

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

AOUST

**Sur l'analyse des courbes rapportées à un système
quelconque de coordonnées**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 6 (1869), p. 205-231

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6_205_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6_205_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
L'ANALYSE DES COURBES

RAPPORTÉES

A UN SYSTÈME QUELCONQUE DE COORDONNÉES,

PAR M. L'ABBÉ AOUST.

INTRODUCTION.

Lorsqu'on rapporte une courbe à un système quelconque de coordonnées curvilignes, les divers éléments de la courbe s'expriment en fonction des éléments analogues des lignes coordonnées. Les expressions que l'on obtient, qui sont toujours symétriques, sont susceptibles d'une forme simple lorsqu'on introduit la *courbure inclinée*, et alors elles constituent des théorèmes intéressants de géométrie curviligne. Le but de ce Mémoire est d'exposer les principales de ces expressions, et de montrer que, dans cette théorie comme dans la théorie des lignes tracées sur une surface quelconque, la courbure inclinée est un des plus puissants éléments de démonstration et de condensation.

Nous conservons les notations, définitions et hypothèses de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*, 1^{re} Partie, p. 2 et 3. Le signe $\sum$ placé devant une expression indique la somme des expressions semblables obtenues par les permutations circulaires des indices 0, 1, 2; lorsqu'une

lettre placée sous le signe $\sum$, ou un indice, restent invariables, nous plaçons cette lettre ou cet indice entre deux petits crochets $[]$. Nous représentons par d_0, d_1, d_2 les différentielles par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2 toutes les fois que cette notation est nécessaire pour déterminer le sens des différentiations; la lettre d représente une différentielle totale, de telle sorte que l'on a $d = d_0 + d_1 + d_2$. Nous partageons ce Mémoire en deux Parties, la première relative aux Formules générales, la seconde aux Applications.

§ I. — Formules générales.

1. *Équations de la courbe en coordonnées curvilignes.* — Supposons qu'un point quelconque de l'espace soit déterminé par l'intersection de trois surfaces dont les équations dans le système rectiligne orthogonal sont

$$(1) \quad f(x, y, z) = \rho, \quad f_1(x, y, z) = \rho_1, \quad f_2(x, y, z) = \rho_2,$$

ρ, ρ_1, ρ_2 étant des paramètres qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles; à chaque point de l'espace correspondra un système de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 , de sorte que ce système représentera les coordonnées du point. Si les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 sont des fonctions ψ, ψ_1, ψ_2 d'une variable t , lorsque t variera d'une manière continue, les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 varieront d'une manière continue; donc le lieu des intersections de ces surfaces sera une courbe dont les équations dans le système de coordonnées dont il s'agit seront

$$(2) \quad \rho = \psi(t), \quad \rho_1 = \psi_1(t), \quad \rho_2 = \psi_2(t);$$

si l'un des paramètres, ρ par exemple, est constant, la courbe sera située sur la surface ρ .

Supposons que les équations (1) soient résolues par rapport à x, y, z de telle sorte que l'on ait

$$x = F(\rho, \rho_1, \rho_2), \quad y = F_1(\rho, \rho_1, \rho_2), \quad z = F_2(\rho, \rho_1, \rho_2);$$

en remplaçant dans ces équations ρ, ρ_1, ρ_2 par leurs valeurs en fonction de t tirées des relations (2), on aura les trois équations de la courbe

dans le système rectiligne orthogonal. Cette courbe sera plus spécialement appelée *trajectoire* parce qu'elle traverse le système des coordonnées curvilignes.

2. *De l'élément de la trajectoire.* — Soit ds l'élément d'arc de la trajectoire, $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ seront ses trois composantes obliques suivant les arcs coordonnés au point que l'on considère; si l'on appelle dq , dq_1 , dq_2 les composantes obliques de l'élément ds suivant les plans tangents aux surfaces ρ , ρ_1 , ρ_2 , on peut se proposer de déterminer ces divers éléments en grandeur et en direction; ils se déduisent d'une formule unique qui donne l'angle de deux droites dans le système oblique.

Angle de deux droites. — Soient $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ deux longueurs; g_0 , g_1 , g_2 ; g'_0 , g'_1 , g'_2 leurs composantes obliques suivant les arcs coordonnés; G_0 , G_1 , G_2 ; G'_0 , G'_1 , G'_2 les projections orthogonales des deux lignes sur les directions des mêmes arcs coordonnés, le principe des projections donne immédiatement les formules suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{G} \cos(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \Sigma g_0 \cos(\mathcal{G}', d\sigma), & \mathcal{G}' \cos(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \Sigma g'_0 \cos(\mathcal{G}, d\sigma), \\ \mathcal{G} \mathcal{G}' \cos(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \Sigma g_0 G'_0 = \Sigma g'_0 G_0. \end{cases}$$

D'après ces relations, on a les expressions suivantes

$$(4) \quad \begin{cases} ds \cos(ds, d\sigma) = \Sigma d\sigma \cos([d\sigma], d\sigma), & ds = \Sigma d\sigma \cos(d\sigma, ds), \\ ds^2 = \Sigma d\sigma^2 + 2 \Sigma d\sigma_1 d\sigma_2 \cos \varphi; \end{cases}$$

on obtient aussi les formules suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} dq \cos(dq, d\sigma_1) = d\sigma_1 + d\sigma_2 \cos \varphi, & dq \cos(dq, d\sigma_2) = d\sigma_2 + d\sigma_1 \cos \varphi, \\ dq \cos(dq, d\sigma) = d\sigma_1 \cos \varphi_1 + d\sigma_2 \cos \varphi_2, & (3); \end{cases}$$

ces relations font connaître les éléments ds , dq , dq_1 , dq_2 , ainsi que leurs directions par rapport aux trois arcs coordonnés.

On en déduit facilement la formule suivante :

$$ds^2 = \Sigma (dq^2 - d\sigma^2),$$

laquelle montre que si l'on construit deux parallélépipèdes droits et rectangles, le premier sur les éléments dq , dq_1 , dq_2 comme arêtes issues d'un même point, le second sur les éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, la diagonale

du premier est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont la diagonale du second et l'élément ds de la trajectoire.

3. *De la variation d'une fonction des coordonnées du point suivant l'élément de la trajectoire.* — Soit V une fonction quelconque de ρ, ρ_1, ρ_2 , l'on a pour la variation première de cette fonction, la relation

$$\frac{dV}{ds} = \sum \frac{dV}{d\rho} \frac{d\rho}{ds},$$

et pour la variation du second ordre de la même fonction, la relation

$$(6) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{dV}{ds} \right) = \sum \frac{dV}{d\rho} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) + \frac{d^2V}{ds^2},$$

dans laquelle la variation complète du second ordre d^2V , est donnée par l'équation symbolique

$$d^2V = \left(d\rho \frac{d}{d\rho} + d\rho_1 \frac{d}{d\rho_1} + d\rho_2 \frac{d}{d\rho_2} \right)^2 V.$$

La relation (6) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(6') \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{dV}{ds} \right) = \frac{d^2V}{ds^2} + \sum \frac{dV}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) - \sum \frac{d_0V}{ds} \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right).$$

Or, si l'on a égard aux expressions des variations des arcs coordonnés données par les formules (20'') de notre *Théorie des coordonnées curvilignes*, la dernière somme contenue dans l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} & \sum \frac{d_0V}{ds} \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \\ &= \sum \frac{d_0V}{ds} \frac{d\sigma}{ds} \left[\frac{\frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right)}{\frac{d\sigma^2}{d\rho^2}} \frac{d\sigma}{ds} + \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{01}^{(0)}} \right) \frac{d\sigma_1}{ds} + \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{02}^{(0)}} \right) \frac{d\sigma_2}{ds} \right]. \end{aligned}$$

