ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. HADAMARD

Sur quelques questions du calcul des variations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 24 (1907), p. 203-231
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__203_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES QUESTIONS

DE

CALCUL DES VARIATIONS,

PAR M. HADAMARD.

La rédaction d'un traité consacré au calcul des variations m'a conduit à compléter cette branche de la science sur plusieurs points différents. Je me propose d'indiquer ici quelques-uns de ces compléments.

I.

1. La question de l'existence des extrema dans les problèmes qui relèvent du calcul des variations a été, comme on le sait, abordée directement par M. Hilbert.

Toutefois, en ce qui regarde les intégrales simples, la méthode qu'il a imaginée ne nous apprend, à proprement parler, rien de nouveau.

Elle suppose, en effet (1), le problème résolu pour le cas où les deux extrémités données de l'arc d'intégration sont suffisamment rapprochées.

Or, si l'on considère la solution comme acquise dans ces conditions, il est très aisé de passer de là au cas général : le problème se ramène alors, en effet, à une question de maximum ou de minimum ordinaire

(1) Il en est du moins ainsi pour la première forme de la méthode (*Nouvelles Annales*, 1900). M. Hilbert a, un peu plus tard, indiqué, pour le cas du problème de Dirichlet, un nouveau mode de raisonnement qui échappe à cette nécessité. Mais cette analyse n'a pas été étendue à d'autres problèmes et ne saurait probablement l'être sans de nouvelles modifications, surtout en ce qui concerne les problèmes non linéaires.

et relève, par conséquent, des méthodes élémentaires du calcul différentiel.

C'est ce qui a lieu pour l'extremum *libre* ([1]) (c'est-à-dire sans conditions restrictives autres que celles qui sont relatives aux extrémités) d'une intégrale simple, moyennant certaines hypothèses classiques. L'existence de l'extrémale joignant deux points suffisamment rapprochés a été établie du moins dans le cas de deux dimensions, pour le problème des géodésiques par M. Darboux ([2]), pour une intégrale quelconque par M. Bliss ([3]). De là résulte, par l'une ou l'autre des deux voies auxquelles nous venons de faire allusion, l'existence de l'extremum, quelles que soient les deux extrémités données.

Mais il en est tout autrement lorsque l'on passe aux problèmes *isopérimétriques*, c'est-à-dire à ceux où l'on cherche l'extremum d'une intégrale définie I parmi toutes les courbes qui donnent à une autre intégrale analogue J une valeur donnée.

M. Noble ([4]) s'est proposé d'étendre à de pareils problèmes la méthode de M. Hilbert. Une telle tentative était nécessairement prématurée, d'après ce que nous venons de dire, car la solution n'avait pas été obtenue, même pour deux points voisins.

Mais il y a plus : si les intégrales données I et J sont de forme quelconque, l'existence d'un extremum, d'une limite inférieure ou supérieure effectivement atteinte, n'est ici nullement la règle.

On peut s'en rendre compte tout d'abord en remarquant que, dans les conditions de Legendre et de Weierstrass, figure la constante arbitraire l qui s'introduit lorsqu'on ramène le problème donné à la recherche d'un extremum libre. Cette quantité n'étant pas connue *a priori*, il sera en général impossible de considérer le problème donné comme régulier au sens de M. Hilbert. (C'est déjà grâce à cette circonstance que, dans le problème de la chainette, l'extremum peut être fourni par une *solution discontinue*, dans le cas où les deux extrémités données du fil sont sur une même verticale).

([1]) Il y a lieu de substituer les locutions d'extremum *libre* et d'extremum *lié* à celles d'extrema *absolus* et *relatifs*, déjà employées par ailleurs avec un sens différent.

([2]) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II.

([3]) *Transaction of the American Mathematical Society*, t. V, 1904, p. 113.

([4]) *Thèses*, Göttingue, 1901.

On constatera qu'il en est bien ainsi sur l'exemple suivant que rien ne distingue *a priori* de celui de la chaînette :

Parmi tous les arcs de courbes planes qui joignent deux points donnés A, B et qui ont même longueur entre ces deux points, cherchons celui sur lequel l'intégrale

$$\int_{A}^{B} \varphi \, ds = \int_{A}^{B} \varphi \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{1}$$

a la plus petite valeur.

Supposons que φ soit une fonction de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ayant son minimum pour $r = 0$; ou, plus généralement, une fonction de x et de y qui, dans tout cercle de centre A et de rayon inférieur à AO ou dans tout cercle de centre B et de rayon inférieur à BO, ait son minimum au point où la circonférence rencontre AO ou BO ([1]).

Si alors la longueur donnée de l'arc de courbe est supérieure à la somme $\overline{OA} + \overline{OB}$, égale à $\overline{OA} + \overline{OB} + \delta$, il n'existera aucun minimum effectivement atteint.

La limite inférieure de l'intégrale (1) sera égale à $I_0 + \delta . \varphi(O)$, en désignant par I_0 l'intégrale prise suivant la ligne brisée AOB. Il est clair, d'après nos hypothèses, que cette expression est toujours inférieure à la valeur de notre intégrale (comme on le voit en décomposant la courbe en trois arcs dont un égal à $\overline{AO}$ porté à partir du point A et un égal à $\overline{BO}$ porté à partir du point B) : et, d'autre part, celle-ci peut en approcher indéfiniment : il suffira, pour cela, que la courbe cherchée suive la droite AO jusqu'au voisinage du point O, reste, sur un arc de longueur un peu supérieur à δ, très voisine de ce point, puis reparte vers le point B par le chemin rectiligne.

2. L'exemple qui précède nous montre que, pour établir l'existence d'un maximum ou d'un minimum, il est nécessaire de tenir compte de la forme particulière des intégrales I et J. Nous nous bornerons au cas où l'une de ces intégrales vérifiant les hypothèses classiques ([2])

([1]) O désigne l'origine des coordonnées.

([2]) Noble, *loc. cit*; Bolza, *Lectures on the calculus of variations*, etc.

(élément positif, condition de Weierstrass) admises dans le cas de l'extremum libre, l'autre est une intégrale curviligne ordinaire

$$\int P\,dx + Q\,dy.$$

Il nous sera commode de désigner toujours la première par I et la seconde par J : nous aurons ensuite à supposer alternativement que c'est la valeur de I ou celle de J qui est donnée.

Cela posé, on peut, dans certains cas, établir la possibilité du problème en partant des résultats correspondants relatifs à l'extremum libre. A cet effet

$$(2) \qquad I = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$$

étant l'expression de l'intégrale I, notons d'abord que l'équation différentielle des extrémales ne contient aucun terme *différentiel* provenant de l'intégrale J : elle est de la forme

$$(3) \qquad A y'' = \varphi(x, y, y') - l\mathrm{M},$$

où $\mathrm{M} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ est une simple fonction de x et de y, que nous supposerons non nulle dans l'aire considérée.

On déduit aisément de là que deux points A, B suffisamment voisins [et, dans le cas de l'intégrale (2), tels que le coefficient angulaire de AB soit compris entre deux limites finies] peuvent être joints par un arc d'extrémale vérifiant la condition de Jacobi pour l'intégrale $I - lJ$, l désignant toute quantité inférieure en valeur absolue à $l_0 = \frac{K}{AB}$ (où K est un nombre fixe).

Soit E_0 l'arc AB d'extrémale correspondant à l'intégrale I, c'est-à-dire à $l = 0$. Si nous faisons varier l à partir de cette valeur, dans le sens positif par exemple, l'extrémale se déformera. Il résulte des recherches de M. Lindeberg (¹) que l'ordonnée de la courbe (pour une

(¹) *Math. Annalen*, t. LIX, 1904. Pour I et J, d'ailleurs, le fait résulte immédiatement de relations $\frac{dI}{dl} - \frac{l\,dJ}{dl} = 0$, $\frac{d^2I}{dl^2} - l\frac{d^2J}{dl^2} > 0$.

valeur déterminée quelconque de x) et les valeurs de I et de J (du moins si M est positif) sont des fonctions croissantes de l.

