimités, composés de relations qui aient la forme entière par rapport aux dérivées d'ordre suffisamment grand des inconnues ⁽¹⁾; assimilons-y pour un instant les variables x, y, \dots , les inconnues u, v, \dots et leurs dérivées de tous ordres à autant de variables indépendantes distinctes, et convenons expressément de ne considérer, parmi les solutions numériques des deux systèmes, que celles qui tombent dans quelque domaine où les premiers et les seconds membres de l'un et de l'autre soient à la fois développables. Cela étant, si toute solution numérique du premier est en même temps une solution numérique du second, nous dirons que le second est une *conséquence numérique* du premier; et si chacun d'eux est une conséquence numérique de l'autre, les systèmes seront dits *numériquement équivalents*.

24. Considérant actuellement un système différentiel, S, *résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues* qui s'y trouvent engagées, nous dirons qu'il est *passif*, si, en assimilant pour un instant les variables x, y, \dots , les inconnues u, v, \dots et leurs dérivées de tous ordres à autant de variables indépendantes distinctes, on peut, par voie d'éliminations, déduire du système S prolongé (n° 3) un système numériquement équivalent (n° 23) résolu par rapport aux dérivées

(¹) Cette condition se trouve remplie d'elle-même dans un système limité.

principales : chacune de ces dernières se trouve ainsi exprimée à l'aide des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques, et il va sans dire qu'à chacune d'elles est supposée correspondre, dans le système numériquement équivalent à S prolongé, une formule *unique* de résolution. La solution numérique générale de S prolongé est alors fournie par un groupe illimité de formules où les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques de tous ordres reçoivent des valeurs arbitraires, tandis que les diverses dérivées principales se trouvent entièrement déterminées en fonctions de ces diverses quantités.

Un système passif étant donné, la question de savoir si le groupe (forcément unique) d'intégrales ordinaires *hypothétiques* répondant à des conditions initiales données existe *effectivement*, se résout par l'affirmative dans le cas où leurs développements construits *a priori* sont tous convergents, par la négative dans le cas contraire : c'est là une conséquence immédiate du n° 22.

Nous dirons enfin qu'un système différentiel, S , résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, est *complètement intégrable*, lorsque les intégrales ordinaires hypothétiques répondant à des conditions initiales données existent *effectivement* et sont *uniques* pour un choix *arbitraire* de ces dernières.

25. Considérons un système différentiel, S , impliquant les fonctions inconnues u, v, \dots des variables indépendantes x, y, \dots , et satisfaisant aux diverses conditions ci-après :

A. Le système S est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres γ sont indépendants de toute dérivée principale.

B. En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.

C. En désignant par δ la cote minima des premiers membres de S, et en imposant éventuellement aux valeurs numériques des quantités qui figurent dans les seconds membres de S telles ou telles restrictions d'inégalité, *on peut, des groupes successifs* (en nombre illimité)

$$S_{\delta}, S_{\delta+1}, \dots, S_C, \dots$$

(n° 5), *extraire respectivement des groupes,*

$$(1) \quad t_{\delta}, t_{\delta+1}, \dots, t_C, \dots,$$

tels que l'un quelconque d'entre eux, t_C , composé d'équations en nombre exactement égal à celui des dérivées principales de cote C, soit résoluble par rapport à elles. Les groupes partiels (1) sont alors successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta+1, \dots, C, \dots,$$

et cela quelles que soient (sauf les restrictions éventuelles d'*inégalité* auxquelles il est fait allusion plus haut) les valeurs numériques attribuées aux variables x, y, \dots , aux inconnues u, v, \dots et aux dérivées paramétriques de u, v, \dots .

Cela étant :

1° *Pour que le système proposé S soit passif, il faut et il suffit que l'élimination des dérivées principales de cotes*

$$\delta, \delta+1, \dots, C,$$

effectuée entre les groupes

$$S_{\delta}, S_{\delta+1}, \dots, S_C,$$

conduise, quel que soit C, à des MEMBRÉS (c'est-à-dire à des relations qui soient vérifiées pour toutes valeurs numériques des variables, des inconnues et des dérivées paramétriques).

Ce premier point est évident.

2° *Pour que le système proposé S soit complètement intégrable, il faut et il suffit, en premier lieu, qu'il soit passif, et, en second lieu, que la convergence des déterminations initiales arbitrairement choisies pour ses inté-*

grales ordinaires hypothétiques entraîne la convergence des portions restantes de leurs développements (construits a priori).

Cette double condition, évidemment suffisante pour l'intégrabilité complète, est, de plus, nécessaire.

Si l'on suppose, en effet, que (dans les limites indiquées) le système donné admette un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales convergentes arbitrairement choisies, il admet, notamment, un groupe d'intégrales tel que, pour des valeurs arbitrairement choisies des variables, les quantités paramétriques (inconnues et dérivées) de cote inférieure ou égale à C prennent des valeurs arbitrairement choisies, tandis que les quantités paramétriques de cote supérieure prennent toutes la valeur zéro. Il est donc nécessaire que le système

$$(S_\delta, S_{\delta+1}, \dots, S_C),$$

où ne figurent, avec x, y, \dots , que des quantités de cote inférieure ou égale à C , admette, au point de vue numérique, une solution générale où x, y, \dots et les quantités de cote inférieure ou égale à C aient des valeurs arbitraires : il est nécessaire, par suite, que l'élimination indiquée dans 1^o conduise à des identités, c'est-à-dire, puisque C est quelconque, que le système S soit passif.

Cela étant, puisque à des déterminations initiales convergentes correspondent, par hypothèse, des intégrales effectives, les portions restantes des développements ne peuvent manquer d'être elles-mêmes convergentes.

26. Considérons un système différentiel, S , remplissant les diverses conditions A, B, C , successivement énumérées au n^o 25, et désignons par h le nombre des variables indépendantes x, y, \dots , par ${}^{(C)}\lambda$ le nombre des quantités paramétriques (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas C , enfin par ${}^{(C)}\mu$ le nombre des dérivées principales dont la cote satisfait à cette même condition : ces diverses quantités sont donc, en tout, au nombre de $h + {}^{(C)}\lambda + {}^{(C)}\mu$.

Cela posé, pour que le système donné S soit passif, il faut et il suffit qu'en considérant x, y, \dots et les diverses quantités (inconnues et déri-

vées) dont la cote ne surpasse pas C comme autant de variables indépendantes distinctes (en nombre $h + {}^{(C)}\lambda + {}^{(C)}\mu$), la solution numérique générale du système ${}^{(C)}S$ (n° 5) soit fournie, quel que soit C , par des formules exprimant ${}^{(C)}\mu$ d'entre ces variables à l'aide des $h + {}^{(C)}\lambda$ restantes, dont les valeurs sont arbitraires ⁽¹⁾.

I. La condition posée est évidemment nécessaire : car, le système S étant supposé passif, la solution générale de ${}^{(C)}S$ s'obtiendra (n° 25) en effectuant la résolution successive des groupes

$$l_0, \quad l_{\delta+1}, \quad \dots, \quad l_C$$

par rapport aux ${}^{(C)}\mu$ dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta + 1, \quad \dots, \quad C;$$

ces dernières se trouveront alors exprimées à l'aide des h variables x, y, \dots et des ${}^{(C)}\lambda$ quantités paramétriques (inconnues et dérivées) de cote inférieure ou égale à C , dont les valeurs sont arbitraires.

II. La condition posée est suffisante. Supposons, en effet, que la solution numérique générale du système ${}^{(C)}S$ soit fournie par des formules, G , exprimant ${}^{(C)}\mu$ d'entre les quantités dont parle l'énoncé à l'aide des $h + {}^{(C)}\lambda$ restantes. Si l'on égale ces dernières à des arbitraires, la solution générale de ${}^{(C)}S$ se trouvera tout aussi bien exprimée à l'aide d'un système, L , de $h + {}^{(C)}\lambda + {}^{(C)}\mu$ formules, résolu par rapport aux $h + {}^{(C)}\lambda + {}^{(C)}\mu$ quantités en question, et les exprimant à l'aide des $h + {}^{(C)}\lambda$ arbitraires ainsi introduites : par rapport à ces arbitraires et aux ${}^{(C)}\mu$ quantités figurant dans les premiers membres de G , le déterminant différentiel de ce même système L est d'ailleurs manifestement égal à ± 1 , ce qui permet, par rapport à ce dernier groupe de $h + {}^{(C)}\lambda + {}^{(C)}\mu$ quantités, une résolution exécutée conformément au principe général des fonctions implicites.

De ce groupe de formules L extrayons maintenant le groupe partiel qui exprime, à l'aide des arbitraires, les h quantités x, y, \dots et les ${}^{(C)}\lambda$

⁽¹⁾ Comme nous l'avons déjà fait plus haut, nous assimilons ici les fonctions inconnues à des dérivées paramétriques d'ordre zéro.

quantités paramétriques (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas G ; puis, à ce groupe partiel, adjoignons les ${}^{(C)}\mu$ formules,

$$(2) \quad r_{\partial}, \quad r_{\partial+1}, \quad \dots, \quad r_C,$$

que fournit la résolution successive des groupes

$$\ell_{\partial}, \quad \ell_{\partial+1}, \quad \dots, \quad \ell_C,$$

extraits de ${}^{(C)}S$: nous obtiendrons ainsi un système, L' , de

$$h + {}^{(C)}\lambda + {}^{(C)}\mu$$

formules, manifestement résoluble par rapport aux $h + {}^{(C)}\lambda + {}^{(C)}\mu$ quantités dont parle l'énoncé, et identiquement vérifié par la substitution à ces quantités de leurs expressions tirées du système L ; après la résolution dont il s'agit, le système L' deviendra donc identique à L , d'où résulte qu'il fournit, comme lui, la solution générale de ${}^{(C)}S$.

Les deux systèmes L et L' étant ainsi numériquement équivalents, il résulte de remarques générales relatives à la théorie des fonctions implicites qu'ils sont résolubles par rapport aux mêmes groupes de $h + {}^{(C)}\lambda + {}^{(C)}\mu$ quantités. Le second, L' , sera donc, comme le premier, résoluble par rapport aux $h + {}^{(C)}\lambda$ arbitraires et aux ${}^{(C)}\mu$ premiers membres des formules G ; comme, d'ailleurs, les ${}^{(C)}\mu$ formules (2) sont entièrement indépendantes des arbitraires introduites, il faut bien que les $h + {}^{(C)}\lambda$ formules restantes de L' soient résolubles par rapport à ces arbitraires. En effectuant cette résolution, et remplaçant dans les ${}^{(C)}\mu$ formules (2) les $h + {}^{(C)}\lambda$ arbitraires par les expressions ainsi obtenues, les ${}^{(C)}\mu$ formules résultantes fourniront, aussi bien que L' , la solution générale de ${}^{(C)}S$: or, cette opération laisse identiques à elles-mêmes les ${}^{(C)}\mu$ formules (2), qui fournissent, dès lors, la solution générale.

Il résulte de là que l'élimination des dérivées principales de cotes

$$\partial, \quad \partial + 1, \quad \dots, \quad C,$$

effectuée entre les équations

$$S_{\partial}, \quad S_{\partial+1}, \quad \dots, \quad S_C,$$



conduit, quel que soit C, à des identités, et, par suite (n° 25), que le système S est passif.

27. La proposition dont nous venons d'achever la démonstration peut encore se formuler comme il suit :

Pour que le système proposé S, satisfaisant aux trois conditions A, B, C du n° 25, soit passif, il faut et il suffit qu'en considérant x, y, \dots et les diverses quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne dépasse pas C comme autant de variables indépendantes distinctes, la solution numérique générale du système $^{(C)}S$ soit fournie (quel que soit C) par des formules exprimant les $h + ^{(C)}\lambda + ^{(C)}\mu$ variables dont il s'agit à l'aide de $h + ^{(C)}\lambda$ arbitraires, $h + ^{(C)}\lambda$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires conformément au principe général des fonctions implicites.