Soit, en second lieu, une fonction U de x, y, z , on trouve pour la variation du premier ordre la relation

$$(\alpha) \quad \frac{dU}{ds} = \sum \frac{dU}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds}.$$

Or, on a l'équation

$$\frac{dU}{d\sigma} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{d\sigma} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{d\sigma} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{d\sigma},$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$K^2 = \frac{dU^2}{dx^2} + \frac{dU^2}{dy^2} + \frac{dU^2}{dz^2},$$

la valeur de $\frac{dU}{d\sigma}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dU}{d\sigma} = K \cos(K, d\sigma);$$

conséquemment, en s'appuyant sur les formules (3), on obtient la relation

$$(\alpha') \quad \frac{dU}{ds} = K \cos(K, ds).$$

On trouvera pour la variation du second ordre de U, l'expression

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{dU}{ds} \right) &= \sum \frac{dU}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\ &+ \sum \left[\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma^2}{ds^2} + \frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds} \right]. \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) = K \frac{\cos(K, \mathcal{R})}{\mathcal{R}} + \frac{d^2U}{d\sigma^2} \quad (3),$$

$$\frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) = K \frac{\cos(K, \mathcal{L}_{01})}{\mathcal{L}_{01}} + \frac{d^2U}{d\sigma d\sigma_1} \quad (6);$$

en ayant égard à ces valeurs, on obtient l'équation

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{ds} \left(\frac{dU}{ds} \right) \\ &= \frac{d^2U}{ds^2} + \sum \frac{dU}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\ &+ K \sum \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \left[\frac{\cos(K, \mathcal{R})}{\mathcal{R}} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\cos(K, \mathcal{L}_{01})}{\mathcal{L}_{01}} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{\cos(K, \mathcal{L}_{02})}{\mathcal{L}_{02}} \frac{d\sigma_2}{ds} \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle d^2U est la différentielle complète de U par rapport à x, y, z .

4. *De la courbure de la trajectoire et de ses composantes orthogonales suivant une direction donnée.* — Soit $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ la courbure de la trajectoire ds ; si dans la formule (7) on fait $U = x$, le premier membre de cette formule a pour valeur la composante de la courbure suivant l'axe des x , et si de plus on remarque que la différentielle seconde de x est nulle, on obtient l'équation

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos(\mathfrak{P}, x)}{\mathfrak{P}} \\ &= \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\ &+ \sum \frac{d\sigma}{ds} \left[\frac{\cos(\mathfrak{R}, x)}{\mathfrak{R}} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\cos(x, \mathfrak{L}_{01})}{\mathfrak{L}_{01}} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{\cos(x, \mathfrak{L}_{02})}{\mathfrak{L}_{02}} \frac{d\sigma_2}{ds} \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette équation donne la composante orthogonale de la courbure de la trajectoire ds suivant une direction quelconque ox . Si l'on fait coïncider la direction ox avec $d\sigma$, on aura la composante orthogonale de cette courbure suivant l'arc coordonné $d\sigma$; mais alors il faudra se rappeler que les cosinus des angles $(\mathfrak{R}, d\sigma)$, $(\mathfrak{L}_{01}, d\sigma)$, $(\mathfrak{L}_{02}, d\sigma)$ sont nuls, parce que l'arc $d\sigma$ est perpendiculaire aux rayons de courbure propre ou inclinée $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}_{01}$, $\mathfrak{L}_{02}$. L'expression de cette composante est

$$(8') \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos(\mathfrak{P}, d\sigma)}{\mathfrak{P}} \\ &= \sum \cos([d\sigma], d\sigma) \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\ &+ \sum \left[\frac{\cos(\mathfrak{R}, [d\sigma])}{\mathfrak{R}} \frac{d\sigma^2}{ds^2} + \frac{\cos(\mathfrak{L}_{01}, [d\sigma])}{\mathfrak{L}_{01}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{\cos(\mathfrak{L}_{02}, [d\sigma])}{\mathfrak{L}_{02}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds} \right]. \end{aligned} \right.$$

5. *Composantes obliques de la courbure de la trajectoire.* — Soient $\frac{1}{p^{(0)}}$, $\frac{1}{p^{(1)}}$, $\frac{1}{p^{(2)}}$ les composantes obliques suivant les trois arcs coordonnés, de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{P}}$; si l'on remarque que la projection d'une courbure quelconque suivant l'axe des x est la somme des projections sur cet axe des trois composantes obliques, on aura, en représentant par X , X_1 , X_2 les cosinus des angles que l'axe des x fait avec les trois arcs coordonnés

(*Théorie des Coordonnées curvilignes*, n° 13), les équations suivantes :

$$\frac{\cos(\mathbb{P}, x)}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbf{X}}{p^{(0)}} + \frac{\mathbf{X}_1}{p^{(1)}} + \frac{\mathbf{X}_2}{p^{(2)}}, \quad \frac{\cos(\mathbb{R}, x)}{\mathbb{R}} = \frac{\mathbf{X}}{r^{(0)}} + \frac{\mathbf{X}_1}{r^{(1)}} + \frac{\mathbf{X}_2}{r^{(2)}}, \dots,$$

et ainsi de suite. En portant les valeurs des composantes de ces courbures et des courbures analogues dans l'équation (8), et en identifiant les coefficients de $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, on aura l'équation suivante :

$$(9) \quad \frac{1}{p^{(0)}} = \sum \frac{1}{r^{(0)}} \frac{d\sigma^2}{ds^2} + \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_i}{ds} \left(\frac{1}{l_{0i}^{(0)}} + \frac{1}{l_{i0}^{(0)}} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \quad (3),$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les indices inférieurs.

Remarquons que $\frac{1}{p^{(0)}}$ ne renferme que trois sortes de termes : 1° la somme des termes qui ne dépendent que des composantes obliques des courbures propres des lignes coordonnées; 2° la somme des termes qui ne dépendent que des composantes obliques des courbures inclinées des lignes coordonnées; 3° le terme $\frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)$.

6. *Nouvelles expressions des composantes obliques de la courbure de la trajectoire.* — Nous allons maintenant calculer d'autres expressions de la composante $\frac{1}{p^{(0)}}$ qui nous paraissent dignes d'être remarquées.

2° *Expression.* — Observons que l'on a $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{d\rho} \frac{d\rho}{ds}$; si l'on différentie les deux membres par rapport à ds , on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) &= \frac{d\sigma}{d\rho} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) \\ &+ \frac{d\rho}{ds} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{ds} + \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \frac{d\rho_1}{ds} + \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \frac{d\rho_2}{ds} \right] \quad (3); \end{aligned}$$

or, si l'on a égard aux variations des arcs données par les formules (20'') de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*, on obtient l'équation

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{p^{(0)}} &= \frac{d\sigma}{d\rho} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) + \frac{d\rho^2}{ds^2} \frac{d^2\sigma}{d\rho^2} \\ &+ 2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \frac{1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{d\sigma_1}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds} \frac{1}{l_{12}^{(0)}} + \frac{d\sigma_2}{ds} \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{l_{20}^{(0)}} \right) + \sum \frac{d\sigma^2}{r^{(0)} ds^2}. \end{aligned} \right.$$

3^e *Expression.* — Si dans le développement de la dérivée $\frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)$ écrit au commencement de ce numéro, on ajoute et on retranche les trois derniers termes de ce développement, la somme des termes additifs représentera l'expression

$$\frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma^2}{d\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right);$$

on aura donc, en ayant égard aux variations des arcs (*Théorie des Coordonnées curvilignes*, formules 20'') la relation suivante