Or on constate que la différence entre la valeur J_0 de J pour $l = 0$ et sa valeur pour $l = l_0$ est au moins de l'ordre de $\overline{AB}^2$. Au contraire, lorsque l décroît de la valeur zéro à la valeur négative $-l_0$, J décroît d'une quantité de l'ordre de $\overline{AB}^2$.

Soit de même I_0 la valeur de I pour $l = 0$: on aura, pour $l = l_0$,

$$I - I_0 > K . \overline{AB},$$

K désignant toujours un nombre positif que l'on peut assigner à l'avance; et, lorsque l varie de zéro à l_0, la différence $I - I_0$ prend toutes les valeurs inférieures à la limite que nous venons d'indiquer.

Le résultat s'étend encore aisément à la forme paramétrique, rien n'étant plus supposé sur la direction de AB.

Si l'élément I est essentiellement positif, le rapport $\frac{dI}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ étant compris entre deux limites fixes $\neq 0$, le résultat précédent peut s'énoncer sous la forme simple :

L'extrémale cherchée existe tant que la valeur donnée de I est comprise entre I_0 et $I_0(1 + k)$, k désignant un certain nombre fixe.

3. Pour des valeurs de $\frac{I}{I_0}$ supérieures à celles que nous venons d'envisager, la même méthode n'est plus applicable. A partir de l'extrémale sur laquelle B est le foyer libre de A (c'est-à-dire le foyer conjugué de A relativement à l'extremum libre de $I - lJ$), il faut, en général, pour obtenir des courbes répondant à la question lorsque J croît, faire décroître l et lui faire reprendre les mêmes valeurs en sens inverse. C'est ce que montre immédiatement l'exemple du problème isopérimétrique proprement dit, dans lequel le diamètre des circonférences, après avoir été en décroissant jusqu'à la valeur $\overline{AB}$, est de nouveau croissant ensuite.

Pour discuter, dans ces nouvelles conditions, la construction de Weierstrass, nous allons rechercher *la forme des extrémales lorsque l est très grand*. Comme on va le voir, cette forme est particulièrement simple.

Prenons, cette fois, directement l'intégrale I sous la forme paramétrique

$$I = \int f(x, y, dx, dy) = \int f(x, y, x', y')\, dt,$$

l'intégrale J ayant la même forme qu'au numéro précédent.

L'équation différentielle des extrémales s'écrit

$$(4) \qquad A(x'y'' - y'x'') = \varphi(x, y, x', y') - l\mathrm{M},$$

en désignant, comme tout à l'heure, par M, l'expression $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$, fonction de x et de y seuls; puis par A la valeur commune des rapports

$$(5) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{y'^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = -\dfrac{1}{x'y'}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x'\partial y'} \\ \quad = \dfrac{1}{x'^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \dfrac{1}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\left[f(\cos\theta, \sin\theta) + \dfrac{d^2 f}{d\theta^2}\right] \end{cases}$$

(où θ est l'angle de la tangente, prise dans le sens des arcs croissants, avec l'axe des x), et enfin par φ l'expression $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x'} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'}$. Elle peut être considérée comme exprimant le rayon de courbure R de la courbe en fonction de x, de y et de l'angle θ.

Si l est assez grand et si, comme nous le ferons, on suppose M différent de zéro (positif, par exemple) dans la région considérée, $d\theta$ ne s'annulera jamais : on pourra donc prendre θ comme variable indépendante et écrire les équations différentielles sous la forme

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\, R = \frac{\cos\theta\, A(x, y, \cos\theta, \sin\theta)}{\varphi(x, y, \cos\theta, \sin\theta) - l\mathrm{M}},$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta\, R = \frac{\sin\theta\, A}{\varphi - l\mathrm{M}}.$$

De plus, toujours pour l très grand, R est constamment très petit et de l'ordre de $\frac{1}{l}$. Si donc, à partir du point A, nous suivons la courbe en faisant varier θ depuis sa valeur initiale θ_0 jusqu'à la valeur $\theta_0 + 2\pi$, les variations des coordonnées seront également très petites et de ce même ordre. Nous pourrons dès lors, en première approximation, regarder, aux seconds membres, x, y comme constants, par conséquent M comme une constante et R comme une fonction de θ. On a alors x et y par les quadratures

$$(6)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \cos\theta\, \mathrm{R}(\theta)\, d\theta, \\ y = y_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta\, \mathrm{R}(\theta)\, d\theta. \end{cases}$$

Mais les quadratures auxquelles nous sommes ainsi conduits s'effectuent simplement. Si, en effet, dans la fonction f, on remplace x' et y' par $\cos\theta$, $\sin\theta$, et qu'on tienne compte de la valeur (5) de A, il vient, aux quantités près de l'ordre de $\frac{1}{l}$,

$$x = -\frac{1}{l\mathrm{M}}\, d\frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{1}{l\mathrm{M}}\left[\frac{\partial f}{\partial(\sin\theta)} - \frac{\partial f}{\partial(\sin\theta_0)}\right],$$
$$y = \frac{1}{l\mathrm{M}}\left[\frac{\partial f}{\partial(\cos\theta)} - \frac{\partial f}{\partial(\cos\theta_0)}\right].$$

Considérons la courbe représentée (x, y étant toujours pris constants, tandis que x', y' représentent des coordonnées cartésiennes) par l'équation

$$f = 1,$$

c'est-à-dire celle que M. Carathéodory [1] appelle *l'indicatrice* du problème. En vertu de l'homogénéité de f, la tangente à cette courbe est (X, Y désignant des coordonnées courantes)

$$\mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial x'} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial y'} = 1.$$

Les extrémales correspondant à l très grand sont donc semblables à la polaire réciproque de l'indicatrice par rapport au cercle de rayon 1 *et de centre* A (plus précisément, homothétiques, par rapport à A, de la courbe Γ que l'on obtient en faisant tourner d'un angle droit, autour de A, la polaire réciproque en question).

En particulier, ces extrémales sont sensiblement *des courbes fermées.*

---

[1] CARATHÉODORY, *Ueber die diskontinuirlichen Lösungen der Variationsrechnung.* Thèse, Göttingue, 1904.

Si A' est le point de l'une d'elles qui correspond à $\theta = \theta_0 + 2\pi$, les formules (6) montrent que *la distance* $\overline{AA'}$ *est de la forme* Kl^{-2}, où K est limité supérieurement lorsque l'on a des limites supérieures de φ, ainsi que des dérivées de A et de M par rapport à x, y.

4. On peut d'ailleurs calculer d'une manière plus précise ce *segment de fermeture* (c'est-à-dire le segment qui va du point initial A au point A' qui correspond à $\theta = \theta_0 + 2\pi$), que ce segment soit d'ailleurs de l'ordre de l^{-2} ou de l'ordre de l^{-p} $(p > 2)$.

Tout d'abord, il est, à des termes d'ordre supérieur près, indépendant de θ. Ceci résulte de ce que, dans les intégrales (6), les quantités sous le signe $\int$ seront, à des erreurs près de l'ordre de l^{-p}, des fonctions périodiques de θ.

Les extrémales correspondant à une même valeur de l et issues d'un même point A passent donc toutes au voisinage d'un même point, après que leur tangente a tourné de 2π [1].

Pour obtenir une expression du segment AA', considérons l'intégrale $I - lJ$, prise le long de l'extrémale du point A au point A' et du chemin rectiligne [2] $A'A$. Cette intégrale est une fonction de l, de θ_0 et de la position du point A. Nous cesserons de prendre ce dernier pour origine et nous désignerons ses coordonnées par x_0, y_0.

