ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE MERLIN

Sur certaines familles de réseaux concourants

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 517-568

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__517_0>

SUR CERTAINES FAMILLES

DE

RÉSEAUX CONCOURANTS,

PAR M. EMILE MERLIN.

PRÉLIMINAIRES.

1. Généralisant la notion de réseaux parallèles, nous dirons que *deux réseaux correspondants* de l'espace E_n à n dimensions *se coupent* lorsque, en deux points correspondants quelconques, les tangentes aux courbes correspondantes des deux réseaux se coupent.

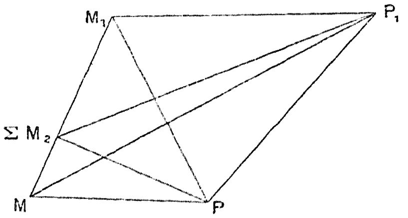
Des *réseaux* de E_n, en nombre quelconque, seront appelés *concourants* lorsque, aux points correspondants, les tangentes aux courbes correspondantes des réseaux sont concourantes.

Nous allons établir plusieurs propositions relatives à des familles de réseaux concourants dont les points correspondants sont à chaque instant en ligne droite. Les figures que nous ferons, se rapporteront à l'espace à trois dimensions, mais les raisonnements seront vrais dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

2. *Considérons deux réseaux* (M) *et* (M_1) *qui se coupent et une surface* Σ *telle que, aux points* M_2 *d'intersection de* Σ *avec les droites* MM_1, *qui joignent deux points correspondants de* (M) *et de* (M_1), *le plan tangent passe par la droite commune aux plans tangents à* (M) *et à* (M_1) *en* M *et* M_1. *Je dis que les développables de la congruence des droites* MM_1 *déterminent sur* Σ *un réseau* (M_2), *qui, avec* (M) *et* (M_1), *forme un système de trois réseaux concourants.*

Démonstration géométrique. — Soient, en M et M_1, MP, M_1P les tangentes aux courbes de paramètre v; MP_1, M_1P_1 les tangentes aux

Fig. 1.



courbes de paramètre u. Par hypothèse, le plan tangent en M_2 à Σ est le plan PM_2P_1.

On sait que les développables de la congruence engendrée par la droite PP_1 correspondent à celles de la congruence engendrée par MM_1. De plus, les points focaux P et P_1 de la droite PP_1 sont situés dans les plans focaux de la droite MM_1, chaque point focal se trouvant dans le plan focal qui ne lui correspond pas ([1]). Il en résulte ([2]) que les développables de la congruence des droites MM_1 interceptent sur Σ un réseau (M_2), qui forme avec (M) et (M_1) un système de trois réseaux concourants.

Démonstration analytique. — On sait que l'on peut choisir les coordonnées homogènes $x_1, \ldots, x_{n+1}$; $y_1, \ldots, y_{n+1}$ de M et de M_1 de telle manière que l'on ait

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x_i}{\partial v}, \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

D'ailleurs $\frac{\partial x_1}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u}$ et $\frac{\partial x_1}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial v}$ sont les coordonnées homogènes des points P et P_1.

([1]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, 2e partie, p. 230.
([2]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, 2e partie, p. 231.

Les coordonnées du point M_2 sont donc de la forme suivante :

$$z_i = y_i + \omega x_i \qquad (i = 1, \ldots, n+1),$$

ω désignant une certaine fonction de u et de v. Comme le plan PM_2P_1 est tangent à Σ en M_2, le point de coordonnées

$$\frac{\partial(y_1 + \omega x_1)}{\partial u}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(y_{n+1} + \omega x_{n+1})}{\partial u}$$

se trouve dans le plan PM_2P_1. On a donc, en tenant compte des équations (1), les $n+1$ relations suivantes :

$$(2) \qquad h\frac{\partial x_i}{\partial u} + \omega\frac{\partial x_i}{\partial u} + x_i\frac{\partial \omega}{\partial u} = \alpha(y_i + \omega x_i) + \beta\frac{\partial x_i}{\partial u} + \gamma\frac{\partial x_i}{\partial v}$$
$$(i = 1, \ldots, n+1),$$

α, β, γ étant trois fonctions convenablement choisies de u et de v. Mais les points M, M_1, P, P_1 ne sont pas dans un même plan. Les relations (2) entraînent donc les suivantes :

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} - \alpha\omega = 0,$$
$$\alpha = 0,$$
$$h + \omega - \beta = 0,$$
$$\gamma = 0;$$

desquelles on déduit

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0, \qquad \beta = h + \omega.$$

En exprimant que le point de coordonnées

$$\frac{\partial(y_1 + \omega x_1)}{\partial v}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial(y_{n+1} + \omega x_{n+1})}{\partial v}$$

est dans le plan PM_2P_1, on trouverait de même

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = 0, \qquad \alpha' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \gamma' = l + \omega,$$

α', β', γ' désignant les coefficients de $y_i + \omega x_i$, $\frac{\partial x_i}{\partial u}$, $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ dans les relations analogues à (2). Nous pouvons donc écrire les $2n+2$ relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_i}{\partial u} = (h+\omega)\dfrac{\partial x_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial v} = (l+\omega)\dfrac{\partial x_i}{\partial v} \end{cases} \qquad (i=1,\ldots,n+1)$$

qui montrent que Σ est coupée par les développables de la congruence des droites MM_1 suivant un réseau conjugué.

De plus on voit que les coordonnées homogènes des points M_2 peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$(4)\qquad z_i = y_i + \omega x_i \qquad (i=1,\ldots,n+1),$$

ω étant une constante.

Réciproquement les points dont les coordonnées peuvent se mettre sous la forme (4) engendrent le réseau le plus général conjugué à la congruence des droites MM_1 et formant avec (M) et (M_1) trois réseaux concourants.

3. Les deux propositions qui suivent, montrent le rapport qui existe entre la nature des fonctions h et l de u et de v et la nature du lieu des points focaux des droites MM_1.

Appelons F_1 le foyer dont la trajectoire est tangente à MM_1, lorsque u varie seul, F_2 l'autre. Les coordonnées de F_1 seront

$$(5)\qquad y_i - hx_i \qquad (i=1,\ldots,n+1);$$

celles de F_2,

$$(6)\qquad y_i - lx_i \qquad (i=1,\ldots,n+1).$$

1° *$h=l$ caractérise le cas où les droites MM_1 sont concourantes et entraîne la relation*

$$(7)\qquad h = l = \text{const.}$$

Cette proposition est évidente. En effet, dans le cas où h et l sont égaux, les expressions (5) et (6) montrent que F_1 et F_2 coïncident.

La congruence des droites MM_1 est donc formée de droites concourantes. La condition d'intégrabilité du système (1) conduirait à la relation (7).

2° $l = U$, U *désignant une fonction quelconque de* u, *caractérise le cas où la nappe lieu des arêtes de rebroussement des développables de paramètre* u *se réduit à une courbe.*

En effet, si le lieu de F_2 se réduit à une courbe, on a

$$(8) \qquad y_i - l x_i = U_i \varphi(u, v) \qquad (i = 1, \ldots, n+1),$$

U_i désignant des fonctions de u, φ une fonction convenablement choisie de u et de v; d'où, en différentiant (8) par rapport à v et en tenant compte de (1),

$$(9) \qquad -\frac{\partial l}{\partial v} x_i = U_i \frac{\partial \varphi}{\partial v} \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Mais le point de coordonnées $x_i, \ldots, x_{n+1}$ décrit un réseau. Il en résulte que les relations (9) entraînent la suivante :

$$\frac{\partial l}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(10) \qquad l = U,$$

U désignant une fonction quelconque de u.

Réciproquement, de la relation (10), on déduit, en différentiant (6) par rapport à v,

$$\frac{\partial(y_i - l x_i)}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$y_i - l x_i = U_i.$$

La nappe lieu de F_2 se réduit donc à une courbe.

On verrait de même que $h = V$, V désignant une fonction quelconque de v, caractérise le cas où le lieu de F_1 est une courbe.

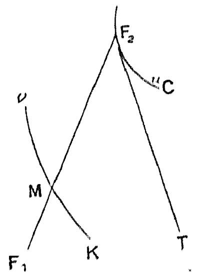
Donnons maintenant quelques propriétés de congruences particulières que nous rencontrerons plus loin.

4. *Lorsqu'une des nappes de la surface focale d'une congruence, par exemple le lieu des arêtes de rebroussement des développables de paramètre u, se réduit à une courbe; le long des lignes de paramètre u d'un réseau quelconque conjugué à la congruence, les tangentes aux lignes de paramètre v sont concourantes. Leur point commun se trouve sur la tangente à la courbe focale au point qui correspond à la ligne de paramètre u considérée.*

Soient (*fig.* 2) :

C la courbe focale le long de laquelle u varie seul;
F_2 un de ses points;
M le point où une droite F_2M de la congruence perce un réseau conjugué.

Fig. 2.



Lorsque v varie seul, M décrit une courbe K le long de laquelle les tangentes aux lignes de paramètre v vont couper la tangente F_2T à C. D'autre part, ces tangentes doivent engendrer une surface développable. Celle-ci est par suite un cône dont le sommet se trouve sur MT, ou un plan qui ne peut être MF_2T.

Dans les deux cas, le théorème est démontré.

5. *Si parmi les réseaux conjugués à une congruence il en existe un dont une des familles de lignes conjuguées est formée de courbes de contact de cônes circonscrits, une infinité de familles de réseaux conjugués concourants, dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, et l'une des nappes de la surface focale jouissent de la même propriété; les sommets des cônes circonscrits sont les mêmes pour tous ces réseaux.*

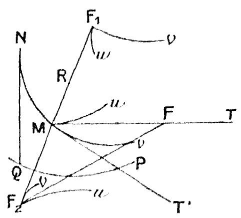
Si l'on considère quatre d'entre eux, ou trois et la nappe focale qui jouit de la propriété, le rapport anharmonique de quatre points correspondants demeure constant, lorsqu'on se déplace sur les courbes conjuguées aux courbes de contact de cônes circonscrits.

Démonstration géométrique. — Soient (*fig.* 3) :

F_1F_2 une droite de la congruence;
F_1 et F_2 les foyers;
M un point décrivant un réseau conjugué.

Par hypothèse, lorsque v, par exemple, varie seul, la tangente MT à la courbe de paramètre v passe par un point fixe F.

Fig. 3.



Sur la développable engendrée par les tangentes à la courbe MN de paramètre u, traçons une courbe quelconque QP. Faisons ensuite varier u seul et déplaçons chaque point tel que P sur la tangente MT', à laquelle il appartient, de manière que la tangente à la trajectoire de P passe par F.

Lorsque u et v varient arbitrairement, la droite FP engendre une congruence harmonique au réseau M. Il existe donc une infinité simple de réseaux (R) conjugués à la congruence et dont les plans tangents passent par FP (¹). Le long des courbes de paramètre u de ces réseaux, les tangentes aux courbes de paramètre v passent par F. Les courbes de paramètre u sont donc des courbes de contact de cônes circonscrits.

De plus, comme la courbe QP est arbitraire, on voit qu'il existe

(¹) *Voir* notre Note insérée dans les *Comptes rendus*, t. CXXXIX, 4 juillet 1904, p. 32.

autant de familles de réseaux jouissant de la propriété qu'il y a de fonctions d'une variable.