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) = \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma^2}{d\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right) - \frac{d\rho^2}{ds^2} \frac{d^2\sigma}{d\rho^2} - \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \left(\frac{1}{l_{01}^{(0)}} - \frac{1}{l_{01}^{(0)}} \right) - \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds} \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{02}^{(0)}} \right),$$

et, en portant cette valeur de $\frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)$ dans l'équation (9), on trouve la formule

$$(9'') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{p^{(0)}} &= \sum \frac{d\sigma^2}{r^{(0)} ds^2} + 2 \left(\frac{\frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds}}{l_{01}^{(0)}} + \frac{\frac{d\sigma_1}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds}}{l_{12}^{(0)}} + \frac{\frac{d\sigma_2}{ds} \frac{d\sigma}{ds}}{l_{20}^{(0)}} \right) \\ &\quad + \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma^2}{d\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right) - \frac{d\rho^2}{ds^2} \frac{d^2\sigma}{d\rho^2}. \end{aligned} \right.$$

4^e *Expression.* — Prenons la dérivée de $\frac{d\sigma}{ds}$ en ne faisant varier que ρ , nous obtiendrons les deux premiers termes de la seconde expression de $\frac{1}{p^{(0)}}$, cette seconde expression pourra donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{p^{(0)}} = \frac{d_0}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) + 2 \left(\frac{\frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds}}{l_{01}^{(0)}} + \frac{\frac{d\sigma_1}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds}}{l_{12}^{(0)}} + \frac{\frac{d\sigma_2}{ds} \frac{d\sigma}{ds}}{l_{20}^{(0)}} \right) + \sum \frac{d\sigma^2}{r^{(0)} ds^2}.$$

7. *Des projections obliques de l'arc de contingence de la trajectoire.* — L'équation (9) multipliée par ds donne la relation suivante :

$$(10) \quad \frac{ds}{p^{(0)}} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \left(\frac{d\sigma}{r_{0i}^{(0)}} + \frac{d\sigma_1}{l_{01}^{(0)}} + \frac{d\sigma_2}{l_{02}^{(0)}} \right) + d \left(\frac{d\sigma}{ds} \right),$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les indices inférieurs. Cette formule fait connaître la projection oblique de l'arc de contingence de la trajec-

toire ds en fonction des projections obliques des arcs de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées. On doit remarquer : 1° qu'elle ne contient que des projections obliques suivant $d\sigma$ des arcs de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées; 2° que le facteur de $\frac{d\sigma}{ds}$ sous le signe $\sum$ renferme la somme des projections obliques des arcs de contingence propre ou inclinée qui sont perpendiculaires à $d\sigma$.

8. *Du plan de courbure de la trajectoire.* — Soit $\mathfrak{x}$ la normale au plan de courbure de la trajectoire ds , l'on a

$$\cos(\mathfrak{x}, z) = \mathfrak{P} \left[\frac{dx}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{ds} \right) - \frac{dy}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) \right];$$

si l'on porte dans le second membre les valeurs des dérivées de $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$ données par la formule (α), on obtient

$$\frac{\cos(\mathfrak{x}, z)}{\mathfrak{P}} = \sum \frac{1}{p^{(i)}} \left(\frac{d_0 y}{d\sigma} \frac{dx}{ds} - \frac{d_0 x}{d\sigma} \frac{dy}{ds} \right).$$

Considérons le premier terme du second membre, en y remplaçant $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ par leurs valeurs en fonction des rapports des arcs $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ à l'arc ds ; la valeur de ce premier terme est alors donnée par la relation

$$\frac{d_0 y}{d\sigma} \frac{dx}{ds} - \frac{d_0 x}{d\sigma} \frac{dy}{ds} = \frac{d\sigma_1}{ds} \left(\frac{d_0 y}{d\sigma} \frac{d_1 x}{d\sigma_1} - \frac{d_0 x}{d\sigma} \frac{d_1 y}{d\sigma_1} \right) + \frac{d\sigma_2}{ds} \left(\frac{d_0 y}{d\sigma} \frac{d_2 x}{d\sigma_2} - \frac{d_0 x}{d\sigma} \frac{d_2 y}{d\sigma_2} \right);$$

on reconnaît que le coefficient de $\frac{d\sigma_1}{ds}$ dans le second membre représente le rapport de la projection de l'aire du parallélogramme des éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$ sur le plan des xy au produit de ces éléments, et que par conséquent ce rapport est égal à $\sin \varphi_2 \cos(n_2, z)$. De même le coefficient de $\frac{d\sigma_2}{ds}$ est égal à $-\sin \varphi_1 \cos(n_1, z)$; on aura donc la relation

$$\frac{d_0 y}{d\sigma} \frac{dx}{ds} - \frac{d_0 x}{d\sigma} \frac{dy}{ds} = \frac{d\sigma_1}{ds} \sin \varphi_2 \cos(n_2, z) - \frac{d\sigma_2}{ds} \sin \varphi_1 \cos(n_1, z),$$

qui donne l'expression du coefficient de $\frac{1}{p^{(0)}}$; les coefficients de $\frac{1}{p^{(1)}}$, $\frac{1}{p^{(2)}}$ se déduisent de la relation précédente par la rotation des indices. On a donc finalement l'équation

$$\frac{\cos(\mathfrak{N}, z)}{\mathfrak{Q}} = \sum \left(\frac{d\sigma_2}{p^{(1)} ds} - \frac{d\sigma_1}{p^{(2)} ds} \right) \sin \varphi \cos(n, z),$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les indices inférieurs.

Cette équation fait connaître les angles que la normale $\mathfrak{N}$ au plan de courbure de la trajectoire fait avec une direction quelconque oz .

Si l'on remplace la direction oz par la direction $d\sigma$, et qu'on remarque que les angles $(n_2, d\sigma)$, $(n_1, d\sigma)$ sont droits, on obtient la relation

$$\frac{\cos(\mathfrak{N}, d\sigma)}{\mathfrak{Q}} = \left(\frac{d\sigma_2}{p^{(1)} ds} - \frac{d\sigma_1}{p^{(2)} ds} \right) \sin \varphi \cos(n, d\sigma) \quad (3),$$

dans laquelle il faut remplacer $\cos(n, d\sigma)$ par $\sin \varphi$, $\sin \theta_2$ qui lui est égal et les composantes $\frac{1}{p^{(1)}}$, $\frac{1}{p^{(2)}}$ par leurs valeurs données par les équations (9).

9. *De la courbure inclinée de la trajectoire ds suivant une direction donnée.* — Cherchons en premier lieu la courbure inclinée de la trajectoire suivant l'un des arcs coordonnés $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, et appelons ces courbures inclinées $\frac{1}{\Lambda_0}$, $\frac{1}{\Lambda_1}$, $\frac{1}{\Lambda_2}$. Nous remarquerons que, conformément à notre notation, une courbure propre $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ d'un arc coordonné $d\sigma$ peut aussi s'écrire sous la forme $\frac{1}{\mathfrak{L}_{00}}$, puisque cette courbure propre n'est autre chose que la courbure inclinée de l'arc $d\sigma$ suivant la direction $d\sigma$. Cela posé, en se rappelant que X est égal à $\frac{dx}{d\sigma}$ (n° 5), l'on a la relation

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dX}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{dX}{d\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{dX}{d\sigma_2} \frac{d\sigma_2}{ds},$$

et conséquemment

$$(13) \quad \frac{\cos(\Lambda_0, x)}{\Lambda_0} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos(\mathfrak{L}_{[0]0}, x)}{\mathfrak{L}_{[0]0}}.$$