Si, sans changer l ni θ_0, nous remplaçons le point A par un point $\overline{A_1}$ infiniment voisin, de coordonnées $x_0 + \delta x, y_0 + \delta y$, le point A' sera changé en un point A'_1 tel que (si l est très grand) $AA'A_1A'_1$ soit un parallélogramme infiniment petit. Quant à la variation de l'intégrale, elle est donnée par les théorèmes généraux du Calcul des Variations, savoir

$$\begin{aligned}\delta(I - lJ) = &\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_{A'} - \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_{A}\right]\delta x + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{A'} - \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{A}\right]\delta y \\ &+ f(x + \delta x, y + \delta y, -\xi, -\eta) - f(x, y, -\xi, -\eta) \\ &+ lM(\xi\,\delta y - \eta\,\delta x),\end{aligned}$$

---

[1] On déduit de là que l'une de ces extrémales passe de nouveau au point A un peu avant d'arriver en A'.

[2] Ce dernier peut d'ailleurs être remplacé par tout autre allant également du point A' au point A et de courbure finie. On n'altère ainsi l'intégrale que d'un infiniment petit d'ordre supérieur.

en appelant ξ, η les composantes du segment cherché. Or, dans cette expression, tous les termes sont de l'ordre de $l^{-p}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$, sauf le dernier qui représente par conséquent la partie principale du premier membre pour l très grand.

Si donc, comme cela est possible d'après ce qui précède, nous développons I et J suivant les puissances de $\frac{1}{l}$, soit

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{I} = \mathrm{I}_1 l^{-1} + \mathrm{I}_2 l^{-2} + \ldots + \mathrm{I}_p \; l^{-p} + \ldots, \\ \mathrm{J} = \mathrm{J}_1 l^{-2} + \mathrm{J}_2 l^{-2} + \ldots + \mathrm{J}_{p-1} l^{-p} + \ldots, \end{cases}$$

où $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \ldots$ sont des fonctions de x_0, y_0 (et aussi, à partir d'un certain rang, de θ_0), on aura

$$(8) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{\mathrm{M}\, l^p} \dfrac{\partial(\mathrm{I}_{p-1} - \mathrm{J}_{p-1})}{\partial y_0}, \\ \eta = -\dfrac{1}{\mathrm{M}\, l^p} \dfrac{\partial(\mathrm{I}_{p-1} - \mathrm{J}_{p-1})}{\partial x_0}, \end{cases}$$

p étant la première valeur de l'indice pour laquelle $\mathrm{I}_{p-1} - \mathrm{J}_{p-1}$ ne soit pas indépendant de x_0, y_0.

Cette formule peut encore se simplifier. Reprenons, en effet, la variation de $\mathrm{I} - l\mathrm{J}$ en laissant cette fois x_0, y_0, θ_0 constants, mais en faisant varier l, on aura

$$\delta \mathrm{I} - l\, \delta \mathrm{J} = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_{\mathrm{A}'} \delta\xi + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{\mathrm{A}'} \delta\eta - f(x+\xi, y+\eta, \delta\xi, \delta\eta).$$

Suivons la variation depuis $l = \infty$ $(\xi = \eta = \mathrm{I} = \mathrm{J} = 0)$ jusqu'à une valeur quelconque de l. Les coefficients de $\delta\xi$, $\delta\eta$ étant finis, on obtient [1], en intégrant le second membre, un résultat de l'ordre de $\frac{1}{l^p}$. Il en résulte que les coefficients $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \ldots$ vérifient les $p - 1$ relations

$$\mathrm{I}_1 = 2\mathrm{J}_1, \qquad \mathrm{I}_2 = \frac{3}{2}\mathrm{J}_2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{I}_{p-1} = \frac{p}{p-1}\mathrm{J}_{p-1}.$$

---

[1] Cette conclusion suppose que la longueur de l'arc décrit, dans ces conditions, par le point A' est dans un rapport fini avec la corde AA'. Mais les résultats précédents montrent qu'il en est bien ainsi.

Or, la dernière d'entre elles permet d'écrire les formules (8) sous la forme

$$\xi = \frac{1}{pM}\frac{\partial I_{p-1}}{\partial y_0} = \frac{1}{(p-1)M}\frac{\partial J_{p-1}}{\partial y_0}, \qquad \eta = -\frac{1}{pM}\frac{\partial I_{p-1}}{\partial x_0} = -\frac{1}{(p-1)M}\frac{\partial J_{p-1}}{\partial x_0}.$$

Le cas général est celui de $p = 2$. La quantité dont il faut prendre les dérivées par rapport à x et à y est alors l'aire de la courbe Γ divisée par M : cette aire est égale, d'après ce que nous venons de trouver, à la moitié de l'intégrale

$$\int f(\cos\theta, \sin\theta)\, A\, d\theta$$

étendue à cette courbe. Plus généralement d'ailleurs, l'égalité

$$f(f+f'')\,d\theta = \frac{\partial f}{\partial x'}\,d\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\,d\frac{\partial f}{\partial x'}$$

montre que l'intégrale en question, étendue à un arc de cette courbe, est proportionnelle à l'aire du secteur sous lequel il est vu de l'origine. C'est, comme on le voit, une généralisation de ce qui se passe pour le cercle.

On voit qu'à un choix donné quelconque de l'intégrale I doit correspondre un choix parfaitement déterminé (à un facteur constant près) de la fonction M et, par conséquent, de l'intégrale J, si l'on veut que l'ordre infinitésimal p du segment de fermeture soit supérieur à 2.

Cette condition est bien réalisée dans le cas des cercles géodésiques (M et l'aire de notre courbe étant égaux à $\sqrt{EG - F^2}$ et $\pi\sqrt{EG - F^2}$). Il est alors aisé de calculer les quantités (8). Il suffit de partir de la formule

$$\int \frac{ds}{\rho_g} = 2\pi - \int\int \mathfrak{S}\, dS,$$

dans laquelle $\mathfrak{S}$ est la courbure totale et dS l'élément de surface. Pour un cercle géodésique, on a $\frac{1}{\rho_g} = l$, sauf sur le petit segment AA', qui n'intervient dans l'intégrale du premier membre que pour un terme de l'ordre de l^{-p}. On a donc, aux quantités de cet ordre près, lesquelles ne peuvent pas influer sur le calcul des coefficients utiles I_{p-1}, J_{p-1},

$$lI = 2\pi - \mathfrak{S}' J,$$

$\mathfrak{S}'$ étant une valeur de $\mathfrak{S}$ à l'intérieur de la courbe. En remplaçant I et J par leurs développements (¹), on a

$$I_1 = 2\pi, \qquad I_2 = 0, \qquad I_3 = -\mathfrak{S} J_1 = -\mathfrak{S}\frac{I_1}{2} = -\mathfrak{S}\pi.$$

Ainsi le nombre p est égal à 4 et le segment de fermeture est

$$\xi = -\frac{\pi}{4M}\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y_0}, \qquad \eta = \frac{\pi}{4M}\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x_0}.$$

Il est à remarquer que ce segment est tangent à la courbe $\mathfrak{S} = \text{const.}$, de sorte que la suite de pareils segments, lorsqu'ils seront tous très petits (c'est-à-dire pour l très grand), constituera une ligne brisée sensiblement confondue avec la courbe en question (dont elle réalisera une approximation à la Cauchy-Lipschitz). Ainsi, *les extrémales relatives à l très grand tendent à suivre les lignes* $\mathfrak{S} = \text{const.}$

On a un résultat tout semblable dans le cas général. Les lignes suivies par les extrémales ont alors pour équations $I_{p-1} = \text{const.}$ (ou encore $J_{p-1} = \text{const.}$).