28. Dans tout système orthonome, les conditions A et B du n° 25 se trouvent satisfaites d'elles-mêmes, et il suffit, pour que les groupes

$$t_{\delta}, \quad t_{\delta+1}, \quad \dots, \quad t_c, \quad \dots,$$

respectivement extraits de

$$S_{\delta}, \quad S_{\delta+1}, \quad \dots, \quad S_c, \quad \dots,$$

satisfassent à la condition C, de supposer que le groupe t_c comprend exactement autant d'équations qu'il y a de dérivées principales de cote C, et qu'il a pour premiers membres les dérivées dont il s'agit : car alors le déterminant différentiel de t_c par rapport à ces dernières est identiquement égal à 1. On sait d'ailleurs qu'un système orthonome, s'il est passif, est, par là même, complètement intégrable.

Désignons actuellement par S un système orthonome tel qu'aucun des premiers membres n'y soit une dérivée de quelque autre, et par δ la cote (première) minima des équations de S; puis, adoptant pour les conditions initiales du système l'écriture spécifiée au n° 18, désignons par Γ la cote (première) maxima des premiers membres de ces conditions. Cela étant, *pour que le système S soit passif* (par suite, complètement intégrable), *ou, ce qui revient au même* (n° 25), *pour que*

l'élimination des dérivées principales de cotes (premières)

$$\delta, \delta + 1, \dots, C,$$

effectuée entre les équations

$$S_\delta, S_{\delta+1}, \dots, S_C,$$

conduise, quel que soit C, à des identités, il suffit que cela ait lieu pour
 $C = \Gamma + 2$.

En vertu du n° 20, on peut, du système orthonome S, déduire un système du premier ordre, Σ , jouissant des diverses propriétés indiquées au n° 19, et, de plus, orthonome comme S.

Cela étant :

1. La condition posée par notre énoncé relativement aux groupes

$$(3) \quad S_\delta, S_{\delta+1}, \dots, S_{\Gamma+1}, S_{\Gamma+2}$$

entraîne la passivité du système orthonome Σ .

Considérons, en effet, dans l'un quelconque des deux systèmes S, Σ , le nombre des quantités paramétriques (inconnues et dérivées) dont la cote première ne dépasse pas C : à cause des relations qui existent entre S et Σ , ce nombre est le même dans les deux systèmes, et nous le désignerons par ${}^{(C)}\lambda$; nous désignerons en outre par h le nombre des variables indépendantes x, y, \dots

Cela étant, il résulte de la condition posée par notre énoncé que la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}S$ ou (3) est fournie par des formules exprimant les variables indépendantes x, y, \dots et les quantités (inconnues et dérivées du système S) dont la cote première ne dépasse pas $\Gamma + 2$, à l'aide de $h + {}^{(\Gamma+2)}\lambda$ arbitraires, $h + {}^{(\Gamma+2)}\lambda$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.

Si l'on passe de S à Σ , le système ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ est, comme nous savons (n° 19, V), numériquement équivalent à

$$({}^{(\Gamma+2)}H, {}^{(\Gamma+2)}S) :$$

le groupe ${}^{(\Gamma+2)}H$ s'obtient d'ailleurs en extrayant de l'ensemble illimité

que forment les inconnues adjointes et leurs dérivées de tous ordres les diverses quantités dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, et en les égalant à leurs synonymes anciens. D'après ce qui vient d'être dit sur $^{(\Gamma+2)}S$, il est manifeste que la solution numérique générale de

$$^{(\Gamma+2)}H, ^{(\Gamma+2)}S) \quad \text{ou} \quad ^{(\Gamma+2)}\Sigma$$

est fournie par des formules exprimant les variables indépendantes x, y, \dots et les quantités (inconnues et dérivées du système Σ) dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, à l'aide de $h + ^{(\Gamma+2)}\lambda$ arbitraires, $h + ^{(\Gamma+2)}\lambda$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires : on en conclut, en raisonnant comme à l'alinéa II du n° 26, que, si l'on élimine entre les équations $^{(\Gamma+2)}\Sigma$ les diverses dérivées principales de Σ dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, on est conduit à des identités.

Cela étant, comme, dans le système Σ , orthonome et du premier ordre, la cote première maxima des inconnues est Γ , et, par suite, celle des dérivées *cardinales* (toutes du second ordre) au plus égale à $\Gamma + 2$, il résulte d'une règle formulée dans un Mémoire antérieur ⁽¹⁾ que le système Σ est passif. C'est ce que nous voulions établir.

II. La passivité du système Σ entraîne celle du système S .

Le système Σ étant supposé passif, la solution numérique générale de $^{(C)}\Sigma$ est fournie (quel que soit C) par des formules exprimant les variables indépendantes et les quantités (inconnues et dérivées du système Σ) dont la cote première ne surpasse pas C , à l'aide de $h + ^{(C)}\lambda$ arbitraires, $h + ^{(C)}\lambda$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.

Répartissons maintenant cet ensemble de formules en deux groupes,

$$J, \quad K,$$

suivant qu'elles ont ou non pour premier membre quelque dérivée (d'ordre positif ou nul) d'une inconnue adjointe. Le système $^{(C)}\Sigma$ ayant pour conséquence numérique $^{(C)}H$ (n° 19, V), le système (J, K) a pour

⁽¹⁾ Sur une question fondamentale du Calcul intégral.

conséquence numérique $(^{(c)}H, K)$; et, comme les deux systèmes

$$(J, K), \quad (^{(c)}H, K),$$

visiblement réduits $(^1)$, comprennent le même nombre d'équations, ils sont numériquement équivalents : or, le premier d'entre eux contient $h + ^{(c)}\lambda$ équations résolubles par rapport aux arbitraires; il en est donc de même du second, et, comme le groupe $^{(c)}H$ est indépendant des arbitraires, les $h + ^{(c)}\lambda$ équations dont il s'agit sont forcément contenues dans le groupe K . Ainsi, dans les formules (J, K) , qui fournissent la solution générale de $^{(c)}\Sigma$, le groupe K contient $h + ^{(c)}\lambda$ équations résolubles par rapport aux arbitraires.

Cela posé, observons qu'en vertu de l'équivalence numérique entre

$$^{(c)}\Sigma \quad \text{et} \quad (^{(c)}H, ^{(c)}S),$$

les formules (J, K) fournissent la solution générale de $(^{(c)}H, ^{(c)}S)$: il est aisé d'en conclure que les formules K (dont $h + ^{(c)}\lambda$ sont résolubles par rapport aux arbitraires) fournissent la solution générale de $^{(c)}S$.

Le système S est donc passif (n° 27).

III. L'exactitude de notre énoncé général résulte du simple rapprochement des alinéas I et II.

29. Considérons maintenant un système différentiel, S , où se trouvent satisfaites les trois hypothèses A, B, C du n° 25, et à ces hypothèses adjoignons les particularités suivantes :

1° Qu'aucun des premiers membres de S ne soit une dérivée de quelque autre ;

2° Qu'en désignant par Δ la cote maxima des premiers membres de S , les groupes

$$t_0, \quad t_{\delta+1}, \quad \dots, \quad t_\Delta$$

(les premiers de ceux que vise l'hypothèse C) comprennent respective-

(¹) Ils sont, en effet, résolubles l'un et l'autre par rapport aux variables indépendantes et aux quantités (inconnues et dérivées de Σ) dont la cote première ne surpasse pas C .

ment les groupes

$$s_{\delta}, \quad s_{\delta+1}, \quad \dots, \quad s_{\Delta}$$

du système S (n° 5);

3° Que le système du premier ordre, Σ , que l'on déduit en pareil cas de S (n° 19), puisse, par un changement linéaire et homogène des variables indépendantes, suivi d'une résolution convenable, être transformé en un autre, Ω , remplissant les conditions spécifiées au n° 21.

Cela posé, et en attribuant à la notation Γ le même sens que dans les nos 18 et 28, pour que le système proposé S soit passif, ou, ce qui revient au même (n° 25), pour que l'élimination des dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta + 1, \quad \dots, \quad C,$$

effectuée entre les équations

$$S_{\delta}, \quad S_{\delta+1}, \quad \dots, \quad S_C,$$

conduise, quel que soit C , à des identités, il suffit que cela ait lieu pour $C = \Gamma + 2$.

I. La condition posée par notre énoncé relativement aux groupes

$$(4) \quad S_{\delta}, \quad S_{\delta+1}, \quad \dots, \quad S_{\Gamma+1}, \quad S_{\Gamma+2}$$

entraîne la passivité du système Ω .

Considérons en effet, dans l'un quelconque des trois systèmes, S, Σ , Ω , le nombre des quantités paramétriques (inconnues et dérivées) dont la cote (unique ou première) ne surpasse pas C : à cause des relations qui existent, d'une part entre S et Σ , d'autre part entre Σ et Ω , ce nombre est le même pour les trois systèmes, et nous le désignerons par ${}^{(c)}\lambda$; nous désignerons en outre par h le nombre des variables indépendantes.

Cela étant, il résulte de la condition posée par notre énoncé que la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}S$ ou (4) est fournie par des formules exprimant les variables indépendantes et les quantités (inconnues et dérivées de S) dont la cote (unique) ne surpasse pas $\Gamma + 2$,

à l'aide de $h + {}^{(\Gamma+2)}\lambda$ arbitraires, $h + {}^{(\Gamma+2)}\lambda$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.

Si l'on passe de S à Σ , le système ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ est, comme nous savons (n° 19, V), numériquement équivalent à

$$({}^{(\Gamma+2)}H, {}^{(\Gamma+2)}S) :$$

le groupe ${}^{(\Gamma+2)}H$ s'obtient d'ailleurs en extrayant de l'ensemble illimité que forment les inconnues adjointes et leurs dérivées de tous ordres les diverses quantités dont la cote (unique) ne surpasse pas $\Gamma + 2$, et en les égalant à leurs synonymes anciens. D'après ce qui vient d'être dit sur ${}^{(\Gamma+2)}S$, il est manifeste que la solution numérique générale de

$$({}^{(\Gamma+2)}H, {}^{(\Gamma+2)}S) \quad \text{ou} \quad {}^{(\Gamma+2)}\Sigma$$

est fournie par des formules exprimant les variables indépendantes et les quantités (inconnues et dérivées du système Σ) dont la cote (unique) ne surpasse pas $\Gamma + 2$, à l'aide de $h + {}^{(\Gamma+2)}\lambda$ arbitraires, $h + {}^{(\Gamma+2)}\lambda$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.

Si l'on passe maintenant de Σ à $[[\Sigma]]$ (n° 10), il résulte immédiatement du n° 14 que la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}[[\Sigma]]$ est la même que celle de $[[{}^{(\Gamma+2)}\Sigma]]$: elle s'obtiendra donc en remplaçant dans les formules précédentes les anciennes variables et dérivées par leurs valeurs tirées des formules de la transformation, et en résolvant le système ainsi obtenu par rapport aux nouvelles variables et aux quantités (fonctions inconnues et nouvelles dérivées) dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$. Ces dernières variables, inconnues et dérivées se trouveront ainsi exprimées à l'aide de $h + {}^{(\Gamma+2)}\lambda$ arbitraires, et il résulte d'ailleurs de remarques générales, relatives à la théorie des fonctions implicites, que, parmi les formules obtenues, $h + {}^{(\Gamma+2)}\lambda$ seront, comme précédemment, résolubles par rapport aux arbitraires.

Si l'on passe, enfin, de $[[\Sigma]]$ à Ω (et si l'on observe que $\Gamma + 1$ est la cote première maxima des équations de ces deux systèmes), le mécanisme à l'aide duquel cette opération s'effectue (voir n° 21, II) entraîne, en vertu du n° 7, l'équivalence numérique de ${}^{(\Gamma+2)}[[\Sigma]]$ et de ${}^{(\Gamma+2)}\Omega$:

la solution numérique générale de $^{(\Gamma+2)}\Omega$ est donc fournie par les formules dont il a été question en dernier lieu.