Cette formule fait connaître la projection d'une courbure inclinée $\frac{1}{\Lambda_0}$ de l'arc ds sur une direction quelconque ox . Si cette direction coïncide avec l'un des arcs coordonnés $d\sigma$, on a la formule

$$(13') \quad \frac{\cos(\Lambda_0, d\sigma)}{\Lambda_0} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos(\varrho_{[0]0}, [d\sigma])}{\varrho_{[0]0}} \quad (3).$$

On déduit de la formule (13), par les procédés connus, les composantes obliques de cette même courbure suivant les arcs coordonnés, de sorte que, si l'on représente par $\frac{1}{\Lambda_0^{(0)}}$, $\frac{1}{\Lambda_0^{(1)}}$, $\frac{1}{\Lambda_0^{(2)}}$ ces trois composantes, on obtient la relation

$$(14) \quad \frac{1}{\Lambda_0^{(0)}} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\varrho_{[0]0}^{(0)}}.$$

On obtient aussi, en s'appuyant sur les formules (3), la relation

$$(14') \quad \frac{\cos(\Lambda_0, ds)}{\Lambda_0} = \sum \frac{\cos(d\sigma, ds)}{\Lambda_0^{(0)}} \quad (3),$$

dans laquelle les composantes obliques de la courbure $\frac{1}{\Lambda_0}$ doivent être remplacées par leurs valeurs tirées des équations (14).

Cherchons en second lieu la courbure inclinée de la trajectoire suivant une direction ν quelconque. Soit $\frac{1}{\Lambda_\nu}$ cette courbure, et représentons, d'après notre notation, par $\frac{1}{\Lambda_{\nu_0}}$, $\frac{1}{\Lambda_{\nu_1}}$, $\frac{1}{\Lambda_{\nu_2}}$ les courbures inclinées des arcs coordonnés $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, suivant la même direction ν : l'on a évidemment la formule

$$\frac{d \cos(\nu, x)}{ds} = \frac{d \cos(\nu, x)}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{d \cos(\nu, x)}{d\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{d \cos(\nu, x)}{d\sigma_2} \frac{d\sigma_2}{ds},$$

laquelle donne

$$(15) \quad \frac{\cos(\Lambda_\nu, x)}{\Lambda_\nu} = \sum \frac{d\sigma_0}{ds} \frac{\cos(\Lambda_{\nu_0}, x)}{\Lambda_{\nu_0}}.$$

Or, si ν est une longueur déterminée en grandeur et en direction, et que $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$ soient ses trois composantes obliques suivant les arcs coordonnés, l'on a

$$\cos(\nu, x) = \sum \frac{\nu^{(0)}}{\nu} \cos(x, d\sigma).$$

La différentiation par rapport à $d\sigma$ donne

$$\frac{\cos(\Lambda_{\tau_0}, x)}{\Lambda_{\tau_0}} = \sum \frac{\tau^{(0)}}{\tau} \frac{\cos(\mathcal{L}_{[\tau]_0}, x)}{\mathcal{L}_{[\tau]_0}} + \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right),$$

laquelle donne la composante orthogonale de la courbure $\frac{1}{\Lambda_\tau}$ suivant une direction quelconque.

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (15), on obtient la formule

$$(15') \quad \frac{\cos(\Lambda_\tau, x)}{\Lambda_\tau} = \sum \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right) \frac{\cos(\Lambda_0, x)}{\Lambda_0} + \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right).$$

Représentons par $\frac{1}{\Lambda_{\tau}^{(0)}}$, $\frac{1}{\Lambda_{\tau}^{(1)}}$, $\frac{1}{\Lambda_{\tau}^{(2)}}$ les composantes obliques de la courbure $\frac{1}{\Lambda_\tau}$ suivant les arcs coordonnés, on obtient, par le procédé déjà indiqué n° 5, la formule simple

$$(16) \quad \frac{1}{\Lambda_{\tau}^{(0)}} = \sum \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right) \frac{1}{\Lambda_0^{(0)}} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right) \quad (3),$$

dans laquelle les composantes telles que $\frac{1}{\Lambda_0^{(0)}}$ doivent être remplacées par leurs valeurs tirées des équations (14).

On déduit sans difficulté les deux relations

$$(15'') \quad \frac{\cos(\Lambda_\tau, d\sigma)}{\Lambda_\tau} = \sum \frac{\cos([d\sigma], d\sigma)}{\Lambda_{\tau}^{(0)}}, \quad \frac{\cos(\Lambda_\tau, ds)}{\Lambda_\tau} = \sum \frac{\cos(ds, d\sigma)}{\Lambda_{\tau}^{(0)}} \quad (3).$$

Ces formules sont très-générales, elles renferment implicitement toutes celles qui ont été trouvées dans les numéros précédents. Si l'on suppose, par exemple, que la longueur τ coïncide en grandeur et en direction avec ds , comme la courbure inclinée de l'arc ds suivant la direction ds n'est pas distincte de la courbure propre $\frac{1}{\mathcal{Q}}$ de la trajectoire, la première des formules (15''), combinée avec les formules (16) et (14'), donne l'équation

$$(8') \quad \frac{\cos(\mathcal{Q}, d\sigma)}{\mathcal{Q}} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos(\Lambda_0, [d\sigma])}{\Lambda_0} + \sum \cos([d\sigma], d\sigma) \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right),$$

qui est évidemment la même que notre formule (8'), lorsqu'on a égard aux formules (13).

10. *De la variation des angles des lignes coordonnées suivant l'élément ds .* — Nous avons trouvé, dans notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*, formules (14) et (15), les relations suivantes :

$$\begin{aligned} -\sin \varphi d_1 \varphi &= \frac{d\sigma_1}{\mathcal{L}_{21}} \cos(\mathcal{L}_{21}, d\sigma_1) + \frac{d\sigma_1}{\mathcal{R}_1} \cos(\mathcal{R}_1, d\sigma_2), \\ -\sin \varphi d_2 \varphi &= \frac{d\sigma_2}{\mathcal{L}_{12}} \cos(\mathcal{L}_{12}, d\sigma_2) + \frac{d\sigma_2}{\mathcal{R}_2} \cos(\mathcal{R}_2, d\sigma_1), \\ -\sin \varphi d_0 \varphi &= \frac{d\sigma}{\mathcal{L}_{20}} \cos(\mathcal{L}_{20}, d\sigma_1) + \frac{d\sigma}{\mathcal{L}_{10}} \cos(\mathcal{L}_{10}, d\sigma_2); \end{aligned}$$

si l'on ajoute ces trois formules membre à membre et qu'on ait égard aux relations (13'), on trouve, après avoir divisé le résultat par ds , la relation suivante :

$$(17) \quad -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos(\Lambda_2, d\sigma_1)}{\Lambda_2} + \frac{\cos(\Lambda_1, d\sigma_2)}{\Lambda_1} \quad (3),$$

qui est une des plus utiles de la théorie des courbes.

Si l'on représente par $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_1}$ les projections orthogonales des courbures inclinées $\frac{1}{\Lambda_2}$, $\frac{1}{\Lambda_1}$ sur le plan tangent à la surface ρ , en remarquant que l'on a

$$\frac{\cos(\Lambda_2, d\sigma_1)}{\Lambda_2} = \frac{\sin \varphi}{\lambda_2}, \quad \frac{\cos(\Lambda_1, d\sigma_2)}{\Lambda_1} = \frac{\sin \varphi}{\lambda_1},$$

l'équation précédente prend la forme suivante :

$$(17') \quad -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \quad (3).$$

Ces formules permettront de calculer les variations suivant ds d'une fonction quelconque des angles φ , φ_1 , φ_2 des lignes coordonnées.

