

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE BOUTROUX

## **Fonctions multiformes à une infinité de branches**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 22 (1905), p. 441-469

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1905\\_3\\_22\\_441\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22_441_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# FONCTIONS MULTIFORMES

A UNE INFINITÉ DE BRANCHES <sup>(1)</sup>,

PAR M. PIERRE BOUTROUX.



## INTRODUCTION.

Les transcendentes multiformes à une infinité de branches n'ont pour ainsi dire point été étudiées. C'est que, d'une part, une théorie complète de ces fonctions paraît impossible à faire, à cause de la multiplicité et de la diversité des éventualités dont nous prévoyons l'existence, et que, d'autre part, toutes présentent au premier coup d'œil de si inextricables complications qu'il faut renoncer à l'espoir d'obtenir à leur sujet cette moisson de théorèmes, si beaux de précision et de simplicité, qui illustre la théorie des fonctions uniformes.

Mais, si les transcendentes multiformes ont le grave défaut de ne pas être simples, elles s'imposent en revanche à notre attention par le rôle immense qu'elles jouent en Analyse. Il suffira d'en donner un exemple. Considérons une équation différentielle de la forme

$$(1) \quad y' = R(x, y),$$

R étant rationnel en  $x$  et  $y$ . On sait que la seule équation de cette forme dont les intégrales puissent être uniformes est l'équation de Riccati. Allant plus loin, M. Painlevé a donné une méthode permettant

---

<sup>(1)</sup> La plupart des résultats contenus dans ce travail ont été énoncés dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 4 avril 1904.

de déterminer toutes les équations (1) dont les intégrales ont un nombre fini de branches; cette propriété n'appartient qu'à un très petit nombre d'équations isolées. Ainsi, à part un nombre très restreint d'exceptions, les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions multiformes à une infinité de branches. C'est dire qu'on ne saurait indéfiniment exclure ces fonctions de l'Analyse, sous prétexte que les questions qu'elles soulèvent sont plus ardues qu'élégantes.

En quoi consisteront ces questions? L'étude générale des fonctions qu'a instituée l'école de Weierstrass a le plus souvent été, si l'on peut dire, une étude bornée : étude dans l'entourage d'un point déterminé, étude au voisinage de conditions initiales données s'il s'agissait d'équations différentielles. Aujourd'hui nous nous efforçons de connaître les transcendentes dans leur ensemble, d'étudier leur allure dans tout le plan et de trouver des formes analytiques qui les représentent tout entières, au lieu de n'en figurer qu'une portion tronquée. Pour diriger des recherches d'apparence aussi vague il faut un fil conducteur. Or, ce fil conducteur, nous le trouvons dans la théorie des fonctions uniformes, en voyant par quel artifice on a réussi à s'élever des fonctions rationnelles aux transcendentes uniformes. Ayant affaire à des équations présentant, non plus un nombre fini, mais un ensemble infini de racines, les analystes ont cherché, en premier lieu, à déterminer les points-limites de cet ensemble, et, en second lieu, ils ont étudié la répartition, la condensation des racines autour de leurs points-limites. Ainsi nous est suggérée l'idée de recourir à une méthode analogue pour étudier les deux ensembles qui caractérisent une fonction multiforme : l'ensemble des points critiques, et l'ensemble des déterminations de la fonction pour une valeur quelconque de la variable. En même temps, nous devons rechercher quel lien il y a entre ces deux ensembles, c'est-à-dire quelles sont les combinaisons de permutations qui donneront successivement naissance à toutes les déterminations de la fonction.

Le problème ainsi posé peut être abordé par plusieurs côtés. Ou bien l'on considérera des fonctions définies par un procédé particulier; on prendra par exemple des équations (1) et l'on se proposera d'étudier leurs intégrales. Ou bien l'on tentera de construire *a priori* une théorie des fonctions multiformes en partant des types les plus

simples que l'on puisse concevoir. Ainsi, on supposera en premier lieu que les points critiques ou les déterminations de la fonction convergent vers des points-limites isolés en nombre fini, et, tout d'abord, vers un point-limite unique; de même que la théorie des transcendentes uniformes débute par l'étude des fonctions ayant un point d'indétermination unique, les fonctions méromorphes. Après quoi on passera successivement en revue des types de fonctions de plus en plus compliqués.

C'est à ce second point de vue que je me suis placé dans ce travail. Je ne prétends pas toutefois y donner une solution complète des problèmes que j'ai effleurés. On reconnaît vite, en effet, que, pour pouvoir traiter utilement ces problèmes, il faut faire certaines hypothèses qui, dans une théorie abstraite, ont nécessairement un caractère arbitraire. Comment justifier ces hypothèses, et, surtout, lesquelles choisir? Peut-être convient-il de surseoir à ce choix jusqu'à ce qu'on ait parcouru la première des deux voies que j'indiquais plus haut, et que l'on ait trouvé, dans la théorie des équations différentielles par exemple, une classification pratique des transcendentes multiformes, qui puisse servir de base à une classification théorique. C'est pour cette raison que, dans les paragraphes qui vont suivre, plusieurs questions seront simplement soulevées qu'il serait nécessaire d'approfondir.

J'établis, dans un premier paragraphe, une relation entre la distribution des points critiques et celle des déterminations de la fonction. Je suis amené à considérer une fonction que j'appelle *fonction limite* ou *branche limite de la fonction multiforme*. Je donne une condition suffisante pour que cette fonction-limite soit uniforme.

Dans un second paragraphe, je montre comment on peut représenter par une relation entière les fonctions dont les déterminations convergent vers l'infini pour toute valeur de la variable. Je cherche moyennant quelles hypothèses cette représentation est possible.

J'aborde ensuite l'étude des fonctions définies par une relation implicite entière en  $x$  et  $y$ , supposée donnée *a priori*. Au sujet de ces fonctions se posent divers problèmes : étude de la distribution des points critiques, extension du théorème de M. Picard sur les fonctions

entières. Je signale certains cas favorables où la solution de ces problèmes se trouve simplifiée <sup>(1)</sup>.

En dernier lieu, je considère les fonctions qui admettent, relativement au théorème de M. Picard, la valeur « exceptionnelle » *zéro*, c'est-à-dire qui ne s'annulent jamais. Je montre que le module de la plus petite détermination d'une telle fonction obéit, au point de vue de la croissance, aux mêmes lois qu'une fonction méromorphe ne s'annulant jamais (c'est-à-dire l'inverse d'une fonction entière). Je signale enfin une classe spéciale de fonctions ne s'annulant pas, dont les diverses branches sont holomorphes au voisinage de  $x = \infty$ , et dont il est particulièrement facile d'étudier l'allure générale.

#### I. — Ensemble dérivé de l'ensemble des déterminations d'une fonction multiforme.

Considérons, pour une valeur arbitraire de  $x$ , l'ensemble des déterminations de la fonction  $y(x)$ . Une première indication, fondamentale, sur la nature de cet ensemble nous est donnée par un théorème démontré en 1888 par M. Poincaré <sup>(2)</sup> : les déterminations de  $y(x)$  correspondent univoquement à l'ensemble des nombres rationnels ; en d'autres termes leur ensemble est dénombrable, et l'on peut les affecter des indices 1, 2, ...,  $i$ , ....

Mais le fait que l'ensemble des  $y_i(x)$  soit dénombrable ne nous apprend malheureusement rien sur la distribution de cet ensemble. On sait — la considération des intégrales hyperelliptiques suffit à le montrer — que les déterminations  $y_i$  convergeront en général vers tous les points du plan des  $y$  ; et cela complique singulièrement la question. Mais n'est-il pas possible de déterminer des cas où l'ensemble dérivé de l'ensemble des  $y_i$  se simplifie et se réduit par exemple à un ou plusieurs points ? Tel est le premier problème que nous rencontrons.

Ce problème peut être posé de plusieurs manières. On peut, par

---

<sup>(1)</sup> Pour ce qui est de la généralisation du théorème de M. Picard, je renvoie également aux intéressants travaux de M. Remoundos.

<sup>(2)</sup> *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1888, p. 197-200.

exemple, supposer que  $\gamma$  soit défini par un procédé analytique déterminé, en particulier par une équation différentielle, et chercher comment se comporte dans ces conditions l'ensemble dérivé de l'ensemble des déterminations de  $\gamma$ . Je me propose de revenir ultérieurement sur cette question qui présente de graves difficultés.

Je m'en tiendrai dans ce travail à des considérations plus générales, et j'établirai en premier lieu une relation entre la distribution des points critiques de la fonction multiforme  $\gamma(x)$  et la distribution de ses déterminations pour une valeur quelconque de  $x$ .

