

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BAILLAUD

Note sur les séries de termes positifs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 6 (1869), p. 185-204

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__185_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

SUR LES

SÉRIES DE TERMES POSITIFS,

PAR M. BAILLAUD,

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

L'objet de cette Note est l'étude des séries de termes positifs. Bien que ces séries n'aient qu'une importance secondaire, on s'est beaucoup occupé des conditions de leur convergence, et on est parvenu à plusieurs règles de formes très-différentes. Peut-être sera-ce faire une chose utile, que de montrer comment ces règles sont liées les unes aux autres et peuvent toutes être rattachées à un même principe.

Cauchy a fait connaître le caractère général de convergence.

« La série de termes positifs

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots,$$

dans laquelle u_n va en décroissant quand n croît de a à ∞ , est convergente ou divergente selon que l'intégrale

$$\int_a^\infty u_n \, dn$$

est finie ou infinie. »

Cette règle est rarement applicable; en dehors des cas d'intégrabilité on sait peu de chose sur ce que devient une intégrale définie quand l'une des limites croît indéfiniment. Il semble plus aisé de chercher des

règles qui permettent de décider, dans le plus grand nombre des cas, si une série de termes positifs est convergente ou divergente, et de ramener la recherche de la convergence des intégrales définies à celle de la convergence des séries, au moyen du théorème de Cauchy. D'ailleurs, dans les applications on n'éprouve jamais de difficultés pour reconnaître si une intégrale définie, dont tous les éléments sont positifs, reste finie quand l'une des limites croît indéfiniment. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

Une série est convergente quand le rapport d'un terme au précédent a une limite moindre que 1 ; elle est divergente si cette limite est plus grande que 1, ou si elle est égale à 1, mais que le rapport soit toujours plus grand que 1. Cette règle, qui est la plus simple de toutes, est rarement applicable; le plus souvent, le rapport d'un terme au précédent a pour limite l'unité, et oscille autour de cette limite ou lui est toujours inférieur.

Cauchy donna une règle applicable dans ce cas; un peu plus tard, M. Augustus de Morgan, dans son *Traité de calcul intégral*, publia une série de règles applicables dans le cas douteux. M. Duhamel et M. Raabe parvinrent, chacun de leur côté, à une règle qui diffère beaucoup par la forme de celles de M. de Morgan. M. Bertrand, dans un Mémoire inséré au septième volume du *Journal de M. Liouville*, reprit la règle donnée par Cauchy et celle qu'avaient fait connaître M. Duhamel et M. Raabe, et en déduisit deux séries de règles de formes très-différentes. On avait ainsi trois séries de règles, dans chacune desquelles une règle peut être applicable précisément quand les précédentes n'ont pas été suffisantes. M. Bertrand montra en outre que ces trois séries de règles n'en forment qu'une, en ce sens que les quantités dont dépend dans chacune d'elles la convergence d'une série ont mêmes limites, de sorte que si l'une d'elles permet de résoudre la question, les autres le permettent également.

L'année suivante, M. Bonnet donna d'autres règles publiées aussi dans le *Journal de Mathématiques* et qui reviennent encore aux précédentes.

Bien que ces règles soient les mêmes au fond, elles ont toutes leur utilité propre, parce que, selon les cas, l'une ou l'autre pourra être plus facilement appliquée.

Dans ce qui va suivre, on a en vue de démontrer ces règles par une méthode uniforme, qui conduira à un théorème dont l'application est quelquefois très-rapide, mais qui ne devra être employé qu'avec réserve, à cause de l'incertitude qui règne sur les conditions de son exactitude. Ce théorème, sous la forme la plus générale qu'on lui donnera, devra être regardé plutôt comme un résultat philosophique propre à montrer la portée des règles que l'on a indiquées plus haut, que comme une règle pratique propre à démontrer la convergence des séries.

Dès que l'on s'occupe de la convergence des séries, on dut remarquer que, pour qu'une série soit convergente, il faut que nu_n tende vers 0 quand n croît indéfiniment. Mais cette condition n'est pas suffisante; ainsi la série dont le terme général est

$$\frac{1}{n \ln n}$$

est divergente: cela résulte du caractère général donné par Cauchy, car cette expression toujours décroissante est la dérivée de

$$\ln n$$

qui est infini avec n . Il en résulte que pour qu'une série soit convergente il faut que

$$n \ln u_n$$

tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Mais cette condition n'est pas non plus suffisante.

