LOUIS RAFFY

Recherches sur les surfaces isothermiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 22 (1905), p. 397-439
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__397_0>

RECHERCHES

SUR LES

SURFACES ISOTHERMIQUES,

Par M. Louis RAFFY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

PREMIÈRE PARTIE.

Le présent Mémoire a pour objets principaux, d'abord d'étudier une classe de surfaces jadis rencontrées par Ossian Bonnet, ensuite de rapprocher les unes des autres cinq classes de surfaces isothermiques par un caractère nouveau qui leur est commun et qui n'appartient qu'à elles.

I. Dans son célèbre *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables* (1), O. Bonnet a recherché, entre autres, les surfaces qui admettent une série continue de déformations sans altération des courbures principales. L'une des classes de surfaces qui répondent à la question dépend de deux fonctions arbitraires : après les avoir définies intrinsèquement, l'illustre géomètre fait observer (p. 83) qu'elles ont la même généralité que les surfaces minima et s'en tient là.

Dans une Note publiée en 1893, je démontrai (2) que *ces surfaces sont isothermiques*. En 1897, M. J.-N. Hazzidakis réussit (3) à exprimer leurs coordonnées par des formules où les fonctions arbitraires

(1) *Journal de l'École Polytechnique,* XLII^e Cahier; 1867.

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXI, p. 70.

(3) *Journal de Crelle,* t. 117.

figurent sous les signes d'intégration. Même après ce réel progrès, il y avait encore lieu de se demander comment ces surfaces sont engendrées et si dans leur nombre il en est de réelles.

Ces surfaces d'Ossian Bonnet, que j'appelle *surfaces* (B), sont caractérisées, comme on le verra (§ IV), par la propriété que *leurs sphères harmoniques ont leurs centres sur un même plan isotrope*. Il suit de là, d'abord, qu'*elles sont toutes imaginaires*, ensuite (§ VII) qu'*elles sont les inverses des inverses des surfaces minima, la seconde inversion étant faite d'un pôle situé à distance nulle du point que l'on a pris comme pôle pour faire l'inversion des surfaces minima* (1). En raison de cette génération, leurs coordonnées s'expriment d'une manière entièrement explicite, au moyen de deux fonctions arbitraires dont les arguments sont les paramètres des lignes de longueur nulle.

Je démontre, en outre (§ VI), qu'*à toute surface* (B) *correspond une autre surface* (B) *dans la transformation conforme par normales parallèles*, spéciale aux surfaces isothermiques (Bour, Christoffel). Cette propriété remarquable d'être invariantes, quant à leur définition, relativement à la transformation précitée, appartient aussi (§ VI) aux surfaces que M. Thybaut a découvertes et étudiées (2), et qu'on peut définir comme ayant leurs sphères harmoniques tangentes à un même plan. Entre ces dernières surfaces, que j'appelle *surfaces* (Θ), et les surfaces (B) il existe donc une étroite affinité. Les unes comme les autres ont leurs sphères harmoniques tangentes à un même plan : si le plan n'est pas isotrope, on a les surfaces (Θ); si le plan est isotrope, il est plan asymptote des sphères harmoniques et contient leurs centres : on a alors les surfaces (B).

II. Les surfaces (B) et les surfaces (Θ) ont encore en commun (§ VI) cette propriété que *leur élément linéaire, multiplié par le carré de la demi-différence de leurs courbures principales, devient l'élément linéaire d'une sphère de rayon* 1. Cette propriété, d'ailleurs, se rencontre

---

(1) Cette *double inversion singulière*, qui n'avait, je crois, jamais été signalée, met en défaut le théorème classique de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1846), suivant lequel deux inversions successives peuvent être remplacées par une seule, si l'on fait abstraction d'un déplacement.

(2) *Annales de l'École Normale*, 1897 et 1900.

aussi (§ VII) chez les surfaces minima et se conserve dans l'inversion. Elle appartient donc : 1° et 2° aux surfaces de M. Thybaut et à leurs inverses; 3° et 4° aux surfaces minima et à leurs inverses; 5° aux surfaces (B) d'Ossian Bonnet, dont les inverses sont ou des surfaces (B) ou des inverses de surfaces minima.

Tel est le nouveau caractère qu'il paraît curieux de retrouver dans les *cinq seules* classes de surfaces isothermiques dont on ait pu exprimer les coordonnées d'une manière *entièrement explicite* au moyen de *deux fonctions arbitraires*. Je prouve en terminant que ce caractère est *distinctif*, de sorte que les cinq classes de surfaces qui le présentent constituent un groupe à part dans l'ensemble des surfaces isothermiques.