5. La forme remarquable que prennent asymptotiquement les extrémales de notre problème isopérimétrique a son analogue dans le cas de trois dimensions. Soient

$$I = \int f(x, y, z, x', y', z')\, dt,$$
$$J = \int P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

les deux intégrales données. Les équations différentielles des extré-

(¹) On retrouve ainsi, en la précisant, la proposition énoncée par M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III) et d'après laquelle les seules surfaces sur lesquelles tous les cercles géodésiques soient fermés sont les surfaces à courbure constante.

males pourront s'écrire

$$
(9)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x'^2} x'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial y'} y'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial z'} z'' = (\chi + l\mathrm{N})y' - (\psi + l\mathrm{M})z', \\[2mm]
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial y'} x'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'} z'' = (\varphi + l\mathrm{L})z' - (\chi + l\mathrm{N})x, \\[2mm]
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial z'} x'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'} y'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z'^2} z'' = (\psi + l\mathrm{M})x' - (\varphi + l\mathrm{L})y,
\end{cases}
$$

avec

$$
\mathrm{L} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}, \qquad \mathrm{M} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}, \qquad \mathrm{N} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}.
$$

Convenons de prendre pour le paramètre arbitraire t une quantité par rapport à laquelle les dérivées des rapports mutuels de x', y', z' ne soient ni très grandes, ni très petites, c'est-à-dire une quantité qui soit dans un rapport fini avec l'arc de représentation sphérique de la courbe cherchée. Alors x', y', z' seront très petits et de l'ordre de $\frac{1}{l}$, de sorte que nous considérerons encore x, y, z comme constants (¹). Dans ces conditions, les premiers membres des équations précédentes peuvent être regardés comme les dérivées de $\frac{\partial f}{\partial x'}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\frac{\partial f}{\partial z'}$, et, comme φ, χ, χ sont, d'autre part, négligeables devant $l\mathrm{L}$, $l\mathrm{M}$, $l\mathrm{N}$, on a sensiblement

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x'} &= l(\mathrm{N}y - \mathrm{M}z) + h, \\
\frac{\partial f}{\partial y'} &= l(\mathrm{L}z - \mathrm{N}x) + i, \\
\frac{\partial f}{\partial z'} &= l(\mathrm{M}x - \mathrm{L}y) + k,
\end{aligned}
$$

h, i, k étant des constantes.

(¹) En effet, les premiers membres des formules (9), qui, comme l'on sait, ne dépendent que des variations des rapports mutuels de x', y', z', sont finis. Il en est de même de φ, ψ, χ. Donc les quantités $\mathrm{N}y' - \mathrm{M}z'$, $\mathrm{L}z' - \mathrm{M}x'$, $\mathrm{M}x' - \mathrm{L}y'$ sont de l'ordre de $\frac{1}{l}$. Si donc x', y', z' n'étaient pas de ce même ordre de grandeur, ils seraient sensiblement proportionnels aux constantes L, M, N, ce qui est exclu par nos hypothèses, t devant être dans un rapport fini avec l'arc de représentation sphérique.

Prenons, comme nouvel axe des z, la direction du segment (L, M, N). Nos équations deviendront

$$(10)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{l\mathrm{N}}\dfrac{\partial f}{\partial y'} + \text{const.}, \\ y = \dfrac{1}{l\mathrm{N}}\dfrac{\partial f}{\partial x'} + \text{const.}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z'} = k. \end{cases}$$

Considérons encore l''indicatrice du problème

$$(11)\qquad f = 1,$$

qui est ici une surface. La polaire réciproque de cette surface par rapport à la sphère de rayon 1 décrite de l'origine comme centre est le lieu du point qui a pour coordonnées [1]

$$p = \frac{\partial f}{\partial x'}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad r = \frac{\partial f}{\partial z'}.$$

Nous désignerons l'équation de ce lieu [2] par

$$(12)\qquad \Phi(p, q, r) = 0.$$

Nous voyons déjà que la projection de la courbe cherchée sur le

---

(1) Rappelons que, f étant homogène et du premier degré, les quantités p, q, r ne dépendent que de deux variables (les rapports mutuels de x', y', z').

(2) Dans le cas de l'extremum libre de l'intégrale I, l'introduction de la surface (11) permet également une interprétation géométrique simple des équations différentielles du problème. L'élément qui intervient alors est une certaine conique, égale à la section droite du cylindre mené par l'indicatrice (au sens ordinaire du mot, cette fois) de la surface en question, parallèlement à la direction (x', y', z') correspondante.

Les mêmes considérations s'appliquent aux intégrales doubles. La forme paramétrique d'une telle intégrale (à une seule fonction inconnue) est $\int\int f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)\,du\,dv$, où α, β, γ sont les déterminants fonctionnels de y, z; z, x; x, y par rapport à u, v, et où f est homogène et du premier degré en α, β, γ.

Si, à l'aide de la surface représentée par l'équation $f(\alpha, \beta, \gamma) = 1$, on construit la conique dont nous venons de parler, les termes du second ordre de l'équation différentielle relative à l'extremum de l'intégrale, égalés à zéro, expriment que cette conique et l'indicatrice de la surface cherchée ont pour asymptotes quatre droites formant un faisceau harmonique.

plan des x, y est semblable à la section de la surface (12) par le plan $r = k$.

Pour obtenir une expression de z, nous remarquerons que les rapports mutuels de x', y', z' ou, ce qui revient au même, ceux de dx, dy, dz sont

$$\frac{dx}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)} = \frac{dz}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)}. \tag{13}$$

Soit, d'autre part, $(\mathrm{D}p, \mathrm{D}q, \mathrm{D}r)$ un déplacement effectué sur la surface (12), mais non sur notre section plane, de sorte que $\mathrm{D}r = \mathrm{D}k \neq 0$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p}\mathrm{D}p + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\mathrm{D}q + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\mathrm{D}r = 0,$$

et, par conséquent [en ajoutant terme à terme les deux premiers rapports (13), après avoir multiplié les deux termes du premier par $\mathrm{D}p$, ceux du second par $\mathrm{D}q$] :

$$dz = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\frac{dx\,\mathrm{D}p + dy\,\mathrm{D}q}{\mathrm{D}p\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \mathrm{D}q\frac{\partial \Phi}{\partial q}} = -\frac{dx\,\mathrm{D}p + dy\,\mathrm{D}q}{\mathrm{D}r} = \frac{1}{l\mathrm{N}}\,\frac{\mathrm{D}p\,dq - \mathrm{D}q\,dp}{\mathrm{D}r}.$$

Le numérateur du second membre est un élément d'aire compris, en projection sur le plan des xy, entre notre section plane et la section parallèle infiniment voisine. Si donc on désigne par $\mathrm{S}(\alpha_0, \alpha, k)$ l'aire du secteur déterminé dans notre section plane par deux demi-plans $\frac{q}{p} = \tang\alpha_0$, $\frac{q}{p} = \tang\alpha$ issus de l'axe des z, on aura

$$z = \frac{1}{l\mathrm{N}}\,\frac{\partial \mathrm{S}(\alpha_0, \alpha, k)}{\partial k}.$$

On voit que, cette fois, les courbes obtenues ne sont plus fermées; elles le sont bien en projection sur le plan des xy; mais, lorsque le point (x, y) revient à sa position primitive après avoir décrit une courbe fermée dont l'aire est S, z augmente de la quantité $\frac{d\mathrm{S}}{dk}$, manifestement différente de zéro, en général.

6. Revenons maintenant au cas des courbes planes et cherchons quel pourra être, sur la courbe définie par les équations (6), le foyer conjugué du point origine A.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un foyer libre. Lorsqu'on ne fait pas varier l, les différentielles de x et de y (lesquels sont fonctions de θ et de l'angle initial θ_0) se réduisent à

$$\begin{aligned}\delta x &= -R_0 \cos\theta_0 \,\delta\theta_0 + R\cos\theta\,\delta\theta,\\ \delta y &= -R_0 \sin\theta_0 \,\delta\theta_0 + R\sin\theta\,\delta\theta,\end{aligned}$$

en négligeant, dans les coefficients de $\delta\theta_0$ et de $\delta\theta$, des quantités de l'ordre de l^{-2} et en désignant par R_0 la valeur initiale de R.

Ces deux différentielles s'annuleront simultanément lorsqu'on aura sensiblement

$$\sin(\theta - \theta_0) = 0,$$

c'est-à-dire tout d'abord, pour $\theta - \theta_0 = \pi$. Ainsi, *les foyers conjugués de l'extremum libre sont les points dont les tangentes sont parallèles* (¹), ou, du moins, font un angle de l'ordre de $\frac{1}{l}$.