Je considérerai comme point critique distinct tout point autour duquel se permutent deux déterminations de  $\gamma(x)$ . Ainsi, un point autour duquel se permutent trois déterminations ou deux couples de deux déterminations comptera pour deux points critiques. Désignons par  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  les points critiques de  $\gamma(x)$ , par  $\xi$  l'ensemble des points  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  et par  $\gamma(x)$  l'ensemble des déterminations  $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x), \dots$ . Je ferai d'abord l'hypothèse que l'ensemble dérivé de l'ensemble  $\xi$  ne recouvre pas tout le plan des  $x$ . Soit alors  $\bar{x}$  un point *qui n'appartient pas à cet ensemble dérivé*. Considérons un ensemble de déterminations  $\gamma_i(x)$ , choisies dans l'ensemble  $\gamma$ , ne se coupant pas au voisinage de  $x = \bar{x}$  et convergeant, pour  $x = \bar{x}$ , vers un point  $Y_1(x)$ . Nous désignerons ces déterminations par  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ , et leur ensemble dérivé par  $Y_1(x)$ . Je dis que, *lorsque  $x$  varie au voisinage de  $\bar{x}$ ,  $Y_1(x)$  est une fonction analytique et holomorphe de  $x$* .

Soient  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots$  et  $\bar{Y}_1$  les valeurs de  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  et  $Y_1$  pour  $x = \bar{x}$ . Par hypothèse, les différences  $\bar{Y}_1 - \bar{\gamma}_n$  et  $\bar{\gamma}_{n+1} - \bar{\gamma}_n$  tendent vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment. Décrivons alors, autour de  $\bar{x}$  comme centre, un cercle  $c$  ne contenant aucun point critique de la fonction  $\gamma$  et dans lequel les branches considérées ne se coupent pas. Si l'on considère une courbe fermée quelconque,  $\gamma$ , intérieure à  $c$  et entourant le point  $\bar{x}$ , je dis qu'il existe sur cette courbe des arcs où les différences  $Y_1 - \gamma_n, \gamma_{n+1} - \gamma_n$  tendent vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ . Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi et que l'on ait en tout point du contour de  $\gamma$  à partir d'une certaine valeur  $n_1$  de  $n$

$$(2) \quad |\gamma_{n+1} - \gamma_n| > \alpha \quad (\alpha \text{ positif, indépendant de } n).$$

Donnant à  $n$  une valeur supérieure à  $n_1$ , considérons la fonction holomorphe  $y_{n+1} - y_n$ . Nous savons qu'à l'intérieur de  $\gamma$  le module de cette fonction devient inférieur à un nombre  $\varepsilon$  qui sera lui-même inférieur à  $\alpha$  si l'on a pris  $n$  assez grand. L'inégalité (2) ne pourrait dès lors être satisfaite que si  $y_{n+1} - y_n$  s'annulait à l'intérieur de  $\gamma$ , ce qui n'a pas lieu puisque le cercle  $c$  ne contient par hypothèse aucun point critique ou double de la fonction  $y$  (c'est-à-dire aucun point où deux branches différentes  $y_n, y_{n+1}$  de la fonction puissent se confondre).

Je vais conclure de là qu'*au point  $\bar{x}$  les différences des dérivées successives  $y'_{n+1} - y'_n, y''_{n+1} - y''_n$  tendent vers zéro* comme la différence  $y_{n+1} - y_n$ .

Posons en effet  $y_{n+1} - y_n = f_n(x)$ , et montrons que l'on aboutit à une contradiction si l'on suppose que  $|f'_n(\bar{x})|$  reste, pour des valeurs de  $n$  indéfiniment croissantes, supérieur à un nombre fixe  $\alpha$ , indépendant de  $n$ . Quel que soit  $n$ , la fonction  $f_n(x)$  est holomorphe au voisinage du point  $\bar{x}$  et développable par rapport aux puissances de  $x - \bar{x} = \eta$ , et nous sommes déjà assurés que les quantités  $|f'_n|, |f''_n|, \dots$  restent, quel que soit  $n$ , inférieures à un nombre fixe. Il existe donc sûrement un nombre  $\beta$  indépendant de  $n$  tel que l'on ait, pour  $n$  assez grand et pour  $|\eta| < \beta$ ,

$$\left| \frac{f'_n(\bar{x})}{2} \eta + \frac{f''_n(\bar{x})}{2 \cdot 3} \eta^2 + \dots \right| < \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant donné arbitrairement petit et indépendant de  $n$ , par exemple inférieur à  $\frac{\alpha}{2}$ . Prenons alors pour courbe  $\gamma$  un cercle de centre  $\bar{x}$  et de rayon  $\beta'$  moindre que  $\beta$ .  $f_n(\bar{x})$  tendant vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ , on voit que, si  $f'_n(\bar{x})$  restait supérieure à  $\alpha$ ,  $|f_n(\bar{x} + \eta)|$  serait, sur le contour de  $\gamma$ , supérieure à  $\frac{\alpha\beta'}{2}$  et ne pourrait par suite tendre vers zéro en aucun point de ce contour, ce qui est contraire au résultat obtenu plus haut.  $f'_n(\bar{x})$  tend donc bien vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ . On démontrerait pareillement qu'il en est de même des dérivées d'ordre supérieur.

Considérons alors le développement convergent

$$(3) \quad f_n(\bar{x} + \eta) = f_n(\bar{x}) + f'_n(\bar{x})\eta + \dots$$

qui représente la différence  $y_{n+1} - y_n$  pour les petites valeurs de  $\eta$ . De ce que tous les coefficients de ce développement tendent vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ , il résulte que  $y_{n+1} - y_n$  tend vers zéro dans toute direction autour du point  $\bar{x}$ .

Considérons alors le point-limite  $Y_i$  des  $y_i$  pour  $x$  voisin de  $\bar{x}$ . Il résulte de ce qui précède : d'une part, que le point  $Y_i$ , étant unique pour  $x = \bar{x}$ , est encore unique pour  $x = \bar{x} + \eta$  ; d'autre part, que les différences  $Y_i - y_n$ ,  $Y'_i - y'_n$ , ... tendent vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ . En particulier, si l'on appelle  $\xi$  et  $\xi'$ ,  $\eta_n$  et  $\eta'_n$ ,  $H_i$  et  $H'_i$  les parties réelles et les coefficients de  $\sqrt{-1}$  dans  $x$ ,  $y_n$  et  $Y_i$ , on aura

$$\frac{\partial H_i}{\partial \xi} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \eta_n}{\partial \xi}, \quad \dots, \quad \frac{\partial H'_i}{\partial \xi'} = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \eta'_n}{\partial \xi'};$$

la dérivée  $Y'_i$  de  $Y_i$  satisfait à des relations analogues. On en conclut que  $Y_i$  et  $Y'_i$  sont comme  $y_n$  et  $y'_n$  des fonctions analytiques continues au voisinage de  $x = \bar{x}$ , résultat que nous énoncerons comme il suit :

*Le point-limite  $Y_i$  des  $y_i$  engendre au voisinage de  $x = \bar{x}$  une fonction holomorphe de  $\bar{x}$ . La dérivée  $Y'_i$  de  $Y_i$  est engendrée par l'ensemble dérivé de l'ensemble formé par les déterminations  $y'_1, y'_2, \dots$  de la dérivée  $y'$  de  $y$ .*

Supposons maintenant que nous fassions varier  $x$  d'une façon arbitraire à partir de  $\bar{x}$ . Un point quelconque  $x_i$  ne pourra être point critique de la fonction  $Y$  que s'il est un point-limite de points critiques  $\xi_i$ . En général, il y aura une infinité de tels points-limites, et  $Y_i$  engendrera, lorsque  $x$  variera, une fonction  $Y(x)$  à une infinité de branches. J'appellerai cette fonction *fonction-limite* ou *branche-limite de la fonction  $y$* . Il résulte de la définition de la fonction-limite qu'elle est entièrement déterminée et d'une manière unique dès qu'on se donne la fonction  $y$ . En effet, quel que soit l'ensemble partiel  $y_1, y_2, \dots$  que l'on a choisi au début pour définir la branche  $Y_i$ , il est manifeste que l'on peut toujours faire décrire à  $x$  un chemin qui transforme cet ensemble en un ensemble partiel *quelconque* pris dans l'ensemble  $y$ . Tout point-limite de points  $Y_i$  appartient donc à une branche de  $Y(x)$ .