Cela posé, extrayons de $^{(\Gamma+2)}\Omega$ un groupe, Φ , composé d'équations en nombre exactement égal à celui des dérivées principales (du système Ω) dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, et résoluble par rapport à ces dérivées; puis, répartissons les formules qui donnent la solution générale de $^{(\Gamma+2)}\Omega$ en deux groupes,

$$E, \quad F,$$

suivant qu'elles ont ou non pour premier membre quelque-une des dérivées principales dont il s'agit. Les formules (E, F) , fournissant la solution générale de $^{(\Gamma+2)}\Omega$, ont pour conséquence numérique le groupe Φ , et par suite aussi (Φ, F) ; et, comme les deux systèmes

$$(E, F), \quad (\Phi, F),$$

visiblement réduits ⁽¹⁾, comprennent le même nombre d'équations, ils sont numériquement équivalents : or, le premier d'entre eux contient, comme nous l'avons dit, $h + ^{(\Gamma+2)}\lambda$ équations résolubles par rapport aux $h + ^{(\Gamma+2)}\lambda$ arbitraires; il en est donc de même du second, et, comme le groupe Φ est indépendant des arbitraires, les $h + ^{(\Gamma+2)}\lambda$ équations dont il s'agit sont forcément celles de F . Cela étant, pour avoir la solution générale de $^{(\Gamma+2)}\Omega$, on peut, dans (Φ, F) , tirer du groupe F les $h + ^{(\Gamma+2)}\lambda$ arbitraires et les porter dans le groupe Φ , que l'on résoudra ensuite par rapport aux dérivées principales (du système Ω) dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$: le groupe Φ restant identique à lui-même par la substitution dont il s'agit, sa simple résolution fournira la solution générale de $^{(\Gamma+2)}\Omega$. Il résulte de là qu'en éliminant, entre les relations $^{(\Gamma+2)}\Omega$, les dérivées principales dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, on est conduit à des identités.

Finalement, comme, dans le système Ω , orthonome et du premier ordre, la cote première maxima des inconnues est Γ , et, par suite, celle des dérivées *cardinales* (toutes du second ordre) au plus égale à $\Gamma + 2$, le système Ω est passif, ce qu'il s'agissait d'établir.

⁽¹⁾ Ils sont en effet résolubles l'un et l'autre par rapport aux variables (nouvelles) et aux quantités (inconnues et dérivées de Ω) dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$.

II. *La passivité du système Ω entraîne celle du système S.*

Le système Ω étant supposé passif, la solution numérique générale de ${}^{(C)}\Omega$ est fournie (quel que soit C) par des formules exprimant les variables (nouvelles) et les quantités (inconnues et dérivées du système Ω) dont la cote première ne surpasse pas C, à l'aide de $h + {}^{(C)}\lambda$ arbitraires, $h + {}^{(C)}\lambda$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires. Cette solution générale de ${}^{(C)}\Omega$ est d'ailleurs en même temps celle de ${}^{(C)}[[\Sigma]]$, ainsi qu'il résulte du n° 7 et des relations qui existent entre les deux systèmes Ω et $[[\Sigma]]$; et elle est aussi, en vertu du n° 14, celle de $[[{}^{(C)}\Sigma]]$.

Cela étant, la solution numérique générale de ${}^{(C)}\Sigma$ s'obtiendra en remplaçant, dans les formules précédentes, les nouvelles variables et dérivées par leurs valeurs tirées des formules de transformation, et résolvant le système ainsi obtenu par rapport aux anciennes variables et aux quantités (fonctions inconnues et anciennes dérivées) dont la cote unique ne surpasse pas C. Ces dernières (variables, inconnues et dérivées) se trouveront ainsi exprimées à l'aide de $h + {}^{(C)}\lambda$ arbitraires, et il résulte d'ailleurs de remarques générales relatives à la théorie des fonctions implicites que, parmi les formules obtenues, $h + {}^{(C)}\lambda$ seront, comme précédemment, résolubles par rapport aux arbitraires.

Répartissons maintenant les formules dont il s'agit en deux groupes,

$$J, \quad K,$$

suivant qu'elles ont ou non pour premier membre quelque dérivée (d'ordre positif ou nul) d'une inconnue adjointe. Le système ${}^{(C)}\Sigma$ ayant pour conséquence numérique ${}^{(C)}H$ (n° 19, V), le système (J, K) a pour conséquence numérique $({}^{(C)}H, K)$; et, comme les deux systèmes

$$(J, K), \quad ({}^{(C)}H, K),$$

visiblement réduits ⁽¹⁾, comprennent le même nombre d'équations, ils sont numériquement équivalents : or, le premier d'entre eux con-

⁽¹⁾ Ils sont en effet résolubles l'un et l'autre par rapport aux variables (anciennes) et aux quantités (inconnues et dérivées du système Σ) dont la cote ne surpasse pas C.

tient $h + {}^{(C)}\lambda$ équations résolubles par rapport aux arbitraires; il en est donc de même du second, et, comme le groupe ${}^{(C)}H$ est indépendant des arbitraires, les $h + {}^{(C)}\lambda$ équations dont il s'agit sont forcément contenues dans le groupe K . Ainsi, dans les formules (J, K) , qui fournissent la solution générale de ${}^{(C)}\Sigma$, le groupe K contient $h + {}^{(C)}\lambda$ équations résolubles par rapport aux arbitraires.

Cela posé, observons qu'en vertu de l'équivalence numérique entre

$${}^{(C)}\Sigma \quad \text{et} \quad ({}^{(C)}H, {}^{(C)}S),$$

les formules (J, K) fournissent la solution générale de $({}^{(C)}H, {}^{(C)}S)$: il est aisé d'en conclure que les formules K (dont $h + {}^{(C)}\lambda$ sont résolubles par rapport aux arbitraires) fournissent la solution générale de ${}^{(C)}S$.

Le système S est donc passif (n° 27).

III. L'exactitude de notre énoncé général résulte du simple rapprochement des alinéas I et II.

CHAPITRE IV.

THÉORÈMES D'EXISTENCE.

30. Considérons un système différentiel, S , satisfaisant aux trois conditions ci-après :

A. Le système S est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale.

B. En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et

dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.

Il est clair, d'ailleurs, que cette deuxième condition, supposée vérifiée, ne cesse pas de l'être lorsqu'on augmente d'un même entier quelconque, positif ou négatif, les cotes de toutes les inconnues.

C. En désignant par δ et Δ les cotes respectivement minima et maxima des premiers membres de S, on peut, des groupes

$$S_\delta, S_{\delta+1}, \dots, S_\Delta$$

du système S prolongé (n^{os} 3 et 5), extraire respectivement des groupes,

$$t_\delta, t_{\delta+1}, \dots, t_\Delta,$$

possédant la double propriété de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta+1, \dots, \Delta,$$

et d'être successivement résolubles par rapport à ces dérivées.

En d'autres termes, nous supposons que le déterminant différentiel de l'ensemble de ces groupes par rapport à l'ensemble de ces dérivées n'est pas identiquement nul, et nous nous assujettissons à ne considérer les diverses quantités dont il dépend que dans les limites où sa valeur numérique reste différente de zéro.

Dans un système ainsi défini, considérons un groupe d'intégrales ordinaires *hypothétiques* répondant à des conditions initiales données. Cela étant, *si les valeurs numériques initiales choisies pour les quantités qui figurent dans les seconds membres de S satisfont* (en outre de celle qu'exige déjà la condition C) *à certaines restrictions d'inégalité :*

1° *Pour toute valeur de l'entier (algébrique) C supérieure à Δ , tout groupe partiel, t_C , extrait de S_C sous la seule condition d'avoir pour premiers membres (sans omission ni répétition) les diverses dérivées principales de cote C, est résoluble par rapport à ces dernières.*

2° *Les développements (bien déterminés) construits à l'aide des valeurs initiales données et de celles que fournit la résolution successive des*

groupes

$$t_0, \quad t_{0+1}, \quad \dots, \quad t_{\Delta}, \quad t_{\Delta+1}, \quad t_{\Delta+2}, \quad \dots$$

sont convergents.

I. Considérons un système de q équations du premier degré à q inconnues, par exemple de trois équations du premier degré à trois inconnues, ayant la forme suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} x = ay + bz + c, \\ y = ex + fz + k, \\ z = mx + ny + p. \end{cases}$$

En même temps que (1), considérons le système

$$(2) \quad \begin{cases} x = Ay + Bz + C \text{ } ^{(1)}, \\ y = Ex + Fz + K, \\ z = Mx + Ny + P, \end{cases}$$

et supposons :

1° Que le Tableau

$$(3) \quad \begin{cases} A, & B, & C, \\ E, & F, & K, \\ M, & N, & P \end{cases}.$$

ait tous ses éléments *positifs ou nuls*, ceux de la dernière colonne de droite étant tous *positifs*;

2° Que, dans le Tableau

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ e, & f, & k, \\ m, & n, & p, \end{matrix}$$

les éléments aient leurs modules respectivement *inférieurs ou égaux* aux éléments correspondants du Tableau (3);

3° Que le système (2) admette une solution (X, Y, Z), en nombres *positifs*.

(¹) Le sens que nous attribuons ici à la notation C n'a, bien entendu, rien de commun avec celui qu'elle possède dans notre énoncé général.

Cela étant, le système (1) est nécessairement résoluble par rapport à x, y, z , et les valeurs de ces variables qui le vérifient ont des modules respectivement inférieurs ou égaux à X, Y, Z .

Nous avons établi, dans un Mémoire antérieur, que le système (1) admet en pareil cas une solution, (x', y', z') , satisfaisant aux relations

$$\text{mod } x' \leq X, \quad \text{mod } y' \leq Y, \quad \text{mod } z' \leq Z \quad (1) :$$

reste à démontrer que cette solution est unique.

Effectivement, si elle ne l'était pas, le système (1) serait indéterminé, et l'une de ses équations, la première par exemple, serait une conséquence des autres. En désignant donc par λ et μ des constantes convenablement choisies, on aurait, entre les coefficients

$$\begin{array}{cccc} -1, & a, & b, & c, \\ e, & -1, & f, & k, \\ m, & n, & -1, & p \end{array}$$

du système (1), les relations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 = \lambda e + \mu m, \\ a = -\lambda + \mu n, \\ b = \lambda f - \mu, \\ c = \lambda k + \mu p. \end{array} \right.$$

Or, le coefficient c ayant un module inférieur ou égal à la constante positive C , il existe évidemment quelque valeur, c' , satisfaisant à la double condition d'être différente de c et d'avoir un module inférieur à C ⁽²⁾. Cela étant, si, dans le système (1), on remplace c par c' sans toucher aux autres coefficients, le système résultant est incompatible, puisque les trois premières relations (4) ne cessent pas d'être vérifiées, mais que l'on a, au contraire,

$$c' \neq \lambda k + \mu p.$$

⁽¹⁾ Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales répondant à des conditions initiales données (*Annales de l'École Normale*, 1904, p. 357 et suiv.).

⁽²⁾ Effectivement, si $c = 0$, on pourra prendre pour c' une quantité quelconque de module inférieur à C et supérieur à zéro; si c n'est pas nul, on pourra prendre pour c' une quantité quelconque dont le module soit inférieur à celui de c .

D'autre part, puisque le module de c' est inférieur à C , les hypothèses posées au début du présent alinéa I continuent à être toutes vérifiées, et le même système admet, en vertu de la démonstration déjà invoquée, quelque solution en x, y, z , ce qui est contradictoire.