La série qui a pour terme général

$$\frac{1}{n \ln \ln \ln \ln \dots}$$

est divergente, car cette expression est la dérivée de

$$\ln \ln \dots n$$

qui est infini avec n . Donc pour qu'une série soit convergente il faut que

$$n \ln \ln \ln \ln \dots u_n$$

tende vers zéro quand n croît indéfiniment. Cette condition, d'ailleurs, n'est pas suffisante.

Mais Abel a montré qu'il faut renoncer à chercher un caractère absolu de ce genre; il a en effet établi le théorème suivant :

« *Il n'existe aucune fonction $\varphi(n)$ telle que toute série de termes positifs soit convergente quand $\varphi(n)u_n$ tend vers zéro et divergente dans le cas contraire.* »

La démonstration donnée par l'illustre auteur est trop connue pour qu'il soit utile de nous y arrêter.

Ce que je me propose ici, c'est de montrer que, s'il est impossible de donner une règle de ce genre applicable dans tous les cas, on peut cependant trouver une fonction $\varphi(n)$ telle, que, dans tous les cas où les règles de M. Bertrand et de M. Bonnet sont suffisantes pour démontrer la convergence d'une série, pour que cette série soit convergente, il faut et il suffit que $\varphi(n)u_n$ tende vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Pour mieux faire comprendre l'esprit de la méthode et la dégager de calculs auxiliaires, je considérerai d'abord un cas particulier bien célèbre, dont l'importance est telle, qu'un examen spécial ne sera pas déplacé. C'est d'ailleurs son étude qui m'a conduit aux développements ultérieurs: je veux parler de la règle de Gauss, que l'illustre géomètre a démontrée d'une façon si élégante, et dont M. Rouché a donné une démonstration très-simple dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Je m'appuierai constamment sur deux lemmes bien connus que je vais énoncer.

LEMME I. — Soit P un produit d'un nombre infini de facteurs binômes, de la forme

$$P = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) \dots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ étant des quantités de même signe. En supposant que α_n tende vers 0 quand n croît indéfiniment, la condition nécessaire et suffisante pour que le produit ne soit pas infini quand α_n est positif, ne tende pas vers 0 quand α_n est négatif, est que la série

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

soit convergente.

LEMME II. — Le second lemme que j'emploierai est dû à M. Kummer.

Soit $\varphi(n)$ une fonction telle, que $\varphi(n)u_n$ tende vers 0 quand n croit indéfiniment, et que de plus l'expression

$$\frac{\varphi(n)u_n}{a} - \frac{\varphi(n+1)u_{n+1}}{a} - u_{n+1}$$

soit positive quand n est très-grand, a étant un nombre déterminé arbitraire; la série $u_1, u_2, \dots, u_n \dots$ est convergente.

(Voir pour ces deux lemmes et pour le théorème d'Abel, le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand.)

Observons d'abord que les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}$ ont même limite. Il en résulte que :

Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, u_n et nu_n croissent indéfiniment avec n ; la série est donc divergente;

Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, u_n et nu_n tendent vers 0 avec $\frac{1}{n}$; la série est convergente;

Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, il y a incertitude relativement à la convergence de la série et à la limite de nu_n .

Règle de Gauss.

Supposons que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puisse se mettre sous la forme

$$\frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + \varphi(n)}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \psi(n)},$$

λ étant un nombre quelconque qu'on peut toujours supposer > 1 , $\varphi(n)$ et $\psi(n)$ étant des fonctions de n infiniment petites par rapport à n^λ , dont la différence $\varphi(n) - \psi(n)$ est infiniment petite par rapport à $n^{\lambda-1}$, d'ordre déterminé si $A = a$.

Alors

- Si $A - a > 0$, les termes croissent indéfiniment;
 Si $A - a = 0$, les termes ont une limite finie différente de 0;
 Si $A - a < 0$, les termes tendent vers zéro;
 Si $A - a + 1 > 0$, la série est divergente et nu_n croît indéfiniment;
 Si $A - a + 1 = 0$, la série est divergente et nu_n a une limite finie;
 Si $A - a + 1 < 0$, la série est convergente et nu_n tend vers zéro.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{(A - a)n^{\lambda-1} + \varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \psi(n)}.$$