11. *Formules de transformation.* — Nous allons démontrer quelques formules de transformation pour passer d'un système de coordonnées à un autre système. Écrivons les deux types d'équations que nous avons

trouvés dans la *Théorie des Coordonnées curvilignes*, n° 4 :

$$(18) \quad \frac{d\rho}{dx} = \sum h_{[0]} h_0 \cos([n], n) \frac{dx}{d\rho}, \quad \frac{dx}{d\rho} = \sum H_{[0]} H_0 \cos([d\sigma], d\sigma) \frac{d\rho}{dx} \quad (3),$$

dans lesquelles n, n_1, n_2 sont les directions des normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 .

Soit maintenant une fonction U de x, y, z , l'on a

$$(\beta) \quad \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dU}{d\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dU}{d\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx};$$

or, si l'on porte dans cette équation les valeurs de $\frac{d\rho}{dx}, \frac{d\rho_1}{dx}, \frac{d\rho_2}{dx}$ tirées de la première des équations (18), et qu'on pose, pour abréger,

$$(18') \quad U_0 h = \sum [h] h \cos([n], n) \frac{dU}{d\rho},$$

on aura

$$\frac{dU}{dx} = \sum h U_0 \frac{dx}{d\rho}.$$

Les trois équations contenues dans le type (18') sont en tout semblables aux trois équations contenues dans le premier des types (18); donc, en vertu des équations contenues dans le second des types (18), on aura directement et sans calcul les équations

$$(18'') \quad \frac{dU}{d\rho} = \sum [H] H \cos([d\sigma], d\sigma) U_0 h \quad (3),$$

les paramètres H, h étant liés entre eux par la relation

$$H h = \frac{1}{\cos(n, d\sigma)} \quad (3),$$

que nous avons trouvée au n° 4 de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*.

Les équations (18') prouvent que U_0, U_1, U_2 peuvent être considérées comme les composantes orthogonales suivant les normales n, n_1, n_2 aux surfaces coordonnées de la force dont les composantes obliques, suivant ces mêmes normales, seraient $h \frac{dU}{d\rho}, h_1 \frac{dU}{d\rho_1}, h_2 \frac{dU}{d\rho_2}$.

Les équations (18'') prouvent que $\frac{dU}{H d\rho}, \frac{dU}{H_1 d\rho_1}, \frac{dU}{H_2 d\rho_2}$ sont les composantes orthogonales suivant les arcs coordonnés $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$ de la force dont les composantes obliques, suivant les mêmes arcs, seraient $HhU_0, H_1h_1U_1, H_2h_2U_2$.

Maintenant, si l'on remarque que, lorsqu'une force est décomposée suivant les directions $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$, et qu'on prend les projections orthogonales de cette force sur les normales n, n_1, n_2 aux faces du parallélipède construit sur $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$, les rapports des composantes obliques aux projections orthogonales correspondantes sont $\cos(n, d\sigma), \cos(n_1, d\sigma_1), \cos(n_2, d\sigma_2)$, et qu'il en est de même lorsqu'on opère d'une manière inverse, il en résulte que, ces conditions étant remplies dans les deux systèmes dont il vient d'être question, la résultante du premier système n'est pas distincte de la résultante du second. Cette conclusion est aussi rendue évidente par la manière dont on a obtenu les équations (18'), (18'').

Les formules (18), (18'), (18'') sont donc des formules de transformation pour passer d'un système de coordonnées rectilignes à un système de coordonnées curvilignes, et réciproquement.

§ II. — Applications des formules précédentes.

12. *Composantes obliques de la force accélératrice d'un corps qui se meut.* — Soient v la vitesse du mobile, u_0, u_1, u_2 ses composantes obliques suivant les trois arcs coordonnés, v_0, v_1, v_2 les composantes orthogonales de la vitesse suivant les mêmes arcs. Appelons M_0, M_1, M_2 les composantes obliques de la force accélératrice suivant les mêmes directions; si l'on appelle M_x la projection orthogonale de cette force sur l'axe des x , on a l'équation

$$(20) \quad M_x = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{ds} + \frac{v^2}{\rho} \cos(\mathcal{P}, x),$$

dt étant l'élément du temps. Si l'on remarque que l'on a les relations

$$dx = \sum X_0 d\sigma, \quad \frac{\cos(\mathcal{P}, x)}{\rho} = \sum \frac{X_0}{\rho^{(0)}}, \quad M_x = \sum M_0 X_0,$$

et qu'on porte ces valeurs dans l'équation (20), on aura, en identifiant les coefficients de X_0, X_1, X_2 , les équations suivantes :

$$(21) \quad M_0 = \frac{dv}{dt} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{v^2}{p^{(0)}}.$$

Si maintenant on a égard à la valeur de $\frac{ds^2}{dt^2} \frac{1}{p^{(0)}}$ donnée par l'équation (9) et que l'on pose les relations

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d\sigma}{dt} = u_0, \quad \frac{d\sigma_1}{dt} = u_1, \quad \frac{d\sigma_2}{dt} = u_2,$$

qui résultent de la définition de la vitesse et de ses composantes obliques, on obtient, après réductions,

$$(21') \quad M_0 = \frac{du_0}{dt} + \sum \left(\frac{u_0^2}{r^{(0)}} + \frac{u_0 u_1}{l_{01}^{(0)}} + \frac{u_0 u_2}{l_{02}^{(0)}} \right) \quad (3),$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les indices inférieurs.

Si l'on a égard aux équations (14), la relation précédente s'écrit sous la forme concise

$$M_0 = \frac{du_0}{dt} + \sum \frac{u_0 v}{\Lambda_0^{(0)}}.$$

En éliminant de l'équation (21) la courbure $\frac{1}{p^{(0)}}$, soit au moyen de l'équation (9'), soit au moyen de l'équation (9''), on trouve les deux nouvelles expressions suivantes de la composante M_0 :

$$(21'') \quad M_0 = \frac{du_0}{dt} + 2 \left(\frac{uu_2}{l_{20}^{(0)}} + \frac{uu_1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{u_1 u_2}{l_{12}^{(0)}} \right) + \sum \frac{u_0^2}{r^{(0)}} \quad (3),$$

$$(21''') \quad M_0 = \frac{\frac{d}{dt} \left(u_0 \frac{d\sigma}{d\rho} \right)}{\frac{d\sigma}{d\rho}} - \frac{d\rho^2}{dt^2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) + 2 \left(\frac{uu_1}{l_{01}^{(0)}} + \frac{u_1 u_2}{l_{12}^{(0)}} + \frac{uu_2}{l_{02}^{(0)}} \right) + \sum \frac{u_0^2}{r^{(0)}} \quad (3),$$

en se rappelant que deux composantes obliques telles que $\frac{1}{l_{12}^{(0)}}$, $\frac{1}{l_{21}^{(0)}}$ sont égales (*Théorie des Coordonnées curvilignes*, formule 32).

Composantes orthogonales de la force accélératrice suivant les arcs coordonnés. — Représentons par π_0, π_1, π_2 les composantes orthogonales

de la force accélératrice suivant $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, on a la relation

$$(22) \quad \mathfrak{M}_0 = \sum M_0 \cos([d\sigma], d\sigma) \quad (3);$$

or, si l'on porte dans le second membre les valeurs de M_0 , M_1 , M_2 tirées des équations (21'), et qu'on ait égard aux équations (13), on trouve l'équation

$$(22') \quad \mathfrak{M}_0 = \sum \frac{du_0}{dt} \cos([d\sigma], d\sigma) + \sum \frac{u_0}{\Lambda_0} \nu \cos(\Lambda_0, [d\sigma]) \quad (3),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0 = & \sum \frac{du_0}{dt} \cos([d\sigma], d\sigma) \\ & + \sum \left[\frac{u_0^2}{\mathfrak{R}} \cos(\mathfrak{R}, d\sigma) + \frac{u_0 u_1}{\mathfrak{L}_{01}} \cos(\mathfrak{L}_{01}, [d\sigma]) + \frac{u_0 u_2}{\mathfrak{L}_{02}} \cos(\mathfrak{L}_{02}, [d\sigma]) \right], \end{aligned}$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les indices inférieurs. On trouverait sans difficulté les expressions des mêmes composantes relatives aux formules (21''), (21''').