Lorsque v varie seul, le plan focal F_1MT, qui est tangent en F_2 à la surface focale, passe par un point fixe F. Il en résulte que, sur la nappe lieu de F_2, les courbes de paramètre u sont encore des courbes de contact de cônes circonscrits de sommets F.

Faisons varier u infiniment peu, F viendra en F′, FF′ ne coïncidant pas avec MT. Les plans FF′M, FF′R, FF′F_2 sont les plans osculateurs des courbes $v = \text{const.}$ en M, R, F_2. Ils forment un faisceau qui coupe le rayon infiniment voisin en M′, R′, F'_2. Donc le rapport anharmonique de quatre points correspondants de quatre réseaux tels que (R), ou de trois d'entre eux et du point correspondant de la nappe lieu de F_2, reste constant lorsque u varie seul.

Démonstration analytique. — On peut choisir les coordonnées homogènes $x_1, \ldots, x_{n+1}$ du point M de manière que les coordonnées du point F soient $\frac{\partial x_1}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u}$. La condition pour que les lignes $u = \text{const.}$ soient des courbes de contact de cônes circonscrits de sommet F s'écrira alors ainsi qu'il suit :

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \mu U_i \qquad (i = 1, \ldots, n+1); \tag{11}$$

d'où, en différentiant par rapport à v et éliminant U_i,

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \log \mu}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u}. \tag{11'}$$

Écrivons ensuite les coordonnées d'un point quelconque P de la tangente MT′, à savoir

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} + \lambda' x_i \qquad (i = 1, \ldots, n+1);$$

et exprimons que la trajectoire de P admet PF comme tangente en P, lorsque u varie seul. Il viendra

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \lambda'}{\partial u} x_i + \lambda' \frac{\partial x_i}{\partial u} + \mu' \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} + \lambda' x_i \right) = \nu' U_i \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

ou, en tenant compte des équations (11) et (11'),

$$\frac{\partial\mu}{\partial v}\mathrm{U}_i + \frac{\partial\lambda'}{\partial u}x_i + \lambda'\mu\mathrm{U}_i + \mu'\left(\frac{\partial x_i}{\partial v} + \lambda' x_i\right) = \nu'\mathrm{U}_i \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Mais les points de coordonnées x_i $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ et U_i ne sont pas en ligne droite. On déduit, par suite, de l'équation précédente

$$\mu' = 0,$$
$$\frac{\partial\lambda'}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial v} + \lambda'\mu = \nu'.$$

La première donne μ', la dernière, ν'. La deuxième donne λ' et l'on voit que les coordonnées du point P sont de la forme suivante :

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} + \mathrm{V}x_i, \tag{12}$$

V désignant une fonction arbitraire de v.

Lorsque u et v varient, la droite FP engendre une congruence harmonique à la congruence des droites $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$. Par suite, il existe une infinité de familles de réseaux conjugués à la congruence des droites $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ et concourants ([1]), dont les tangentes passent par les points F et P. On voit, de plus, que cette infinité dépend d'une fonction arbitraire V d'une variable.

Considérons la congruence harmonique FP correspondant à $\mathrm{V} = 0$ et un réseau (N) conjugué à la congruence des droites $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ qui coupe le réseau (x_i), en F et P. On pourra choisir les coordonnées y_i de N de telle manière ([2]) que

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x_i}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

([1]) *Loc. cit.*

([2]) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, 2e partie, p. 228.

En écrivant la condition d'intégrabilité on trouve l'équation de Laplace relative au réseau (M). D'autre part, cette équation n'est autre que (11'). Identifions ces deux équations, il viendra

$$-\frac{\frac{\partial h}{\partial v}}{h-l}=\frac{\partial \log \mu}{\partial v}, \qquad \frac{\partial l}{\partial u}=0;$$

d'où l'on tire

$$(14) \qquad l=V_1,$$

V_1 désignant une fonction de v seul.

Réciproquement, si l est de la forme (14), les congruences définies par les relations (13) sont du type considéré, car la condition d'intégrabilité des équations (13) pourra s'écrire alors sous la forme (11'); d'où l'on déduit (11) par intégration.

Donnons à présent à V toute sa généralité, on déterminera sans peine les coordonnées z_i des points du réseau le plus général conjugué à la congruence considérée, dont les tangentes passent respectivement par F et P. On trouvera ainsi

$$(15) \qquad z_i=y_i+V_2 x_i,$$

V_2 désignant une fonction de v satisfaisant à l'équation linéaire

$$(16) \qquad V_2'=V(V_1+V_2).$$

L'intégration de l'équation différentielle (16) amènerait une constante arbitraire et l'on voit encore qu'il y a autant de familles de réseaux conjugués concourants que de fonctions arbitraires V d'une variable.

Écrivons maintenant les coordonnées du foyer F_2, à savoir

$$(17) \qquad y_i-V_1 x_i.$$

On en déduit par différentiation

$$\frac{\partial(y_i-V_1 x_i)}{\partial u}=(h-V_1)\mu U_i,$$

si l'on tient compte des équations (13) et (11). On voit donc que la nappe de la surface focale jouit de la propriété énoncée.

D'ailleurs, si, dans l'équation (16), on fait $V = \infty$ et $V_2 = -V_1$, on obtient une solution limite qui montre que la nappe lieu de F_2 jouit de la propriété.

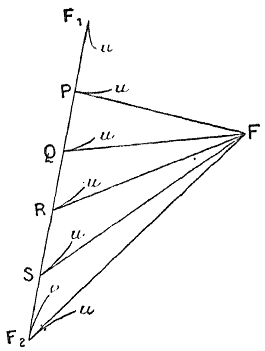
Les équations (15) et (17) montrent que, si l'on prend quatre réseaux, dont un peut être la nappe lieu de F_2, le rapport anharmonique des points correspondants est constant, lorsqu'on se déplace sur une courbe de paramètre v. Le théorème est donc démontré.

De plus, il résulte de ce qui précède, que *la condition $l = V_1$ caractérise ces congruences.*

6. *Si, parmi les réseaux conjugués à une congruence, on en considère trois tels que, aux points correspondants, les tangentes aux courbes d'un même paramètre v se coupent en un même point et si l'on peut leur adjoindre un quatrième réseau non concourant, ou la nappe de la surface focale, lieu des arêtes de rebroussement des développables de paramètre u, de manière que le rapport anharmonique de quatre points correspondants de ces quatre réseaux dépende uniquement de v, la congruence appartient au type du théorème précédent.*

En effet, considérons (*fig.* 4) les trois réseaux (P), (Q), (R) con-

Fig. 4.



jugués à la congruence des droites F_1F_2 et tels que les tangentes PF, QF, RF aux courbes de paramètre v passent par le même point F.

Soit (S) un quatrième réseau qui jouisse de la propriété suivante :

$$(P, Q, R, S) = V,$$

V désignant une fonction de v seul.

Si u varie seul, P vient en P′ sur PF, Q en Q′ sur QF, R en R′ sur RF, S en S′ et l'on a

$$(P', Q', R', S') = (P, Q, R, S).$$

Il en résulte que SS′ passe par F.

Cela étant, (P), (Q), (R), (S) étant des réseaux, quand v varie seul F doit se déplacer dans les plans tangents en P, Q, R, S aux réseaux (P), (Q), (R), (S) qui, par hypothèse, ne sont pas concourants. Il en résulte que F reste fixe, quand u reste constant. Les lignes $u =$ const. sont donc, sur les réseaux (P), (Q), (R), (S), des courbes de contact de cônes circonscrits. La proposition est démontrée.

Si S est remplacé par le point de contact F_2 de la droite F_1F_2 avec la nappe focale, lieu des arêtes de rebroussement des développables de paramètre u, on démontrera de même que, lorsque v varie seul, F doit se déplacer dans les plans tangents en P, Q, R aux réseaux (P), (Q), (R) et dans le plan tangent

$$F_1F_2P'Q'R'$$

à la nappe focale lieu de F_2. On arriverait donc à la même conclusion.

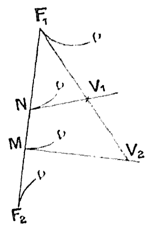
7. *Si pour deux réseaux conjugués à une même congruence les courbes* $v =$ const. *sont des courbes de contact de cônes circonscrits dont les sommets ne sont pas les mêmes pour les deux réseaux, la nappe lieu des arêtes de rebroussement des développables de paramètre* v *se réduit à une ligne.*

Soient (*fig.* 5) V_1 et V_2 les sommets des cônes circonscrits dont les courbes de contact sont les courbes $v =$ const.

Lorsque u varie seul, F_1F_2 engendre une développable et coupe constamment V_1V_2. Il en résulte que cette développable est un cône ou un plan. Dans le premier cas, la proposition est démontrée.

Dans le second, si la nappe focale considérée ne se réduit pas à une courbe, le plan renferme évidemment les tangentes en F_1 à la courbe de paramètre u et à la courbe de paramètre v. Par suite, ce

Fig. 5.



plan est tangent en F_1 à la nappe focale, qui est donc développable. F_1F_2 sont les génératrices rectilignes; il n'existe plus de congruence. Il en résulte que, dans le second cas, la nappe focale lieu de F_1 se réduit encore à une courbe.

En vertu de la proposition du n° 4, la droite V_1V_2 est tangente en F_1 à la ligne focale.

Dans la Section I, nous montrerons le rôle que joue h et l dans l'étude des réseaux conjugués aux congruences définies par les équations (1).

SECTION I.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS h ET l.

8. *Considérons deux congruences correspondantes dont les développables se correspondent et supposons que chacune d'elles admette trois réseaux conjugués concourants* (X), (Y), (Z); (X'), (Y'), (Z') *jouissant de la propriété suivante : à chaque instant les droites* XX', YY', ZZ' *et les droites joignant les foyers correspondants de* XY *et* X'Y' *sont concourantes, ou touchent une même conique tangente à* XY *et* X'Y', *ou se trouvent sur une même quadrique. Je dis qu'à tout réseau conjugué à la*

première congruence, on peut faire correspondre un réseau conjugué à la seconde, de telle manière que deux réseaux correspondants aient même équation aux dérivées partielles. De plus, à toute famille de réseaux concourants conjugués à la première, correspondra une famille de réseaux concourants conjugués à la seconde.