Pour simplifier l'exposition qui précède, j'ai supposé, au début,



que le point  $\bar{x}$ , au voisinage duquel je définis la fonction  $Y_1(x)$ , n'était pas limite de points critiques ou doubles. Il résulte de la démonstration que cette hypothèse est trop restrictive; il suffit de supposer que le point  $\bar{x}$  n'est pas point-limite de points critiques ou doubles pour l'ensemble partiel  $y_1, y_2, \dots$  que nous considérons (lequel est choisi dans l'ensemble  $y$  et admet, pour  $x = \bar{x}$ , le point-limite  $\bar{Y}_1$ ).

J'ai aussi implicitement supposé que le point  $\bar{Y}_1$  se trouvait à distance finie. S'il n'en était pas ainsi, on considérerait, au lieu de l'ensemble  $y_1, y_2, \dots$ , l'ensemble  $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}$ , lequel admet pour point-limite *zéro*.  $Y_1$  est donc en ce cas une fonction *méromorphe* au voisinage de  $x = \bar{x}$ .

De l'analyse qui vient d'être faite résulte en particulier la proposition suivante :

*Si une fonction  $y$  satisfait à une équation différentielle*

$$(4) \quad y' = \varpi(x, y),$$

*$\varpi$  étant une fonction analytique de  $x$  et  $y$ , la fonction-limite  $Y(x)$  satisfait à la même équation.*

On a en effet, pour une branche quelconque de  $Y$ ,

$$\frac{dY_1}{dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dy_n}{dx}, \quad \varpi(x, Y_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varpi(x, y_n),$$

ce qui établit la proposition.

Pour que cette proposition et, d'une manière générale, la considération de la fonction  $Y$  puissent apporter quelque simplification dans l'étude des intégrales de (4), il faudrait que  $Y$  fût plus simple que  $y$ . Dans le cas le plus général il n'en sera pas ainsi, car on sait que l'ensemble dérivé peut coïncider avec l'ensemble primitif, ou même être plus étendu. Mais nous connaissons, du moins, une condition *nécessaire* pour que les déterminations de  $y$  aient, par exemple, un seul point-limite ou un nombre fini de points-limites. Il faut que *l'équation (4) possède une intégrale uniforme, ou une intégrale à un nombre fini de branches*. C'est là une première donnée importante sur les équations

tions dont les intégrales sont des fonctions à branche-limite uniforme, ou à un nombre fini de branches-limites.

Revenons maintenant à la relation établie entre la distribution des points critiques et la distribution des déterminations  $\gamma_i$ , et cherchons une condition suffisante pour que  $Y(x)$  soit uniforme.

Nous avons vu que la fonction  $Y(x)$  ne peut pas présenter de singularité en un point qui n'appartient pas à l'ensemble dérivé de l'ensemble  $\xi$ . En particulier, elle n'aura pas de point critique à distance finie si l'on suppose que l'ensemble dérivé de  $\xi$  se réduise au point  $\infty$ .

Considérons donc les fonctions *dont les points critiques convergent vers l'infini*. Si  $Y(x)$  est une branche-limite d'un ensemble de branches d'une telle fonction,  $Y(x)$  est dans tout le plan une fonction uniforme. Deux circonstances sont alors possibles : ou bien toutes les branches de la fonction donnée  $\gamma(x)$  convergent vers  $Y(x)$ ; ou bien  $\gamma(x)$  présente des ensembles de branches qui convergent vers d'autres fonctions  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$ , ..., lesquelles, pour la même raison que  $Y(x)$ , sont des fonctions uniformes.

Il pourrait arriver que les fonctions  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$ , ... fussent en nombre infini. Admettront-elles, elles aussi, des fonctions-limites? Si l'on suppose que non seulement les points critiques de  $\gamma(x)$ , mais aussi les points d'intersection de ses branches deux à deux n'admettent pas d'autre point-limite que l'infini, on peut démontrer que l'ensemble des  $Y_i(x)$  ne saurait non plus converger que vers l'infini.

En effet, supposons qu'il y ait des fonctions  $Y_i$  arbitrairement rapprochées de  $Y_k(x)$ .  $Y_k(x)$  étant elle-même limite de branches d'intégrales, on pourra trouver des branches d'intégrales  $\gamma_k(x)$  qui se trouveront (dans certains intervalles) comprises entre deux courbes  $Y_k$  et  $Y_j$  arbitrairement rapprochées. Mais, comme  $\gamma_k(x)$  est une branche de fonction multiforme, elle ne peut coïncider avec une fonction  $Y_i$ ; dès lors elle ne peut pas rester comprise entre  $Y_j$  et  $Y_k$  pour toute valeur de  $x$ , et elle doit couper en un point  $\bar{x}$  une de ces deux courbes. Or une branche d'intégrale  $\gamma_k$  ne saurait couper une branche-limite  $Y_k$  en un point  $\bar{x}$  s'il n'y a pas au voisinage de  $\bar{x}$  une infinité de points d'intersection des  $\gamma_i$ . En effet, considérons l'ensemble  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$  des déterminations qui convergent vers  $Y_k$ . Si pour  $n > N$ ,

les  $\gamma_n$  ne se coupent jamais deux à deux au voisinage de  $\bar{x}$ , alors les courbes  $\gamma_{N+1}, \gamma_{N+2}, \dots, Y_k$  s'emboîtent les unes dans les autres sans se couper entre elles. Elles ne peuvent couper non plus une courbe  $\gamma_k$  d'indice inférieur à  $N$  : sinon  $\gamma_k$  les couperait toutes, à partir d'une certaine valeur de  $n$ . Il en résulte que, d'après nos hypothèses,  $\gamma_k$  ne peut couper  $Y_k$ , et, par suite, qu'il ne saurait y avoir des courbes  $Y_i$  arbitrairement rapprochées de  $Y_k$ . Les  $Y_i$  *n'ont pas d'autre limite que l'infini*.

Introduisons alors une nouvelle fonction  $z$  définie par une relation de la forme

$$z = \frac{A_1}{y - Y_1} + \frac{A_2}{(y - Y_2)^2} + \dots,$$

les  $A$  étant choisis de telle sorte que le second membre converge absolument pour toute valeur de  $y$  distincte des  $Y_i$ . On voit qu'à toute valeur de  $x$  correspondent une infinité de valeurs de  $z$  *n'ayant pas d'autre point-limite que le point  $\infty$* .

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, comme corollaire du théorème fondamental de ce paragraphe :

*Soit  $y(x)$  une fonction multiforme dont les points critiques et les points doubles convergent vers l'infini. On peut faire un changement de fonction  $z = f(x, y)$ ,  $f$  étant uniforme en  $x$  et  $y$ , tel que, pour une valeur quelconque de  $x$ , toutes les déterminations de  $z$  convergent vers l'infini (et l'infini seulement).*

Parmi les fonctions multiformes à une infinité de branches, les fonctions  $z$  jouissant de cette propriété méritent probablement une étude spéciale. Cette étude sera particulièrement fructueuse si l'inverse  $x(z)$  de la fonction  $z$  jouit aussi de la même propriété.

## II. — Fonctions représentables par une relation entière en $x$ et $y$ .

Considérons une fonction analytique multiforme  $y(x)$  satisfaisant aux conditions suivantes : elle n'a à distance finie aucun point d'indétermination ; pour  $x$  quelconque, les déterminations de  $y(x)$  n'ont

d'autre limite que l'infini, et il en est de même des déterminations de  $x(y)$ . Cherchons une représentation de la fonction  $y(x)$ . Nous prendrons pour base, dans cette recherche, la théorie des fonctions entières.

Supposons qu'il existe un nombre positif  $\rho$  tel que la série  $\sum \frac{1}{|y_i(x)|^\rho}$  soit absolument et uniformément convergente pour toute valeur de  $x$  *distincte des zéros de  $y(x)$* . Si cette condition est satisfaite, je dirai que la fonction  $y(x)$  est de *type fini*. Le *type* de  $y$  sera égal au plus petit nombre  $\rho$  satisfaisant à la condition énoncée. Soit, de même, la fonction  $x(y)$  de type fini égal à  $\sigma$ .

Nous supposerons que *les nombres  $\rho$  et  $\sigma$  sont inférieurs à 1*. Cette hypothèse est légitime; en effet, si nous prenons pour variables, au lieu de  $x$  et  $y$ , des puissances rationnelles de ces quantités, nous remplaçons  $y$  par une fonction multiforme jouissant des mêmes propriétés; or on peut toujours choisir ces puissances de manière que les types soient inférieurs à l'unité.