Si l'on représente par $\mathfrak{M}$ la force accélératrice elle-même, on a l'intensité de cette force par la relation

$$\mathfrak{M} = \sum M_0 \cos(\mathfrak{M}, d\sigma).$$

13. *Composante orthogonale de la force accélératrice suivant une direction quelconque ϵ .* — Soient α , β , γ les angles que cette direction ϵ fait avec les axes x , y , z , on a l'équation

$$\mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, \epsilon) = \cos \alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \cos \beta \frac{d^2 y}{dt^2} + \cos \gamma \frac{d^2 z}{dt^2},$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, S indiquant une somme s'étendant aux trois coordonnées x , y , z :

$$\mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, \epsilon) = S \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \cos \alpha \right) - S \frac{dx}{dt} \frac{d \cos \alpha}{dt};$$

or, d'après notre notation,

$$\frac{v}{\Lambda_z} \cos(\Lambda_z, x) = \frac{d \cos x}{dt};$$

on a donc la relation

$$(23) \quad \mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, z) = \frac{d}{dt} [v \cos(z, ds)] - \frac{v^2}{\Lambda_z} \cos(\Lambda_z, ds).$$

Telle est l'expression de la composante orthogonale de la force accélératrice $\mathfrak{N}$ suivant une direction quelconque z . Cette expression tire sa simplicité de l'introduction de la courbure inclinée $\frac{1}{\Lambda_z}$.

Si la direction z coïncide avec la direction d'un arc coordonné $d\sigma$, l'équation précédente devient

$$(23') \quad \mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, d\sigma) = \frac{d}{dt} [v \cos(d\sigma, ds)] - \frac{v^2}{\Delta_0} \cos(\Lambda_0, ds) \quad (3).$$

Il est bon de remarquer que, si l'on représente par z' la position infiniment voisine de z , la formule (23) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(23'') \quad \mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, z) = \frac{d}{dt} [v \cos(z, ds)] - \frac{v(z, z')}{dt} \cos(\Lambda_z, ds).$$

Il faut porter dans ces différentes formules les expressions des courbures inclinées de l'arc ds suivant les directions z ou $d\sigma$, expressions données par les relations (15) et (14).

Appliquons ces formules au système polaire dans lequel le rayon vecteur est τ , l'angle qu'il forme avec l'axe est ψ , et l'angle que la projection du rayon vecteur sur un plan perpendiculaire à l'axe forme avec une droite fixe située dans ce plan est θ .

D'après cela, l'on a

$$d\sigma = d\tau, \quad d\sigma_1 = \tau \sin \psi d\theta, \quad d\sigma_2 = \tau d\psi.$$

La formule (23'), appliquée successivement aux directions de ces

trois arcs coordonnés, donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, d\sigma) &= \frac{d\tau}{dt} - \frac{\tau^2 \sin^2 \psi \frac{d\theta^2}{dt^2} + \tau^2 \frac{d\psi^2}{dt^2}}{dt^2}, \\ \mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, d\sigma_1) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\tau \sin \psi \frac{d\theta}{dt}}{dt} \right) + \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{\sin \psi \frac{d\tau}{dt} - \tau \cos \psi \frac{d\psi}{dt}}{dt} \right), \\ \mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, d\sigma_2) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\tau \frac{d\psi}{dt}}{dt} \right); \end{aligned}$$

lesquels coïncident avec ceux que l'on obtient par les formules de la dynamique.

14. *Formules de Lagrange.* — Nous allons maintenant démontrer l'identité de notre formule (23) avec les formules de dynamique données par Lagrange relatives au mouvement d'un point. Si l'on pose, comme fait ce géomètre, $T = \frac{1}{2} v^2$, on aura

$$2T = \sum u_0^2 + 2 \sum u_1 u_2 \cos \varphi;$$

or, si l'on représente par Φ la fonction des forces, la formule du mouvement due à Lagrange est, en représentant par ρ', ρ'_1, ρ'_2 les dérivées de ρ, ρ_1, ρ_2 par rapport au temps

$$(25) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\rho'} \right) - \frac{dT}{d\rho} = \frac{d\Phi}{d\rho}.$$

Cela posé, l'on a

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\rho'} &= \frac{d\sigma}{d\rho} (u_0 + u_1 \cos \varphi_2 + u_2 \cos \varphi_1) = \frac{d\sigma}{d\rho} v_0, \\ \frac{dT}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{dt} v_0 + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1} \right) \frac{d\rho_1}{dt} v_1 + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2} \right) \frac{d\rho_2}{dt} v_2 - \sum u_1 u_2 \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\rho}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (25), on trouve

$$\frac{d}{dt} \left(v_0 \frac{d\sigma}{d\rho} \right) - \sum v_0 \frac{d\rho}{dt} \frac{d}{d[\rho]} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) + \sum \frac{d\sigma_1}{dt} \frac{d\sigma_2}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{d[\rho]} = \frac{d\Phi}{d\rho};$$

or, si l'on développe le premier terme, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\rho} \frac{dv_0}{dt} + \frac{d\rho_1}{dt} \left[v_0 \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) - v_1 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1} \right) \right] \\ + \frac{d\rho_2}{dt} \left[v_0 \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) - v_2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2} \right) \right] \\ + \sum \frac{d\sigma_1}{dt} \frac{d\sigma_2}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{d[\rho]} = \frac{d\Phi}{d\rho}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette équation les variations des arcs par leurs valeurs tirées des expressions (20'') de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*, on trouve, en ordonnant, par rapport aux composantes obliques des vitesses, la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} + u_1^2 \left[\left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{01}^{(0)}} \right) \cos \varphi_2 + \left(\frac{1}{l_{10}^{(1)}} - \frac{1}{l_{01}^{(1)}} \right) \right] \\ + u_2^2 \left[\left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{02}^{(0)}} \right) \cos \varphi_1 + \left(\frac{1}{l_{20}^{(2)}} - \frac{1}{l_{02}^{(2)}} \right) \right] \\ + u_1 u_2 \left[\left(\frac{1}{l_{10}^{(1)}} - \frac{1}{l_{01}^{(1)}} \right) + \left(\frac{1}{l_{20}^{(2)}} - \frac{1}{l_{02}^{(2)}} \right) \cos \varphi + \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{01}^{(0)}} \right) \cos \varphi_1 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{02}^{(0)}} \right) \cos \varphi_2 + \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\sigma} \right] \\ + u u_1 \left[\left(\frac{1}{l_{10}^{(1)}} - \frac{1}{l_{01}^{(1)}} \right) + \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{01}^{(0)}} \right) \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\sigma} \right] \\ + u_2 u \left[\left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{02}^{(0)}} \right) + \left(\frac{1}{l_{20}^{(2)}} - \frac{1}{l_{02}^{(2)}} \right) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{d\sigma} \right] = \frac{d\Phi}{d\sigma}. \end{aligned}$$

Considérons le coefficient de u_1^2 ; la composante orthogonale de la courbure $\frac{1}{\rho_{10}}$ suivant $d\sigma_1$, devant être nulle, la somme des projections des composantes obliques de cette courbure sur l'arc $d\sigma_1$, sera nulle, et par suite

$$\frac{1}{l_{10}^{(1)}} + \frac{\cos \varphi_2}{l_{10}^{(0)}} + \frac{\cos \varphi}{l_{10}^{(2)}} = 0;$$

de là on déduit que, dans ce coefficient, la somme des deux termes positifs est égale à $-\frac{\cos \varphi}{l_{10}^{(2)}}$, ou bien à $-\frac{\cos \varphi}{l_{01}^{(2)}}$; de là résulte que ce coeffi-

cient est égal à $-\frac{\cos(\mathcal{L}_{01}, d\sigma_1)}{\mathcal{L}_{01}}$. On prouvera par une démonstration analogue que le coefficient de u_2^2 est égal à $-\frac{\cos(\mathcal{L}_{02}, d\sigma_2)}{\mathcal{L}_{02}}$.