Soient, en effet,

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1}; \qquad y_1, \quad \ldots, \quad y_{n+1}; \qquad z_1, \quad \ldots, \quad z_{n+1}$$

les coordonnées homogènes des points X, Y, Z de trois réseaux concourants conjugués à la première congruence. On peut choisir convenablement x_i et y_i de manière à vérifier des relations de la forme suivante :

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned}\right. \qquad (i=1, \ldots, n+1).$$

Nous avons vu que les coordonnées des points d'un réseau conjugué à la congruence, et concourant avec (x_i) et (y_i), sont de la forme

$$y_i - \omega x_i,$$

ω étant une constante. Sans changer la forme des relations (1), on peut choisir x_i de sorte que les coordonnées des points du troisième réseau s'écrivent

$$(2) \qquad z_i = y_i - x_i.$$

Nous avons également montré dans les préliminaires, que les coordonnées des foyers F_1 et F_2 sont

$$(3) \qquad F_1, \quad \xi_i = y_i - h x_i,$$

$$(4) \qquad F_2, \quad \eta_i = y_i - l x_i.$$

Appelons à présent

$$x'_1, \quad \ldots, \quad x'_{n+1}; \qquad y'_1, \quad \ldots, \quad y'_{n+1}; \qquad z'_1, \quad \ldots, \quad z'_{n+1}$$

les coordonnées des points X', Y', Z' de la seconde congruence, qui correspondent aux points X, Y, Z de la première, ces coordonnées étant choisies de manière que l'on ait les relations

$$(2') \qquad z'_i = y'_i - x'_i,$$

$$(1') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y'_i}{\partial u} = h' \dfrac{\partial x'_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial y'_i}{\partial v} = l' \dfrac{\partial x'_i}{\partial v}. \end{cases}$$

Soient ξ'_i et η'_i les coordonnées des foyers F'_1 et F'_2 qui correspondent à F_1 et F_2. Nous pourrons écrire

$$(3') \qquad F'_1, \quad \xi'_i = y'_i - h' x'_i,$$

$$(4') \qquad F'_2, \quad \eta'_i = y'_i - l' x'_i.$$

Cela étant, la relation qui doit exister entre les trois réseaux et les foyers de la première congruence, d'une part, et les trois réseaux et les foyers de la seconde congruence, d'autre part, peut s'exprimer comme suit :

$$(X, Y, Z, F_1) = (X', Y', Z', F'_1),$$

$$(X, Y, Z, F_2) = (X', Y', Z', F'_2).$$

Ces dernières équations peuvent s'écrire

$$(5) \qquad h' = h,$$

$$(6) \qquad l' = l.$$

Cela établi, sur deux droites correspondantes des deux congruences, appelons *points correspondants* deux points tels que la droite qui les joint passe par le point de concours des droites XX', YY', ZZ', ou soit tangente à la conique qui touche ces trois droites et les rayons correspondants des deux congruences, ou appartienne à la demi-quadrique dont ces trois droites sont trois génératrices. A un réseau de coordonnées

$$Z_i = y_i - \lambda x_i$$

conjugué à la première congruence correspondra le système

$$Z'_i = y'_i - \lambda x'_i.$$

Mais, pour le réseau Z_i (¹), λ est de la forme

$$\lambda = \frac{\theta_1}{\theta},$$

θ étant une solution de l'équation de Laplace relative aux réseaux x_i et θ_1, l'une des fonctions qu'on déduit de θ par l'équation aux différentielles totales

$$d\theta_1 = \int \left(h \frac{\partial \theta}{\partial u} du + l \frac{\partial \theta}{\partial v} dv \right). \tag{7}$$

Or l'équation de Laplace relative à x_i ne dépend évidemment que de h et de l et, par suite, est relative à x'_i. On en conclut que Z'_i est un réseau conjugué à la seconde congruence. De plus (²) les équations de Laplace relatives à Z_i et Z'_i sont les mêmes.

Considérons à présent trois réseaux conjugués à la première congruence. Les coordonnées de leurs points seront

$$y_i - \frac{\theta_1}{\theta} x_i, \quad y_i - \frac{\theta'_1}{\theta'} x_i, \quad y_i - \frac{\theta''_1}{\theta''} x_i,$$

où θ, θ' et θ'' désignent trois solutions quelconques de l'équation de Laplace relative à x_i, θ_1, θ'_1 et θ''_1 les fonctions que l'on en déduit par la relation (7).

Les coordonnées des points des réseaux correspondants de la seconde congruence seront

$$y'_i - \frac{\theta_1}{\theta} x'_i, \quad y'_i - \frac{\theta'_1}{\theta'} x'_i, \quad y'_i - \frac{\theta''_1}{\theta''} x'_i.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois premiers réseaux soient concourants, ne renferment que les six fonctions θ, θ', θ'', θ_1, θ'_1, θ''_1. Il en résulte qu'à toute famille de réseaux concourants, conjugués à la première congruence, correspond une famille de réseaux concourants, conjugués à la seconde.

La proposition est donc établie.

(¹) On le voit aisément, en employant une méthode toute semblable à celle que nous avons suivie dans notre Note insérée dans les *Comptes rendus*, le 4 juillet 1904, t. CXXXIX, p. 32.

(²) *Loc. cit.*

9. *Réciproquement*, les deux congruences définies par les réseaux (x_i) et (y_i) d'une part, (x'_i) et (y'_i) d'autre part, x_i, y_i, x'_i, y'_i satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial y_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u},\\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x_i}{\partial v};\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial y'_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x'_i}{\partial u},\\ \frac{\partial y'_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x'_i}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

satisfont aux conditions de l'énoncé de la proposition précédente.

Considérons, en effet, sur la première congruence, les trois réseaux

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1}; \qquad y_1, \quad \ldots, \quad y_{n+1}; \qquad y_1 - x_1, \quad \ldots, \quad y_{n+1} - x_{n+1}$$

et les deux nappes

$$y_1 - hx_1, \quad \ldots, \quad y_{n+1} - hx_{n+1}; \qquad y_1 - lx_1, \quad \ldots, \quad y_{n+1} - lx_{n+1}$$

de la surface focale. Soient, de même, sur la seconde congruence, les trois réseaux

$$x'_1, \quad \ldots, \quad x'_{n+1}; \qquad y'_1, \quad \ldots, \quad y'_{n+1}; \qquad y'_1 - x'_1, \quad \ldots, \quad y'_{n+1} - x'_{n+1}$$

et les deux nappes

$$y'_1 - hx'_1, \quad \ldots, \quad y'_{n+1} - hx'_{n+1}; \qquad y'_1 - lx'_1, \quad \ldots, \quad y'_{n+1} - lx'_{n+1}$$

de la surface focale.

Les trois couples de points x_i, x'_i; y_i, y'_i; $y_i - x_i$, $y'_i - x'_i$ déterminent, sur deux droites correspondantes des deux congruences, deux divisions homographiques. Les foyers des deux droites sont deux couples de points correspondants des deux divisions homographiques. Il en résulte que les cinq droites qui joignent ces cinq couples de points correspondants sont à chaque instant coucourantes, ou tangentes à une même conique tangente aux rayons correspondants des deux congruences, ou sur une même quadrique.

10. *Considérons deux congruences correspondantes dont les développables se correspondent. Supposons que, pour chacune de ces congruences,*

il existe trois réseaux conjugués concourants (X), (Y), (Z); (X′), (Y′), (Z′), *tels que les droites* XX′, YY′, ZZ′ *et les droites qui joignent les foyers non correspondants des deux congruences soient à chaque instant ou concourantes, ou tangentes à une même conique tangente aux rayons correspondants des deux congruences, ou sur une même quadrique. Ces réseaux déterminent, sur chaque congruence, une famille* ∞^1 *de réseaux conjugués concourants. Je dis qu'on peut faire correspondre ces deux familles, de manière qu'à tout réseau de la première corresponde un réseau de la seconde, les équations de Laplace relatives à deux réseaux correspondants ayant les mêmes invariants, à l'ordre près.*

Employons les mêmes notations qu'au n° 8. Il viendra, dans l'hypothèse actuelle,

$$(X, Y, Z, F_1) = (X', Y', Z', F'_2),$$
$$(X, Y, Z, F_2) = (X', Y', Z', F'_1),$$

c'est-à-dire

$$h = l',$$
$$l = h'.$$

Appelons *points correspondants*, sur deux droites correspondantes des deux congruences, deux points tels que la droite qui les joint concoure au point d'intersection des droites XX′, YY′, ZZ′, ou soit tangente à la conique qui touche ces trois droites et les rayons correspondants des deux congruences, ou appartienne à la demi-quadrique définie par ces trois droites.

Au réseau lieu des points

$$(8) \qquad Z_i = y_i - \lambda x_i \qquad (\lambda = \text{const.})$$

correspondra le réseau lieu des points

$$(9) \qquad Z'_i = y'_i - \lambda x'_i.$$

L'équation de Laplace relative au réseau Z_i est la suivante :

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{1}{H-L}\frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial u}\frac{1}{H-L}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{h-\lambda} = H, \qquad \frac{1}{l-\lambda} = L.$$

Écrivons l'équation de Laplace relative au réseau Z'_i, à savoir

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 Z'}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{1}{L-H}\frac{\partial Z'}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial u}\frac{1}{L-H}\frac{\partial Z'}{\partial v} = 0.$$

Il viendra ensuite, pour les invariants de l'équation (10),

$$I_1 = \frac{(H-L)\dfrac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial H}{\partial v}}{(H-L)^2},$$

$$I_2 = -\frac{(H-L)\dfrac{\partial^2 L}{\partial u\,\partial v} + \dfrac{\partial L}{\partial u}\dfrac{\partial L}{\partial v}}{(H-L)^2}.$$

Les invariants correspondants de l'équation (11) s'obtiennent en changeant, dans les expressions de I_1 et de I_2, H en L et L en H. On a donc

$$I'_1 = \frac{(L-H)\dfrac{\partial^2 L}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{\partial L}{\partial u}\dfrac{\partial L}{\partial v}}{(H-L)^2} = I_2,$$

$$I'_2 = -\frac{(L-H)\dfrac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial H}{\partial v}}{(H-L)^2} = I_1.$$

On voit ainsi qu'aux réseaux de la famille simplement infinie que représentent les équations (8), correspondent des réseaux de la famille définie par les équations (9), de telle sorte que, pour deux réseaux correspondants, les invariants sont les mêmes, à l'ordre près.

11. *Réciproquement,* soient, à présent, deux congruences définies par les deux couples de réseaux x_i et y_i, x'_i et y'_i tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = h\dfrac{\partial x_i}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = l\dfrac{\partial x_i}{\partial v}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y'_i}{\partial u} = l\dfrac{\partial x'_i}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{\partial y'_i}{\partial v} = h\dfrac{\partial x'_i}{\partial v}. \end{cases}$$

On verrait sans peine que ces deux congruences satisfont aux conditions énoncées dans la proposition précédente.

Les nos 8 et 9 font connaître une propriété qui lie les solutions d'une équation générale de Laplace. Le no 10 et celui-ci fournissent une relation entre les solutions de deux équations de Laplace dont les invariants sont égaux à l'ordre près.

Dans le numéro qui suit nous ferons deux remarques, qui seront utiles dans les sections suivantes.

12. Considérons une des congruences définies par les équations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= h \frac{\partial x_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l \frac{\partial x_i}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

et posons

$$\frac{x_i}{\alpha} = x'_i,$$

α désignant une constante. Les équations (12) pourront s'écrire

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = h\alpha \frac{\partial x'_i}{\partial u},$$
$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = l\alpha \frac{\partial x'_i}{\partial v}.$$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ sont encore les coordonnées du point x_i, mais h et l sont devenues $h\alpha$ et $l\alpha$. *Il est donc toujours possible de choisir les coordonnées homogènes x_i du point décrivant le réseau (x_i) de manière que, dans les équations (12), h et l deviennent respectivement $h\alpha$ et $l\alpha$ sans que la congruence ni les deux réseaux (x_i) et (y_i) changent, α désignant une constante.*

Dans les équations (12) remplaçons le réseau (x_i) par le réseau $(y_i + \alpha x_i)$, α étant une constante; $(y_i + \alpha x_i)$ est un réseau conjugué à la congruence et forme, avec (x_i) et (y_i), un système de trois réseaux concourants.