Soient toujours  $y_1(x), y_2(x), \dots$  les déterminations de  $y$  pour une valeur quelconque de  $x$ . Nous appellerons, d'autre part,  $\theta_1, \theta_2, \dots$  les diverses déterminations de  $x$  qui correspondent à une valeur particulière  $\bar{y}$  de  $y$ . Nous pouvons choisir  $\bar{y}$  de manière qu'à distance finie *aucun des points  $\theta_i$  ne soit critique pour la branche de  $y$  qui prend la valeur  $\bar{y}$  en  $x = \theta_i$* . Pour le montrer il suffit d'établir que, quelque grand que soit  $\Theta$ , on peut trouver des valeurs de  $\bar{y}$  telles qu'aucun point  $\theta_i$  de module inférieur à  $\Theta$  ne soit critique pour la branche de  $y$  égale à  $\bar{y}$  en  $x = \theta_i$ . Or supposons que cette condition ne soit pas satisfaite, et cela pour toute valeur de  $\bar{y}$  située dans un cercle  $\gamma$  ayant pour centre un point  $\eta$ . Alors il y aurait à distance finie un ensemble infini de points  $\theta$  pour lesquels deux branches de  $y$  seraient confondues et auraient une valeur commune située dans  $\gamma$ . Soit  $\theta'$  un point-limite de ces points  $\theta$ . Pour  $x = \theta'$  la fonction  $y$  devrait avoir une infinité de déterminations voisines de  $\eta$ , ce qui n'a pas lieu par hypothèse. On peut donc toujours choisir  $\bar{y}$  de façon que la condition énoncée soit satisfaite, bien que  $\frac{d\bar{y}}{d\theta_i}$  puisse tendre vers l'infini lorsque  $|\theta_i|$  augmente indéfiniment. Dans ces conditions, la détermination  $y_j$  qui

est égale à  $\bar{y}$  au point  $\theta_i$  est, au voisinage de ce point, de la forme

$$y_j = \bar{y} + (x - \theta_i)^k \varphi(x - \theta_i),$$

$k$  étant un entier positif, et  $\varphi$  une fonction holomorphe au voisinage de  $x = \theta_i$ . Si  $k > 1$ , nous considérerons, lorsque nous affecterons d'indices les déterminations  $y_j, y_{j+1}, \dots$ , que  $k$  de ces déterminations sont égales à  $\bar{y}$  aux  $k$  points confondus  $\theta_i, \dots, \theta_{i+k-1}$ .

Cela posé, considérons le double produit infini

$$P(x, y) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{\theta_i}\right) \prod_1^\infty \left(1 - \frac{y - \bar{y}}{y_i(x) - \bar{y}}\right).$$

Je dis que ce double produit converge, quel que soit  $x$ , pour toute valeur de  $y - \bar{y}$ .

En effet, il résulte de la définition du type qu'il ne saurait en être autrement que pour les valeurs de  $x$  pour lesquelles une ou plusieurs valeurs de  $y_i - \bar{y}$  s'annulent. Mais, pour ces valeurs,  $\prod_1$  contient un facteur de la forme

$$\frac{y_i - y}{(x - \theta_i)^k \varphi(x - \theta_i)},$$

$\varphi$  étant holomorphe. Le produit d'un tel facteur par  $\prod$  est une fonction holomorphe, quels que soient  $\theta_i$  et  $\bar{y}$ .

La fonction  $P(x, y)$  peut être développée sous la forme

$$\prod \left(1 - \frac{x}{\theta_i}\right) \left[1 - (y - \bar{y}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{y_i - \bar{y}} + (y - \bar{y})^2 \sum \frac{1}{y_i - \bar{y}} \frac{1}{y_j - \bar{y}} + \dots\right] \\ = \sum f_n(x) (y - \bar{y})^n.$$

Le coefficient  $f_n(x)$  du terme général en  $y^n$ , qui se présente sous la forme d'une série uniformément convergente de fonctions rationnelles, est, dans tout le plan des  $x$ , une fonction uniforme et continue qui ne devient jamais infinie;  $f_n(x)$  est donc une fonction entière.

En résumé,  $P(x, y)$  est une fonction entière par rapport aux deux variables  $x$  et  $y - \bar{y}$ , et la fonction multiforme  $y$  de  $x$  est représentée tout entière par la relation

$$(5) \quad P(x, y) = \sum f_n(x)(y - \bar{y})^n = 0.$$

Ce résultat appelle diverses remarques :

Nous avons supposé au début que la fonction  $y(x)$  ne présentait à distance finie aucune indétermination. Si  $y$  était uniforme, il résulterait immédiatement de là que cette fonction n'a à distance finie d'autres singularités que des pôles <sup>(1)</sup>. Mais la fonction  $y$  étant multiforme à une infinité de branches ne pourrait-elle présenter des points singuliers transcendants ?

En nous appuyant sur la relation (5) nous pouvons répondre que non.

En effet, il résulte d'un théorème de M. Painlevé <sup>(2)</sup> que les fonctions définies par une relation implicite telle que (5) n'ont à distance finie d'autres singularités que des pôles et des points critiques algébriques.

Voyons maintenant quelles sont au juste les hypothèses dont nous nous sommes servis. Outre l'hypothèse relative à la non-indétermination, nous avons supposé que pour toute valeur de  $x$  les déterminations de  $y$  convergent uniformément vers l'infini, et que, pour une valeur particulière d'ailleurs quelconque  $\bar{y}$  de  $y$ , les déterminations de  $y$  convergent aussi vers l'infini. *Il n'est pas nécessaire de postuler que cette dernière condition soit satisfaite pour toute valeur de  $\bar{y}$ . Si elle l'est pour une, la démonstration qui précède établit qu'elle l'est pour toutes.*

Nous avons également supposé que  $\rho$  et  $\sigma$  sont inférieurs à un. On voit que la démonstration subsisterait sans modification si l'on imposait cette condition au seul nombre  $\rho$ .

Remarquons, enfin, que si  $Q(x, y) = 0$  est une relation entière quelconque représentant la fonction  $y$  dans tout le plan, et si l'on sup-

<sup>(1)</sup> On suppose qu'elle est holomorphe le long de quelque arc, tout au moins.

<sup>(2)</sup> *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, 1887.

pose que cette relation ne représente que la seule fonction  $\gamma(x)$  et son inverse  $x(\gamma)$ , Q est de la forme

$$Q(x, \gamma) = P(x, \gamma) e^{\varpi(x, \gamma)},$$

$\varpi$  étant une fonction entière de  $x$  et de  $\gamma$ .

### III. — Étude des relations entières $\sum \gamma^n f_n(x) = 0$ .

On conclut des résultats obtenus au paragraphe I qu'étant donnée une fonction multiforme dont les points critiques n'ont d'autre point-limite que l'infini, on saura toujours la représenter par une relation

$$(6) \quad P(x, \gamma) = \sum \gamma^n f_n(x) = 0$$

valable dans tout le plan. Si maintenant, au lieu de partir de la distribution des points critiques, on se donnait *a priori* une relation (6), que saurait-on déduire de cette relation relativement aux propriétés de la fonction qu'elle représente ?

Il semble difficile d'aborder ce problème dans le cas le plus général. Les fonctions représentables par une relation entière en  $x$  et  $\gamma$  sont loin, en effet, de pouvoir être ramenées à un type unique. Si nous cherchons, par exemple, à être renseignés sur l'un des points essentiels, la distribution des points critiques, nous avons à examiner comment sont distribuées les solutions  $x_1, x_2, \dots$  du système

$$(7) \quad \begin{cases} P(x, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial \gamma} = 0. \end{cases}$$

On peut toujours former des fonctions P telles que ces solutions tendent vers un point arbitraire  $\bar{x}$ . Choisissons, en effet, les coefficients des puissances de  $\gamma$ , de telle sorte que la fonction entière de  $\gamma$

$$f_0(\bar{x}) + f_1(\bar{x})\gamma + \dots$$

ait une infinité de zéros doubles. Alors la fonction  $\gamma(x)$  admet une

infinité de points critiques confondus en  $\bar{x}$ . Mais nous n'avons pour cela imposé qu'une condition à chacun des coefficients  $f_n(\bar{x})$ , qui dépendent d'une infinité de paramètres. Il sera donc possible de choisir les  $f_n$  de telle sorte que la même condition soit remplie pour une infinité de valeurs arbitraires  $\bar{x}$ .

Ainsi, du fait que les déterminations de  $y(x)$  convergent vers l'infini seulement, nous ne pouvons rien déduire relativement à la situation des points critiques. Cet exemple montre que, si nous voulons arriver à quelques résultats précis, il sera nécessaire de faire certaines hypothèses particulières sur les relations (6).

L'hypothèse la plus simple consiste à supposer que les rapports de deux fonctions  $f_n$  quelconques sont des fonctions rationnelles <sup>(1)</sup>. La relation (6) s'écrit alors sous la forme

$$(8) \quad \sum y^n \varphi_n(x) = 0,$$

les  $\varphi_n$  étant des fonctions rationnelles présentant des zéros et des pôles dont les modules croissent indéfiniment.