II. Considérons, au lieu du système S , le système $S_{\Delta+1}$, que nous désignerons aussi par (S) . Il est clair que, dans les deux systèmes S et (S) , la répartition des dérivées des fonctions inconnues en principales et paramétriques est la même, à cela près que les dérivées principales du système S dont la cote tombait au-dessous de $\Delta + 1$ sont devenues paramétriques dans le système (S) ; et si, dans les deux systèmes

S prolongé, (S) prolongé

(n° 3), on partage les relations en groupes successifs d'après leur cote croissante, cette suite illimitée de groupes est la même de part et d'autre, à cela près que, dans le système (S) prolongé, un certain nombre de groupes,

$$S_{\delta}, S_{\delta+1}, \dots, S_{\Delta},$$

ont disparu en tête de la liste. Au lieu donc d'imposer aux intégrales hypothétiques de S les conditions initiales choisies, il revient au même, pour la démonstration de notre énoncé général, d'imposer à celles de (S) des conditions initiales identiques, en ayant soin seulement de prendre, pour les anciennes dérivées principales devenues paramétriques, les valeurs initiales calculées à l'aide des groupes

$$t_{\delta}, t_{\delta+1}, \dots, t_{\Delta}.$$

On peut maintenant, moyennant un simple changement de fonctions, remplacer le système (S) par un autre où les déterminations initiales des inconnues soient toutes identiquement nulles. Effectivement, soient I_u, I_v, \dots les déterminations initiales respectives des inconnues u, v, \dots dans le système (S) . Nous observerons tout d'abord que, parmi les dérivées de I_u, I_v, \dots , celles qui sont respectivement semblables aux dérivées principales de u, v, \dots ont toutes zéro pour valeur initiale, et qu'elles sont, par suite, identiquement nulles, puisque leurs propres dérivées, nécessairement semblables à des dérivées

principales de u, v, \dots , ont toutes aussi pour valeur initiale zéro; quant aux valeurs initiales de I_u, I_v, \dots et de leurs dérivées restantes, elles sont précisément égales aux valeurs initiales de u, v, \dots et de leurs dérivées (paramétriques) semblables. Cela posé, effectuons dans le système (S) la transformation

$$\begin{aligned} u &= I_u + u, \\ v &= I_v + v, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

où u, v, \dots désignent de nouvelles fonctions inconnues, et soit (\mathfrak{S}) le système ainsi obtenu : de la remarque faite ci-dessus il résulte évidemment que le système (\mathfrak{S}) prolongé peut se déduire de (S) prolongé en remplaçant les dérivées principales de u, v, \dots par les dérivées semblables de u, v, \dots , puis les fonctions u, v, \dots et leurs dérivées paramétriques par les sommes $I_u + u, I_v + v, \dots$ et les dérivées semblables de ces sommes. Les deux systèmes (S) et (\mathfrak{S}) ont donc, sauf le changement de u, v, \dots en u, v, \dots , les mêmes premiers membres, et les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques; d'ailleurs, si aux intégrales hypothétiques u, v, \dots de (\mathfrak{S}) on impose des déterminations initiales identiquement nulles, il est clair que les valeurs numériques initiales prises, dans le système (S), par les intégrales hypothétiques u, v, \dots , qui correspondent aux déterminations initiales I_u, I_v, \dots , et par leurs dérivées paramétriques de tous ordres, sont respectivement égales aux valeurs numériques initiales prises, dans le système (\mathfrak{S}), par les sommes $I_u + u, I_v + v, \dots$ et les dérivées semblables de ces sommes.

Cela étant, conservons aux variables x, y, \dots , dans le système (\mathfrak{S}), les cotes respectives, toutes égales à 1, qu'elles avaient dans les systèmes S et (S), et attribuons aux nouvelles fonctions inconnues u, v, \dots les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes correspondantes u, v, \dots . Considérons d'autre part, dans les systèmes (S) prolongé et (\mathfrak{S}) prolongé, deux relations correspondantes, et désignons par G leur cote commune (supérieure ou égale à $\Delta + 1$): de diverses remarques déjà faites il résulte que toutes deux sont linéaires par rapport aux dérivées (tant principales que paramétriques) de cote G , que, dans la première, les coefficients de ces dérivées dépendent exclusivement des

variables x, y, \dots , des inconnues u, v, \dots et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres du système primitif S , et que, dans la seconde, les coefficients dont il s'agit ont respectivement les mêmes valeurs initiales que dans la première. Finalement, si, dans chacune des deux relations considérées, nous remplaçons par les valeurs numériques initiales qui leur conviennent respectivement les variables indépendantes x, y, \dots , les intégrales hypothétiques (u, v, \dots ou u, v, \dots , suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre relation), et leurs dérivées paramétriques de tous ordres, les deux relations ainsi obtenues (où ne figurent plus que des dérivées principales) seront identiques l'une à l'autre.

En conséquence, il suffit, pour établir notre énoncé général, d'établir le double point suivant :

Si, dans les seconds membres de (\mathfrak{S}) , les coefficients des dérivées (tant principales que paramétriques) de cote $\Delta + 1$ ont des valeurs initiales satisfaisant à certaines restrictions d'inégalité :

1° *Pour toute valeur de l'entier (algébrique) C supérieure à Δ , tout groupe partiel, $(t)_C$, extrait de $(\mathfrak{S})_C$ sous la seule condition d'avoir pour premiers membres (sans omission ni répétition) les diverses dérivées principales de cote C , est résoluble par rapport à ces dernières.*

2° *Les développements (bien déterminés) construits à l'aide des déterminations initiales données (toutes identiquement nulles) et des valeurs initiales que fournit, pour les dérivées principales de cotes $\Delta + 1, \Delta + 2, \dots$, la résolution successive des groupes*

$$(t)_{\Delta+1}, (t)_{\Delta+2}, \dots,$$

sont nécessairement convergents.

Effectivement, si le premier de ces deux points est exact, le groupe qui correspond à $(t)_C$ dans le système (S) prolongé sera lui-même résoluble par rapport aux dérivées principales de cote C de u, v, \dots , et, dès lors, le groupe désigné par t_C dans notre énoncé général jouira aussi de cette propriété. D'ailleurs, si aux variables, aux intégrales hypothétiques, et à leurs dérivées paramétriques, on attribue les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement dans les sys-

tèmes (\mathfrak{S}) et (S), les groupes correspondants $(t)_c$ et t_c deviennent, comme nous l'avons vu, identiques l'un à l'autre, en sorte que la résolution successive, soit des groupes

$$(t)_{\Delta+1}, (t)_{\Delta+2}, \dots,$$

soit des groupes

$$t_{\Delta+1}, t_{\Delta+2}, \dots,$$

fournit, pour les dérivées principales semblables, les mêmes valeurs initiales : si donc, dans les développements construits de part et d'autre à l'aide des valeurs initiales tant données que calculées, on fait abstraction des portions (convergentes) formées par les déterminations initiales, les portions restantes sont respectivement identiques de part et d'autre, et la convergence, lorsqu'elle a lieu d'un côté, ne peut manquer d'avoir lieu de l'autre.

Ainsi, nous nous trouvons ramenés à établir le double point formulé ci-dessus dans le présent alinéa II.

III. Dans le système (\mathfrak{S}), partageons les fonctions inconnues en catégories suivant la valeur de leur cote, et supposons, pour fixer les idées, que le nombre des catégories ainsi obtenues soit égal à trois. Les dérivées de tous ordres des inconnues se partagent naturellement alors en trois catégories, suivant qu'elles appartiennent à telle ou telle inconnue.

Cela étant, désignons par γ' , γ'' , γ''' les cotes attribuées aux inconnues des trois catégories respectives, et posons

$$\Delta + 1 - \gamma' = K', \quad \Delta + 1 - \gamma'' = K'', \quad \Delta + 1 - \gamma''' = K''';$$

la cote d'une inconnue quelconque étant au plus égale à Δ (puisque celles des diverses équations du système proposé S ne surpassent pas Δ), les différences $\Delta - \gamma'$, $\Delta - \gamma''$, $\Delta - \gamma'''$ sont positives ou nulles, et, par suite, les entiers K' , K'' , K''' sont au moins égaux à 1. Il est clair d'ailleurs qu'une dérivée d'inconnue aura une cote inférieure, égale, ou supérieure à $\Delta + 1$, suivant qu'elle sera :

D'ordre inférieur, égal, ou supérieur à K' , s'il s'agit d'une dérivée de première catégorie;

D'ordre inférieur, égal, ou supérieur à K'' , s'il s'agit d'une dérivée de deuxième catégorie ;

D'ordre inférieur, égal, ou supérieur à K''' , s'il s'agit d'une dérivée de troisième catégorie.

Considérant, en particulier, les dérivées de cote inférieure ou égale à $\Delta + 1$, qui seules figurent dans (S) , nous qualifierons, pour abrégé, de *secondaires* celles dont la cote est inférieure à $\Delta + 1$, et de *dominantes* celles dont la cote est égale à $\Delta + 1$. Chaque équation du système (S) , linéaire par rapport aux dérivées dominantes, a pour premier membre une de celles-ci.

Nous nommerons, en outre, dans ce qui suit :

Coefficients du système (S) les diverses fonctions (des variables, des inconnues et des dérivées secondaires) qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des dérivées dominantes, soit comme termes indépendants de ces dérivées ;

x_0, y_0, \dots les valeurs initiales de x, y, \dots ;

\mathfrak{f}, \dots les diverses quantités du groupe formé par les inconnues u, v, \dots et leurs dérivées secondaires (toutes ces quantités ont des valeurs initiales nulles, puisque les déterminations initiales sont identiquement nulles) ;

u', v', \dots les inconnues de première catégorie, g' leur nombre, $g'_1, g'_2, \dots, g'_{K'-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \dots, K' - 1$;

u'', v'', \dots les inconnues de deuxième catégorie, g'' leur nombre, $g''_1, g''_2, \dots, g''_{K''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \dots, K'' - 1$;

u''', v''', \dots les inconnues de troisième catégorie, g''' leur nombre, $g'''_1, g'''_2, \dots, g'''_{K'''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \dots, K''' - 1$.

D'ailleurs, les seconds membres du système primitif S étant, par hypothèse, développables à partir des valeurs initiales choisies pour les diverses quantités qui y figurent, on voit sans peine que les coefficients du système (S) , fonctions des diverses quantités

$$x, y, \dots, \mathfrak{f}, \dots,$$

seront développables à partir des valeurs initiales

$$x_0, y_0, \dots, 0, \dots$$

IV. Soient :

ε une constante positive moindre que $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire moindre que le quotient de 1 par le nombre des catégories d'inconnues du système donné);

μ une constante positive quelconque;

$$\begin{aligned} K', & \quad g', \quad g'_1, \quad g'_2, \quad \dots, \quad g'_{K'-1}, \\ K'', & \quad g'', \quad g''_1, \quad g''_2, \quad \dots, \quad g''_{K''-1}, \\ K''', & \quad g''', \quad g'''_1, \quad g'''_2, \quad \dots, \quad g'''_{K'''-1} \end{aligned}$$

les entiers définis dans ce qui précède (III);

$\varpi', \varpi'', \varpi'''$ trois fonctions inconnues de la variable indépendante t .

Si l'on pose

$$\begin{aligned} (5) \quad z = t + g' \varpi' + g'_1 \frac{\partial \varpi'}{\partial t} + \dots + g'_{K'-1} \frac{\partial^{K'-1} \varpi'}{\partial t^{K'-1}} \\ + g'' \varpi'' + g''_1 \frac{\partial \varpi''}{\partial t} + \dots + g''_{K''-1} \frac{\partial^{K''-1} \varpi''}{\partial t^{K''-1}} \\ + g''' \varpi''' + g'''_1 \frac{\partial \varpi'''}{\partial t} + \dots + g'''_{K'''-1} \frac{\partial^{K'''-1} \varpi'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{aligned}$$

et $\Theta(z) = \frac{1}{1-z}$, le système différentiel

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^{K'} \varpi'}{\partial t^{K'}} = \frac{\mu \Theta(z)}{1 - 3\varepsilon \Theta(z)}, \\ \frac{\partial^{K''} \varpi''}{\partial t^{K''}} = \frac{\mu \Theta(z)}{1 - 3\varepsilon \Theta(z)}, \\ \frac{\partial^{K'''} \varpi'''}{\partial t^{K'''}} = \frac{\mu \Theta(z)}{1 - 3\varepsilon \Theta(z)} \end{cases}$$

admet un groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi' &= \frac{\partial \varpi'}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K'-1} \varpi'}{\partial t^{K'-1}} = 0 \\ \varpi'' &= \frac{\partial \varpi''}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K''-1} \varpi''}{\partial t^{K''-1}} = 0 \\ \varpi''' &= \frac{\partial \varpi'''}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K'''-1} \varpi'''}{\partial t^{K'''-1}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } t = 0.$$

Les dérivées restantes de ces intégrales ont, d'ailleurs, pour $t = 0$, des valeurs initiales essentiellement positives.