La congruence considérée peut donc aussi être définie par les réseaux (x_i) et $(y_i + \alpha x_i)$, entre lesquels existent les relations

$$\frac{\partial(y_i + \alpha x_i)}{\partial u} = (h + \alpha) \frac{\partial x_i}{\partial u},$$
$$\frac{\partial(y_i + \alpha x_i)}{\partial v} = (l + \alpha) \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Dans les équations (12), *on peut donc remplacer h et l par $h+\alpha$ et $l+\alpha$, α désignant une constante, sans que la congruence ni le réseau* (x_i) *changent*, le deuxième réseau étant remplacé par un réseau qui appartient à la famille des réseaux conjugués concourants définie par (x_i) et (y_i).

SECTION II.

NOMBRE ET NATURE DES RÉSEAUX A INVARIANTS ÉGAUX QUI FONT PARTIE D'UNE FAMILLE DE RÉSEAUX CONCOURANTS CONJUGUÉS A UNE MÊME CONGRUENCE. CAS PARTICULIERS.

13. Considérons une famille de réseaux concourants conjugués à une même congruence. On peut choisir les coordonnées homogènes $x_1, \ldots, x_{n+1}$; $y_1, \ldots, y_{n+1}$ des points M et N de deux quelconques de ces réseaux de manière qu'elles satisfassent aux $2(n+1)$ équations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = h\dfrac{\partial x_i}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = l\dfrac{\partial x_i}{\partial v} \end{cases} \qquad (i=1, 2, \ldots, n+1).$$

Les coordonnées $z_1, \ldots, z_{n+1}$ du point P d'un troisième réseau, d'ailleurs quelconque, de la famille, qui se trouve sur la droite MN, seront données par les formules

$$(2)\qquad z_i = y_i + \lambda x_i,$$

λ étant une constante.

Des relations (1) et (2), on conclut que les coordonnées $z_1, \ldots, z_{n+1}$ satisfont à l'équation de Laplace

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \frac{l+\lambda}{h+\lambda}\mathrm{P}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{h+\lambda}{l+\lambda}\mathrm{Q}\frac{\partial z}{\partial v},$$

si l'on pose

$$(4)\qquad \begin{cases} P = -\dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial v}}{h-l}, \\ Q = \dfrac{\dfrac{\partial l}{\partial u}}{h-l}; \end{cases}$$

sauf si $h = l$, auquel cas tous les réseaux de la famille satisfont à la même équation de Laplace.

Nous nous proposons de rechercher combien, parmi les réseaux de la famille considérée, il en est qui sont à invariants égaux.

Remarquons tout d'abord que, en vertu des équations (4), les équations (3) ne dépendent que de h, l et λ. Au point de vue qui nous occupe, toutes les familles pour lesquelles les fonctions h et l sont les mêmes, ne diffèrent donc pas essentiellement. Nous les appellerons *des familles* (h, l). Nous avons montré, dans la Section précédente, la relation géométrique qui existe entre les réseaux conjugués aux congruences définies par deux familles (h, l).

Nous dirons que deux familles (h, l), (h', l') se ramènent l'une à l'autre, lorsque, à tout réseau de la première, on pourra faire correspondre un réseau de la seconde, de telle manière que, pour deux réseaux correspondants, les équations de Laplace aient les mêmes invariants, à l'ordre près. Par exemple, si, dans les équations (1), on change h en $\frac{1}{h}$, l en $\frac{1}{l}$, ce qui revient au fond à échanger les notations qui définissent les deux réseaux initiaux, on obtiendra une famille $\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{l}\right)$, qui se ramène à la famille (h, l), car au réseau $\left(y_i + \frac{1}{\lambda} x_i\right)$ de l'une correspondra de la sorte le réseau $(y_i + \lambda x_i)$ de l'autre.

Il résulte encore de cette définition et des théorèmes établis précédemment, que les familles $(\alpha h + \beta, \alpha l + \beta)$, où α et β désignent des constantes, et les familles (l, h) se ramènent à une famille (h, l).

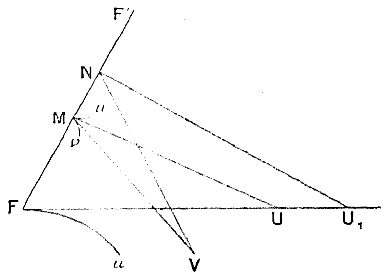
Cela étant, nous nous occuperons d'abord, afin de les exclure de notre étude, du cas où la congruence conjuguée aux réseaux de la famille (h, l) est formée de droites concourantes, et de celui où les deux nappes focales se réduisent à des courbes. Nous étudierons ensuite le cas où l'une seulement des nappes focales se réduit à une courbe. Enfin, dans la troisième Section, nous traiterons le cas général, où aucune des nappes focales ne dégénère en une ligne.

14. Dans le cas où la congruence conjuguée aux réseaux étudiés est formée de droites concourantes, lequel est caractérisé par la condition $h = l$, qui entraîne la suivante : $h = l =$ const.; ou tous les réseaux sont à invariants égaux, ou aucun n'est à invariants égaux.

Si *les deux nappes focales se réduisent à des courbes*, en vertu d'un théorème énoncé au n° 4, tous les réseaux conjugués à la congruence sont formés de deux familles de courbes de contact de cylindres, ou de cônes circonscrits, dont les sommets sont sur les tangentes aux deux courbes focales. Tous les réseaux sont donc à invariants égaux. D'après une proposition du n° 3, *ce cas caractérise les familles* (V, U), U et V ne se réduisant pas à la même constante et désignant, en général, respectivement une fonction de u et une fonction de v.

15. *Une seule nappe focale se réduit à une courbe.* Démontrons d'abord que, *si deux réseaux conjugués de la congruence considérée sont à invariants égaux, tous les réseaux conjugués concourants avec ces deux réseaux sont à invariants égaux et sont formés de courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits.*

Fig. 6.



Soient (*fig.* 6) :

FF' une droite de la congruence;

F le foyer qui appartient à la courbe focale, le long de laquelle u varie seul;

F' l'autre.

Le long des lignes de paramètre u d'un réseau (M) quelconque, conjugué à la congruence, les tangentes aux lignes de paramètre v sont concourantes, le point de concours U étant sur la tangente en F à la courbe focale (nº 4).

Si le réseau (M) est à invariants égaux, les courbes de paramètre v jouissent de la même propriété, le point commun aux tangentes aux courbes de paramètre u, le long d'une courbe de paramètre v, étant le point V.

Si le réseau (N) est encore à invariants égaux, il sera de même nature que le réseau (M). De plus, le point de concours des tangentes aux courbes de paramètre u, le long de la courbe de paramètre v, qui correspond à celle que nous avons considérée sur le réseau (M), est encore V (nº 7). Il en résulte que tous les réseaux de la famille définie par les réseaux (M) et (N) sont formés d'une famille de courbes de contact de cylindres ou de cônes circonscrits de sommets V et d'une famille de courbes de contact de cylindres ou de cônes circonscrits, dont les sommets U, U_1, ... sont situés sur la tangente en F à la courbe focale. Si un ou plusieurs de ces réseaux étaient plans, cette dernière phrase n'aurait plus qu'un sens conventionnel, que l'on comprend clairement. Ces réseaux sont donc à invariants égaux et la proposition est démontrée.

16. Déterminons les équations finies des réseaux d'une telle famille.

Dans les équations (1), l sera fonction de u seul, puisque le lieu des points focaux F est une courbe (nº 3). Ensuite, comme la famille $v = \text{const.}$ qui compose chaque réseau est formée de courbes de contact de cônes circonscrits de même sommet, on a

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = \lambda V'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{5}$$

$V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$ désignant des fonctions quelconques de v. De (5), on déduit par différentiation par rapport à u, l'équation aux dérivées partielles du réseau (x_i), laquelle doit être identique à (3), où l'on fait $\lambda = \infty$. On trouve ainsi

$$\frac{\partial h}{\partial v} = 0,$$

ou

$$h = f(u).$$

Si h se réduisait à une constante (n° 14), les deux nappes focales se réduiraient à des courbes. Nous pouvons donc poser, U désignant une fonction de u,

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} h &= -u, \\ l &= \frac{U}{U'} - u. \end{aligned} \right.$$

L'équation de Laplace relative à (x_i) s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{U''}{U'} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

On en conclut, en tenant compte de l'équation (5),

$$(7)\qquad x_i = U' V_i + U'_i.$$

En vertu de la première des équations (1) et de la première des équations (6), on peut ensuite écrire la valeur de y_i comme suit :

$$(8)\qquad y_i = -u(U' V_i + U'_i) + U V_i + U_i + \Psi_i(v),$$

$\Psi_i(v)$ désignant une fonction de v.

Différentions (8) par rapport à v et tenons compte de la dernière équation (1) et de la deuxième équation (6), il viendra

$$\Psi'_i(v) = 0$$

ou

$$\Psi_i(v) = \text{const.}$$

Faisons rentrer la constante dans U_i. Nous pourrons alors, en vertu de (7) et (8), écrire les coordonnées homogènes z_i d'un réseau quelconque de la famille sous la forme

$$(9)\qquad z_i = \left(\frac{U_i}{u-\lambda}\right)' + \left(\frac{U}{u-\lambda}\right)' V_i.$$

On voit que, pour ces réseaux, la famille des courbes de paramètre v est formée de courbes de contact de cônes circonscrits de sommets V'_i et la famille des courbes de paramètre u de courbes de contact de cônes circonscrits de sommets

$$\left[\frac{(\lambda - u)U_i' + U_i}{(\lambda - u)U' + U}\right]'.$$

Les formules (6) montrent que les familles de réseaux que nous venons d'étudier sont des familles

$$\left(-u, \frac{U}{U'} - u\right).$$

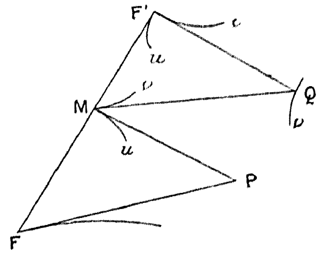
Il est d'ailleurs évident, par raison de symétrie, qu'elles ne diffèrent pas des familles

$$\left(\frac{V}{V'} - v, -v\right).$$

17. Il nous reste maintenant à déterminer les familles qui contiennent un seul réseau à invariants égaux.

Conservons les notations du numéro précédent et soit M le réseau à invariants égaux. La famille $u =$ const. de ce réseau est formée de

Fig. 7.



courbes de contact de cônes circonscrits de sommet P (*fig.* 7), situé sur la tangente en F à la courbe focale. Les courbes $v =$ const. sont aussi des courbes de contact de cônes circonscrits, de sommet Q (n° 5) situé sur la tangente en F' à la courbe de paramètre u.

Cela étant, si U_i'' désigne les coordonnées convenablement choisies de P et V_i', celles de Q, les coordonnées homogènes du point M pourront s'écrire

$$x_i = \varphi(U_i' + V_i), \tag{10}$$

φ désignant une fonction de u et v.