De ce que les deux fonctions entières  $f_0$  et  $f_1$  ont les mêmes zéros (à un nombre fini près), il résulte que, pour  $y = 0$ , les deux équations (7) ont une infinité de racines communes. Ainsi  $y$  admet comme points critiques un ensemble de points convergeant vers  $x = \infty$ , qui sont les zéros de  $f_0$ . Mais n'y aura-t-il pas d'autres points critiques convergeant vers d'autres valeurs de  $x$ , ou vers toute valeur de  $x$ ? Ici encore nous sommes arrêtés par cette question fondamentale : *Quels sont les cas où les points critiques de la fonction  $y$  définie par la relation (8) ont pour point-limite unique le point  $x = \infty$  ou des points fixés à l'avance ?*

Il y aurait là un difficile sujet de recherches que je me borne à signaler <sup>(2)</sup>. Cependant, dans certains cas, la question pourra être

<sup>(1)</sup> C'est dans la classe définie par la relation (8) que nous pouvons espérer trouver des fonctions  $y$  satisfaisant à des équations différentielles algébriques.

<sup>(2)</sup> Ce problème est en connexion étroite avec le suivant : Étant donnée une fonction définie par la relation (8), quels sont les points-limites des déterminations de sa dérivée ? Dans quels cas la dérivée est-elle, elle aussi, représentable par une relation (8) ?



résolue simplement. Soit, par exemple,

$$\varphi_n = \frac{f_n}{f_0} = \lambda_n \frac{(x - a_{n1}) \dots (x - a_{nv})}{(x - b_{n1}) \dots (x - b_{nv})},$$

où nous supposons que les modules des  $a_{ni}$  et des  $b_{ni}$  croissent indéfiniment avec  $n$  et convergent vers l'infini. Plus précisément nous supposons que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de  $n$ ,

$$|a_{ni}| > \frac{n^\tau}{\nu}, \quad |b_{ni}| > \frac{n^\tau}{\nu} \quad (1 \leq i \leq \nu),$$

$\tau$  étant un nombre supérieur à 2. Soient  $\bar{x}$  une valeur quelconque de  $x$ ,  $\varepsilon$  un nombre donné arbitrairement petit. On vérifie que, quel que soit  $\bar{x}$ , il existera toujours un nombre  $N$  tel que l'on ait, pour  $n > N$ ,

$$\varphi_n(\bar{x}) = \lambda_n \frac{a_{n1} \dots a_{nv}}{b_{n1} \dots b_{nv}} (1 + \delta_n),$$

$|\delta_n|$  étant inférieure à  $|\bar{x}| n^{-\tau+\varepsilon}$ .

Nous sommes ainsi amenés à étudier l'allure de la fonction

$$\Theta(y) = \sum \lambda_n \frac{a_{n1} \dots a_{nv}}{b_{n1} \dots b_{nv}} y^n = \sum l_n y^n$$

dont les coefficients sont indépendants de  $x$ . Il sera souvent possible de connaître avec précision la répartition des zéros de  $\Theta(y) - A$ . Appelons  $\Theta_i(|y|)$  la valeur maxima prise par le module de  $\Theta(y)$  pour une valeur donnée de  $|y|$ . Nous supposons, par exemple, que la fonction  $\Theta(y)$  soit à croissance régulière et jouisse de la propriété suivante : Soit  $\eta_i$  un de ses zéros : la fonction  $\Theta(y) - A$ , pour  $|A| < \frac{1}{i^2} \Theta_i(|\eta_i|)$ , possède un zéro et un seul à l'intérieur d'un cercle de centre  $\eta_i$  et de rayon égal à  $\frac{\varpi_i |\Lambda \eta_i|}{\Theta_i(|y|)}$ ,  $\varpi_i$  étant une certaine fonction décroissante de  $i$ . J'ai cherché à montrer ailleurs <sup>(1)</sup> que cette propriété n'a pas un caractère exceptionnel et qu'elle appartient aux fonctions entières dont les zéros sont régulièrement distribués dans tout le plan. Il me suffira,

---

(1) Dans un Mémoire que je compte publier prochainement et qui traitera de la *Variation des zéros d'une fonction entière en fonction des coefficients*.

ici, de remarquer que les fonctions  $\Theta$  et  $H$  considérées dans la théorie des fonctions elliptiques satisfont à cette condition. Les fonctions entières que M. Painlevé a récemment définies comme satisfaisant à des équations différentielles du troisième ordre jouissent de la même propriété; c'est à cette propriété que M. Painlevé a fait allusion en disant que le module des fonctions considérées atteint partout son maximum sauf à l'intérieur de certains cercles dont le rayon va en décroissant avec  $|\eta_i|$  et dont l'aire totale est négligeable.

Sans entrer dans la discussion de cette question, étrangère à mon sujet, je remarque que, si  $\Theta(y)$  satisfait à la condition énoncée, la question proposée se résout très simplement. On a, en effet, au voisinage de  $|y| = |\eta_n|$

$$\left| \sum \varphi_n(\bar{x}) y^n - \Theta(y) \right| < \sum |\partial_n l_n y^n| < |\bar{x}| [n(y)]^{-\tau+\varepsilon} \Theta_1(|y|),$$

$n$  étant une fonction croissante de  $|y|$ . Il en résulte que la fonction de  $y$   $\sum \varphi_n(\bar{x}) y^n$  admet un zéro, et un seul, à l'intérieur d'un cercle de centre  $\eta_n$  et de rayon égal à  $|\bar{x}| |\eta_n| n^{2-\tau+\varepsilon}$ .

Appelons alors  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots$  les déterminations de  $y$  pour  $x = \bar{x}$ . On voit qu'à partir d'une certaine valeur de  $m$  (d'ailleurs indépendante de  $\bar{x}$ ), il est impossible que deux déterminations  $\bar{y}_m, \bar{y}_{m'}$  coïncident. On en conclut qu'un point quelconque  $\bar{x}$ , situé à distance finie et distinct des points  $b_{ni}$ , ne saurait être point-limite de points critiques.

C. Q. F. D.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que le module de  $b_n$  augmente indéfiniment avec  $n$ . Supposons maintenant qu'à partir d'une certaine valeur de  $n$  le dénominateur de  $\varphi_n$  soit facteur des dénominateurs de tous les coefficients suivants  $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots$ , l'inégalité

$$|b_{ni}| > \frac{n^\tau}{v_n}$$

étant encore satisfaite pour  $v_{n-1} < i \leq v_n$ .

Multiplions les termes de la série (8) par  $(x - b_{n_1}) \dots (x - b_{nv_{n-1}})$ . Elle devient

$$\dots + \lambda_n \frac{(x - a_{n1}) \dots (x - a_{nv})}{(x - b_{n, v_{n-1}+1}) \dots (x - b_{nv})} y^n + \dots = 0.$$

Lorsque  $|\gamma|$  sera assez grand, nous pourrons faire abstraction des  $n$  premiers termes. Nous aurons donc encore

$$\sum |\delta_n l_n \gamma^n| < |\bar{x}| [n(|\gamma|)]^{-\tau+\varepsilon},$$

$n$  étant une certaine fonction croissante de  $|\gamma|$ . La démonstration précédente s'applique donc encore. Si les points  $b_{ni}$ , qui sont les zéros de la fonction multiforme  $\gamma(x)$ , ne sont pas eux-mêmes critiques pour un nombre infini de branches de la fonction, il n'y aura pas à distance finie de point-limite de points critiques.

Ainsi nous avons là un exemple de cas où l'on peut établir que *les points critiques de la fonction étudiée convergent vers l'infini et vers l'infini seulement*. On imaginerait aisément d'autres cas du même genre pour lesquels le résultat serait le même.

#### IV. — Extension du théorème de M. Picard aux fonctions multiformes.

Un problème essentiel, dans l'étude des transcendentes définies par les relations entières (6) ou (8), est celui qui a trait à l'extension possible du célèbre théorème de M. Picard sur les fonctions entières. Voici en quoi consiste cette extension. Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux valeurs de  $\gamma$ . A la valeur  $\gamma_1$  correspondent une infinité de valeurs de  $x$ , soit

$$\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1, \dots,$$

lesquelles convergent par hypothèse vers l'infini et admettent un certain exposant de convergence  $\sigma_1$ . La valeur  $\gamma_2$  aura-t-elle également une infinité de correspondants, et, dans l'affirmative, l'exposant de convergence <sup>(1)</sup>  $\sigma_2$  de ces correspondants sera-t-il égal à  $\sigma_1$  ou différent de  $\sigma_1$ ?