D'abord, l'existence d'un groupe d'intégrales répondant aux conditions initiales (7) résulte immédiatement de propositions connues ⁽¹⁾.

D'un autre côté, si l'on développe $\Theta(z)$ par la formule

$$1 + z + z^2 + \dots,$$

et que, après avoir remplacé z par le second membre de (5), on ordonne le résultat par rapport aux puissances de

$$\begin{array}{cccc} t, & w', & \frac{\partial w'}{\partial t}, & \dots, & \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}}, \\ & w'', & \frac{\partial w''}{\partial t}, & \dots, & \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}}, \\ & w''', & \frac{\partial w'''}{\partial t}, & \dots, & \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{array}$$

on voit immédiatement que les valeurs initiales de la fonction ainsi obtenue et de ses dérivées partielles de tous ordres sont essentiellement positives. Il en est de même de la fonction $\frac{1}{1 - 3\varepsilon\Theta(z)}$, que l'on peut, à cause de $\varepsilon < \frac{1}{3}$, développer suivant la formule

$$1 + 3\varepsilon\Theta + 3^2\varepsilon^2\Theta^2 + \dots,$$

par suite, enfin, du produit

$$\mu\Theta(z) \frac{1}{1 - 3\varepsilon\Theta(z)},$$

second membre commun aux équations du système (6). Les valeurs initiales des dérivées principales de nos intégrales jouissent donc, elles aussi, de la propriété énoncée : car l'attribution aux quantités

$$t, \quad w', \quad w'', \quad w'''$$

des cotes respectives

$$1, \quad -K', \quad -K'', \quad -K'''$$

met tout d'abord en évidence la nature orthonome du système (6), et,

⁽¹⁾ Voir, par exemple, *Acta Mathematica*, t. XXIII, p. 265 et 266.

cela étant, on aperçoit sans peine que le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, effectué de proche en proche pour les classes successives à l'aide des relations du système (6) prolongé, conduit nécessairement à des résultats tous positifs.

Nous désignerons par $W'(t)$, $W''(t)$, $W'''(t)$ les intégrales considérées du système (6).

Nous ferons, en outre, observer ce qui suit :

Si l'on nomme $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \dots, \varepsilon'''_1, \varepsilon'''_2, \dots$ des quantités positives (en nombre limité) vérifiant les relations

$$\begin{aligned}\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \dots &= \varepsilon, \\ \varepsilon''_1 + \varepsilon''_2 + \dots &= \varepsilon, \\ \varepsilon'''_1 + \varepsilon'''_2 + \dots &= \varepsilon,\end{aligned}$$

le système (6) entraîne évidemment comme conséquence

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^{K'} \psi'}{\partial t^{K'}} &= \mu \Theta(z) + \varepsilon'_1 \Theta(z) \frac{\partial^{K'} \psi'}{\partial t^{K'}} + \varepsilon'_2 \Theta(z) \frac{\partial^{K'} \psi'}{\partial t^{K'}} + \dots \\ &\quad + \varepsilon''_1 \Theta(z) \frac{\partial^{K''} \psi''}{\partial t^{K''}} + \varepsilon''_2 \Theta(z) \frac{\partial^{K''} \psi''}{\partial t^{K''}} + \dots \\ &\quad + \varepsilon'''_1 \Theta(z) \frac{\partial^{K'''} \psi'''}{\partial t^{K'''}} + \varepsilon'''_2 \Theta(z) \frac{\partial^{K'''} \psi'''}{\partial t^{K'''}} + \dots, \\ \frac{\partial^{K''} \psi''}{\partial t^{K''}} &= \text{idem}, \\ \frac{\partial^{K'''} \psi'''}{\partial t^{K'''}} &= \text{idem}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, le système (6) entraînant aussi comme conséquences les relations

$$\frac{\mu \varepsilon \Theta^2(z)}{1 - 3 \varepsilon \Theta(z)} = \varepsilon \Theta(z) \frac{\partial^{K'} \psi'}{\partial t^{K'}} = \varepsilon \Theta(z) \frac{\partial^{K''} \psi''}{\partial t^{K''}} = \varepsilon \Theta(z) \frac{\partial^{K'''} \psi'''}{\partial t^{K'''}} ,$$

si, dans l'une quelconque des équations (8), on remplace telle ou telle des sommes

$$\begin{aligned}\varepsilon'_1 \Theta(z) \frac{\partial^{K'} \psi'}{\partial t^{K'}} + \varepsilon'_2 \Theta(z) \frac{\partial^{K'} \psi'}{\partial t^{K'}} + \dots, \\ \varepsilon''_1 \Theta(z) \frac{\partial^{K''} \psi''}{\partial t^{K''}} + \varepsilon''_2 \Theta(z) \frac{\partial^{K''} \psi''}{\partial t^{K''}} + \dots, \\ \varepsilon'''_1 \Theta(z) \frac{\partial^{K'''} \psi'''}{\partial t^{K'''}} + \varepsilon'''_2 \Theta(z) \frac{\partial^{K'''} \psi'''}{\partial t^{K'''}} + \dots\end{aligned}$$

il suffit, pour le voir, d'observer qu'en vertu des formules (9), toute inconnue ou dérivée de première catégorie, multipliée par son poids, s'obtient en remplaçant, dans la fonction $W'(t)$ ou dans sa dérivée d'ordre égal, la variable t par la somme

$$\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \dots,$$

puis, de faire une remarque analogue relativement aux inconnues ou dérivées de deuxième ou de troisième catégorie.

Prenons maintenant, dans le système (S), une équation quelconque, (\mathfrak{s}), et désignons par p' , p'' , p''' les nombres respectifs (≥ 0) des dérivées dominantes de première, deuxième, troisième catégorie qui figurent dans son second membre, par

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{D}'_1, & \mathfrak{D}'_2, & \dots, & \mathfrak{D}'_{p'}, \\ \mathfrak{D}''_1, & \mathfrak{D}''_2, & \dots, & \mathfrak{D}''_{p''}, \\ \mathfrak{D}'''_1, & \mathfrak{D}'''_2, & \dots, & \mathfrak{D}'''_{p'''} \end{array}$$

ces dérivées respectives, par

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{w}'_1, & \mathfrak{w}'_2, & \dots, & \mathfrak{w}'_{p'}, \\ \mathfrak{w}''_1, & \mathfrak{w}''_2, & \dots, & \mathfrak{w}''_{p''}, \\ \mathfrak{w}'''_1, & \mathfrak{w}'''_2, & \dots, & \mathfrak{w}'''_{p'''} \end{array}$$

leurs poids respectifs, par \mathfrak{D} le premier membre de (\mathfrak{s}), et par \mathfrak{w} le poids de \mathfrak{D} . Si l'entier p' n'est pas nul, on remplacera l'ensemble des termes en $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2, \dots, \mathfrak{D}'_{p'}$ qui figurent dans le second membre de (\mathfrak{s}) par

$$\frac{\varepsilon}{p'} \mathfrak{w}'_1 \Theta(s) \mathfrak{D}'_1 + \frac{\varepsilon}{p'} \mathfrak{w}'_2 \Theta(s) \mathfrak{D}'_2 + \dots + \frac{\varepsilon}{p'} \mathfrak{w}'_{p'} \Theta(s) \mathfrak{D}'_{p'};$$

si p' est nul, on remplacera cet ensemble absent par $\frac{\mu \varepsilon \Theta^2(s)}{1 - 3 \varepsilon \Theta(s)}$. On effectuera des substitutions analogues pour les termes en $\mathfrak{D}''_1, \mathfrak{D}''_2, \dots, \mathfrak{D}''_{p''}$ et pour les termes en $\mathfrak{D}'''_1, \mathfrak{D}'''_2, \dots, \mathfrak{D}'''_{p'''}$ qui figurent dans le second membre de (\mathfrak{s}). Quant au terme indépendant des dérivées dominantes, on le remplacera par $\mu \Theta(s)$. On remplacera enfin le premier membre \mathfrak{D} par $\mathfrak{w} \mathfrak{D}$, et l'on multipliera les deux membres par $\frac{1}{\mathfrak{w}}$. L'équation finalement obtenue, ($\langle \mathfrak{s} \rangle$), ne différera alors de (\mathfrak{s}) que par les coefficients,

fonctions de x, y, \dots, f, \dots qui figurent dans le second membre. A chaque équation du système (\mathfrak{S}) on fera correspondre de même une équation telle que $((s))$; on obtiendra finalement un système, $((\mathfrak{S}))$, ne différant de (\mathfrak{S}) que par les coefficients des seconds membres, et identiquement vérifié par la substitution aux inconnues des seconds membres de (g) , c'est-à-dire de fonctions qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en x_0, y_0, \dots des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent toutes des valeurs initiales positives (IV). Chacun des nouveaux coefficients s'obtient d'ailleurs en faisant le produit de $\Theta(s)$ par quelque constante positive, et y ajoutant parfois le produit de $\frac{\Theta^2(s)}{1 - 3\varepsilon\Theta(s)}$ par quelque autre constante positive.

La première de ces deux constantes, qui seule est importante à considérer, et que nous nommerons, pour abréger, *caractéristique* du coefficient, dépend de ε ou de μ suivant que le coefficient où elle figure multiplie ou non quelque dérivée dominante. Son produit par $\Theta(s)$ est identique au coefficient de $((\mathfrak{S}))$ dont il s'agit, ou l'admet pour majorante relativement aux valeurs $x_0, y_0, \dots, 0, \dots$ de x, y, \dots, f, \dots .

Il importe de remarquer que, dans les seconds membres du système $((\mathfrak{S}))$ que nous venons de former, les caractéristiques dépendant de ε sont de degré zéro par rapport à l'ensemble des quantités

$$(10) \quad \xi, \eta, \dots, \nu', \psi', \dots, \nu'', \psi'', \dots, \nu''', \psi''', \dots$$

Effectivement, le poids d'une dérivée quelconque est, d'après notre définition, un produit de puissances, positives ou négatives, de ces quantités, et le degré de ce produit visiblement égal et de signe contraire à la cote de la dérivée considérée; dès lors, les dérivées dominantes qui figurent dans une équation quelconque de $((\mathfrak{S}))$ ont pour poids respectifs des produits qui sont tous de degré $-(\Delta + 1)$, en sorte que, après réduction à l'unité du coefficient du premier membre, les caractéristiques dépendant de ε sont de degré zéro par rapport à l'ensemble des quantités (10).

Il est bon de remarquer aussi qu'en augmentant, s'il le faut, d'un même entier négatif convenablement choisi les cotes $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ des fonctions inconnues (augmentation permise comme nous l'avons fait

remarquer au début du présent numéro), les poids φ, \dots des diverses quantités f, \dots seront tous de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des quantités (10). Effectivement, parmi les cotes des diverses quantités f, \dots , la plus grande algébriquement est Δ , d'où résulte que, parmi les cotes changées de signe, la plus petite algébriquement est $-\Delta$: il suffit donc que l'on ait $-\Delta > 0$, ou $\Delta < 0$. C'est ce que nous supposons désormais.

VI. Si, dans les seconds membres de (\mathfrak{S}) , les modules initiaux des coefficients des dérivées dominantes satisfont à certaines inégalités, on peut attribuer, d'une part à la constante ε (moindre que $\frac{1}{3}$), d'autre part aux constantes (10), des valeurs telles, que, dans le système $((\mathfrak{S}))$, les caractéristiques dépendant de ε soient respectivement supérieures aux modules initiaux dont il s'agit.