D'ailleurs, comme le point focal F décrit une courbe, la seconde équation (1) devient la suivante :

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = \mathrm{U}\frac{\partial x_i}{\partial v},$$

U désignant une fonction de u. Intégrons cette dernière équation, il viendra

$$y_i = \mathrm{U}x_i + \Psi_i(u). \tag{11}$$

Écrivons que les valeurs de x_i et y_i, fournies par les équations (10) et (11), satisfont à la première des équations (1), nous aurons

$$\left(\mathrm{U}'\varphi + \mathrm{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - h\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)(\mathrm{U}'_i + \mathrm{V}_i) + (\mathrm{U} - h)\varphi\,\mathrm{U}''_i + \Psi'_i(u) = 0. \tag{12}$$

Cette équation exprime que le point de coordonnées $\Psi'_i(u)$ est un point de la droite MP. Comme ce point reste fixe lorsque v varie seul de même que le point P, il en résulte qu'il doit coïncider avec P, puisque M décrit un réseau. On peut donc poser

$$\Psi'_i(u) = \chi(u)\,\mathrm{U}''_i,$$

$\chi(u)$ désignant une fonction de u, ou une constante. Si $\chi(u)$ est une constante, on pourra la choisir égale à -1, en multipliant les coordonnées x_i par une constante. Si $\chi(u)$ est une fonction de u, on prendra une nouvelle variable u de manière que $\chi(u)$ devienne $-u$, ce dernier u désignant la nouvelle variable. Nous considérerons donc les deux cas suivants :

$$\chi(u) = -1, \qquad \Psi_i = -\mathrm{U}'_i,$$
$$\chi(u) = -u, \qquad \Psi_i = -u\mathrm{U}'_i + \mathrm{U}_i.$$

Mais avant, remarquons que x_i et U''_i étant les coordonnées de deux points distincts, on déduit encore des équations (12) les relations suivantes :

$$\mathrm{U}'\varphi + (\mathrm{U} - h)\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0, \tag{13}$$

$$\chi(u) + (\mathrm{U} - h)\varphi = 0. \tag{14}$$

Premier cas :

$$\chi(u) = -1, \qquad \Psi_i(u) = -U'_i.$$

On tire alors des équations (13) et (14)

$$\frac{\partial h}{\partial u} = 0,$$

c'est-à-dire

$$h = \text{fonction de } v.$$

Les deux relations

$$l = U, \qquad h = \text{fonction de } v$$

montrent qu'il existe deux courbes focales (n° 14). Nous pouvons donc rejeter cette hypothèse.

Deuxième cas :

$$\chi(u) = -u, \qquad \Psi_i(u) = -uU'_i + U_i.$$

Des équations (13) et (14), on déduit, en éliminant $U - h$,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{U'}{u}. \tag{15}$$

Posons

$$\frac{U'}{u} = \mathcal{V}'';$$

d'où

$$U = u\mathcal{V}' - \mathcal{V}.$$

Puis intégrons l'équation (15), il viendra

$$\frac{1}{\varphi} = \mathcal{V}' + \mathfrak{V},$$

$\mathfrak{V}$ désignant une fonction de v.

Il s'ensuit que x_i pourra s'écrire

$$x_i = \frac{U'_i + V_i}{\mathcal{V}' + \mathfrak{V}}. \tag{16}$$

Les équations (11) donneront ensuite, en tenant compte de la valeur de $\Psi_i(u)$,

$$y_i = (u\mathcal{V}' - \mathcal{V})\frac{U'_i + V_i}{\mathcal{V}' + \mathfrak{V}} - uU'_i + U_i. \tag{17}$$

φ n'est certainement pas constante, sinon le réseau (y_i) et, par suite, tous les réseaux de la famille seraient à invariants égaux. On peut donc prendre φ comme nouvelle variable indépendante; rien ne nous empêche de désigner par v cette nouvelle variable.

Des équations (16) et (17) on conclut alors que les coordonnées homogènes des points des réseaux qui composent la famille sont données par les formules

$$z_i = (u\mathfrak{V}' - \mathfrak{V} + \lambda)(U_i' + V_i) - (uU_i' - U_i)(\mathfrak{V}' + v).$$

Les sommets des cônes circonscrits le long des courbes de paramètre u ont pour coordonnées

$$\mathfrak{V}''(U_i - uU_i') + (u\mathfrak{V}' - \mathfrak{V} + \lambda)U_i''.$$

On voit que, si $\mathfrak{V}'$ est constante, ces sommets coïncident avec P.

En dérivant z_i deux fois par rapport à v, on trouve que, *le long des courbes* $v =$ const., *les plans osculateurs aux courbes* $u =$ const. *passent par un point fixe* V_i'' *qui se trouve sur la tangente en* Q *à* Qv.

Enfin, si l'on cherche la valeur de h, laquelle est donnée par la formule (14), on trouve

$$h = -\mathfrak{V} - uv.$$

Les familles de réseau que nous obtenons ici sont donc des familles $(-\mathfrak{V} - uv, u\mathfrak{V}' - \mathfrak{V})$.

Nous résumerons les résultats qui précèdent, en disant que, *lorsque la congruence conjuguée aux réseaux considérés admet une seule courbe focale, si la famille est* (U_1, U_2) *ou* (V_1, V_2), U_1, U_2 *désignant des fonctions quelconques de* u, V_1, V_2, *des fonctions quelconques de* v, *tous les réseaux sont à invariants égaux; si la famille est* $(-\mathfrak{V} - uv, u\mathfrak{V}' - \mathfrak{V})$ *ou* $(v\varphi' - \varphi, -\varphi - uv)$, *un seul réseau à invariants égaux; enfin, si la famille n'appartient à aucun des deux types précédents, elle ne contient aucun réseau à invariants égaux.*

Nous allons nous occuper à présent du cas où la congruence conjuguée admet deux surfaces focales.

SECTION III.

NOMBRE ET NATURE DES RÉSEAUX A INVARIANTS ÉGAUX QUI FONT PARTIE D'UNE FAMILLE DE RÉSEAUX CONCOURANTS CONJUGUÉS A UNE MÊME CONGRUENCE. — CAS GÉNÉRAL.

---

18. Conservons les notations du n° **13**. Pour que l'équation aux dérivées partielles (3), relative à un réseau de la famille, soit à invariants égaux, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{l+\lambda}{h+\lambda}\mathrm{P}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h+\lambda}{l+\lambda}\mathrm{Q}\right)=0. \tag{1}$$

En développant cette expression et en chassant les dénominateurs, on trouve une équation dont le premier membre est un polynome du quatrième degré en λ et dont le second membre est zéro. On en conclut la proposition suivante :

En général, dans une famille de réseaux concourants conjugués à une même congruence, il n'existe pas de réseaux à invariants égaux. Toutefois il peut y en avoir un, deux, trois, quatre ou cinq. S'il en existe cinq, tous les réseaux de la famille sont à invariants égaux.

Il nous reste à étudier séparément ces diverses hypothèses. Nous ne parlerons pas du cas où il n'existe qu'un réseau à invariants égaux : on peut en effet supposer alors que (x_i) est ce réseau et prendre pour P et Q les dérivées partielles, par rapport à v et par rapport à u, d'une même fonction. Les fonctions h et l seront alors définies par les équations (4) de la Section II, dont la résolution est équivalente à celle de l'équation aux dérivées partielles adjointe de l'équation de Laplace relative au réseau (x_i). En général, la famille ne possédera pas d'autres réseaux à invariants égaux. Si toutefois elle en contenait, nous la retrouverions dans l'étude des autres hypothèses. Nous nous occuperons donc successivement des cas suivants :

1° Tous les réseaux de la famille sont à invariants égaux ;

2° Deux réseaux sont à invariants égaux ;

3° Trois réseaux sont à invariants égaux;

4° Quatre réseaux sont à invariants égaux.

Nous traiterons le premier cas dans le paragraphe I, le second dans le paragraphe II, les deux derniers dans les paragraphes III et IV ([1]).

I. — Tous les réseaux de la famille sont à invariants égaux.

19. *Si tous les réseaux de la famille sont à invariants égaux, la famille est* $(\mathfrak{V}, \mathfrak{P})$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{P}$ *désignant respectivement une fonction de* u *et une fonction de* v, *et réciproquement. Les courbes qui composent les divers réseaux sont des courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits.*

En effet, pour que tous les réseaux soient à invariants égaux, il faut et il suffit que l'équation (1) ait lieu quel que soit le paramètre λ, ou encore, en tenant compte des équations (4) du n° 13, il faut et il suffit que les équations suivantes :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{l+\lambda}{h+\lambda}\,\frac{\dfrac{\partial}{\partial v}(h+\lambda)}{h-l} &= -\frac{\partial\varphi_\lambda(u,v)}{\partial v},\\ \frac{h+\lambda}{l+\lambda}\,\frac{\dfrac{\partial}{\partial u}(l+\lambda)}{h-l} &= \frac{\partial\varphi_\lambda(u,v)}{\partial u} \end{aligned}\right.$$

soient satisfaites quel que soit λ, φ_λ désignant des fonctions convenablement choisies de u, v.

A ces deux équations ajoutons les suivantes, qui en sont un cas particulier,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\dfrac{\partial h}{\partial v}}{h-l} &= -\frac{\partial\varphi_\infty(u,v)}{\partial v},\\ \frac{\dfrac{\partial l}{\partial u}}{h-l} &= \frac{\partial\varphi_\infty(u,v)}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

([1]) Les résultats contenus dans cette Section et une partie de ceux de la Section précédente ont été communiqués dans une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. CXLII, 15 janvier 1906, p. 139).

Soustrayons membre à membre les premières, puis les secondes équations (2) et (3), il viendra

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial v}}{h+\lambda} = \frac{\partial(\varphi - \varphi_\infty)}{\partial v},$$
$$\frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{l+\lambda} = \frac{\partial\varphi - \varphi_\infty}{\partial u}.$$

Le problème est ainsi ramené au suivant : *déterminer les fonctions h et l qui satisfont à l'équation*

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial h}{\partial v}}{h+\lambda} = \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{l+\lambda},$$

quel que soit λ.

Développons donc (4) et identifions les deux membres, nous trouverons les quatre équations

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial^2 l}{\partial u\,\partial v}, \\ (h-l)\,\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} + \dfrac{\partial h}{\partial u}\,\dfrac{\partial h}{\partial v} - \dfrac{\partial l}{\partial u}\,\dfrac{\partial l}{\partial v} = 0, \\ (h^2 - l^2)\,\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} + 2l\,\dfrac{\partial h}{\partial u}\,\dfrac{\partial h}{\partial v} - 2h\,\dfrac{\partial l}{\partial u}\,\dfrac{\partial l}{\partial v} = 0, \\ hl(h-l)\,\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} + l^2\,\dfrac{\partial h}{\partial u}\,\dfrac{\partial h}{\partial v} - h^2\,\dfrac{\partial l}{\partial u}\,\dfrac{\partial l}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Écrivons le déterminant des coefficients de $\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial h}{\partial u}\,\frac{\partial h}{\partial v}$, $\frac{\partial l}{\partial u}\,\frac{\partial l}{\partial v}$ dans ces trois dernières équations, il viendra, après simplification,

$$h - l)^4.$$

Comme h est différent de l (n° 3), on conclut des équations (5) les deux suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial u}\,\frac{\partial h}{\partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial l}{\partial u}\,\frac{\partial l}{\partial v} = 0.$$

Mais nous supposons qu'aucune des deux nappes ne se réduit à une courbe; les équations précédentes conduisent donc (n° 3) aux deux relations

$$\frac{\partial h}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = 0,$$

qui vérifient, réciproquement, les équations (5).

On peut donc écrire, en choisissant convenablement les variables indépendantes,

$$h = u, \qquad l = v. \tag{6}$$

D'où il résulte que tous les réseaux de la famille sont formés de courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits (*voir* la fin du n° 5) et que, sur l'une des nappes de la surface focale, les courbes de paramètre u et, sur l'autre, les courbes de paramètre v, sont des courbes de contact de cônes ou de cylindres circonscrits.