Je ne me propose point d'aborder ce problème dans son ensemble, quoiqu'il comporte sans doute une solution générale. Il a, d'ailleurs, été l'objet de recherches récentes entreprises avec succès par

---

<sup>(1)</sup> J'ai appelé, au paragraphe II, *type* de la fonction  $x(\gamma)$  le plus petit des exposants de convergence tels que  $\sigma_1, \sigma_2$ . Cette définition ne postulait pas l'égalité de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$ .

M. Georges Rémoundos. M. Rémoundos (1) a étendu le théorème de M. Picard à l'équation

$$\sigma_0(u) + \sigma_1(u)A_1(z) + \dots + \sigma_n(u)A_n(z) = 0,$$

où  $A_1, \dots, A_n$  et  $\sigma_0, \dots, \sigma_n$  désignent des fonctions entières. Il publiera prochainement les résultats de recherches ultérieures.

L'une des difficultés principales consiste dans la détermination des cas réguliers où *il ne peut exister aucune valeur* exceptionnelle (2) *de*  $y$ . Ces cas se présentent dans la théorie des fonctions entières lorsque l'ordre de la fonction n'est pas entier. Mais, avec les fonctions que nous étudions ici, il est clair qu'il pourrait y avoir une infinité de valeurs exceptionnelles, quoique la relation (6) soit d'ordre non entier (cette relation sera d'ordre inférieur à 1 si *elle est de genre zéro*, comme on l'a supposé au paragraphe II, et comme je le supposerai dans la suite). C'est pourquoi il ne sera pas inutile de signaler un cas, important dans la pratique, où l'on aura nécessairement (quel que soit  $y_2$ )  $\sigma_2 = \sigma_1$ .

La dérivée  $\frac{dx}{dy}$  est égale à une fonction méromorphe de  $x$  et de  $y$ ,

$$\frac{dx}{dy} = G(x, y) = -\frac{f_1 + 2f_2y + \dots}{f'_0 + f'_1y + \dots}.$$

$y$  ayant une valeur fixe, on sait que l'on peut, d'après la théorie des fonctions entières et méromorphes, assigner au module de  $G$  une limite supérieure fonction de  $|x|$ , laquelle sera valable dans certaines couronnes  $\sum$  [d'épaisseur proportionnelle (3) à  $|x|^{1-\sigma}$ ], entourant l'origine et s'en éloignant indéfiniment. Nous supposerons que, pour  $y$  voisin de  $y_1$  ( $|y - y_1| \leq e^{-1|x|^2}$ ), *cette limite soit inférieure à une puis-*

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, 1904.

(2) Ce mot est pris dans la même acception que dans la théorie des fonctions entières.

(3) C'est-à-dire que le rapport de cette épaisseur à  $|x|^{1-\sigma}$  (module d'un point quelconque de la couronne) reste compris entre deux nombres finis, quelque grand que soit  $|x|$ .  $\sigma$  est l'ordre de la fonction méromorphe. J'ai le droit, après avoir fait, au besoin, un changement de variables, de supposer que  $\sigma < \frac{1}{2}$ .

sance finie de  $|x|$ , ou, plus généralement, à une exponentielle de la forme  $e^{|x|^\tau}$ ,  $\tau$  étant inférieur au type  $\rho$  de  $\gamma(x)$ .

Considérons alors les deux valeurs particulières de  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . D'après le paragraphe II nous pouvons représenter la fonction  $\gamma(x)$  sous deux formes différentes

$$P_1(x, \gamma) = \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_i^1}\right) \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_i^1(x)}\right) = 0,$$

$$P_2(x, \gamma) = \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_i^2}\right) \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{\gamma - \gamma_2}{\gamma_i^2(x)}\right) = 0.$$

Les fonctions  $P_1$  et  $P_2$  sont de genre zéro en  $x$  et  $\gamma$ . Nous avons vu qu'à condition de faire au besoin un changement de variables, on a toujours le droit de supposer qu'il en est ainsi.  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les ordres des fonctions entières  $\prod$  et  $\prod'$ . Nous allons démontrer que l'on a nécessairement  $\sigma_2 \leq \sigma_1$ .

Soit

$$P_1(x, \gamma) = P_2(x, \gamma) Q(x, \gamma).$$

La fonction  $Q$ , qui ne peut être une exponentielle puisque  $P_1$  et  $P_2$  sont de genre zéro, est indépendante de  $\gamma$  : car les produits  $P_1$  et  $P_2$  sont construits de telle sorte qu'ils ne représentent aucune fonction de  $x$  étrangère à la fonction étudiée.  $Q$  ne dépend pas non plus de  $x$ , puisque jamais  $P_1$  et  $P_2$  ne sont nuls ou infinis, quel que soit  $\gamma$ . On a donc

$$(9) \quad P_1(x, \gamma) = C P_2(x, \gamma), \quad C \text{ constante.}$$

Entourons le point  $\gamma = \gamma_1$  d'un petit cercle  $\Gamma$  de rayon  $\alpha$  comparable à  $e^{-|x|^\tau}$ , et considérons (*s'il en existe*) les points  $\xi_m^1, \dots, \xi_{m+n}^1$  correspondant à  $\gamma = \gamma_1$ , qui sont situées dans l'une des couronnes  $\sum$  (d'épaisseur proportionnelle à  $|\xi_m^1|^{1-\sigma}$ ) où l'on a, par hypothèse, pour  $\gamma$  voisin de  $\gamma_1$

$$(10) \quad |G(x, \gamma)| < e^{|x|^\tau}.$$

Au cercle  $\Gamma$  correspondent dans  $\sum$  des aires  $\gamma_n, \dots, \gamma_{m+n}$  entourant les points  $\xi_m^1, \dots, \xi_{m+n}^1$ . Or on déduira de (10) que ces aires sont respectivement comprises à l'intérieur de cercles  $c_1, c_2, \dots$ , de rayon 1 entourant les points  $\xi_m^1$ . Le nombre  $n$  des points  $\xi_i^1$  compris dans  $\sum$  étant d'ailleurs inférieur à  $|\xi_m^1|^\sigma$ , on vérifie (1) qu'il existe nécessairement dans  $\sum$  des couronnes partielles  $\sum'$ , d'épaisseur proportionnelle à  $|\xi_m^1|^{1-2\sigma}$ , qui sont extérieures à toutes les aires  $\gamma$ .

Il existera une infinité de telles couronnes  $\sum'$ , de plus en plus éloignées de l'origine. Or la théorie des fonctions entières nous apprend que de telles couronnes contiennent nécessairement des points  $\bar{x}$  où l'on a en même temps

$$\left| \prod \left( 1 - \frac{\bar{x}}{\xi_i^1} \right) \right| < e^{|\bar{x}|^{\sigma_1 + \varepsilon}}$$

et

$$\left| \prod' \left( 1 - \frac{\bar{x}}{\xi_i^2} \right) \right| > e^{|\bar{x}|^{\sigma_2 - \varepsilon}},$$

quelque petit que soit  $\varepsilon$ . D'autre part, puisque  $\sum'$  est extérieur aux aires  $\gamma$ , on a dans toute la couronne  $\sum'$

$$|y^l(x)| > \alpha.$$

On en déduit (d'après la valeur donnée au rayon  $\alpha$  du cercle  $\Gamma$ ) que l'on a, du moins à partir d'une certaine valeur de  $|y|$ ,

$$\left| \prod_1 \left( 1 - \frac{y - y_1}{y^l} \right) \right| < e^{|y|^{\rho + \varepsilon}},$$

$\rho$  étant le type de  $y(x)$ . D'ailleurs, on peut toujours choisir (2)  $\bar{y}$  (le module de  $\bar{y} - y_2$  étant donné) de telle sorte que

$$\left| \prod_1' \left( 1 - \frac{\bar{y} - y_2}{y^l(x)} \right) \right| > 1.$$

(1) J'ai supposé que  $\sigma < \frac{1}{2}$ .

(2) Je renvoie pour la démonstration de toutes ces assertions à mon Mémoire sur les fonctions entières. Voir p. 20.

On a alors

$$\begin{aligned} |P_1(\bar{x}, \bar{y})| &< e^{|\bar{y}|^{2+\varepsilon} + |\bar{x}|^{\sigma_1+\varepsilon}}, \\ |P_2(\bar{x}, \bar{y})| &> e^{|\bar{x}|^{\sigma_2-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

On voit que, si l'on avait  $\sigma_1 < \sigma_2$ , on pourrait toujours choisir  $\bar{x}$  assez grand pour que l'égalité (9) soit impossible. J'ai donc bien établi que  $\sigma_2 \leq \sigma_1$ .