Il est tout d'abord évident que, si ces modules initiaux sont suffisamment petits, on pourra faire en sorte que les caractéristiques dépendant de ε leur soient respectivement supérieures : il suffit, en effet, pour que cette circonstance se réalise, d'attribuer à ε une valeur positive quelconque moindre que $\frac{1}{3}$, aux quantités (10) des valeurs positives quelconques, et d'assujettir ensuite les modules initiaux dont nous parlons à être respectivement inférieurs aux valeurs ainsi obtenues pour les caractéristiques dépendant de ε .

Plus généralement, écrivons que les caractéristiques dépendant de ε sont respectivement supérieures aux modules initiaux, et que ε est inférieur à $\frac{1}{3}$, et formons un ensemble de conditions suffisantes pour que ces inégalités puissent être vérifiées par un choix convenable des quantités (10) et de ε : nous tomberons ainsi sur certaines inégalités subsistant entre les modules initiaux.

VII. Si, par un choix convenable de la constante ε (moindre que $\frac{1}{3}$) et des constantes (10), on peut faire en sorte que, dans les seconds membres de $((\mathfrak{S}))$, les caractéristiques dépendant de ε soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans

les seconds membres de (\mathfrak{S}) , les coefficients des dérivées dominantes, on peut, en laissant à ε sa valeur, multipliant les quantités (10) par un même nombre convenablement choisi, et prenant pour μ une valeur convenablement choisie, faire en sorte que les coefficients des seconds membres de $((\mathfrak{S}))$ (nous voulons dire les coefficients des dérivées dominantes et les termes indépendants de ces dérivées) soient respectivement majorants pour les coefficients correspondants des seconds membres de (\mathfrak{S}) .

Effectivement, supposons que, par un choix convenable de ε et des constantes (10), les caractéristiques dépendant de ε dans les seconds membres de $((\mathfrak{S}))$ soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de (\mathfrak{S}) , les coefficients des dérivées dominantes, et désignons par M, \dots les caractéristiques dont il s'agit. D'autre part, soit r une constante positive satisfaisant à la double condition : 1° d'être inférieure à des rayons de convergence simultanés des coefficients des seconds membres de (\mathfrak{S}) , quand on suppose ces coefficients développés à partir des valeurs initiales des quantités dont ils dépendent; 2° d'être assez petite pour que, en remplaçant dans les développements des coefficients des dérivées dominantes les coefficients numériques par leurs modules et les accroissements par r , les sommes ainsi obtenues soient respectivement inférieures aux caractéristiques M, \dots (la chose est évidemment possible, puisque, dans ces développements, les termes constants ont des modules respectivement inférieurs aux constantes M, \dots). La constante r étant ainsi fixée, multiplions les nombres (10) par une constante positive telle, que les nouvelles valeurs de $\xi, \eta, \dots, \varphi, \dots$ soient toutes supérieures à $\frac{1}{r}$ [ce qui est possible, puisque $\xi, \eta, \dots, \varphi, \dots$ ont des degrés positifs par rapport à l'ensemble des quantités (10)], et remplaçons désormais les constantes (10) par les produits ainsi obtenus : une pareille multiplication ne change pas les valeurs des caractéristiques dépendant de ε , parce que chacune de ces caractéristiques est de degré zéro par rapport à l'ensemble des quantités (10), et, en conséquence, la double condition à laquelle nous avons assujéti r ne cesse pas d'être véri-

fiée. Soient alors ω le poids maximum des premiers membres du système (\mathfrak{S}) [ou $((\mathfrak{S}))$], et N une constante positive supérieure à toutes celles qu'on obtient lorsque, après avoir développé à partir des valeurs initiales des quantités qui y figurent les termes indépendants des dérivées dominantes dans les seconds membres de (\mathfrak{S}) , on remplace dans ces développements les coefficients numériques par leurs modules et les accroissements par r . Cela étant, si l'on prend $\mu > N\omega$, toute caractéristique dépendant de μ , étant au moins égale à $\frac{\mu}{\omega}$, sera, par suite, supérieure à N .

Dans ces conditions, on voit sans peine que les coefficients du système (\mathfrak{S}) admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs $x_0, y_0, \dots, o, \dots$ de x, y, \dots, f, \dots , les coefficients correspondants du système $((\mathfrak{S}))$.

VIII. *Si, par un choix convenable de la constante ε (moindre que $\frac{1}{3}$) et des constantes (10), on peut faire en sorte que, dans les seconds membres de $((\mathfrak{S}))$, les caractéristiques dépendant de ε soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de (\mathfrak{S}) , les coefficients des dérivées dominantes, la double circonstance spécifiée à l'alinéa II se trouve réalisée.*

En rapprochant de notre hypothèse actuelle les conclusions de l'alinéa précédent, on voit que la constante ε , les constantes (10) et la constante μ peuvent être déterminées de telle façon que les coefficients des seconds membres de $((\mathfrak{S}))$ soient respectivement majorants pour ceux de (\mathfrak{S}) . Cela fait, rappelons-nous que les valeurs initiales imposées dans le système (\mathfrak{S}) aux inconnues et à leurs dérivées paramétriques de tous ordres sont nulles, tandis que les valeurs initiales prises par les intégrales effectives dont nous avons constaté l'existence dans le système $((\mathfrak{S}))$ et par leurs dérivées paramétriques sont positives ou nulles.

Observons maintenant que, dans les deux systèmes

$$(\mathfrak{S}) \text{ prolongé, } ((\mathfrak{S})) \text{ prolongé,}$$

les relations se correspondent chacune à chacune. Considérons alors deux relations correspondantes. Dans la première [celle qui provient de (\mathfrak{S}) prolongé], le premier membre est une certaine dérivée principale des intégrales hypothétiques de (\mathfrak{S}) , et le second membre une somme de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir : certains entiers positifs; certains coefficients des seconds membres de (\mathfrak{S}) ; certaines dérivées partielles de ces coefficients; enfin, certaines dérivées, principales ou paramétriques, des intégrales hypothétiques de (\mathfrak{S}) . Si de cette relation [provenant de (\mathfrak{S}) prolongé] on passe à la relation correspondante [provenant de $((\mathfrak{S}))$ prolongé], cette dernière est composée exactement de la même façon avec les dérivées principales ou paramétriques des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$, les entiers positifs dont nous venons de parler, les majorantes des coefficients de (\mathfrak{S}) , et les dérivées partielles de ces majorantes.

Cela étant, considérons, dans (\mathfrak{S}) prolongé, les groupes successifs

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1}, (\mathfrak{t})_{\Delta+2}, \dots$$

dont il est question à l'alinéa II, et, dans $((\mathfrak{S}))$ prolongé, les groupes *correspondants*,

$$((\mathfrak{t}))_{\Delta+1}, ((\mathfrak{t}))_{\Delta+2}, \dots$$

Si, dans les groupes

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1}, ((\mathfrak{t}))_{\Delta+1},$$

on remplace par les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement de part et d'autre les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques, chacun des groupes résultants, à l'aide desquels on cherche à déterminer de part et d'autre les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Delta + 1$, aura pour premiers membres (sans omission ni répétition) les dérivées principales dont il s'agit, et pour seconds membres des fonctions linéaires de ces dérivées principales (aucun des premiers membres ne figurant dans le second membre correspondant); si l'on compare d'ailleurs les coefficients de ces fonctions linéaires dans les deux groupes, on voit que, dans le second

groupe, les coefficients (positifs) sont supérieurs aux modules des coefficients du premier groupe, et que les termes indépendants y sont tous supérieurs à zéro; enfin, il est clair que le second groupe admet une solution en nombres positifs [à savoir les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Delta + 1$ des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$]. Si donc on applique la proposition de l'alinéa I, on voit que le premier groupe est résoluble par rapport aux dérivées principales de cote $\Delta + 1$ des intégrales hypothétiques de (\mathfrak{S}) , et que les valeurs numériques ainsi obtenues ont des modules respectivement inférieurs aux valeurs initiales (positives) prises par les dérivées semblables des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$.

Cela étant, considérons les groupes

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+2}, \quad ((\mathfrak{t}))_{\Delta+2},$$

et, dans ces deux groupes, remplaçons les variables, les inconnues et les dérivées paramétriques par les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement de part et d'autre, puis les dérivées principales de cote $\Delta + 1$ par les valeurs numériques respectivement obtenues comme il vient d'être dit. Chacun des groupes résultants, à l'aide desquels on cherche à déterminer de part et d'autre les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Delta + 2$, aura pour premiers membres (sans omission ni répétition) les dérivées principales dont il s'agit, et pour seconds membres des fonctions linéaires de ces dérivées principales (aucun des premiers membres ne figurant dans le second membre correspondant); si l'on compare d'ailleurs les coefficients de ces fonctions linéaires dans les deux groupes, on voit, par tout ce qui précède, que, dans le second groupe, ces coefficients (positifs) sont supérieurs aux modules des coefficients du premier groupe, et que les termes indépendants y sont tous supérieurs à zéro; enfin, il est clair que le second groupe admet une solution en nombres positifs [à savoir les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Delta + 2$ des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$]. Si donc on applique la proposition de l'alinéa I, on voit que le premier groupe est résoluble par rapport aux dérivées principales de cote $\Delta + 2$ des intégrales hypothétiques

de (\mathfrak{S}) , et que les valeurs numériques ainsi obtenues ont des modules respectivement inférieurs aux valeurs initiales (positives) prises par les dérivées semblables des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$.

Et ainsi de suite indéfiniment.

Ainsi, les groupes

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1}, (\mathfrak{t})_{\Delta+2}, \dots$$

sont bien, comme nous l'avions annoncé, successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\Delta + 1, \Delta + 2, \dots$$

En outre, les développements (déterminés) construits à l'aide des valeurs initiales données et de celles que fournit cette résolution successive ont des coefficients dont les modules sont respectivement inférieurs aux coefficients correspondants (positifs) des développements des intégrales *effectives* de $((\mathfrak{S}))$: par suite, ils sont, comme ces derniers, nécessairement convergents.

IX. Du simple rapprochement des alinéas II et VIII résulte immédiatement la conclusion suivante :

Les conditions A, B et C (du présent n° 30) étant supposées satisfaites, pour que la double circonstance spécifiée dans notre énoncé général se trouve réalisée, il suffit que les valeurs initiales choisies pour les diverses quantités qui figurent dans les seconds membres de S satisfassent (en outre de celle qu'impose déjà la condition C) à certaines restrictions d'inégalité.

Notre démonstration même indique comment ces inégalités doivent être formées.

On considère, à cet effet, les deux systèmes ci-dessus désignés par (\mathfrak{S}) et $((\mathfrak{S}))$; dans l'un et l'autre de ces deux systèmes, on ne conserve que la partie linéaire et homogène par rapport aux dérivées dominantes, et l'on suppose, dans (\mathfrak{S}) , les coefficients de ces dérivées remplacés par leurs valeurs initiales, qui sont respectivement les mêmes que dans (S) [II]. Désignant ensuite par h le nombre des

catégories en lesquelles se partagent les inconnues suivant les valeurs de leurs cotes, et augmentant, s'il le faut, d'un même entier négatif les cotes de toutes les inconnues, afin que les poids de ces inconnues et de leurs dérivées secondaires, définis à l'alinéa V, soient tous de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des quantités (10), on écrit, d'une part, que la constante ε est moindre que $\frac{1}{h}$, d'autre part, que, dans les seconds membres de (S), les coefficients des dérivées dominantes ont des modules initiaux respectivement inférieurs aux caractéristiques des coefficients correspondants du système ((S)); on forme enfin, entre ces modules initiaux, un ensemble de conditions suffisantes pour que les relations ainsi écrites puissent être vérifiées par un choix convenable de ε et des quantités (10). Les inégalités résultantes (jointes à celle qu'a antérieurement fournie la condition C) sont celles qu'il s'agissait de former.