Des équations (6) et des équations (3) et (4) du n° 13, on tire successivement

$$P = Q = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} = 0;$$

d'où

$$x_i = U'_i + V'_i, \tag{7}$$

U'_i et V'_i désignant des fonctions quelconques, respectivement de u et de v.

De (7) et de l'équation (1) du n° 13, on déduit ensuite

$$y_i = u\,U'_i - U_i + v\,V'_i - V_i.$$

Les coordonnées d'un point d'un réseau quelconque de la famille sont donc de la forme

$$z_i = (u + \lambda)\,U'_i - U_i + (v + \lambda)\,V'_i - V_i.$$

Les sommets des cônes circonscrits sont les points de coordonnées U'' et V''_i, tant pour les réseaux que pour les deux nappes de la surface focale.

II. — Deux réseaux de la famille sont à invariants égaux.

20. Sans restreindre en rien la généralité, nous pouvons supposer que les deux réseaux à invariants égaux sont (x_i) et (y_i). Ainsi que le montrent les équations (2), les conditions pourront s'écrire comme il suit :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\frac{\partial h}{\partial v}}{h-l} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{h-l} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned}\right.$$

et

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{l}{h}\,\frac{\frac{\partial h}{\partial v}}{h-l} &= -\frac{\partial \chi}{\partial v}, \\ \frac{h}{l}\,\frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{h-l} &= \frac{\partial \chi}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Soustrayons membre à membre les premières, puis les secondes équations (8) et (9), il viendra

$$\frac{\partial \log h}{\partial v} = \frac{\partial(\chi-\varphi)}{\partial v},$$
$$\frac{\partial \log l}{\partial u} = \frac{\partial(\chi-\varphi)}{\partial u};$$

d'où, en intégrant la première par rapport à v et la seconde par rapport à u :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} h &= \mathrm{U}e^{\chi-\varphi}, \\ l &= \mathrm{V}e^{\chi-\varphi}, \end{aligned}\right.$$

U désignant une fonction de u, V une fonction de v. Portant à présent ces valeurs de h et de l dans les équations (8), ces dernières s'écriront

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V}\frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \mathrm{U}\frac{\partial \chi}{\partial v}, \\ \mathrm{U}\frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \mathrm{V}\frac{\partial \chi}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Les équations de condition (8) et (9) sont ainsi remplacées par les équations (10) et (11). Ces dernières feront connaître φ et χ, les équations (10) fourniront ensuite h et l.

En vertu des équations (8) et des équations (3) et (4) du n° 13, les coordonnées x_i seront des solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \tag{12}$$

dont l'intégration se ramène à celle de l'équation suivante :

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} = e^{\varphi}\frac{\partial^2 e^{-\varphi}}{\partial u\,\partial v}, \tag{13}$$

si l'on pose

$$x = e^{\varphi}\Theta. \tag{14}$$

Les équations (1) du n° 13 montrent que l'on obtiendra ensuite les coordonnées y_i par quadratures.

21. Étudions tout d'abord le système (11). Il convient d'examiner séparément les trois hypothèses suivantes :

1° U et V ne sont pas des constantes;

2° U n'est pas constante, V l'est;

3° U et V sont constantes;

l'hypothèse où V ne serait pas constante, alors que U le serait, étant rejetée, puisque les variables u et v jouent ici des rôles symétriques.

1° U *et* V *ne sont pas constantes*. — Prenons U et V comme nouvelles variables indépendantes et appelons-les u et v. Les équations (11) s'écriront

$$\left\{\begin{aligned} v\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= u\frac{\partial\chi}{\partial v}, \\ u\frac{\partial\varphi}{\partial u} &= v\frac{\partial\chi}{\partial u}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Posons

$$\varphi = \frac{\partial^2\pi}{\partial u\,\partial v}, \tag{16}$$

on pourra intégrer les équations (15), qui seront ainsi remplacées par les suivantes :

$$
(17) \qquad \begin{cases} \chi = \dfrac{v}{u}\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial u\, \partial v} - \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial \pi}{\partial u}, \\[2mm] \chi = \dfrac{u}{v}\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial u\, \partial v} - \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial \pi}{\partial v}. \end{cases}
$$

En égalant ces deux valeurs de χ, on trouve que la fonction π doit satisfaire une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, à savoir

$$
\frac{\partial^2 \pi}{\partial u\, \partial v} + \frac{v}{u^2 - v^2}\frac{\partial \pi}{\partial u} - \frac{u}{u^2 - v^2}\frac{\partial \pi}{\partial v} = 0.
$$

Réciproquement, si π vérifie cette dernière équation, les fonctions φ et χ données par les équations (16) et (17) vérifieront les relations (15).

Si nous posons

$$
u^2 = \alpha, \qquad v^2 = \beta,
$$

l'équation à laquelle satisfait π deviendra la suivante :

$$
\frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha - \beta}\frac{\partial \pi}{\partial \alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha - \beta}\frac{\partial \pi}{\partial \beta} = 0,
$$

qui n'est autre que l'équation

$$
(18) \qquad E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0,
$$

dont dépend la détermination des surfaces qui admettent pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un système de coniques homofocales [1]. Toutefois, lorsqu'on aura une solution π de l'équation (18), il faudra encore trouver $n + 1$ solutions de l'équation correspondante (13), pour que le problème s'achève par quadratures.

22. 2° U *n'est pas constante*, V *l'est*. — On peut, en multipliant h et l par une même constante (n° 12) faire $V = 1$. Prenons de plus U

(1) *Voir* J. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 70

comme nouvelle variable u; les équations (11) s'écriront comme il suit :

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = u\dfrac{\partial\chi}{\partial v}, \\ u\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{\partial\chi}{\partial u}. \end{cases}$$

Posons

$$(20)\qquad \varphi = \frac{\partial\pi}{\partial u},$$

et intégrons la seconde équation (19), il viendra

$$(21)\qquad \chi = u\frac{\partial\pi}{\partial u} - \pi.$$

Exprimons que les valeurs de φ et de χ fournies par les relations (20) et (21) satisfont à la première équation (19). Nous trouvons ainsi que π doit satisfaire à la relation suivante :

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial u\,\partial v} - \frac{u}{u^2-1}\frac{\partial\pi}{\partial v} = 0,$$

qui s'intègre facilement et donne

$$(22)\qquad \pi = V\sqrt{u^2-1} + U,$$

U désignant une fonction de u et V une fonction de v. Les équations (20) et (21) conduisent ensuite aux valeurs suivantes pour φ et χ :

$$(23)\qquad \varphi = V\frac{u}{\sqrt{u^2-1}} + U',$$

$$(24)\qquad \chi = V\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} + uU' - U.$$

Pour que le problème s'achevât par quadratures, il faudrait encore intégrer l'équation (13), où l'on donnerait à φ la valeur (23).

23. 3° U *et* V *sont constantes.* — Posons

$$U = a, \qquad V = b,$$

a étant différente de b, sinon on aurait $h = l$, cas exclu. Les équations (11) s'écriront comme il suit :

$$b\frac{\partial\varphi}{\partial v} = a\frac{\partial\chi}{\partial v},$$

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial u} = b\frac{\partial\chi}{\partial u}.$$

On en conclut, en intégrant,

$$b\varphi - a\chi = \mathrm{U},$$

$$a\varphi - b\chi = \mathrm{V};$$

U désignant une fonction de u, V une fonction de v. De ces relations on tire les suivantes :

$$\varphi = \frac{a\mathrm{V} - b\mathrm{U}}{a^2 - b^2},$$

$$\chi = \frac{b\mathrm{V} - a\mathrm{U}}{a^2 - b^2}.$$

Prenons ensuite pour variables indépendantes

$$\frac{\mathrm{U}}{a^2 - b^2}, \quad \frac{\mathrm{V}}{a^2 - b^2},$$

et désignons par u et v les nouvelles variables. Il viendra

(25) $$\varphi = av - bu,$$

(26) $$\chi = bv - au.$$

D'où

$$h = ae^{(b-a)(u+v)},$$

$$l = be^{(b-a)(u+v)}.$$

Pour achever le problème par quadratures, il faudra encore intégrer l'équation suivante :

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} = -ab,$$

qui se ramène à l'équation connue

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z.$$

III. — Trois réseaux de la famille sont à invariants égaux.

24. Nous pouvons supposer que les trois réseaux à invariants égaux correspondent (n° 12) à $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. En vertu des équations (3) et (4) du n° 13 les équations de condition s'écriront comme il suit :

$$(27) \qquad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial v}}{h - l} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\partial l}{\partial u}}{h - l} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}; \end{cases}$$

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{l}{h}\,\dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial v}}{h - l} = -\dfrac{\partial \chi}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{h}{l}\,\dfrac{\dfrac{\partial l}{\partial u}}{h - l} = \dfrac{\partial \chi}{\partial u}; \end{cases}$$

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{l + 1}{h + 1}\,\dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial v}}{h - l} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{h + 1}{l + 1}\,\dfrac{\dfrac{\partial l}{\partial u}}{h - l} = \dfrac{\partial \psi}{\partial u}. \end{cases}$$

En opérant comme au n° 20, nous déduirons de (27) et (28) les relations

$$(30) \qquad \begin{cases} h = U_1 e^{\chi - \varphi}, \\ l = V_1 e^{\chi - \varphi}, \end{cases}$$

puis, de (27) et (29), les suivantes :

$$(31) \qquad \begin{cases} h + 1 = U e^{\psi - \varphi}, \\ l + 1 = V e^{\psi - \varphi}, \end{cases}$$

U et U_1 désignant deux fonctions de u, V et V_1, deux fonctions de v.

Remarquons que h et l représentent les rapports des dérivées partielles de y_i et de x_i, prises respectivement par rapport à u et par rapport à v; $h+1$, $l+1$, les rapports des dérivées partielles de z_i et de x_i; $\frac{h+1}{h}$, $\frac{l+1}{l}$, les rapports des dérivées partielles de z_i et de y_i.

Cela étant, je dis que nous pouvons supposer U_1 et V_1 non constantes. Si, en effet, U_1 ou V_1 étaient constantes, on prendrait (z_i) comme second réseau, à moins que U ou V ne soient constantes. Plaçons-nous donc dans cette dernière hypothèse et supposons, par exemple, V_1 constante. Des équations (30) et (31) on déduira les suivantes :

(32)
$$\left\{\begin{aligned} h &= \mathfrak{u}\, l, \\ h+1 &= (\mathfrak{u}_1 \text{ ou } \mathfrak{v}_1)(l+1), \end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}_1$ désignant des fonctions différentes de u, sinon on aurait $h = l$, et $\mathfrak{v}_1$, une fonction de v.

Si l'on prend $\mathfrak{u}_1$, on trouve h et l fonctions de u seule; ce cas a été traité plus haut (n° 16).

Si l'on prend $\mathfrak{v}_1$, on déduit des équations (32)

$$\frac{\dfrac{h+1}{h}}{\dfrac{l+1}{l}} = \frac{\mathfrak{v}_1}{\mathfrak{u}},$$

$\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}_1$ n'étant pas constantes, car autrement h et l seraient fonctions d'une même variable, ou constantes. Il en résulte qu'en prenant les réseaux dans l'ordre suivant : (y_i), (z_i), (x_i), on pourra supposer U_1 et V_1 fonctions respectivement de u et de v.