Passons à la recherche des foyers liés. Lorsqu'on tient compte de la variation de l les différentielles δx et δy s'écrivent

$$\delta x = -R_0\cos\theta_0\,\delta\theta_0 + R\cos\theta\,\delta\theta - \frac{x}{l}\,\delta l,$$

$$\delta y = -R_0\sin\theta_0\,\delta\theta_0 + R\sin\theta\,\delta\theta - \frac{y}{l}\,\delta l.$$

Nous devrions, dans les mêmes conditions, calculer la variation de I ou de J, suivant le problème posé. Mais on sait qu'on obtient les mêmes foyers dans les deux cas : nous calculerons donc δJ, lequel est égal à $\int M(dx\,\delta y - dy\,\delta x)$. En remplaçant δx, δy par les valeurs

(¹) Si l'indicatrice du problème admet l'origine comme centre de symétrie, c'est-à-dire si l'on a $f(x', y') = f(-x', -y')$, la corde de l'arc compris entre deux foyers conjugués a ses cosinus directeurs proportionnels à $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $-\frac{\partial f}{\partial x'}$, c'est-à-dire qu'elle est (sensiblement) *transversale* à la courbe en ses deux extrémités.

trouvées tout à l'heure, il vient

$$\delta J = M \left[R_0 \delta \theta_0 (y \cos \theta_0 - x \sin \theta_0) + \frac{\delta l}{l} \int x\, dy - y\, dx \right],$$

la quantité $\int x\,dy - y\,dx$, qui figure dans le coefficient de δl n'est autre chose que le double de l'aire Σ comprise entre notre arc de courbe et sa corde.

Le déterminant fonctionnel $\frac{D(x, y, J)}{D(\theta_0, \theta, l)}$ a donc $\left(\text{aux termes près de l'ordre de } \frac{1}{l^6}\right)$ la valeur

$$-\frac{MRR_0}{l} [2\Sigma \sin(\theta - \theta_0) + (y \cos\theta_0 - x \sin\theta_0)(y \cos\theta - x \sin\theta)].$$

Les quantités $y \cos\theta_0 - x \sin\theta_0$, $y \cos\theta - x \sin\theta$ sont nécessairement (du moins pour $\theta - \theta_0 < 2\pi$) l'une positive, l'autre négative, si la courbe Γ est supposée convexe. Les deux termes de la formule précédente sont donc de signes contraires pour $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi$; mais le second est le plus grand, car il est égal au produit de $2 \sin(\theta - \theta_0)$ par l'aire du triangle formé par la corde de notre arc et les tangentes à ses extrémités, aire qui est supérieure à l'aire curviligne Σ correspondante (¹).

Pour $\theta_0 + \pi < \theta < \theta_0 + 2\pi$, au contraire, les deux termes sont de même signe.

L'arc sur lequel la condition de Jacobi est vérifiée correspond donc sensiblement à une variation de θ égale à 2π, c'est-à-dire *à une révolution complète sur la courbe*. Si θ_1 est la valeur de θ correspondant au foyer conjugué, la différence $\theta_1 - \theta_0 - 2\pi$ est de l'ordre de $\frac{1}{l}$.

(¹) Il est d'ailleurs impossible, *a priori*, que le foyer lié corresponde à $\theta - \theta_0 < \pi$, puisqu'il doit être au delà du foyer libre.

Les évaluations que nous venons de faire n'excluraient pas, il est vrai, la présence d'un foyer libre et d'un foyer lié dans le voisinage du point A, la différence $\theta - \theta_0$ étant de l'ordre de $\frac{1}{l}$, puisqu'elles n'ont lieu qu'avec une erreur relative de cet ordre. Mais l'impossibilité de cette hypothèse résulte des considérations présentées plus haut (nº 2).

Si l'on tient compte de ce qui a été dit plus haut, on voit que la distance du point ainsi obtenu à l'origine est de l'ordre de $\frac{1}{l^2}$.

D'après cela, soient une valeur donnée de I et un point B distant de A d'une quantité supérieure à $k\mathrm{I}^2$, k étant un certain nombre fixe et I étant suffisamment petit. Il existera un arc d'extrémale et un seul joignant A à B, donnant à I la valeur donnée, situé d'un côté déterminé de AB $\left(\text{de sorte que l'intégrale } \int x\,dy - y\,dx \text{ y ait un signe donné, ou encore, que } \theta \text{ y varie dans un sens donné}\right)$ et que la variation totale de θ sur cet arc soit inférieure à $2\pi - k'\mathrm{I}$ (k' étant un autre nombre positif fixe).

Ceci ne résulterait pas *de plano* du non évanouissement du déterminant fonctionnel. Mais le calcul des différentes dérivées tel que nous l'avons fait montre aisément :

1° Que, l étant donné ainsi que le point A, l'argument θ_0 de la tangente en A et la direction de la droite AB $\left(\text{faisant avec la tangente un angle compris entre } \frac{k''}{l} \text{ et } \pi - \frac{k''}{l}, k'' \text{ étant encore un nombre fixe}\right)$, cette droite coupe l'extrémale ainsi construite en un point déterminé B tel que $\theta - \theta_0$ soit inférieur à la limite indiquée ;

2° Que la distance AB diminue (θ_0 étant fixe) lorsque l augmente, et prend une fois et une seule une valeur donnée, ce qui donne pour chaque valeur de θ_0 et chaque position de A et de B un arc AB déterminé;

3° Que la valeur de I, sur cet arc AB, est une fonction croissante de l'angle que fait AB avec la tangente en A.

On démontrerait de même qu'on peut se donner arbitrairement A, B et la valeur de J, pourvu que $\overline{\mathrm{AB}}$ soit supérieur à $k\mathrm{J}$.

Les quantités θ_0, θ, l sont d'ailleurs, dans les conditions indiquées, des fonctions continues de A, B, I ou de A, B, J.

7. Tout arc d'extrémale construit comme il a été expliqué ci-dessus fournira assurément un extremum lié relatif, c'est-à-dire (en supposant réalisée la condition de Weierstrass pour le minimun *fort*) un minimum par rapport à toutes les lignes acceptables *entièrement com-*

prises dans une certaine bande entourant cet arc. On peut établir que le minimum a lieu sans cette restriction (la valeur de l'intégrale donnée et la distance AB étant toujours supposées suffisamment petites).

C'est ce qui a lieu tout d'abord dans le cas où (I étant supposé donné) le rapport $\frac{\mathrm{I}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ est inférieur à la limite k obtenue précédemment (n° 2), de sorte que l'arc d'extrémale correspondant vérifie la condition de Jacobi pour l'extremum libre, et, de même, dans le cas où, J étant donné, le rapport $\frac{|\mathrm{J}-\mathrm{J}_0|}{\overline{\mathrm{AB}}^2}$ est inférieur à la limite obtenue au même endroit. On est alors, en effet, dans les conditions où il y a extremum libre pour l'intégrale $\mathrm{I}-l\mathrm{J}$.

D'autre part, notre extremum serait encore assuré si l'on assujettissait la ligne variée à être telle qu'en désignant par I_{M} l'intégrale I prise sur cette ligne du point A à un point quelconque M, le rapport $\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\mathrm{I}_{\mathrm{M}}^2}$ soit constamment supérieur à $\frac{1}{k}$ (ou que l'on ait une condition analogue relative à l'intégrale J : conditions dans lesquelles on pourrait encore substituer B à A); car, pour de telles lignes, nous venons de voir que la construction de Weierstrass est possible.

On peut alors démontrer la conclusion cherchée d'une manière générale par une décomposition convenable de la ligne variée en arcs le long desquels l'une ou l'autre des conditions précédentes soit vérifiée.