31. PREMIER THÉORÈME D'EXISTENCE. — Considérons un système différentiel, S, satisfaisant à la double condition ci-après :

1° *Le système S est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les dérivées dont il s'agit appartiennent respectivement à des inconnues toutes différentes; les seconds membres sont d'ailleurs indépendants de toute dérivée principale.*

2° *En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne dépasse pas celle du premier membre correspondant.*

Cela étant, et dans les limites où les valeurs initiales choisies pour les quantités qui figurent dans les seconds membres de S satisfont à certaines restrictions d'inégalité, le système dont il s'agit est complètement intégrable.

Effectivement, le groupe général, S_c , de la suite

$$(11) \quad S_0, S_{0+1}, \dots, S_c, \dots$$

contient, en pareil cas, un nombre d'équations *précisément égal* au

nombre des dérivées principales de cote C . Cela étant, choisissons d'une façon arbitraire les conditions initiales imposées aux intégrales hypothétiques, en assujettissant simplement les valeurs initiales des diverses quantités qui figurent dans les seconds membres de S :

1° *A ce que les groupes*

$$S_0, S_{\delta+1}, \dots, S_\Delta$$

soient résolubles chacun par rapport aux dérivées principales de cote égale à son indice, c'est-à-dire à ce que la restriction d'inégalité imposée par la condition C du n° 30 se trouve satisfaite;

2° *A ce que les restrictions d'inégalité spécifiées dans l'alinéa IX du n° 30 le soient également.*

Il résulte alors de la proposition qui vient d'être établie (n° 30) que les groupes (11), où l'on suppose remplacées par les valeurs initiales données les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques de tous ordres, sont successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta + 1, \dots, C, \dots,$$

et que les développements (uniques) construits à l'aide des valeurs initiales, tant données que calculées, sont de toute nécessité convergents : leurs sommes fournissent donc des intégrales *effectives* du système proposé S .

32. Appliquons ce résultat à l'équation très simple

$$(12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

qui remplit la double condition énoncée au début du n° 31, ainsi qu'on le voit en attribuant à x, y, u les cotes respectives 1, 1, c , où c désigne un entier positif ou négatif choisi comme on voudra. Cela étant, si l'on désigne par A et B les dérivées partielles du second membre de (12) par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, puis par A_0

et B_0 les valeurs numériques initiales de A et B , le système (5), réduit à sa partie linéaire et homogène par rapport aux dérivées dominantes, et après substitution aux coefficients de ces dernières de leurs valeurs initiales, prend la forme

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = A_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \dots, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = A_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + B_0 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \dots \end{cases}$$

Le nombre h des catégories d'inconnues est ici égal à 1; on peut d'ailleurs supposer la cote c de l'inconnue u choisie de telle façon, qu'en désignant par ξ, η, v^{-c} , comme il a été vu à l'alinéa V du n° 30, les poids respectifs de x, y, u , les poids

$$v^{-c}, \quad \frac{v^{-c}}{\xi}, \quad \frac{v^{-c}}{\eta}, \quad \frac{v^{-c}}{\xi^2}, \quad \frac{v^{-c}}{\xi\eta}, \quad \frac{v^{-c}}{\eta^2}$$

de l'inconnue u et de ses dérivées secondaires $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ soient de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des trois quantités ξ, η, v (il suffit pour cela de supposer $c = -3$). Cela étant, désignons par s la somme des produits obtenus en multipliant $x - x_0$ par $\xi, y - y_0$ par η , et l'inconnue u avec ses dérivées secondaires par leurs poids respectifs; posons en outre $\Theta(s) = \frac{1}{1-s}$, et formons le système

$$\begin{aligned} \frac{v^{-c}}{\xi^2 \eta} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{v^{-c}}{\xi^3} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{v^{-c}}{\xi \eta^2} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \dots, \\ \frac{v^{-c}}{\xi \eta^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{v^{-c}}{\xi^2 \eta} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{v^{-c}}{\eta^3} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \dots \end{aligned}$$

(où nous ne considérons non plus que la portion linéaire et homogène par rapport aux dérivées dominantes). Ce dernier devient, après réduction à l'unité des coefficients des premiers membres,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{\eta}{\xi} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\xi}{\eta} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \dots, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{\eta}{\xi} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\xi}{\eta} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \dots, \end{aligned}$$

et, en comparant le système ((S)) ainsi formé au système (S) ou (13), nous avons à écrire les inégalités

$$\varepsilon < 1, \quad \frac{\varepsilon}{2} \frac{\eta}{\xi} > \text{mod } A_0, \quad \frac{\varepsilon}{2} \frac{\xi}{\eta} > \text{mod } B_0,$$

dont l'ensemble équivaut à

$$(14) \quad \varepsilon < 1, \quad \frac{2 \text{ mod } A_0}{\varepsilon} < \frac{\eta}{\xi} < \frac{\varepsilon}{2 \text{ mod } B_0}.$$

Pour que les deux dernières inégalités (14) soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(15) \quad \text{mod } A_0 \text{ mod } B_0 < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

ce qui entraîne, à cause de $\varepsilon < 1$, la condition nécessaire

$$(16) \quad \text{mod } A_0 \text{ mod } B_0 < \frac{1}{4};$$

reciproquement d'ailleurs, si l'inégalité (16) est satisfaite, on pourra trouver pour ε une valeur positive et plus petite que 1, vérifiant (15), puis pour $\frac{\eta}{\xi}$ une valeur positive vérifiant la double inégalité qui figure dans (14). La condition nécessaire et suffisante pour que les relations (14) soient compatibles est donc

$$\text{mod}(A_0 B_0) < \frac{1}{4}.$$

En conséquence, pour que l'équation aux dérivées partielles (12) admette une intégrale, et une seule, répondant à des conditions initiales données, il suffit, en désignant par A et B les dérivées partielles du second membre f par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, que le module initial du produit AB soit inférieur à $\frac{1}{4}$.

33. Étant donné un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, on peut, pour se représenter commodément l'économie des conditions initiales, procéder comme il suit : construire un quadrillage rectangu-

laire dont les lignes correspondent aux diverses variables indépendantes x, y, \dots , et les colonnes aux diverses quantités (inconnues et dérivées) qui figurent dans les premiers membres des conditions initiales; puis, dans l'une quelconque de ces colonnes, noircir à l'aide de hachures les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction schématique (dégénérée ou non) qui figure dans le second membre de la condition correspondante; en répétant cette opération successivement dans toutes les colonnes, on obtient une sorte de damier où les cases blanches et noires peuvent offrir des dispositions relatives variées.

Si l'on considère, par exemple, un système différentiel impliquant deux fonctions inconnues, u, v , des trois variables indépendantes x, y, z , et résolu par rapport aux quatre dérivées

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3},$$

les conditions initiales peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{ll} u = \varphi(y, z) & \text{pour } x - x_0 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(x, z) & \text{pour } y - y_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mu(x, y) & \text{pour } z - z_0 = 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} v = \psi(z) & \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha & \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \beta & \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0;$$

et à cette forme correspondra le damier ci-dessous :

	u	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	v	$\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
x						
y						
z						

Cela étant, nous dirons que le damier des conditions initiales est

régulier, si l'on peut adopter pour ses lignes, c'est-à-dire pour les variables indépendantes du système, un ordre tel, que les cases blanches de chaque colonne se trouvent toutes situées au bas de cette colonne. (Le lecteur remarquera la similitude de cette définition avec celle que nous avons posée à l'alinéa I du n° 21.)

34. Les conclusions formulées dans notre premier théorème d'existence (n° 31) s'appliquent, naturellement, au cas où, les hypothèses 1° et 2° du n° 31 étant supposées satisfaites, le damier correspondant aux conditions initiales du système S est *régulier* : mais il convient d'observer que, dans le cas dont il s'agit, *toute restriction d'inégalité devient inutile*, parce que le système S, ainsi que nous l'avons prouvé dans un Mémoire antérieur (¹), est forcément orthonome.

35. DEUXIÈME THÉORÈME D'EXISTENCE. — Considérons un système différentiel, S, remplissant les conditions ci-après :

1° *Le système S est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale; quant aux premiers membres, aucun d'entre eux n'est une dérivée de quelque autre, et deux au moins d'entre eux sont des dérivées d'une même inconnue.*

2° *En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Cela étant, et dans les limites où certaines restrictions d'inégalité (concernant les valeurs initiales des variables indépendantes, des inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques) se trouvent satisfaites, il faut et il suffit, pour que le système S soit complètement intégrable, qu'en attribuant aux notations δ et Γ le même sens que dans les

(¹) *Sur les systèmes différentiels réguliers*, Chap. I (*Annales de la Faculté des Sciences de Marseille*, t. XIV, fascicule IV).

n^{os} 18, 28 et 29, l'élimination des dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta + 1, \dots, \Gamma + 1, \Gamma + 2,$$

effectuée entre les équations

$$(17) \quad S_{\delta}, S_{\delta+1}, \dots, S_{\Gamma+1}, S_{\Gamma+2}$$

(n^o 5), conduise à des identités.

Les restrictions d'inégalité auxquelles fait allusion notre énoncé sont les suivantes :

1^o En désignant par δ , comme nous venons de l'indiquer, la cote minima des premiers membres de S, et par Δ leur cote maxima, on peut, des groupes

$$S_{\delta}, S_{\delta+1}, \dots, S_{\Delta}$$

du système S prolongé, extraire respectivement des groupes,

$$t_{\delta}, t_{\delta+1}, \dots, t_{\Delta},$$

possédant la triple propriété de comprendre respectivement les groupes

$$s_{\delta}, s_{\delta+1}, \dots, s_{\Delta}$$

du système S (n^o 5), de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta + 1, \dots, \Delta,$$

et d'être successivement résolubles par rapport à ces dérivées.

2^o Les restrictions spécifiées à l'alinéa IX du n^o 30 doivent, elles aussi, se trouver satisfaites.

3^o Le système du premier ordre, Σ , que l'ensemble des restrictions précédentes permet, comme nous allons le voir, de déduire de S à l'aide du mécanisme décrit au n^o 19, peut, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, suivi d'une résolution convenable, être transformé en un autre, Ω , remplissant les conditions spécifiées au n^o 21.

Il résulte, en effet, des deux premières restrictions qu'en désignant

par

$$t_{\Delta+1}, \quad t_{\Delta+2}, \quad \dots$$

des groupes respectivement extraits de

$$S_{\Delta+1}, \quad S_{\Delta+2}, \quad \dots$$

sous la seule condition d'avoir pour premiers membres (sans omission ni répétition) les dérivées principales de cotes

$$\Delta + 1, \quad \Delta + 2, \quad \dots,$$

les groupes

$$t_{\delta}, \quad t_{\delta+1}, \quad \dots, \quad t_{\Delta}, \quad t_{\Delta+1}, \quad t_{\Delta+2}, \quad \dots$$

sont successivement résolubles par rapport à ces dérivées (n° 30). On peut alors, du système S, déduire un système du premier ordre, Σ , par le mécanisme indiqué au n° 19; et, cela étant, il résulte de la troisième restriction que les conditions nécessaires et suffisantes pour la passivité du système S sont celles mêmes (n° 29) que formule notre énoncé actuel relativement aux groupes (17). Ces conditions sont donc nécessaires pour que le système soit complètement intégrable; elles sont d'ailleurs suffisantes (n° 25, 2°), puisque, en les supposant satisfaites, notre proposition du n° 30 assure la convergence des développements des intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données.