On a aussi identiquement

$$u_{n+k+1} = u_n \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \dots \frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}},$$

c'est-à-dire

$$u_{n+k+1} = u_n \left[1 + \frac{(A - a)n^{\lambda-1} + \varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \psi(n)} \right] \dots \\ \times \left[1 + \frac{(A - a)(n + k)^{\lambda-1} + \varphi(n + k) - \psi(n + k)}{(n + k)^\lambda + a(n + k)^{\lambda-1} + \psi(n + k)} \right].$$

Si n est suffisamment grand, les numérateurs des seconds termes des facteurs du second membre sont très-petits par rapport aux dénominateurs, et ces seconds termes ont tous le même signe, qui est celui de leur partie principale. Le lemme I peut donc être appliqué à ce produit, de sorte que si la série dont le terme général est

$$\frac{(A - a)n^{\lambda-1} + \varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \psi(n)}$$

est convergente, u_{n+k+1} a une limite finie.

Si cette série est divergente et que ses termes soient positifs, u_{n+k+1} croît indéfiniment.

Si cette série est divergente et que ses termes soient négatifs, u_{n+k+1} tend vers zéro.

Or ce terme général est égal à

$$\frac{A-a}{n} + \frac{n[\varphi(n) - \psi(n)] - (A-a)[an^{\lambda-1} + \psi(n)]}{n[n^{\lambda} + an^{\lambda-1} + \psi(n)]}.$$

Quand n est très-grand, la deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première, qui est le terme général d'une série divergente. Donc

Si $A-a > 0$, u_{n+k+1} croît indéfiniment;

Si $A-a < 0$, u_{n+k+1} tend vers zéro;

Si $A-a = 0$, les termes de la série se réduisent à $\frac{\varphi(n) - \psi(n)}{n^{\lambda} + an^{\lambda-1} + \psi(n)}$.

Posons

$$\varphi(n) - \psi(n) = n^{\lambda-1-k}(E + \varepsilon),$$

k étant positif. L'expression précédente devient

$$\frac{E}{n^{k+1}} + \frac{\varepsilon n^{\lambda} - Ea n^{\lambda-1} - E\psi(n)}{n^{k+1}[n^{\lambda} + an^{\lambda-1} + \psi(n)]}.$$

La deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première, qui est le terme général d'une série convergente. Donc u_{n+k+1} a une limite finie différente de zéro.

Cela étant, on a

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{n^{\lambda+1} + (A+1)n^{\lambda} + n\varphi(n) + An^{\lambda-1} + \varphi(n)}{n^{\lambda+1} + an^{\lambda} + n\psi(n)}.$$

En appliquant les résultats précédents, on voit que

Si $A+1-a > 0$, nu_n croît indéfiniment;

Si $A+1-a = 0$, nu_n a une limite finie différente de zéro;

Si $A+1-a < 0$, nu_n tend vers zéro.

Appliquons maintenant le lemme II en prenant pour $\varphi(n)$ le nombre n .
L'expression

$$\frac{nu_n}{\alpha} - \frac{(n+1)u_{n+1}}{\alpha} = u_{n+1}$$

est positive en même temps que

$$\frac{nu_n}{\alpha u_{n+1}} - \frac{n+1}{\alpha} - 1,$$

ou

$$(1) \quad \frac{n^{\lambda}(a - A - 1 - \alpha) + \dots}{\alpha[n^{\lambda} + An^{\lambda-1} + \varphi(n)]}.$$

Les termes qui ne sont pas écrits au numérateur sont infiniment petits par rapport au premier.

Si

$$A - a + 1 < 0,$$

ce qui est le seul cas où la série proposée puisse être convergente, puisque c'est le seul où nu_n tende vers zéro, on a

$$a - A - 1 > 0.$$

On peut donner à α une valeur positive assez petite pour que

$$a - A - 1 - \alpha$$

soit positif.

Il en sera de même de l'expression (1) pour $n = \infty$. Donc la série proposée est convergente.

Donc pour que la série proposée soit convergente, il faut et il suffit que $A - a + 1$ soit < 0 , et c'est le seul cas où nu_n tende vers 0. De sorte que toutes les fois que la règle de Gauss est applicable, pour que la série proposée soit convergente, il faut et il suffit que nu_n tende vers zéro.

Extension de la règle de Gauss.

Je vais appliquer la même méthode à un cas plus étendu, qui sera compris, il est vrai, comme le précédent, dans les règles que j'exposerai ultérieurement; mais outre l'intérêt que ce cas peut présenter, je serai conduit à formuler une conclusion identique à la précédente, tandis que les règles que j'indiquerai plus loin sembleraient imposer de plus grandes restrictions.