Ceci fait, une décomposition analogue permettra aisément, sinon de discuter la construction de l'extrémale, du moins de montrer l'existence de l'extremum au voisinage d'un point donné A, même lorsque la distance AB devient inférieure à $k\mathrm{I}^2$ ou à $k(\mathrm{J}-\mathrm{J}_0)$ et, en particulier, quand les deux points A et B coïncident.

On est ainsi parvenu au même résultat fondamental qui avait été obtenu pour l'extremum libre, et rien n'est plus aisé que de passer maintenant par les mêmes méthodes au cas où les points A et B ainsi que la valeur donnée de I ou de J sont tout à fait quelconques.

C'est la conclusion qu'il s'agissait d'obtenir.

Si enfin l'on fait coïncider B avec A, puis qu'on cherche le maximum maximorum ou le minimum minimorum en faisant varier de toutes les manières possibles la position commune de ces deux points, on obtiendra des extrémales fermées.

Par exemple, on voit ainsi qu'une surface fermée quelconque admet une infinité de cercles géodésiques fermés (situés, bien entendu, au voisinage des points où les dérivées de la courbure s'annulent).

C'est encore sur les considérations précédentes qu'on fonderait le raisonnement employé par M. Poincaré [1] pour établir l'existence de géodésiques fermées sur les surfaces convexes.

Il existe d'ailleurs une voie toute différente par laquelle on pourra parvenir plus directement aux mêmes conclusions : c'est celle que j'ai indiquée, dans une précédente Note [2], pour l'extremum libre de l'intégrale (2).

8. Avant de quitter le problème isopérimétrique, j'indiquerai d'un mot comment, ainsi que je l'avais annoncé précédemment dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique de France* [3], on peut établir les conditions nécessaires de l'extremum (conditions relatives à la variation première) dans le cas des variations unilatérales, c'est-

---

(1) *Transactions of the American Math. Soc.*, t. VI, juillet 1905, p. 265 et suiv. (§ 7). — Un autre résultat essentiel du même Mémoire se relie d'une manière extrêmement simple aux principes fondamentaux du Calcul des Variations : c'est celui d'où résulte l'existence de géodésiques fermées sur un sphéroïde. M. Poincaré démontre que celui-ci admet une géodésique fermée L' voisine d'un grand cercle déterminé C de la sphère si la longueur de la ligne C' qui correspond à ce grand cercle sur le sphéroïde est un extremum (ou du moins satisfait aux conditions différentielles du premier ordre correspondantes) par rapport aux longueurs des C'_1 correspondant aux autres grands cercles voisins C_1 (POINCARÉ, *loc. cit.*, § 3).

Or, désignons par Γ la ligne tangente à C en un de ses points A et qui correspond à une géodésique du sphéroïde. Cette ligne, après avoir fait une fois le tour de la sphère, revient au voisinage de A : soit δ la distance à laquelle elle passe de ce point. δ est, en toute hypothèse, au plus de l'ordre du paramètre μ (notation de M. Poincaré), qui définit le sphéroïde. Soit maintenant C_1 un grand cercle issu de A et faisant avec C, en ce point, un angle λ. Pour que la différence des longueurs des lignes correspondant à C_1 et à C soit au plus de l'ordre de $\lambda^2\mu$, on voit aisément que δ doit être d'ordre supérieur en μ. Cela doit d'ailleurs avoir lieu de quelque manière qu'on choisisse le point A sur le cercle donné C, et cette conclusion équivaut à l'énoncé que l'on a en vue.

(2) *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, 24 décembre 1906.

(3) Tome XXXIII, 1905, page 80. — Je signalais, en même temps, une démonstration du théorème de M. Osgood relatif à la différence entre une intégrale définie et son minimum, sur laquelle il n'y a pas lieu de revenir, car elle n'est autre que celle qu'a donnée M. Hahn dans les *Monatshefte für Mathematik und Physik* (17e année, 1906, p. 63).

à-dire lorsque les conditions imposées à la fonction cherchée comprennent des inégalités.

Soit K le champ fonctionnel (au sens de M. Pincherle) défini par les conditions en question parmi lesquelles est supposée figurer celle qu'une certaine intégrale définie J prenne une valeur donnée α. Nous désignerons par K_1 le champ qu'on obtient en supprimant la condition $J = \alpha$, toutes choses égales d'ailleurs.

Soit maintenant I une seconde intégrale définie analogue. Nous voulons exprimer que la variation δI est nulle ou positive pour toute variation des fonctions arbitraires intérieure à K.

Nous supposerons pour cela, conformément à la nature de la question ([1]), que, dans le champ désigné tout à l'heure par K_1, l'intégrale J n'est ni un maximum ni un minimum; autrement dit, que sa variation peut avoir un signe arbitraire.

Il existera donc des variations δ_1 intérieures à K_1 telles que $\delta_1 J$ soit positif et des variations δ_2 telles que $\delta_2 J$ soit négatif.

En combinant ces deux sortes de variations suivant une marche toute semblable à celle qui est employée dans le cas classique, on arrive aisément à trouver comme condition nécessaire et suffisante l'existence d'une constante l telle que l'on ait dans K_1

$$\delta(I - lJ) > 0.$$

Ceci s'étend aisément au cas où plusieurs intégrales ont des valeurs données en considérant des champs successifs obtenus en supprimant une, deux, etc. de ces conditions. On traitera de même le cas où une ou plusieurs intégrales définies seraient assujetties à être *supérieures* à des nombres donnés.

II.

9. C'est dans les problèmes relatifs aux intégrales multiples ([2]) que les méthodes d'existence de M. Hilbert ont rendu jusqu'ici de véritables

([1]) Les champs pour lesquels une hypothèse de cette nature n'est pas vérifiée constituent, dans tous les problèmes d'extremum lié, une catégorie à part, qu'on peut appeler celle des *champs singuliers* et à laquelle les méthodes générales cessent de s'appliquer (qu'il s'agisse d'ailleurs de calcul des variations ou de maxima et de minima ordinaires).

([2]) Je saisis cette occasion pour mentionner une erreur qui s'est glissée dans mes calculs services. Mais, par contre, il s'y présente, dans ce cas, des difficultés nouvelles.

Nous ne parlerons pas ici de celles qu'entraîne la formation de la fonction limite; mais, une fois celle-ci obtenue, il reste à établir qu'elle satisfait bien à l'équation aux dérivées partielles du problème; autrement dit, que la surface qui la représente est bien une extrémale.

Dans le cas des intégrales simples, cette démonstration, obtenue par M. Hilbert lui-même [1] à l'aide de généralisations délicates de la notion d'intégrale, repose en réalité sur le théorème de M. Osgood.

Ce théorème est relatif, comme on sait, à une limite inférieure de la quantité dont s'augmente une intégrale simple I lorsqu'on remplace la ligne L_0 qui rend cette intégrale minima par une autre ligne voisine L. Il exprime que, si L contient au moins un point dont la distance à L_0 soit supérieure à un nombre donné δ (et si, d'autre part, I vérifie au sens étroit les inégalités qui caractérisent le minimum fort), la différence des valeurs de I suivant L_0 et suivant L est supérieure à un nombre que l'on peut assigner.

Or, comme j'ai eu l'occasion de l'indiquer dans une Communication à la Société mathématique de France [2] et comme l'a aussi constaté M. Carathéodory [3], lorsqu'on passe aux intégrales multiples, le théorème de M. Osgood cesse d'être vrai. Étant donnée une intégrale double I, prise sur une surface S assujettie à être limitée à un contour donné C et qui est minima pour une certaine position S_0 de S; étant donné d'autre part un point M extérieur à S_0, on peut, par ce point, faire passer une surface le long de laquelle l'intégrale prenne une valeur aussi voisine qu'on le voudra de son minimum.