On verra par des transformations non moins faciles, que les coefficients de $u_0 u_1$, $u_0 u_2$, $u_2 u_1$ sont

$$-\frac{\cos(\mathcal{R}, d\sigma_1)}{\mathcal{R}}, \quad -\frac{\cos(\mathcal{R}, d\sigma_2)}{\mathcal{R}}, \quad -\left[\frac{\cos(\mathcal{L}_{01}, d\sigma_2)}{\mathcal{L}_{01}} + \frac{\cos(\mathcal{L}_{02}, d\sigma_1)}{\mathcal{L}_{02}}\right].$$

On aura donc, en remarquant que les angles que les courbures $\frac{1}{\mathcal{R}}$, $\frac{1}{\mathcal{L}_{01}}$, $\frac{1}{\mathcal{L}_{02}}$ font avec $d\sigma$ sont droits, et que, par conséquent, les cosinus de ces angles sont nuls, l'équation transformée suivante

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} - \frac{u_0}{\mathcal{R}} \sum u_0 \cos([\mathcal{R}], d\sigma) - \frac{u_1}{\mathcal{L}_{01}} \sum u_0 \cos(\mathcal{L}_{[01]}, d\sigma) \\ - \frac{u_2}{\mathcal{L}_{02}} \sum u_0 \cos(\mathcal{L}_{[02]}, d\sigma) = \frac{d\Phi}{d\sigma}, \end{aligned}$$

Cette équation, si l'on a égard aux formules (3), devient

$$\frac{dv_0}{dt} - \frac{u_0}{\mathcal{R}_0} \nu \cos(\mathcal{R}_0, ds) - \frac{u_1}{\mathcal{L}_{01}} \nu \cos(\mathcal{L}_{01}, ds) - \frac{u_2}{\mathcal{L}_{02}} \nu \cos(\mathcal{L}_{02}, ds) = \frac{d\Phi}{d\sigma}.$$

laquelle, par suite de l'équation (13), ne diffère pas de l'équation (23'). Ainsi notre formule (23') n'est pas distincte de la formule de Lagrange, ce qui est la proposition que nous voulions établir.

15. Équations d'équilibre d'un fil soumis à l'action de certaines forces. — Soient F_0 , F_1 , F_2 les composantes obliques suivant les arcs coordonnés de la résultante des forces qui agissent sur le fil, μ la tension en un quelconque de ses points que l'on considère, on trouve en opérant, comme au n° 11, l'équation suivante

$$(26) \quad \frac{d\mu}{ds} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\mu}{p^{(0)}} + F_0 = 0 \quad (3);$$

or, si l'on remplace dans cette équation $\frac{1}{p^{(0)}}$ par sa valeur donnée par

la formule (9), on obtient la formule

$$(26') \quad \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{d\sigma}{ds} \right) + \mu \sum \left[\frac{d\sigma^2}{r^{(0)} ds^2} + \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \left(\frac{1}{l_{01}^{(0)}} + \frac{1}{l_{10}^{(0)}} \right) \right] + F_0 = 0 \quad (3).$$

Les trois équations contenues dans cette formule donnent la trajectoire d'équilibre du fil flexible, dans un système quelconque de coordonnées curvilignes; le premier terme est une différentielle complète. On déduit de ces équations trois autres équations, donnant chacune l'expression de la composante orthogonale suivant l'un des trois arcs coordonnés de la résultante F des forces qui agissent sur le fil. Elles sont données par la formule suivante

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & F \cos(F, d\sigma) \\ &= \sum \left[\cos([d\sigma], d\sigma) \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{d\sigma}{ds} \right) \right] \\ &+ \mu \sum \left\{ \frac{d\sigma^2}{R ds^2} \cos(R, [d\sigma]) + \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \left[\frac{\cos(\mathcal{L}_{01}, [d\sigma])}{\mathcal{L}_{01}} + \frac{\cos(\mathcal{L}_{10}, [d\sigma])}{\mathcal{L}_{10}} \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle le coefficient de μ dans le dernier terme peut être remplacé, par suite de la formule (13), par la somme

$$\sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos(\Lambda_0, [d\sigma])}{\Lambda_0}.$$

Les équations du système (26) ou du système (27) sont du second ordre, et on en déduirait par un calcul facile les intégrales premières.

L'équation (27) peut aussi s'écrire sous la forme suivante très-simple

$$(28) \quad F \cos(F, d\sigma) = \sum \frac{d}{ds} \left[\mu \frac{d\sigma}{ds} \cos([d\sigma], d\sigma) \right] - \mu \frac{\cos(\Lambda_0, ds)}{\Lambda_0};$$

il suffit pour l'obtenir de recourir aux formules (17) et de remarquer que l'angle $(\Lambda_0, d\sigma)$ est droit.

On se servira du même procédé pour établir la coïncidence des deux formules (8') et (23').

16. *Du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps.* — Nous nous proposons, pour dernière application, d'établir les équations du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps de forme cristal-

line quelconque, même curviligne, et dans le cas d'une hypothèse particulière de conductibilité intérieure.

Équations du flux de chaleur. — Considérons le volume dm d'un solide formé par trois surfaces coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2 , coupées par trois surfaces infiniment voisines $\rho + d\rho, \rho_1 + d\rho_1, \rho_2 + d\rho_2$, et appelons $d\omega_0, d\omega_1, d\omega_2$ les trois faces de ce solide contiguës au point que l'on considère, de sorte que $d\omega_0$, par exemple, soit relative à l'angle φ . Soient U la température en ce point, π le coefficient de conductibilité intérieure ne dépendant que des coordonnées du point. Soient f_0, f_1, f_2 les flux de chaleur relatifs à ces faces, rapportés à l'unité de surface et à l'unité de temps. Dans le système rectiligne orthogonal, l'élément du volume est $dx dy dz$ et les flux de chaleur normaux aux trois faces de ce volume contiguës au point que l'on considère sont : $-\pi \frac{dU}{dx}, -\pi \frac{dU}{dy}, -\pi \frac{dU}{dz}$; donc, d'après le théorème sur la composition des flux de chaleur, le flux de chaleur qui traverse la face $d\omega$ sera

$$-\frac{\pi}{h} \left(\frac{dU}{dx} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dU}{dy} \frac{d\rho}{dy} + \frac{dU}{dz} \frac{d\rho}{dz} \right);$$

or, si l'on remplace les dérivées de U par rapport à x, y, z par leurs valeurs tirées des équations (β) n° 11, l'expression précédente devient

$$-\pi \sum h \cos([n], n) \frac{dU}{d\rho};$$

on a donc, par suite des équations (18'), les relations suivantes :

$$(29) \quad f_0 = -\pi U_0, \quad f_1 = -\pi U_1, \quad f_2 = -\pi U_2,$$

qui donnent les expressions analytiques des flux de chaleur f_0, f_1, f_2 dans un système quelconque de coordonnées.