36. Les conclusions formulées dans notre deuxième théorème d'existence (n° 35) s'appliquent, naturellement, au cas où, les deux hypothèses posées au début du n° 35 étant satisfaites, et les conditions initiales du système S ayant (comme l'exige le théorème en question) la forme spécifiée au n° 18, le damier qui leur correspond est *régulier* (n° 33) : mais alors les restrictions d'inégalité se simplifient notablement, et il suffit, en ce qui concerne ces dernières, de supposer *que des groupes*

$$S_{\delta}, \quad S_{\delta+1}, \quad \dots, \quad S_{\Gamma+1}$$

on puisse extraire respectivement des groupes,

$$t_{\delta}, \quad t_{\delta+1}, \quad \dots, \quad t_{\Gamma+1},$$

possédant la triple propriété de contenir les groupes

$$S_0, S_{0+1}, \dots, S_\Delta$$

du système S, d'être composés d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \delta + 1, \dots, \Gamma + 1,$$

et d'être successivement résolubles par rapport à ces dérivées principales. (De cette restriction d'inégalité, supposée vérifiée, et de la disposition régulière du damier des conditions initiales, il résulte, comme on le prouverait sans peine, que le groupe $S_{\Gamma+2}$ contient quelque groupe partiel résoluble par rapport aux dérivées principales de cote $\Gamma + 2$.)

I. Les deux hypothèses posées au début du n° 35, et auxquelles il faut adjoindre la restriction d'inégalité formulée ci-dessus, rendent possible la formation d'un système du premier ordre, Σ , déduit de S à l'aide du mécanisme décrit au n° 19. Cela posé, *la recherche, dans le système S, d'une solution ordinaire (hypothétique) répondant à des conditions initiales données se ramène à une semblable recherche exécutée dans le système Σ .*

Rappelons-nous, en effet, que l'économie des conditions initiales est la même dans les deux systèmes aux notations près, que les systèmes ${}^{(C)}\Sigma'$, ${}^{(C)}\Pi$ sont en corrélation multiplicatoire quel que soit C, et que toutes les équations de S figurent dans Σ'' aux notations près (voir le n° 19, dont nous adoptons ici les notations).

Cela étant, il est d'abord évident que toute solution ordinaire de S en fournit une de Σ par la simple adjonction aux fonctions qui la constituent de quelques-unes de leurs dérivées.

Réciproquement, puisque toutes les équations du système figurent dans Σ'' aux notations près, le système S peut se déduire, par éliminations, du système

$$(\Sigma'', {}^{(\Gamma+1)}\Pi),$$

ou encore du système

$$(\Sigma'', {}^{(\Gamma+1)}\Sigma');$$

il peut donc se déduire, par différentiations et éliminations, du système

$$(\Sigma', \Sigma''), \quad \text{ou} \quad \Sigma.$$

En conséquence, toute solution ordinaire de Σ en fournit une de S par la simple suppression des fonctions trouvées pour les inconnues adjointes.

II. *Le système du premier ordre Σ est orthonome.*

Il jouit, en effet, des deux propriétés suivantes :

1° Il est résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des inconnues qui s'y trouvent engagées, et l'économie des conditions initiales y est la même, aux notations près, que dans le système S , en sorte que si l'on inscrit, conformément aux indications du n° 19, les diverses équations de Σ dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, en adoptant, pour les lignes de celui-ci, un ordre convenable, *les cases pleines et vides du Tableau ainsi obtenu présentent une disposition régulière.*

2° En attribuant, dans toutes les équations de Σ , aux variables x, y, \dots des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues (anciennes et nouvelles) des cotes respectives convenablement choisies, *chaque second membre de Σ ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Or, tout système du premier ordre possédant les propriétés ci-dessus énoncées est nécessairement orthonome (n° 21, I).

III. La condition posée dans l'énoncé du n° 35 relativement aux équations (17) est évidemment nécessaire pour que le système S , spécifié par notre énoncé général, soit complètement intégrable : car, si elle n'était pas satisfaite, les conditions initiales pourraient être choisies de telle façon que les équations dont il s'agit (fournissant les valeurs initiales des dérivées principales de cotes $\delta, \delta + 1, \dots, \Gamma + 1, \Gamma + 2$) fussent incompatibles.

Réciproquement, si l'on suppose cette condition satisfaite, il résulte

de raisonnements semblables à ceux de l'alinéa I du n° 28 que le système orthonome Σ est passif, et, par suite, qu'il admet un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales arbitrairement choisies. Il en sera donc de même du système S.

37. Appliquons à quelques exemples très simples les propositions des n°s 28, 35 et 36.

I. Considérons d'abord un système d'équations aux dérivées partielles impliquant trois fonctions inconnues, u, v, w , des variables indépendantes x, y, \dots , et supposons qu'il ait pour premiers membres toutes les dérivées d'ordre m de u , toutes celles d'ordre n de v , toutes celles d'ordre p de w , les seconds membres ne contenant, avec les variables x, y, \dots , que les trois inconnues u, v, w et leurs dérivées d'ordres respectivement inférieurs à m, n, p . En attribuant à x, y, \dots des cotes respectives toutes égales à 1, et à u, v, w des cotes respectives, c_u, c_v, c_w , vérifiant les relations

$$c_u + m = c_v + n = c_w + p,$$

on voit immédiatement : 1° que le système dont il s'agit est orthonome; 2° qu'en désignant par Q la valeur commune des trois entiers $c_u + m, c_v + n, c_w + p$, il a pour premiers membres les diverses dérivées de cote Q , et que les dérivées paramétriques des inconnues sont, dès lors, toutes celles de cote inférieure à Q (en nombre essentiellement limité). En conséquence, l'entier désigné au n° 18 par Γ est ici égal à $Q - 1$, et l'on a $\Gamma + 2 = Q + 1$. On en déduit sans peine la règle suivante pour l'intégrabilité complète du système :

Si l'on considère une dérivée de cote $Q + 1$ intéressant plusieurs variables distinctes, k par exemple ($k > 1$), il existe, dans le système proposé, k équations distinctes qui, différenciées chacune par rapport à la variable voulue, en fourniront des expressions où ne figurent, avec les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) de cote inférieure à $Q + 1$: dans ces k expressions, on remplacera les dérivées de cote Q par leurs valeurs tirées des équations du système, et il faudra que les k expressions résultantes soient toutes

identiquement égales. On procédera de même pour toutes les dérivées de cote $Q + 1$ intéressant plusieurs variables distinctes, et l'on aura ainsi l'ensemble des conditions pour que le système soit complètement intégrable.

II. Considérons un système différentiel impliquant trois fonctions inconnues, u, v, w , des trois variables indépendantes x, y, z , et résolu par rapport aux dérivées

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \end{array}$$

Les dérivées paramétriques sont, ici, en nombre essentiellement limité, et les conditions initiales ont pour premiers membres

$$u, \quad v, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad w, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

les seconds membres se réduisant, naturellement, à des constantes : de là résulte, notamment, que le système est régulier, puisque le damier correspondant aux conditions initiales ne contient que des cases noires. Cela étant, si l'on suppose que, en attribuant à

$$x, \quad y, \quad z, \quad u, \quad v, \quad w$$

les cotes respectives

$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

(et en posant au besoin certaines restrictions d'inégalité), les diverses hypothèses exigées par notre énoncé du n° 36 se trouvent vérifiées, la cote d'une dérivée quelconque sera égale à l'ordre même de cette dérivée, l'entier Γ à 1, l'entier $\Gamma + 2$ à 3, et l'on n'aura à s'occuper, dans l'application de la règle concernant l'intégrabilité complète (règle qui se trouve formulée au n° 35), que des dérivées principales du premier, du deuxième et du troisième ordre.

Nous avons eu, dans un récent Mémoire, l'occasion de considérer un système de cette nature ⁽¹⁾.

III. Considérons le système différentiel auquel conduit le problème du calcul inverse de la dérivation, c'est-à-dire un système différentiel ayant pour premiers membres (tous distincts) certaines dérivées de la fonction inconnue u , et pour seconds membres des fonctions données de x, y, \dots . Un pareil système est visiblement orthonome, comme on le voit en attribuant aux variables x, y, \dots la cote 1 et à l'inconnue u la cote zéro. On sait d'ailleurs que les conditions d'intégrabilité complète tirées de la considération des dérivées *cardinales* sont alors *nécessaires à l'existence de toute intégrale*, et, pour cette raison, se nomment simplement *conditions d'intégrabilité* ⁽²⁾ : nous allons chercher, en nous appuyant sur les résultats du présent Mémoire, une forme plus simple de ces conditions.

Supposons tout d'abord qu'aucun des premiers membres du système ne soit une dérivée de quelque autre : nous mettrons alors les conditions initiales sous la forme spécifiée au n° 18, et nous désignerons par Γ l'ordre *maximum* des premiers membres de ces conditions (la cote d'une dérivée quelconque est en effet égale à son ordre, puisque la cote de l'inconnue est zéro). Cela étant, pour que le système proposé soit intégrable, il est nécessaire et suffisant que, pour toute dérivée principale d'ordre inférieur ou égal à $\Gamma + 2$, les diverses expressions (en x, y, \dots) déduites du système proposé soient identiques entre elles. En supposant ces identités satisfaites, et, par suite, le système intégrable, la solution générale s'obtient, comme on sait ⁽³⁾, en ajoutant à une solution particulière quelconque une expression toute semblable à la détermination initiale schématique : or, il résulte du raisonnement fait à la fin du n° 20 que, pour se procurer une solution particulière du système donné, il suffit de résoudre

⁽¹⁾ *Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit l'étude des déformations finies d'un milieu continu (Annales de l'École Normale, 1905, p. 506 et 507).*

⁽²⁾ *Sur le calcul inverse des dérivées (Annales de la Faculté des Sciences de Marseille, t. X, fasc. I).*

⁽³⁾ *Sur le calcul inverse des dérivées.*

le même problème successivement dans divers systèmes de même nature, mais du premier ordre; on est donc ramené à des quadratures.

Supposons maintenant que quelqu'un des premiers membres du système soit une dérivée de quelque autre. On commencera par faire abstraction, dans le système, de toute équation dont le premier membre est une dérivée de quelque autre, et l'on formera les conditions d'intégrabilité du système résultant S . Si elles ne sont pas identiquement satisfaites, le système proposé n'est pas intégrable. Si elles le sont, deux cas peuvent se présenter : ou bien quelqu'une des équations jusqu'ici négligées ne peut se déduire de S par différentiation, auquel cas le système proposé n'est pas intégrable; ou bien chacune des équations jusqu'ici négligées peut se déduire de S par différentiation, auquel cas le système proposé peut être remplacé par le système intégrable S : on retombe alors sur le cas précédemment examiné.

38. Considérons, en terminant, un système différentiel *résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues* qui s'y trouvent engagées; dans ce système, *faisons abstraction, jusqu'à nouvel ordre, de toute équation dont le premier membre serait une dérivée de quelque autre* (cette suppression ne change pas l'économie des conditions initiales), et *supposons que le système résultant, S , satisfasse aux hypothèses formulées dans l'un ou l'autre des n^{os} 28, 31, 34, 35, 36.*

Cela étant, *pour que le système primitivement donné soit complètement intégrable, il faut et il suffit : 1^o que le système S le soit lui-même; 2^o que les équations jusqu'ici négligées soient* (chose très facile à vérifier) *de simples conséquences numériques de S prolongé.*

Effectivement, puisque S fait partie du système donné et que l'économie des conditions initiales est la même dans les deux systèmes, il faut et il suffit, pour que le système donné soit complètement intégrable : 1^o que le système S le soit lui-même; 2^o que les équations jusqu'ici négligées soient, au point de vue de l'intégration, des conséquences de S .

Or, le système S étant supposé complètement intégrable, si l'on considère les équations restantes et qu'on y remplace les dérivées principales par les expressions (indépendantes de toute dérivée prin-

ci-pale) qu'en fournit S prolongé, les équations résultantes doivent être, elles aussi, des conséquences de S au point de vue de l'intégration; par suite, S étant complètement intégrable, elles doivent être numériquement vérifiées par des valeurs arbitraires de toutes les quantités qu'elles renferment (variables, inconnues, dérivées paramétriques); les équations négligées sont donc forcément des conséquences numériques de S prolongé. Inversement, d'ailleurs, si elles sont des conséquences numériques de S prolongé, elles sont, à plus forte raison, des conséquences de S au point de vue de l'intégration, et il est clair qu'on peut les négliger sans changer la solution générale du système primitif.