En changeant de variables, les équations (30) et (31) pourront donc s'écrire

(33)
$$\left\{\begin{aligned} h &= u e^{\chi-\varphi}, \\ l &= v e^{\chi-\varphi}, \end{aligned}\right.$$

(34)
$$\left\{\begin{aligned} h &= \mathrm{U} e^{\psi-\varphi} - 1, \\ l &= \mathrm{V} e^{\psi-\varphi} - 1. \end{aligned}\right.$$

Éliminons $e^{\chi-\varphi}$ et $e^{\psi-\varphi}$, et résolvons les équations obtenues par rapport à h et l, nous trouverons

$$
(35)\qquad \left\{\begin{aligned} h &= \frac{u(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{u\mathrm{V}-v\mathrm{U}},\\ l &= \frac{v(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{u\mathrm{V}-v\mathrm{U}}. \end{aligned}\right.
$$

Portons dans les équations (27) ces valeurs de h et de l et exprimons que la condition d'intégrabilité est satisfaite, il viendra

$$
(\mathrm{F})\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{U}'\mathrm{V}'(u-v)^2(u+v)(u\mathrm{V}^2-v\mathrm{U}^2)\\ &\quad+\mathrm{U}'u\mathrm{V}(u-v)(\mathrm{U}-\mathrm{V})(u\mathrm{U}-v\mathrm{V})\\ &\quad+\mathrm{V}'v\mathrm{U}(u-v)(\mathrm{U}-\mathrm{V})(u\mathrm{U}-v\mathrm{V})\\ &\quad+(\mathrm{U}-\mathrm{V})^2(\mathrm{U}+\mathrm{V})(v^2\mathrm{U}-u^2\mathrm{V}) \quad = 0. \end{aligned}\right.
$$

Lorsqu'on aura résolu l'équation fonctionnelle (F), les équations (35) donneront h et l, puis les équations (4) du n° 13 fourniront P et Q. On aura donc l'équation de Laplace relative aux réseaux (x_i). Connaissant (x_i), on obtiendra (y_i) par des équations aux différentielles totales, comme le montrent les équations (1) du n° 13.

25. Avant de résoudre complètement l'équation (F), nous traiterons le cas particulier où U et V sont constantes. Comme U est différente de V, sinon en vertu des équations (31), h serait égale à l, l'équation (F) conduit alors à la relation

$$
\mathrm{U} = -\mathrm{V}.
$$

Comme, d'autre part, on peut multiplier h et l par une même constante sans rien changer aux réseaux, nous pourrons poser

$$
\mathrm{U} = 1, \qquad \mathrm{V} = -1.
$$

Les équations (35) fourniront les valeurs de h et de l, à savoir

$$
(36)\qquad \left\{\, h = -\frac{2u}{u+v},\right.
$$

lesquelles montrent que les familles (h, l) correspondantes ne renferment pas une infinité de réseaux à invariants égaux (nº 19). Il est d'ailleurs aisé d'établir qu'elles en contiennent quatre.

En effet, des équations (36) on déduit

$$\frac{h+v}{l+v}=\frac{-2u+v(u+v)}{-2v+v(u+v)}.$$

Pour $\nu=\infty$, 0, 1, 2, ce rapport devient égal respectivement à 1, $\frac{u}{v}$, -1, $\frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{v}}$.

D'après ce que nous avons vu au numéro précédent, il y a donc ici *quatre* réseaux à invariants égaux.

Le rapport anharmonique des points correspondants des quatre réseaux à invariants égaux (y_i), (t_i), (z_i), (x_i), lequel est constant [1], devient dans ce cas-ci *harmonique*. On a, en effet,

$$(y_i, t_i, z_i, x_i)=(0, 2, 1, \infty)=-1.$$

Dans les seconds membres des équations (36) supprimons le facteur -2 (nº 12) et portons dans les équations (1) du nº 13 les valeurs ainsi obtenues, il viendra

$$v\frac{\partial y_i}{\partial u}=u\frac{\partial}{\partial u}(x_i-y_i),$$
$$u\frac{\partial y_i}{\partial v}=v\frac{\partial}{\partial v}(x_i-y_i).$$

Nous avons déjà rencontré des équations toutes semblables au nº 21 et nous avons vu qu'elles peuvent être remplacées par le système suivant :

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}&x_i=y_i+\frac{\partial^2\pi_i}{\partial u\,\partial v},\\&y_i=\frac{v}{u}\frac{\partial^2\pi_i}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{u}\frac{\partial\pi_i}{\partial u}=\frac{u}{v}\frac{\partial^2\pi_i}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{v}\frac{\partial\pi_i}{\partial v},\\&\frac{\partial^2\pi_i}{\partial u\,\partial v}+\frac{v}{u^2-v^2}\frac{\partial\pi_i}{\partial u}-\frac{u}{u^2-v^2}\frac{\partial\pi_i}{\partial v}=0.\end{aligned}\right.$$

---

[1] *Voir* notre Note insérée dans les *Comptes rendus*, t. CXXXIX, 4 juillet 1904, p. 32.

Nous avons montré que la dernière peut se ramener à l'équation $E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0$.

Ainsi, dans le cas qui nous occupe, le problème s'achèvera par les équations finies (37), si l'on sait résoudre $E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0$.

Dans le paragraphe IV, nous nous occuperons de la résolution de l'équation fonctionnelle (F) et nous en déduirons les familles de réseaux qui possèdent trois réseaux à invariants égaux.

IV. — Résolution de l'équation (F) du paragraphe précédent et solutions que l'on en déduit.

26. Montrons d'abord que les fonctions U et V qui satisfont (F) sont algébriques.

Il est bien entendu que les surfaces considérées sont analytiques. Par suite, $\frac{\partial x_i}{\partial u}, \frac{\partial x_i}{\partial v}, \frac{\partial y_i}{\partial u}, \frac{\partial y_i}{\partial v}$ sont des fonctions analytiques. Il en est de même de h, l, φ et ψ, et par suite de U et V. Il s'ensuit que V, par exemple, est holomorphe autour d'un point $v = p \neq 0$, et, dans ce domaine, il existe un système de valeurs

$$v = a, \qquad V = b,$$

telles que $ab \neq 0$, sinon V serait identiquement nulle et l serait constante, en vertu de la dernière équation (34), cas exclu. De plus, comme V est une fonction continue dans le domaine considéré, autour du point $v = a$ et dans une aire finie, V n'est pas nulle.

Si, dans ce domaine, V' était constamment nulle, V serait constante, et, en vertu de l'équation (F), il en serait de même de U; nous serions donc dans le cas particulier traité au paragraphe III. En résumé, nous pouvons admettre qu'il existe un système de valeurs

$$v = a, \qquad V = b, \qquad V' = c,$$

telles que $abc \neq 0$.

Cela étant, donnons à v la valeur a, (F) s'écrira

$$(\mathrm{F}') \quad \left\{ \begin{aligned} &(u+a)(u-a)^2(b^2u-a\mathrm{U}^2)c\mathrm{U}' \\ &\quad +(u-a)(\mathrm{U}-b)(u\mathrm{U}-ab)bu\mathrm{U}' \\ &\quad +(u-a)(\mathrm{U}-b)(u\mathrm{U}-ab)ac\mathrm{U} \\ &\quad +(\mathrm{U}+b)(\mathrm{U}-b)^2(a^2\mathrm{U}-bu^2) \quad = 0. \end{aligned} \right.$$

Remarquons que (F′) n'est pas identiquement vérifiée, quelles que soient u, U et U′, sinon on aurait $a=0$. Ensuite les équations (F) et (F′) ne sont pas identiques, quelles que soient u, U et U′; sinon, en considérant les coefficients de U^4, U^3, u^2, nous trouverions les relations

$$\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2\mathrm{V}}{a^2 b} = \frac{\mathrm{V}^4}{b^4},$$

desquelles on déduit les suivantes :

$$\mathrm{V} = b, \qquad v^2 = a^2;$$

dont la dernière est absurde.

Cela dit, entre (F) et (F′) éliminons U′, nous trouverons une équation en U et u, qui ne sera pas identiquement satisfaite, quelles que soient u et U. En groupant tous les termes dans le premier membre et en chassant les dénominateurs, nous arriverons ensuite à une équation dont le premier membre est un polynome entier en u et U. Il en résulte que U est une fonction algébrique de u.

On démontrerait de même que V est une fonction algébrique de v.

Comme telles, ces fonctions ne sauraient devenir indéterminées pour aucune valeur de leurs arguments.

Si nous faisons $u=0$, les cas suivants pourront seuls se présenter :

1° $\mathrm{U} = p \neq 0, \quad \neq \infty;$

2° $\mathrm{U} = 0;$

3° $\mathrm{U} = \infty.$

On voit d'ailleurs sans peine que ce troisième cas se ramène au premier en prenant les réseaux dans l'ordre (z_i), (y_i) et (x_i). Il reste donc à examiner les deux premières hypothèses.

27. Avant de commencer la discussion, faisons quelques remarques.

Tout d'abord, si $U(u)$, $V(v)$ forment un système de solutions de l'équation (F), en prenant les réseaux dans l'ordre (y_i), (x_i), (z_i), on verra que l'équation (F) sera identiquement satisfaite si l'on substitue à u, v : $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$; et à U et V : $\frac{U(u)}{u}$ et $\frac{V(v)}{v}$, les dérivées étant prises par rapport à $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$. Il en résulte que, *si* $U(u)$ *et* $V(v)$ *forment un système de solutions,* $uU\left(\frac{1}{u}\right)$ *et* $vV\left(\frac{1}{v}\right)$ *en forment un autre,* qui ne diffère pourtant pas essentiellement du premier, au point de vue qui nous occupe.

Nous avons vu au n° 13 que la famille (l, h) se ramène à la famille (h, l). Or, permuter h et l, revient à remplacer dans les équations (35), u et v respectivement par $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$ et U, V respectivement par $\frac{1}{U}$, $\frac{1}{V}$. On en conclut que, si l'on remplace dans (F) U et V respectivement par $\frac{u}{U(u)}$ et $\frac{v}{V(v)}$, (F) sera encore identiquement satisfaite, puisqu'elle l'est quand on y remplace u et v respectivement par $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$, et U, V respectivement par $\frac{U(u)}{u}$, $\frac{V(v)}{v}$. Par conséquent, *si* $U(u)$ *et* $V(v)$ *forment un système de solutions,* $\frac{u}{U(u)}$ *et* $\frac{v}{V(v)}$ *en forment un autre,* qui, à notre point de vue, ne diffère pas essentiellement du premier.

Remarquons encore que si, dans (F), on fait $v = u$, on trouve

$$V^2(u) = U^2(u).$$

Passons à présent à la discussion de l'équation (F).

28. 1° $u = 0$, $U(0) = p \neq 0$. — En faisant $u = 0$ dans l'équation (F') et en se souvenant que $abc \neq 0$, on voit qu'il convient de distinguer les deux cas suivants :

$$U'(0) = 0,$$
$$U'(0) = q,$$

q désignant une quantité qui n'est ni nulle, ni infinie.