Je supposerai que pour des valeurs suffisamment grandes de n , le

rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puisse être mis sous la forme

$$\frac{n^\lambda + A n^{\lambda-k} + \varphi(n)}{n^\lambda + a n^{\lambda-k} + \psi(n)},$$

λ et k étant des nombres positifs tels que λ soit $> k$, $\varphi(n)$ étant infiniment petit par rapport à n^λ , et $\varphi(n) - \psi(n)$ étant infiniment petit par rapport à $n^{\lambda-k}$, d'ordre déterminé si $A = a$. Il y aura encore une restriction dans un cas particulier.

Si $k = 1$, on est dans le cas précédent: si j'avais pris tout d'abord cette forme, il eût fallu examiner à part l'hypothèse $k = 1$, de sorte qu'il n'y a pas eu double emploi.

Si $k > 1$, on est encore dans le cas précédent; seulement $A = 0$, $a = 0$; donc $A - a + 1 = 1$; la série proposée est donc divergente, u_n a une limite finie différente de zéro et $n u_n$ croît indéfiniment.

Supposons donc $k < 1$.

Je vais appliquer la méthode identiquement de la même manière.

On a

$$u_{n+k+1} = u_n \left[1 + \frac{(A - a)n^{\lambda-k} + \varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + a n^{\lambda-k} + \psi(n)} \right] \dots$$

Les seconds termes des facteurs du second membre sont de la forme

$$\frac{A - a}{n^k} + \frac{n^k [\varphi(n) - \psi(n)] - a(A - a)n^{\lambda-k} - (A - a)\psi(n)}{n^k [n^\lambda + a n^{\lambda-k} + \psi(n)]}.$$

La deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première, et comme k est < 1 , la série dont celle-ci est le terme général est divergente. Donc

Si $A - a > 0$, u_{n+k+1} croît indéfiniment;

Si $A - a < 0$, u_{n+k+1} tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$;

Si $A - a = 0$, le terme précédent devient

$$\frac{\varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + a n^{\lambda-k} + \psi(n)}.$$

Posons

$$\varphi(n) - \psi(n) = n^{\lambda-k-k'}(E + \varepsilon),$$

E étant un nombre fini différent de zéro.

L'expression ci-dessus prend alors la forme

$$\frac{E}{n^{k+k'}} + \frac{\varepsilon n^\lambda - E[an^{\lambda-k} + \psi(n)]}{n^{k+k'} [n^\lambda + an^{\lambda-k} + \psi(n)]}.$$

La deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première.
Donc

Si $k + k' > 1$, u_{n+k+1} a une limite finie;

Si $k + k'$ est < 1 ou $= 1$ $\left\{ \begin{array}{l} E > 0, u_{n+k+1} \text{ croît indéfiniment;} \\ E < 0, u_{n+k+1} \text{ tend vers zéro.} \end{array} \right.$

Cela étant, on a

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{n^{\lambda+1} + An^{\lambda-k+1} + n^\lambda + n\varphi(n) + An^{\lambda-k} + \varphi(n)}{n^{\lambda+1} + an^{\lambda-k+1} + n\psi(n)}.$$

En appliquant les résultats précédents, on voit que

Si $A - a > 0$, nu_n croît indéfiniment;

Si $A - a < 0$, nu_n tend vers zéro;

Si $A - a = 0$, la quantité correspondante à $\varphi(n) - \psi(n)$ est

$$n^\lambda + n\varphi(n) + An^{\lambda-k} + \varphi(n) - n\psi(n),$$

ou

$$n^\lambda + n^{\lambda+1-k-k'}(E + \varepsilon) + An^{\lambda-k} + \varphi(n).$$

Donc

Si $k + k' > 1$, nu_n croît indéfiniment;

Si $k + k' < 1$, $\left\{ \begin{array}{l} E > 0, nu_n \text{ croît indéfiniment;} \\ E < 0, nu_n \text{ tend vers zéro.} \end{array} \right.$

Si $k + k' = 1$, $\left\{ \begin{array}{l} E + 1 > 0, nu_n \text{ croît indéfiniment;} \\ E + 1 < 0, nu_n \text{ tend vers zéro;} \\ E + 1 = 0, \text{ cette expression devient} \end{array} \right.$

$$\varepsilon n^\lambda + An^{\lambda-k} + \varphi(n).$$

Si ε est infiniment petit d'ordre déterminé, ou plus généralement si la série dont le terme général est $\frac{\varepsilon}{n}$ est convergente, nu_n a une limite finie.