---

relatifs au minimum d'une intégrale multiple à plusieurs fonctions inconnues (*Leçons sur la propagation des ondes*, p. 253) et qui a été signalée par M. Duhem dans ses *Recherches sur l'élasticité*, Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 143-145. Non seulement la critique de M. Duhem est fondée, mais les termes qu'elle vise n'ont pas, en fait, l'ordre que je leur avais assigné, celui de h^2 (*voir* les passages cités) : leur ordre est celui de $h^2 \log h$. Seulement cette modification n'entache pas le résultat final, pour lequel il suffit que cet ordre soit supérieur à celui de h.

(1) Nous avons toujours en vue la méthode telle qu'elle a été exposée en 1900.

(2) Séance du 25 janvier 1906.

(3) *Math. Annalen*, t. LXII, 1906, p. 452.

Prenons, par exemple,

$$(14) \qquad I = \iint \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy,$$

S_0 étant le plan des xy et C un contour quelconque tracé dans ce plan.

Soient a, b et $c > 0$ les coordonnées du point M. Du point (a, b) comme centre décrivons le cercle de rayon r. A l'extérieur de ce cercle faisons $z = 0$; à l'intérieur, si ρ, θ sont des coordonnées polaires de centre (a, b),

$$(15) \qquad z = c \left[1 - \left(\frac{\rho}{r} \right)^{2h} \right],$$

h étant un nombre positif; il viendra

$$I = c^2 h,$$

c'est-à-dire que I tendra vers zéro avec h, la surface S ne cessant pas de passer au point M.

Elle a, il est vrai, une singularité en ce point. Mais, si l'on donne à z, non plus la valeur (15) mais la plus petite des deux valeurs c et $c' \left[1 - \left(\frac{\rho}{r} \right)^{2h} \right]$, où c' est un nombre plus grand que c, l'intégrale I prendra une valeur inférieure à $c'^2 h$ et tendra encore vers zéro avec h.

Quant à la discontinuité subie par le plan tangent à cette surface le long de la ligne $\rho = r \left(1 - \frac{c}{c'} \right)^{\frac{1}{2h}}$, $z = c$, on pourra aisément la faire disparaître en modifiant infiniment peu la forme de la surface (et, par conséquent, la valeur de l'intégrale) : on arrivera même ainsi à rendre cette surface analytique et régulière.

Mais, quoique le théorème de M. Osgood n'ait plus lieu dans toute sa généralité, il se trouve néanmoins pouvoir rendre, dans les applications connues de la méthode de M. Hilbert aux intégrales multiples et, en particulier, dans le problème de Dirichlet, les mêmes services que dans le cas des intégrales simples. Cela tient à ce que le théorème redevient exact si l'on impose une condition relative au mode de continuité de la fonction inconnue dans le voisinage du point considéré.

C'est ce que l'on peut voir par une extension du raisonnement de M. Osgood.

Soit d'abord, comme tout à l'heure, l'intégrale (14) étendue, cette fois, à une aire donnée quelconque du plan des xy, la fonction inconnue z étant assujettie à s'annuler sur le contour C de l'aire, intégrale qui est minima lorsque z est identiquement nul.

Donnons-nous, comme tout à l'heure, la valeur c que doit prendre z en un point (a, b) intérieur au contour, point que nous prendrons encore comme origine de coordonnées polaires. L'intégrale I sera supérieure à l'expression

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho_0} \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 \rho \, d\rho, \tag{16}$$

ρ_0 désignant le segment (ou, s'il y a lieu, le plus petit segment) intercepté à partir du pôle, sur le rayon vecteur correspondant à l'argument θ par notre contour C.

Cette fois, supposons la fonction z telle que, dans un cercle de centre (a, b) et de rayon suffisamment petit r_1, ses dérivées partielles p et q restent inférieures en valeur absolue à un nombre déterminé α. Alors on aura, pour $\rho = r_1$,

$$z = -\int_{r_1}^{\rho_0} \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho, \qquad z > c - \alpha r_1.$$

Or ceci nous permet d'obtenir une limite inférieure de l'intégrale

$$\int_{r_1}^{\rho_0} \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 \rho \, d\rho.$$

Il suffit pour cela d'appliquer l'inégalité de M. Schwartz qui donne

$$\int_{r_1}^{\rho_0} \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 \rho \, d\rho \int_{r_1}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho} > \left(\int_{r_1}^{\rho_0} \left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right| d\rho\right)^2,$$

et, par conséquent (ρ' désignant la plus petite valeur de ρ_0),

$$\int_{r_1}^{\rho_0} \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 \rho \, d\rho > \frac{(c - \alpha r_1)^2}{\log\left(\dfrac{\rho'}{r_1}\right)},$$

d'où une limite inférieure de l'expression (16).

Cette conclusion s'étend au cas où l'intégrale I et le contour C sont quelconques pourvu qu'il y ait minimum : car, sous cette condition, la différence des valeurs de I sur S et sur S_0 est supérieure, en vertu de la formule de Weierstrass, au produit d'une constante par une intégrale de la forme (14).

Elle ne nécessite pas d'ailleurs, comme nous l'avons supposé tout d'abord, l'hypothèse que les dérivées p et q soient finies, mais simplement celle que la différence des valeurs de z au point (a, b) et sur le cercle $\rho = r_1$ soit inférieure à une limite déterminée (suffisamment petite). Autrement dit, le théorème de M. Osgood s'applique encore aux fonctions qui, dans le voisinage du point M, sont *également continues*, c'est-à-dire *vérifient la condition fondamentale qui intervient dans les méthodes de M. Hilbert.*

10. Il est aisé en effet de voir que la conclusion précédente suffit pour l'objet que l'on a en vue pour le cas du problème de Dirichlet. Supposons qu'on ait établi l'existence de surfaces

$$(S_i) \qquad z = F_i(x, y),$$

limitées au contour donné C, telles que les valeurs correspondantes de l'intégrale (14) tendent vers la quantité M, limite inférieure de toutes les valeurs possibles de l'intégrale en question, et telles aussi que les fonctions F_i soient également continues, du moins dans toute région intérieure à C et sans point commun avec lui. On en déduira l'existence d'une surface $S[z = F(x, y)]$ telle que l'ordonnée de S_i tende vers celle de S, du moins pour un choix convenable des indices i.

Traçons, dans le plan des x, y, un cercle c, base d'un cylindre qui intercepte sur S une ligne L; et, par la résolution du problème de Dirichlet sur ce cercle, faisons passer par L une portion de surface Σ telle que son ordonnée $\varphi(x, y)$ soit une fonction harmonique de x, y. Il s'agit, suivant la marche indiquée par M. Hilbert, de démontrer que Σ coïncide avec la portion correspondante de S.

Pour cela, effectuons la même construction sur chacune des surfaces S_i de manière à obtenir une portion de surface Σ_i représentée par une équation $z = \varphi_i(x, y)$, φ_i étant une fonction harmonique qui coïncide avec l'ordonnée de S_i sur toute la circonférence de c.

Soit, d'autre part, $M(x_0, y_0)$ un point du plan des x, y intérieur au sens étroit à c.

Je dis que la différence $F_i(x_0, y_0) - \varphi_i(x_0, y_0)$, c'est-à-dire le segment intercepté sur l'ordonnée du point M entre les surfaces S_i, Σ_i, tend vers zéro pour i infini.

Nous savons, en effet, que la différence entre les valeurs de F_i, au point (x_0, y_0) et sur le cercle de rayon r_1 qui a pour centre ce point, est inférieure à un nombre fixe η. D'autre part, il en est de même pour φ_i, car la pente de Σ_i est dans un rapport fini avec la différence entre la plus petite et la plus grande valeur de F_i sur la courbe L, différence qui admet évidemment une limite supérieure fixe.

Donc, on peut appliquer le théorème de M. Osgood à la fonction $F_i - \varphi_i$ dans l'intégrale (14). L'accroissement de celle-ci est, dès lors, supérieur à $\mu[F_i(x_0, y_0) - \varphi_i(x_0, y_0) - 2\eta]^2$, μ désignant le nombre positif fixe $\dfrac{2\pi}{\log\dfrac{\rho'}{r_1}}$.