Réciproquement, si la condition exprimée plus haut est satisfaite au voisinage de  $y = y_2$ , on démontrera que l'on a  $\sigma_1 \leq \sigma_2$ . Il en résulte que  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Comme exemple de fonctions pour lesquelles on saura immédiatement que  $\frac{dx}{dy}$  satisfait, quel que soit  $y$ , à la condition énoncée, je citerai le type suivant, sur lequel je pense avoir occasion de revenir : les rapports  $\frac{f_1}{f_0}, \frac{f_2}{f_0}, \dots$  sont des fonctions rationnelles de la forme

$$\varphi_n = \lambda_n \frac{\left(1 - \frac{x}{a_{n1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_{n\mu}}\right)}{\left(1 - \frac{x}{b_{n1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{b_{n\nu}}\right)},$$

de degrés négatifs et décroissants <sup>(1)</sup> ( $\mu - \nu$  négatif et décroissant). Soit, d'autre part,  $M(|x|)$  le module maximum du dénominateur de  $\varphi_n$  pour  $|x|$  quelconque. Je suppose que l'on ait, quel que soit  $x$ , à l'extérieur de cercles de rayon 1 entourant les points  $b_{n1}, \dots, b_{n\nu}$ , l'inégalité

$$\left| \left(1 - \frac{x}{b_{n1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{b_{n\nu}}\right) \right| > \alpha M(|x|),$$

$\alpha$  étant une constante indépendante de  $|x|$ . Cette dernière condition exprime, comme nous l'avons remarqué au paragraphe III, que la répartition des points  $b_{ni}$  est relativement régulière dans tout le plan.

Dans ces conditions il résulte, du fait que  $\mu - \nu$  va en décroissant, que, lorsque  $|x|$  croît indéfiniment, la somme

$$|\varphi'_2 y_1 + \varphi'_3 y_1^2 + \dots|$$

---

<sup>(1)</sup> On est amené à postuler que le degré  $\varphi_n$  est négatif et décroissant si l'on considère des fonctions multiformes dont les diverses branches croissent indéfiniment avec  $(x)$  à la façon des fonctions rationnelles.

devient, quel que soit  $y_1$ , arbitrairement petite par rapport à  $\varphi_1$ . L'expression

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2 y_1 + \dots}{\varphi_1' y_1 + \varphi_2' y_1^2 + \dots}$$

reste donc (à l'extérieur des cercles entourant les points  $b_{ni}$ ) inférieure à une puissance finie de  $x$ , quel que soit  $y_1$ .

Mais il ne sera souvent pas nécessaire de postuler que la condition imposée à  $\frac{dx}{dy}$  est satisfaite pour toute valeur de  $y$ . Faisons en particulier sur  $f_0$  les hypothèses suivantes : Pour  $y$  voisin de 0,  $G(x, 0)$  satisfait à la condition énoncée. [Si l'on se reporte à la relation (6) on voit qu'il suffit pour cela qu'*au voisinage des zéros de  $f_0(x)$  de modules arbitrairement grands, les rapports  $\frac{f_1}{f_0}, \frac{f_2}{f_0}, \dots$ , et  $\frac{f_1'}{f_0'}, \frac{f_2'}{f_0'}, \dots$  restent tous inférieurs à  $e^{|x|^{\varepsilon}}$ .*] On sait, d'autre part, que, dans des couronnes s'éloignant indéfiniment de l'origine, le module de  $f_0$  oscille entre  $e^{-|x|^{\sigma_1+\varepsilon}}$  et  $e^{|x|^{\sigma_1+\varepsilon}}$  ( $\varepsilon$  étant arbitrairement petit). Je supposerai que *dans ces couronnes  $|f_0|$  atteint effectivement sa limite inférieure  $e^{-|x|^{\sigma_1}}$  sur tout cercle ayant son centre à l'origine.*

Ces deux conditions seront remplies, par exemple, si les fonctions entières  $f_0, f_1, \dots$  sont toutes de même ordre et ont tous leurs zéros réels ou situés dans un même angle inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , les zéros de  $f_0$  étant supposés isolés <sup>(1)</sup>. Un changement algébrique de variables permettra souvent de satisfaire à ces conditions.

Avec les nouvelles hypothèses on démontrera comme précédemment (en faisant  $y_1 = 0$ ) que l'on a  $\sigma_2 \leq \sigma_1$ , *quel que soit  $y_2$* . D'autre part, il existera dans les couronnes  $\sum'$  des points où l'on aura simultanément

$$\left| \prod \left( 1 - \frac{\bar{x}}{\xi_1} \right) \right| < e^{-|x_1|^{\sigma_1-\varepsilon}},$$

$$\left| \prod' \left( 1 - \frac{\bar{x}}{\xi_2} \right) \right| > e^{-|x|^{\sigma_2+\varepsilon}}.$$

(1) Je dis que les zéros sont isolés si l'on ne peut pas, quelque petit que soit  $\varepsilon$ , trouver des couples de zéros, dont la distance deux à deux soit moindre que  $\varepsilon$ .



Choisissant  $\bar{y}$  comme plus haut, on voit que si  $\bar{x}$  est assez grand l'égalité (9) entraîne nécessairement  $\sigma_1 \leq \sigma_2$ .

On en conclut que  $\sigma_2 = \sigma_1$ , quel que soit  $y_2$ .

#### V. — Fonctions admettant la valeur d'exception zéro.

J'ai examiné, dans le paragraphe précédent, des fonctions qui ne présentaient, relativement au théorème de M. Picard, aucune valeur *exceptionnelle*. Dans ce dernier paragraphe je dirai quelques mots des fonctions multiformes [satisfaisant à une relation (6)], qui ont au contraire une valeur exceptionnelle, par exemple qui ne s'annulent jamais.

La relation (6) devient en ce cas

$$(11) \quad 1 + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \dots = 0.$$

Il y a certaines analogies entre une telle fonction  $y$  et l'inverse d'une fonction entière. Proposons-nous, par exemple, d'étudier le mode de croissance de la plus petite détermination de  $y(x)$ . Nous allons retrouver quelques-unes des propriétés qui caractérisent les fonctions méromorphes ne s'annulant jamais.

Les déterminations de  $y$  étant numérotées (pour une valeur quelconque de  $x$ ) par ordre de modules croissants, la détermination de plus petit module sera désignée par  $y_1(x)$ . Nous appellerons  $\sigma$  le *type* de  $x(y)$ , *ordre* des fonctions  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ .

Je dis d'abord que *l'on aura, à partir d'une certaine valeur de  $|x|$ ,*

$$(12) \quad |y_1(x)| > e^{-|x|^{\sigma+\varepsilon}}$$

*quelque petit que soit  $\varepsilon$ .*

Supposons en effet que l'on ait, pour des valeurs  $\bar{x}$  indéfiniment éloignées,

$$|\bar{y}_1| < e^{-|\bar{x}|^{\sigma+\alpha}} \quad \alpha > 0.$$

La fonction entière de  $\bar{x}$

$$f_2(\bar{x})\bar{y}_1 + f_3(\bar{x})\bar{y}_1^2 + \dots,$$

où  $y$  a la valeur fixe  $\bar{y}_1$ , est inférieure, en module, à  $e^{|\bar{x}|^{\sigma+\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon$  étant inférieur à  $\alpha$  si  $|\bar{x}|$  est assez grand. Il en résulte que, lorsque  $|x|$  dépassera un certain nombre  $X$ , on aura

$$|1 + \bar{y}_1[f_2(\bar{x})\bar{y}_1 + \dots]| > \frac{1}{2}.$$

L'égalité (11) donne alors

$$|\bar{y}_1| = |y_1(\bar{x})| > \frac{1}{2|f_1(\bar{x})|} > e^{-|\bar{x}|^{\sigma+\varepsilon}}.$$

Notre hypothèse était donc illégitime, et l'on a bien toujours l'inégalité (12) pour  $|x| > X$ .

Je dis, d'autre part, que l'on a, pour des valeurs de  $x$  indéfiniment éloignées,

$$(13) \quad |y_1(x)| < e^{-|x|^{\sigma-\varepsilon}},$$

quelque petit que soit  $\varepsilon$ .