Pour que la série soit convergente, il faut que nu_n tende vers 0; nous n'aurons donc que trois cas à examiner.

On a

$$\frac{nu_n}{\alpha u_{n+1}} = \frac{n+1}{\alpha} - 1$$

$$= \frac{1}{\alpha(n^\lambda + an^{\lambda-k} + \psi(n))} [(a-A)n^{\lambda-k+1} - n[\varphi(n) - \psi(n)] - (1+\alpha)(n^\lambda + An^{\lambda-k} - \varphi(n))]$$

Si $A - a < 0$, cette expression est positive quand n est très-grand, pourvu que α soit positif; comme nu_n tend vers 0, la série est convergente.

Si $A - a = 0$ avec $k + k' < 1$ et $E < 0$, l'expression devient

$$\frac{1}{\alpha(n^\lambda + an^{\lambda-k} + \psi(n))} [-n^{\lambda+1-k-k'}(E + \varepsilon) + \dots],$$

les points remplaçant une quantité infiniment petite par rapport au premier terme.

Cette expression est positive si α est positive pour de grandes valeurs de n . La série est convergente.

Si $A - a = 0$ avec $k + k' = 1$ et $E + 1 < 0$, l'expression devient

$$\frac{1}{\alpha(n^\lambda + \dots)} [n^\lambda(-E - 1 - \alpha) + \dots].$$

Or $-E - 1$ est positif; on peut prendre α assez petit pour que $-E - 1 - \alpha$ le soit aussi. La série est encore convergente.

Et ces cas sont les seuls dans lesquels nu_n tende vers 0. Donc dans tous les cas qui sont compris dans la forme que je viens d'étudier, pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que nu_n tende vers 0 quand n croît indéfiniment.

Comme application je considérerai la série

$$1 + 2^w + \frac{3^w}{2^{w+\alpha}} + \dots + \frac{n^w}{(n-1)^{w+\alpha}},$$

qui a été examinée par M. Raabe, puis par M. Bertrand, dans leurs Mémoires.

Il est bien clair qu'elle rentre dans le premier cas que je viens d'examiner, puisque le binôme $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k}$ peut toujours être ordonné suivant

les puissances ascendantes de $\frac{1}{n}$. Donc pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que nu_n tende vers 0.

Or

$$nu_n = \frac{n^{w+1}}{(n-1)^{w+\alpha}}.$$

Donc

Si $\alpha > 1$, la série est convergente;
 Si $\alpha = 1$,
 Si $\alpha < 1$, } la série est divergente.

Règles de M. Duhamel et de M. Bertrand.

Je vais considérer maintenant un cas beaucoup plus général que les précédents.

M. Duhamel a démontré la règle suivante :

Si dans une série de termes positifs, le rapport d'un terme au précédent peut se mettre sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, α étant une quantité infiniment petite telle que $n\alpha$ ait une limite finie k ,

Si k est > 1 , la série est divergente;

Si k est < 1 , la série est convergente.

On s'assurera aisément que cette règle est comprise dans celle de Gauss, où l'on suppose $A - a$ différent de 0. Il est inutile d'en reprendre la démonstration.

M. Bertrand, prenant cette règle pour point de départ, a, comme je l'ai dit, formulé une série de règles dont chacune s'applique quand les précédentes n'ont pas suffi. Démontrons d'abord la première, puis nous envisagerons la question de la manière la plus générale.

Si, dans l'application de la règle de M. Duhamel, $\lim n\alpha = 1$, on mettra $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'},$$

et

Si $\lim n \ln \alpha' > 1$, la série est convergente;

Si $\lim n \ln \alpha' < 1$, la série est divergente.

J'applique la méthode que j'ai exposée à l'occasion de la règle de Gauss.

On a

$$u_{n+k+1} = u_n \left[1 - \frac{\frac{1}{n} + \alpha'}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'} \right] \left[1 - \frac{\frac{1}{n+1} + \alpha'_1}{1 + \frac{1}{n+1} + \alpha'_1} \right] \dots$$

Les fractions du second membre sont toutes positives et très-petites quand n est très-grand. Elles forment une série dont le terme général est

$$\frac{1}{n} + \frac{\alpha' - \frac{\alpha'}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'},$$

et comme α' est infiniment petit par rapport à $\frac{1}{n}$, la deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première, de sorte que cette série est divergente.