Équations du mouvement intérieur de la chaleur. — Le flux de chaleur normal à la face $d\omega_0$ et traversant cette face pendant le temps dt pour pénétrer dans le volume dm est $f_0 d\omega_0 dt$; or le flux de chaleur entrant par la face opposée est $-\left[f_0 d\omega_0 + \frac{d}{d\rho} (f_0 d\omega_0) d\rho \right] dt$, de sorte que le gain de chaleur provenant de ces deux flux est

$$-dt \frac{d}{d\rho} (f_0 d\omega_0) d\rho;$$

on trouvera des expressions semblables pour les gains de chaleur relatifs aux deux autres faces. Soit D la densité du volume dm , C sa capacité calorifique, l'accroissement de température de ce volume dans le temps dt est $\frac{dU}{dt} dt$, l'accroissement de chaleur sera $CD dm \frac{dU}{dt} dt$, on aura donc en égalant cet accroissement à la somme des trois gains relatifs aux faces opposées du parallépipède curviligne considéré, l'équation suivante :

$$(30) \quad -CD dm \frac{dU}{dt} = \sum \frac{d}{d\rho} (f_0, d\omega_0) d\rho,$$

qui est l'équation du mouvement de la chaleur dans l'intérieur du corps.

Remarquons que l'on a la relation

$$\cos(n, d\sigma) = \sin \varphi_1 \sin \theta_2 = \sin \varphi_2 \sin \theta_1 \quad (3),$$

et que le produit $h_1 h_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi$, que nous représentons par N , reste le même quand on fait subir aux indices des permutations circulaires; on a donc

$$dm = \frac{d\rho d\rho_1 d\rho_2}{N} = \frac{d\omega_0 d\rho}{h} = \frac{d\omega_1 d\rho_1}{h_1} = \frac{d\omega_2 d\rho_2}{h_2};$$

d'après cela l'équation (30) devient, en ayant égard aux relations précédentes,

$$(31) \quad CD \frac{dU}{dt} = \sum N \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\pi h}{N} \left(h \frac{dU}{d\rho} + h_1 \frac{dU}{d\rho_1} \cos \theta_2 + h_2 \frac{dU}{d\rho_2} \cos \theta_1 \right) \right],$$

qui est la forme que nous voulions donner à l'équation du mouvement de la chaleur.

Équation du mouvement de la chaleur à la surface. — L'état calorifique de la surface est donné par une équation différentielle que nous allons calculer. Pour cela, nous exprimerons que la quantité de chaleur qui traverse un élément de surface extérieure est égale à la déperdition de chaleur provenant de la température du milieu dans lequel le corps est placé, Or, si l'on représente par ϖ le coefficient de conductibilité extérieure, et par α, β, γ les angles que la normale à cet élément fait avec les arcs coordonnés $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$, la quantité de chaleur qui

traverse ce même élément pendant l'unité de temps est donné par

$$\pi \sum \frac{dU}{d\rho} \frac{\cos \alpha}{\cos(n, d\sigma)}.$$

Soit maintenant ζ la température du milieu dans lequel le corps est placé, température que nous supposons peu différente de la température U , la déperdition de chaleur par suite de cette différence de températures, à travers l'élément extérieur de surface, pendant l'unité de temps, sera égale à

$$-\varpi(U - \zeta);$$

on a donc l'équation aux limites

$$(32) \quad \varpi(U - \zeta) + \pi \sum \frac{dU}{d\rho} \frac{\cos \alpha}{\cos(n, d\sigma)} = 0.$$

Conséquences des équations précédentes. — 1° Si le système des coordonnées curvilignes est orthogonal, l'équation (31) devient

$$(31') \quad DC \frac{dU}{dt} = hh_1h_2 \sum \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\pi h}{h_1h_2} \frac{dU}{d\rho} \right).$$

2° Si le système est rectiligne orthogonal, on obtient l'équation

$$(31'') \quad DC \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dx} \left(\pi \frac{dU}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\pi \frac{dU}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\pi \frac{dU}{dz} \right),$$

qui, dans le cas où le corps est homogène, coïncide avec l'équation de Fourier.

3° Si l'on veut obtenir dans le cas général l'équation des températures stationnaires, il faut poser nulle la dérivée $\frac{dU}{dt}$ dans l'équation (31), et l'on obtient l'équation suivante :

$$(33) \quad \sum \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\pi h}{N} \left(h \frac{dU}{d\rho} + h_1 \frac{dU}{d\rho_1} \cos \theta_1 + h_2 \frac{dU}{d\rho_2} \cos \theta_2 \right) \right] = 0.$$

17. *Des paramètres différentiels du premier et du second ordre d'une fonction donnée.* — Soit U une fonction des coordonnées du point, M. Lamé appelle paramètre différentiel du premier ordre de la fonc-

tion U , la somme des carrés des dérivées de cette fonction par rapport aux variables x, y, z ; paramètre différentiel du second ordre de la même fonction, la somme de ses dérivées secondes par rapport aux mêmes variables, de sorte qu'en représentant par $\Delta_1 U, \Delta_2 U$ ces deux paramètres, on a

$$\Delta_1 U = \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2}, \quad \Delta_2 U = \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2}.$$

On se propose de trouver les expressions de ces paramètres différentiels, lorsqu'on passe des coordonnées x, y, z aux coordonnées curvilignes quelconques ρ, ρ_1, ρ_2 .

Si l'on élève au carré les trois équations contenues dans le type (β) du n° 11, et qu'on les ajoute, on obtient

$$\Delta_1 U = \sum \frac{dU^2}{d\rho^2} h^2 + 2 \sum \frac{dU}{d\rho_1} \frac{dU}{d\rho_2} h_1 h_2 \cos \theta.$$

On déduirait des formules contenues dans le même numéro l'expression de $\Delta_2 U$, mais il est évident que cette transformation résulte aussi de l'équation (31). En effet, dans le cas d'un corps homogène rapporté à des coordonnées rectilignes orthogonales, l'équation (31'') donne

$$\frac{CD}{\pi} \frac{dU}{dt} = \Delta_2 U;$$

or, si le même corps est rapporté à un système quelconque de coordonnées curvilignes, la même équation donne d'après la relation (31)

$$\frac{CD}{\pi} \frac{dU}{dt} = \sum N \frac{d}{d\rho} \left(\frac{U_0 h}{N} \right);$$

on a donc pour l'expression du paramètre différentiel du second ordre

$$\Delta_2 U = \sum N \frac{d}{d\rho} \left[\frac{h}{N} \left(h \frac{dU}{d\rho} + h_1 \frac{dU}{d\rho_1} \cos \theta_2 + h_2 \frac{dU}{d\rho_2} \cos \theta_1 \right) \right].$$

Si le système est orthogonal, on obtient

$$\Delta_2 U = \sum h h_1 h_2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{h}{h_1 h_2} \frac{dU}{d\rho} \right),$$

qui coïncide avec celle qui a été donnée par M. Lamé.

Si, dans le cas général d'un système quelconque de coordonnées, on suppose la fonction U égale à ρ , on trouve

$$\Delta_2 \rho = N \left[\frac{d}{d\rho} \left(\frac{h^2}{N} \right) + \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{h h_1 \cos \theta_2}{N} \right) + \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{h h_2 \cos \theta_1}{N} \right) \right] \quad (3);$$

si le système devient orthogonal, on retombe sur l'équation de M. Lamé (*Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, p. 21)

$$\Delta_2 \rho = h h_1 h_2 \frac{d}{d\rho} \frac{h}{h_1 h_2} \quad (3).$$

Nous ne poursuivrons pas les applications que l'on peut faire de nos formules aux différentes théories de physique mathématique et en particulier à la théorie de l'élasticité. Les applications que nous avons faites suffisent pour montrer l'utilité de notre analyse en général, et en particulier la facilité avec laquelle elle se prête à l'étude des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées.