Or, en substituant la surface Σ_i à la portion correspondante de S_i, cette dernière surface ne cesse pas de remplir les conditions que nous lui avons imposées. Si donc on diminuait ainsi l'intégrale (14) d'une quantité non infiniment petite pour $i = \infty$, la limite inférieure de cette intégrale serait plus petite que M, contrairement à l'hypothèse.

Mais $F_i(x_0, y_0)$ tend vers $F(x_0, y_0)$; et, d'autre part, $\varphi_i(x_0, y_0)$ tend vers $\varphi(x_0, y_0)$; car la différence de ces deux dernières quantités étant plus petite que le maximum de la différence entre les ordonnées de deux points correspondants de S_i et de S sur c, tend vers zéro.

Donc, enfin, on a

$$F(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0),$$

c'est ce qu'il fallait établir.

III.

11. L'étude des conditions suffisantes pour le maximum ou le minimum dans le problème de Mayer a été, comme on le sait, faite par M. Kneser dans son *Lehrbuch der Variationsrechnung*.

Soient

$$(17) \qquad g_h(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

p équations différentielles reliant entre elles les $n > p$ fonctions y_1, $y_2, \ldots, y_n$ de la variable indépendante x, le déterminant fonctionnel des g par rapport à $y'_1, y'_2, \ldots, y'_p$ étant supposé différent de zéro. Les valeurs de ces n fonctions étant données pour $x = x_0$ ainsi que celles des $n - 1$ d'entre elles pour $x = x_1$ (x_1 étant plus grand que x_0), la valeur de y_1 correspondant à $x = x_1$ pourra être un extremum ou, du moins, aura sa variation première nulle, si les y vérifient, outre les équations (17), les suivantes

$$(18) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(dans lesquelles $l_1, l_2, \ldots, l_p$ sont des multiplicateurs qui ne sont pas tous identiquement nuls, qui ne peuvent même jamais s'annuler en même temps, et où l'on a posé

$$f = l_1 g_1 + l_2 g_2 + \ldots + l_p g_p,$$

la quantité

$$\psi_1 = \frac{\partial f}{\partial y'_1}$$

étant, de plus, différente de zéro au point B d'abscisse x_1.

Cela posé, pour qu'une ligne (extrémale)

$$(19) \qquad y_1 = \lambda_1(x), \qquad y_2 = \lambda_2(x), \qquad \ldots, \qquad y_n = \lambda_n(x$$

vérifiant les conditions précédentes, corresponde effectivement à un extremum, il suffit, d'après les résultats de M. Kneser :

1° Que la *construction de Weierstrass* soit possible, à l'aide des extrémales issues d'un point A′ pris sur le prolongement de l'arc AB considéré, et dont l'abscisse x' est inférieure (d'aussi peu qu'on le veut) à x_0. Ceci suppose qu'il n'existe pas de foyer conjugué du point A′ sur tout notre arc AB et suppose, en outre, que, sur le même arc, ψ_1 ne s'annule en aucun point;

2° Que l'on ait la *condition de Weierstrass*. Celle-ci est relative en l'espèce au rapport $\frac{\mathcal{E}}{\psi_1}$, $\mathcal{E}$ étant la quantité classique de Weierstrass formée à l'aide de la fonction f.

On le voit, les deux conditions précédentes impliquent une hypothèse commune (formulée, en effet, par M. Kneser) à savoir que ψ_1 *est constamment différent de zéro.*

Or, cette hypothèse $\psi_1 \neq 0$ n'est nullement nécessitée par la nature de la question. Nous avons vu que ψ_1 doit être différent de zéro en B. Mais rien n'empêche qu'il ne s'annule pour une ou plusieurs autres valeurs de x.

On peut établir que, s'il en est ainsi, *l'extremum est encore assuré.* Seulement on devra, dans la condition de Weierstrass, donner à ψ_1 la valeur qu'il a au point B ($\mathcal{E}$ étant, au contraire, calculé en supposant que x prenne successivement toutes les valeurs entre x_0 et x_1).

Il suffit pour cela de se servir de la *réciprocité* qui existe entre le problème de Mayer proposé et les problèmes analogues que l'on obtiendrait en cherchant l'extremum de la valeur finale de y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ lorsque toutes les autres valeurs finales sont données.

La construction de Weierstrass relative à un tel problème est la suivante :

Soient x, Y_1, Y_2, ..., Y_n les coordonnées d'un point voisin de notre extrémale, c'est-à-dire telles que les différences

$$Y_1 - \lambda_1(x), \qquad Y_2 - \lambda_2(x), \qquad \ldots, \qquad Y_n - \lambda_n(x)$$

soient petites. On devra déterminer une extrémale

$$y_1 = \Lambda_1(x), \qquad y_2 = \Lambda_2(x), \qquad \ldots, \qquad y_n = \Lambda_n(x) \tag{20}$$

issue du point A′ et dont les équations soient vérifiées au point considéré, à l'exception, non plus de la première d'entre elles, mais de celle qui correspond à l'indice i. La différence $Y_i - A_i(x)$ sera, au contraire, différente de zéro, en général : nous la désignerons par Δ_i.

Une telle construction sera possible d'après ce qui précède dans le voisinage de tout point M de notre extrémale pour lequel ψ_i, analogue à ψ_1, sera différent de zéro et qui, d'autre part, ne sera pas foyer du point A′. Elle fournira une valeur bien déterminée de Δ_i, qui sera une fonction de x, Y_1, Y_2, ..., Y_n.

Soit Δ_k la quantité analogue à Δ_i obtenue en remplaçant l'indice i par l'indice k (et supposant, bien entendu, que la construction de Weierstrass correspondante est également possible, ce qui arrivera si ψ_k est différent de zéro). Ces deux quantités — et, d'une manière générale, les quantités analogues relatives aux diverses valeurs de l'indice — ne peuvent s'annuler que simultanément, à savoir lorsque *toutes* les équations (20) sont vérifiées en même temps. Le lieu Σ des points (x, Y_1, ..., Y_n) de l'espace à $n - 1$ dimensions pour lesquels il en est ainsi n'est autre que le lieu (sorte de surface conique) des extrémales issues de A′.

Dès lors, on constate que, toujours au voisinage du point considéré de l'extrémale (19), les produits $\psi_i\Delta_i$, $\psi_k\Delta_k$ (par conséquent, les n produits de cette espèce s'ils ont pu être définis) *ont le même signe.*

Cela posé, admettons que ψ_1, non nul en B puisse s'annuler entre A et B. Comme cependant les n quantités ψ_i ne peuvent pas s'annuler toutes en même temps (sans quoi, il en serait de même des l), on peut diviser l'intervalle donné en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels, extrémités comprises, l'une de ces quantités (et, par conséquent, aux points de division, deux au moins d'entre elles) soit $\neq 0$. En particulier, dans le dernier d'entre eux, aboutissant en B, ce sera le cas pour ψ_1.

Le raisonnement de M. Kneser s'applique, dans chaque intervalle, à l'accroissement de l'une au moins des quantités Δ_i. Il montre que si $\mathcal{E} > 0$ et si le signe commun des quantités $\psi_i\Delta_i$ est positif au commencement de l'intervalle, il en sera de même à la fin.

Il est clair que nous pourrons opérer ainsi de proche en proche sur chacun de nos intervalles successifs, jusqu'au point B. En ce point, par conséquent, les produits $\psi_i \Delta_i$ et, en particulier, le produit $\psi_1 \Delta_1$, sont positifs.

Ce résultat, joint à celui que l'on obtiendrait en partant de l'hypothèse $\varepsilon < 0$, nous montre évidemment que :

Les conclusions de M. Kneser sont valables même si ψ_1 *change de signe entre* A *et* B (pourvu que ε n'en change pas et qu'il n'y ait pas de foyer conjugué dans l'intervalle);

La valeur de ψ_1 *qu'il faut faire figurer dans la condition de Weierstrass est alors celle qui correspond au point* B, et non celle qui correspond au point variable.