Donc u_{n+k+1} tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Cela étant, on a

$$\frac{(n+1)l(n+1)u_{n+1}}{n \ln u_n} = \frac{(n+1)l(n+1)}{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \alpha' \right)}.$$

Or

$$\begin{aligned} (n+1)l(n+1) &= (n+1) \left[\ln + l \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= n \ln + \ln + n l \left(1 + \frac{1}{n} \right) + l \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= n \ln + \ln + n \left(\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2} \right) + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{(n+1)l(n+1)}{n \ln} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln} + \frac{\varepsilon_1}{n^2},$$

ε_1 étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}$.

Donc

$$\frac{(n+1)l(n+1)u_{n+1}}{n \ln u_n} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{\eta}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'} = 1 - \frac{\alpha' - \frac{1}{n \ln n} - \frac{\eta}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'}.$$

La partie principale du deuxième terme étant $\alpha' - \frac{1}{n \ln n}$ quand $\lim n \ln \alpha'$ diffère de 1, ce second terme définit une série divergente.

Donc

Si $\lim n \ln \alpha' > 1$, $n \ln u_n$ tend vers 0;

Si $\lim n \ln \alpha' < 1$, $n \ln u_n$ croît indéfiniment.

Comme la série dont le terme général est $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente, le premier cas est le seul où la proposée puisse être convergente.

Appliquons le lemme II en prenant pour $\varphi(n)$ le produit $n \ln n$.

On a à considérer l'expression

$$\frac{n \ln u_n}{a u_{n+1}} - \frac{(n+1)l(n+1)}{a} - 1,$$

ou

$$\frac{1}{a} n \ln \left[1 + \frac{1}{n} + \alpha' \right] - \frac{1}{a} n \ln \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{\eta}{n^2} \right] - 1,$$

ou encore

$$\frac{n \ln \alpha' - 1 - a}{a} - \frac{\eta}{a n^2}.$$

Si $\lim n \ln \alpha' > 1$, on peut donner à a une valeur assez petite pour que cette expression soit positive pour des valeurs suffisamment grandes de n ; donc la série proposée est convergente.

On voit que, quand cette règle permet de prononcer sur la convergence de la série, pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que $n u_n$ tende vers zéro.

Je vais maintenant démontrer avec la même facilité les règles de M. Bertrand, d'une manière générale. Je supposerai connue la formule

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)l(n+1)ll(n+1)lll(n+1)\dots}{n \ln l \ln l \ln \dots} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{n \ln l \ln n} + \frac{1}{n \ln l \ln l \ln n} + \alpha, \end{aligned}$$

α étant tel que $nlnllnlln\ldots\alpha$ soit infiniment petit. Cette formule s'établit sans difficulté. Au reste, on en trouvera la démonstration dans le Mémoire de M. Bonnet.

Cela étant, je suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \ldots + \frac{1}{nlnllnlln\ldots} + \alpha},$$

α étant tel que $nlnllnllnlln\ldots\alpha$ ait une limite finie différente de zéro.

Alors, comme on l'a vu plus haut, u_n tend vers zéro.

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)l(n+1)\ldots lll(n+1)u_{n+1}}{nlnlln\ldots llln} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{nln\ldots llln} + \frac{\varepsilon}{nln\ldots llln}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \ldots + \frac{1}{nlnllnlln} + \alpha} \\ &= 1 + \frac{\left(\frac{1}{nln\ldots llln} - \alpha\right) + \frac{\varepsilon}{nln\ldots llln}}{1 + \frac{1}{n} + \ldots}. \end{aligned}$$

On en conclut comme ci-dessus, que si

$$\frac{1}{nln\ldots llln\ldots} - \alpha < 0,$$

c'est-à-dire si

$$\lim nln\ldots llln\ldots\alpha > 1,$$

le deuxième terme du rapport étant négatif, et étant le terme général d'une série divergente,

$$nln\ldots llln\ldots u_n \text{ tend vers zéro.}$$

Si

$$\lim nln\ldots llln\ldots\alpha < 1,$$

$$nln\ldots llln\ldots u_n \text{ croît indéfiniment.}$$

Comme la série dont le terme général est $\frac{1}{nln\ldots llln\ldots u_n}$ est divergente, le premier cas est le seul où la série proposée puisse être convergente.