Pour le vérifier, nous écrirons le premier membre de (11) sous la forme

$$1 + f_1 y + f_2 y^2 + \dots = \prod_{i=1}^{i=\infty} \left[ 1 - \frac{y}{y_i(x)} \right].$$

Supposons que

$$(14) \quad |y_1(x)| > e^{-|x|^{\sigma-\alpha}} \quad (\alpha > 0).$$

On a évidemment, quel que soit  $x$ , à partir d'une certaine valeur de  $k$ ,

$$|y_{k+j}| > 1 \quad (j \text{ entier quelconque}).$$

En se reportant à la théorie des fonctions entières, on vérifie alors

que l'on a, à partir d'une certaine valeur de  $|\gamma|$ ,

$$\left| \prod_{i=k+1}^{i=\infty} \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma_i} \right) \right| < e^{b|\gamma|^{q+\varepsilon}},$$

et par suite que le produit infini  $\prod$  est, en module, inférieur à

$$(15) \quad e^{|\gamma|^{q+\varepsilon} + k|x|^{\sigma-\alpha}|\gamma|}.$$

Si l'inégalité (14) était satisfaite quel que soit  $x$ ,  $\left| \prod \right|$  devrait être inférieur à la limite (15) pour toutes valeurs de  $x$  et  $\gamma$ . Or on voit immédiatement, en considérant le premier membre de (11) comme une fonction entière de  $x$ , qu'il ne saurait en être ainsi. Plus précisément, si cette fonction entière de  $x$  est à croissance régulière, *l'inégalité (13) sera satisfaite sur des arcs de tout cercle de rayon supérieur à X ayant son centre à l'origine* (X nombre fixe).

On peut compléter l'étude de la croissance ou plutôt de la décroissance de  $\gamma_1(x)$ , en considérant la dérivée logarithmique  $\frac{\gamma'_1}{\gamma_1}$  que l'on comparera, de même que dans la théorie des fonctions entières, à une puissance finie de la variable  $|x|$ . Mais je me bornerai à constater la possibilité de cette étude qui n'est point, pour le moment, susceptible d'applications.

Je vais, pour terminer, signaler une classe de fonctions multiformes, à la vérité très spéciale, mais qui offre peut-être un intérêt particulier. Lorsque l'on étudie une fonction multiforme, on rencontre, entre autres problèmes, deux questions d'une importance fondamentale : 1° Comment se comporte une branche particulière de la fonction ? Quelles relations y a-t-il entre les permutations s'opérant autour des divers points critiques ?

Ces deux questions sont en général extrêmement complexes. Peut-être sera-t-il cependant possible de jeter quelque lumière sur elles dans des cas spéciaux, dont l'étude offrira, pour cette raison, un intérêt particulier.

Je considérerai une fonction  $y(x)$  définie par la relation

$$(16) \quad 1 + y p_1(x) + y^2 p_2(x) + \dots = 0,$$

où les  $p_i$  sont tous des polynomes, et, appelant  $\mu_i$  le degré de  $p_i$ , je supposerai que l'on a, pour toute valeur <sup>(1)</sup> de  $i$ ,

$$\mu_i = i \mu_1.$$

Appelons  $b_i$  le coefficient de  $x^{\mu_i}$  dans  $p_i$ . Nous supposons que le rapport à  $b_i$  des autres coefficients de  $p_i$  reste, quel que soit  $i$ , inférieur à un même nombre fini  $H$ . On peut alors déterminer un nombre  $X$  tel que l'on ait, pour  $|x| > X$ ,

$$p_1(x) = b_1(1 + \beta_1)x^{\mu_1}, \quad \dots, \quad p_i(x) = b_i(1 + \beta_i)x^{\mu_i} = b_i(1 + \beta_i)x^{i\mu_1},$$

$|\beta_1|, \dots, |\beta_i|, \dots$  étant inférieurs à  $|x|^{-1+\delta}$ , où  $|\delta|$  est arbitrairement petit si l'on a pris  $X$  assez grand.

Si nous posons

$$x^{\mu_1} y = z,$$

nous voyons que, pour  $|x| > X$ , l'égalité (16) se présentera sous la forme

$$(17) \quad 1 + b_1(1 + \beta_1)z + \dots + b_i(1 + \beta_i)z = 0.$$

Nous nous placerons dans le cas où la fonction entière de  $z$

$$\Theta(z) = \sum b_i z^i$$

satisfait aux conditions qui nous ont déjà servi au paragraphe III.  $\Theta_1(|z|)$  étant le module maximum de  $\Theta(z)$  pour  $|z|$  quelconque, et  $\eta_i$  étant un zéro de  $\Theta(z)$ , la fonction  $\Theta(z) - A$  possède [pour  $|A| < \frac{1}{\delta^2} \Theta_1(|\eta_i|)$ ], un zéro et un seul à l'intérieur d'un cercle de centre  $\eta_i$  et de rayon égal à  $\varpi_i \frac{|A \eta_i|}{\Theta_1(|\eta_i|)}$ ,  $\varpi_i$  étant une fonction décroissante de  $i$ .

---

(1) Il suffit évidemment de supposer que l'on a  $\mu_i = i \mu_1$ , sauf au plus pour un nombre fini de valeurs de  $i$  pour lesquelles  $\mu_i < i \mu_1$ .

Cherchons alors comment se comporte l'ensemble des déterminations de  $z$  pour une valeur de  $|\bar{x}|$  supérieure à  $X$ . Si nous désignons par  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots$  les déterminations de  $z$  pour  $x = \bar{x}$ , et par  $\eta_1, \eta_2, \dots$  les zéros de  $\Theta(z)$ , nous aurons, quel que soit  $i$ , si  $X$  est assez grand, l'égalité

$$(18) \quad z_i = \eta_i(1 + \alpha_i),$$

$|\alpha_i|$  étant inférieur à  $|\bar{x}|^{-1+\delta'}$ .

Si nous revenons alors à  $\gamma$ , nous pourrions, pour  $|x| > X$ , représenter ses diverses déterminations par les formules

$$(19) \quad \gamma_1 = \eta_1 x^{-\mu_1}(1 + \alpha_1), \quad \dots, \quad \gamma_i = \eta_i x^{-\mu_i}(1 + \alpha_i), \quad \dots,$$

$|\alpha_1|, \dots, |\alpha_i|, \dots$  tendant vers zéro avec  $\frac{1}{|x|}$ . On voit en particulier que si  $X$  est assez grand deux déterminations  $\gamma_i$  quelconques ne sauraient coïncider pour  $|x| > X$ . *Les diverses branches de la fonction multiforme  $\gamma$  ne peuvent donc présenter aucun point critique pour  $|x| > X$ .* Lorsque  $|x|$  augmente indéfiniment,  $\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots$  tendent vers zéro. D'ailleurs les valeurs correspondantes de  $z$  tendent vers les valeurs  $\eta_1, \dots, \eta_i, \dots$  qui sont, par hypothèse, distinctes. Les déterminations de  $\gamma$  sont donc holomorphes au voisinage de  $x = \infty$ .

Supposons que, dans le plan des  $\gamma$ , nous entourions le point zéro d'un cercle de rayon inférieur à  $|X|^{-\mu}$ . A ce cercle correspondent, dans le plan des  $x$ , des aires extérieures à des cercles de rayons indéfiniment croissants entourant l'origine. Lorsque nous faisons décrire, à la variable  $x$ , l'un de ces cercles à l'extérieur desquels  $\gamma$  est holomorphe, cela revient à le faire tourner autour d'un certain nombre de points critiques. *Les substitutions correspondant aux permutations qui s'opèrent autour de ces divers points critiques ne sont donc pas indépendantes : il existe entre elles une relation exprimant que leur produit se réduit à la substitution identique* <sup>(1)</sup>.

C'est là une propriété qui semble de nature à éclairer un peu l'étude

---

<sup>(1)</sup> D'une manière générale il suffit, pour que l'on ait de telles relations, qu'il existe des branches de la fonction  $x(\gamma)$  ne présentant aucun point critique au voisinage de  $\gamma = 0$ .

ultérieure des fonctions définies par une relation (16). Je ne poursuivrai pas ici cette étude. Aussi bien les fonctions multiformes qui se rapprochent le plus des fonctions que l'on rencontre dans la théorie des équations différentielles ne seront-elles pas celles qui tendent vers zéro lorsque  $|x|$  augmente indéfiniment, mais celles dont les diverses branches présentent pour  $x = \infty$  des singularités polaires. Je me propose de revenir sur ces fonctions. Dans ce travail j'ai voulu seulement rechercher quelle est la nature des questions que l'on peut se poser à leur sujet. Les divers exemples que j'ai passés en revue suffiront, je crois, à justifier l'opinion que je formulais en commençant : il est nécessaire de faire certaines hypothèses particulières si l'on veut étudier avec profit les fonctions multiformes définies par une relation entière entre  $x$  et  $y$ . Au lieu de choisir arbitrairement ces hypothèses, ne conviendrait-il pas de s'adresser d'abord à la théorie des équations différentielles pour lui demander quelques suggestions?