A. $U'(0)=0$. — Introduisons dans (F) le système

$$u=0, \qquad U(0)=p, \qquad U'(0)=0,$$

il viendra

$$vVV'+p^2-V^2=0.$$

Intégrons cette dernière équation, nous trouverons

$$V^2=\alpha^2 v^2+p^2,$$

α désignant une constante. En vertu de la dernière remarque du numéro précédent, nous aurons aussi

$$U^2=\alpha^2 u^2+p^2.$$

D'ailleurs, en multipliant U et V par une même constante, opération qui n'altère pas h et l, et en changeant convenablement de variables indépendantes, on voit que le système trouvé plus haut se ramène au suivant :

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} U^2=1-u^2, \\ V^2=1-v^2. \end{cases}$$

On vérifie aisément que les équations (A) donnent bien un système de solutions de (F).

B. $U'(0)=q$. — Faisons dans (F) :

$$u=0, \qquad U(0)=p, \qquad U'(0)=q,$$

il vient

$$(38) \qquad \frac{dV}{dv}[pqv^2-vV(p-V)]=(p+V)(p-V)^2.$$

Cette dernière équation est une équation de Bernoulli, si l'on considère V comme variable indépendante.

En l'intégrant on trouve

$$(39) \qquad \frac{1}{v}=\frac{1}{\sqrt{V-p}}\left[\frac{C}{\sqrt{V+p}}+\frac{q}{\sqrt{V-p}}\right],$$

C désignant une constante.

Introduisons, dans l'équation (38), cette valeur de $\frac{1}{v}$, nous obtiendrons la relation suivante :

$$\begin{aligned}V'[pq\sqrt{V+p}+V(C\sqrt{V-p}+q\sqrt{V+p})]\\=\sqrt{V+p}\,(C\sqrt{V-p}+q\sqrt{V+p})^2.\end{aligned}$$

Pour $V=-p$, l'équation (39) donne $v=0$ et l'équation précédente,

$$V'.C=0.$$

Si C est différente de zéro, il existe donc un système de valeurs telles que, pour $v=0$,

$$V=-p\neq 0 \qquad \text{et} \qquad V'=0.$$

Mais ce cas n'est autre que le précédent, car tout est symétrique en u et v; par suite, nous pouvons poser

$$C=0.$$

L'équation (39) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{v}=\frac{q}{V-p}$$

ou

(40) $$V=qv+p.$$

Comme on a

$$V^2(u)=U^2$$

et

$$U(0)=p,$$

on peut écrire

(41) $$U=qu+p.$$

En introduisant dans les équations (35) les valeurs de U et de V, fournies par les équations (40) et (41), on trouve

$$h=\frac{qu}{p},$$

$$l=\frac{qv}{p}.$$

Nous avons vu au n° 19 que tous les réseaux de la famille considérée sont alors à invariants égaux.

29. 2° $u = 0$, $U(0) = 0$. — U étant une fonction algébrique de u, l'une de ces deux variables pourra s'exprimer en série convergente procédant suivant les puissances commensurables croissantes de l'autre. De plus, nous pouvons ranger les réseaux à invariants égaux dans un ordre tel, que le développement de U en série commence par un terme dont l'exposant soit au moins égal à 1.

Nous avons vu au n° 27 que, si U, V forment un système de solutions, $\frac{u}{U}$ et $\frac{v}{V}$ en forment un autre, qui n'est pas essentiellement différent. Or, si le développement en série de U commence par un terme en u, $\frac{u}{U}$ et $\frac{v}{V}$ deviendront des quantités finies différentes de zéro pour $u = v = 0$. Nous avons traité ce cas au n° 25.

Il reste donc à considérer les cas où l'on a

$$U = A u^{1+m} + B u^{1+m+n} + \ldots,$$

m, n, ... étant des nombres commensurables et positifs.

Introduisons cette valeur de U dans l'équation (F), il viendra

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} &(u+v)(u-v)^2 (u V^2 - A^2 u^{2+2m} v[u]) A(1+m) u^m V'[u] \\ &\quad + (u-v)(A u^{1+m}[u] - V)(A u^{2+m}[u] - vV) A(1+m) u^{1+m} V[u] \\ &\quad + (u-v)(A u^{1+m}[u] - V)(A u^{2+m}[u] - vV) A u^{1+m} v V'[u] \\ &\quad + (A u^{1+m}[u] + V)(A u^{1+m}[u] - V)^2 (A u^{1+m} v^2[u] - u^2 V) = 0, \end{aligned} \right.$$

$[u]$ étant la notation employée par Halphen.

Cette équation devra être vérifiée identiquement, quelles que soient u et v.

Nous ferons successivement les hypothèses suivantes :

$$m < 1,$$
$$m = 1,$$
$$m > 1.$$

A. $m < 1$. — Divisons par u^{1+m} tous les termes de l'équation (42) et faisons $u = 0$, il viendra

$$vV' = V.$$

D'où, par intégration,

$$V = \alpha v,$$

α désignant une constante. C'est le cas que nous venons d'exclure, où le développement de U ou de V commence par un terme en v.

B. $m = 1$. — Divisons par u^2 tous les termes de l'équation (42) et faisons $u = 0$, nous trouverons

$$Av^3V' - Av^2V - V^2 = 0.$$

En intégrant cette équation de Bernoulli, on arrive à la relation suivante :

$$V = \frac{Av^2}{Cv + 1}.$$

En vertu d'une remarque du n° 27, on peut faire correspondre à cette solution la suivante :

$$vV\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{A}{C + v},$$

laquelle, pour $v = 0$, se réduit à $\frac{A}{C}$. Si C est différente de zéro, on trouve une solution qui, pour $v = 0$, devient une quantité finie, cas traité.

Si $C = 0$, on a

$$V = Av^2.$$

En échangeant les deux premiers réseaux, on trouve pour les rapports $\frac{h'}{l'}$, $\frac{h' + \mu'}{l' + \mu'}$, h' et l' étant les nouvelles fonctions h et l, et μ' étant la constante qui définit le troisième réseau :

$$\frac{h'}{l'} = \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{v}} = \frac{u_1}{v_1}, \qquad \frac{h' + \mu'}{l' + \mu'} = \frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{u_1}}{\frac{1}{v_1}},$$

u_1 et v_1 étant les variables qui jouent maintenant le rôle de u et v.

Si nous nous reportons au cas où U et V sont des constantes, nous voyons que celui-ci n'en diffère qu'en ce que le quatrième réseau du n° 25 est devenu ici le troisième.

Passons donc à la dernière hypothèse.

C. $m > 1$. — Divisons par u^2 tous les termes de l'équation (42) et faisons ensuite $u = 0$, nous trouverons :

$$V = 0.$$

Ce dernier cas ne conduit donc à rien.

30. Revenons maintenant au système (A) (n° 28), qui seul peut nous fournir des solutions nouvelles du problème proposé.

Posons

$$u = \sin\alpha, \qquad v = \sin\beta. \tag{43}$$

Des équations (A) on déduit alors

$$U = \cos\alpha, \qquad V = \cos\beta. \tag{44}$$

Les équations (35) donnent ensuite [1]

$$\left\{\begin{aligned} h &= \frac{\sin\alpha \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}, \\ l &= \frac{\sin\beta \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

On en tire

$$\frac{h+\lambda}{l+\lambda} = \frac{\sin\alpha \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \lambda\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \lambda\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{46}$$

Si l'on exclut les valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = -1$, qui fournissent les deux réseaux (y_i) et (z_i), on démontre aisément que le rapport (46) ne se réduit pas au quotient d'une fonction de α par une fonction de β.

---

[1] En multipliant par -1 les seconds membres, ce qui est permis, h et l pouvant être multipliées par une même constante.

En effet, en faisant successivement $\beta = 0$ et $\beta = \pi$ et en divisant les deux résultats membre à membre, on devrait trouver une constante, quelle que soit α, λ ayant une valeur convenablement choisie, autre que 0 et -1. On devrait donc avoir identiquement

$$\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \lambda}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \lambda} = K,$$

K désignant une constante.

En faisant $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ dans cette identité, on trouve l'équation suivante :

$$\frac{2+\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2+\lambda},$$

qui conduit à $\lambda = -1$.

Par conséquent, dans le cas qui nous occupe, il n'existe que trois réseaux à invariants égaux.

Écrivons l'équation de Laplace à laquelle satisfont les coordonnées x_i, à savoir :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}\frac{\partial x}{\partial\beta} = 0. \tag{47}$$

Ses invariants sont tous deux égaux à l'expression suivante :

$$\mathfrak{z} = -\frac{3}{4}\frac{1}{\sin^2(\alpha-\beta)} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Par suite, l'intégration de l'équation (47), dont dépend la solution du problème, à des quadratures près, se ramène à l'intégration de l'équation harmonique suivante :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\left[\frac{3}{4}\frac{1}{\sin^2(\alpha-\beta)} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right]\theta.$$

31. En résumé, *étant donnée une famille de réseaux concourants, conjugués à une même congruence dont les nappes focales ne se réduisent pas à des lignes :*

1° *Tous les réseaux seront à invariants égaux, si la famille est*

$$(U, V),$$

et réciproquement ; U désignant une fonction quelconque de u; V, une fonction quelconque de v.

2° *Quatre réseaux et quatre seulement seront à invariants égaux, si la famille est*

$$\left(a+\frac{b\mathrm{U}}{\mathrm{U}+\mathrm{V}},\ a+\frac{b\mathrm{V}}{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\right),$$

et réciproquement ; a et b étant des constantes; U, une fonction de u; V, une fonction de v.

3° *Trois réseaux et trois seulement seront à invariants égaux, si la famille est*

$$\left(\frac{\sin 2\mathrm{U}\sin(\mathrm{U}+\mathrm{V})+a\cos(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\sin 2\mathrm{U}\sin(\mathrm{U}+\mathrm{V})+b\cos(\mathrm{U}-\mathrm{V})},\ \frac{\sin 2\mathrm{V}\sin(\mathrm{U}+\mathrm{V})+a\cos(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\sin 2\mathrm{V}\sin(\mathrm{U}+\mathrm{V})+b\cos(\mathrm{U}-\mathrm{V})}\right),$$

et réciproquement ; a, b, U, V ayant la même signification que plus haut.

4° *Deux réseaux au moins seront à invariants égaux; la famille sera alors*

$$\left(\frac{\mathrm{U}+a'e^{\varphi-\chi}}{\mathrm{U}+b'e^{\varphi-\chi}},\ \frac{\mathrm{V}+a'e^{\varphi-\chi}}{\mathrm{V}+b'e^{\varphi-\chi}}\right),$$

Si U *et* V *ne se réduisent pas à des constantes,* φ *et* χ *ont les valeurs* (17), *où* u *et* v *seront remplacés par* U *et* V. *Si* V *est constante, on fait* V = 1 *et l'on donne à* φ *et* χ *les valeurs* (23) *et* (24), *où* u *est remplacée par une fonction quelconque de* u. *Enfin, si* U *et* V *sont égales respectivement à* a *et* b ; φ *et* χ *ont les valeurs* (25), u *et* v *étant remplacées par* U *et* V.

5° *Un réseau au moins est à invariants égaux; la famille est*

$$\left(\frac{h+a}{h+b},\ \frac{l+a}{l+b}\right),$$

h *et* l *étant fournies par les équations* (4) *du* n° 13, *où* P *et* Q *désignent les dérivées partielles d'une fonction quelconque, prises respectivement par rapport à* v *et* u.

FIN DU TOME VINGT-TROISIÈME.