J'applique maintenant le lemme II en prenant pour $\varphi(n)$ le produit $n \ln \ln n \dots \ln \ln n$. J'ai ainsi l'expression

$$\frac{n \ln \dots \ln \ln n \dots}{a} \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{(n+1) \ln(n+1) \dots \ln \ln(n+1) \dots}{a} - 1$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{n \ln \dots \ln \ln n \dots}{a} \left(1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n \ln \dots \ln \ln n} + \alpha \right) \\ & - \frac{n \ln \dots \ln \ln n \dots}{a} \left(1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n \ln \dots \ln \ln n} + \frac{\varepsilon}{n \ln \dots \ln \ln n} \right) - 1 \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$\frac{1}{a} [-1 + n \ln \dots \ln \ln n \dots \alpha] - 1 - \frac{\varepsilon}{a n \ln \dots \ln \ln n \dots}$$

Or quand

$$\lim n \ln \dots \ln \ln n \dots \alpha > 1,$$

on peut prendre a assez petit pour que cette expression soit positive quand n est infini. Donc la série proposée est convergente.

On voit que dans tous les cas où cette série de règles permet de décider la question de la convergence ou de la divergence d'une série, on peut énoncer ce théorème :

Pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que

$$n \ln \dots \ln \ln n \dots u_n \text{ tende vers } 0 \text{ avec } \frac{1}{n}.$$

Et même, si l'on savait d'avance combien d'essais il faudra faire pour arriver au résultat, c'est-à-dire si l'on savait combien de termes a le dénominateur de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \dots + \alpha},$$

on pourrait limiter le nombre des facteurs du critérium.

Si par exemple le dernier terme avant α était

$$\frac{1}{n \ln \ln \ln n},$$

il suffirait de constater que

$$n \ln \ln \ln n \dots \ln \ln n \dots u_n \text{ tend ou ne tend pas vers zéro.}$$

Remarquons que pour une classe particulière de séries, le critérium pourrait encore se simplifier; c'est ce qui nous est arrivé pour la règle de Gauss. Cette règle est comprise dans les deux premières de la série de règles que nous venons d'établir; de sorte que si le rapport de u_{n+1} à u_n a la forme que Gauss a étudiée, pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que $n \ln u_n$ tende vers zéro. Une étude directe nous a conduit à un résultat plus simple, car nous avons vu qu'il faut et il suffit que nu_n tende vers zéro. On conçoit que de pareilles simplifications puissent se reproduire pour d'autres catégories de fonctions.

M. Bonnet a donné une série de règles qui ne diffèrent pas des précédentes. Il suppose que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit de la forme

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n} - \dots - \frac{1}{n \ln \dots \ln n} - \alpha.$$

Alors si $\lim \alpha n \ln \dots \ln n$ a une limite > 1 la série est convergente; si cette limite est moindre que 1, la série est divergente.

Je ne reprendrai pas la démonstration de ces règles; il est clair que la méthode que j'ai indiquée s'y applique absolument de la même manière, de sorte que nous arriverions encore à formuler la même conclusion :

Pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que

$$n \ln \ln \dots \ln u_n \text{ tende vers zéro avec } \frac{1}{n}.$$

Encore une remarque: ces règles supposent que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour des valeurs très-grandes de n , soit toujours > 1 ou toujours < 1 ; elles ne s'appliqueraient pas si ce rapport oscillait indéfiniment autour de 1. La méthode que j'ai exposée pour l'étude de la convergence des séries pourrait encore être de quelque utilité. Il faudrait remplacer le lemme I par les théorèmes relatifs à la convergence d'un produit infini de facteurs binômes, dont les seconds termes ne sont ni tous positifs, ni tous négatifs.

M. Bertrand a montré la coïncidence entre les règles que je viens d'établir, celles qu'ils a déduites de la règle de Cauchy et celles de

M. de Morgan. Cette vérification se fait de la façon la plus simple; elle suffit pour nous permettre d'étendre le résultat auquel nous sommes parvenu à ces deux sortes de règles. Dans ces divers cas encore, pour que la série proposée soit convergente, il faut et il suffit que

$$n \ln \ln \dots u_n \text{ tende vers zéro.}$$

Autres règles de M. Bonnet.

M. Bonnet a donné encore deux séries de règles dont l'examen va nous conduire au même résultat.

Pour la première, cette remarque a déjà été faite par M. Bonnet dans son Mémoire : une série est convergente quand le produit

$$n \ln \dots \ln \ln (\ln \ln)^{i+i} u_n$$

n'est pas infini pour de très-grandes valeurs de n . Il est bien clair que, si une série est divergente, et que le produit

$$n \ln \ln \dots u_n$$

tende vers zéro, si grand que soit le nombre des facteurs, cette règle ne pourra rien nous apprendre.

La démonstration de cette règle est intuitive, car on aura

$$u_n < \frac{1}{n \ln \ln \ln (\ln \ln)^{i+i}},$$

qui est le terme général d'une série convergente

Cette règle est un peu plus étendue que celle de M. Bertrand, car elle pourrait être applicable sans que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ fût toujours > 1 , ou toujours < 1 . Car si l'on a

$$u_n = \frac{a}{n \ln \dots (\ln \ln)^{i+i}},$$

$$u_{n+1} = \frac{a + \alpha}{(n+1) \dots (\ln \ln + 1)^{i+i}}.$$

D'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a + \alpha}{a} \frac{(n+1) \dots (\ln \ln + 1)^{i+i}}{n \ln \dots (\ln \ln)^{i+i}}.$$

Or le second facteur est égal à

$$1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n \ln \dots llln},$$

il est donc plus grand que 1, mais le premier peut être alternativement plus grand ou plus petit que l'unité.

M. Bonnet a donné une autre série de règles qui reviennent à celles que M. Bertrand a déduites de la règle de M. Duhamel. Il suppose que l'on ait

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \frac{\ln}{n} - \frac{lln}{n} - r''',$$

et que $\frac{nr'''}{llln}$ ait une limite. Si cette limite est plus grande que 1, la série est convergente; si la limite est moindre que 1, la série est divergente. On trouvera, dans son Mémoire déjà cité, la démonstration de ces règles; elle est fondée sur ce que

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n \ln (lln)^k}} = 1 - \frac{\ln}{n} - \frac{lln}{n} - \frac{kllln}{n} - \omega \left(\frac{\ln}{n} \right)^2.$$

On aura donc

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n \ln (lln)^k}} + \omega \left(\frac{\ln}{n} \right)^2.$$

Si k est > 1 , la série est convergente; on voit qu'alors

$$\sqrt[n]{n \ln lln u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(lln)^{k-1}}} + \omega \sqrt[n]{n \ln lln} \left(\frac{\ln}{n} \right)^2.$$

Donc

$$n \ln lln u_n = \frac{1}{(lln)^{k-1}} + \dots,$$

expression qui tend vers zéro.

Si k est < 1 la série est divergente, et $n \ln lln u_n$ ne tend pas vers zéro, car

$$\sqrt[n]{n \ln lln u_n} = \sqrt[n]{(lln)^{1-k}} + \omega \sqrt[n]{n \ln lln} \left(\frac{\ln}{n} \right)^2.$$

Donc encore, ces règles de M. Bonnet ne permettront pas de démontrer la divergence d'une série qui serait divergente, bien que $n \ln lln \dots u_n$ tende vers zéro.

Pour terminer cette Note, je vais revenir sur le théorème général de Cauchy relativement aux séries de termes positifs décroissants. Soit une série

$$f(a), f(a+1), f(a+2), \dots$$

Désignons par $\varphi(a)$ la somme de cette série. L'aire comprise entre la courbe $y=f(x)$, l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x=a$, et l'axe des x , est

$$\int_a^\infty f(x)dx;$$

cette somme d'éléments est évidemment égale à

$$\int_a^{a+1} \varphi(x)dx,$$

en supposant seulement que $\varphi(x)$ ait une valeur finie entre a et $a+1$. On aura donc

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^{a+1} \varphi(x)dx.$$

Cette égalité a lieu non-seulement pour une série de termes positifs, mais encore pour une série quelconque. Cela étant, dans tous les cas où $\varphi(a)$ étant infini, $\varphi(x)$ le serait également pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a+1$, on peut énoncer ce théorème : la série proposée est convergente ou divergente en même temps que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$. Cette condition est évidemment satisfaite quand on a une série de termes positifs décroissants, car la différence entre $\varphi(x)$ et $\varphi(a+1)$ est $< f(x)$, x étant compris entre a et $a+1$.