III. Accessoirement, j'ai été conduit à donner, au sujet des enveloppes de sphères (§ I), des surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle (§ III) et de la transformation conforme par normales parallèles (§ V), des propositions et formules générales, qui semblent comporter bien d'autres applications que celles qui s'offrent au cours de ces recherches. Enfin, je définis (§ II), en connexion avec un théorème de M. Darboux, les deux classes de surfaces isothermiques dont les sphères harmoniques touchent une seconde surface isothermique.

I. — Formules relatives aux enveloppes de sphères à deux paramètres; conséquences.

1. Nous commencerons par rappeler diverses formules relatives aux enveloppes de sphères à deux paramètres; puis nous déduirons de ces formules des conséquences dont nous aurons à faire usage.

M. Darboux a étudié (*Ann. École Norm.*, t. XVI; 1899) les enveloppes de sphères dont les deux nappes présentent tout à la fois la correspondance des lignes de courbure et la proportionnalité des éléments linéaires, ce qui exige que ces deux nappes soient isothermiques, si elles ne sont pas inverses l'une de l'autre.

La première nappe d'une enveloppe de sphères étant rapportée à ses lignes de courbure ($\rho = \text{const.}$, $\rho_1 = \text{const.}$) et ses rayons principaux étant R et R_1, le rayon de la sphère enveloppée est représenté par

$$l = -\frac{\lambda}{\mu}. \tag{1}$$

On assujettit λ et μ aux conditions

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + R\frac{\partial\mu}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} + R_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1} = 0, \tag{2}$$

en vertu desquelles les lignes de courbure se correspondront sur les deux nappes de l'enveloppe de sphères. On introduit une fonction auxiliaire θ, ainsi définie

$$-\frac{2}{\theta} = \frac{\mu^2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\Delta_1\lambda, \tag{3}$$

Δ_1 étant le premier paramètre différentiel de la fonction λ relativement à l'élément linéaire

$$ds^2 = H^2\,d\rho^2 + H_1^2\,d\rho_1^2 \tag{4}$$

de la première nappe. On trouve alors pour l'élément linéaire de la seconde nappe

$$dS^2 = \frac{\left(\frac{\partial \log\theta}{\partial\rho}\right)^2}{\left(\frac{\partial \log\lambda}{\partial\rho}\right)^2} H^2\,d\rho^2 + \frac{\left(\frac{\partial \log\theta}{\partial\rho_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial \log\lambda}{\partial\rho_1}\right)^2} H_1^2\,d_1^2, \tag{5}$$

et pour ses courbures principales

$$\frac{1}{R'} = -\frac{1}{\theta'_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\theta\mu}{\lambda}\right), \qquad \frac{1}{R'_1} = -\frac{1}{\theta'_{\rho_1}}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{\theta\mu}{\lambda}\right). \tag{6}$$

J'emprunte ces dernières formules à la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (t. II, p. 343; faire $\rho_2 = 0$, remplacer R' et R'_1 par leurs inverses).

2. Nous sommes dès maintenant en mesure d'établir les conditions sous lesquelles la seconde nappe de l'enveloppe des sphères sera un point, un plan ou une sphère.

D'après la formule (5), en effet, pour que la seconde nappe se réduise à un point, il faut et il suffit que la fonction θ soit une constante, ce qui revient, en vertu des relations (3) et (1), à

$$\lambda\left(\frac{1}{l^2}+\Delta_1\log\lambda\right)=\text{const.} \tag{7}$$

D'après les formules (6), rapprochées de la relation (1), pour que la seconde nappe soit un plan, il faut et il suffit que la fonction $\theta : l$ soit une constante, ce qui donne

$$\lambda l\left(\frac{1}{l^2}+\Delta_1\log\lambda\right)=\text{const.} \tag{8}$$

Enfin, si l'on égale à une constante ω les seconds membres des équations (6), en ayant égard à la relation (1), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\theta}{l}\right)=\omega\frac{\partial\theta}{\partial\rho},\qquad \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{\theta}{l}\right)=\omega\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1},$$

d'où résulte, par une intégration immédiate,

$$\theta\left(\frac{1}{l}-\omega\right)=\text{const.}$$

Telle est la condition, évidemment nécessaire et suffisante, pour que la seconde nappe soit une sphère de courbure ω. Si l'on tient compte des relations (1) et (3), cette condition peut s'écrire

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{l^2}+\Delta_1\log\lambda\right)}{\frac{1}{l}-\omega}=\text{const.} \tag{9}$$

3. Les formules (4) et (5) mettent en évidence les cas où les éléments linéaires des deux nappes sont proportionnels. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}\mp\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}=0.$$

1° Soit d'abord

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}=0.$$

Cette condition exprime que les deux nappes de l'enveloppe sont inverses l'une de l'autre. On peut en choisir une arbitrairement : les lignes de courbure se correspondront sur les deux nappes et les éléments linéaires seront proportionnels, en vertu des propriétés bien connues de l'inversion.

2° Soit maintenant

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}=0. \tag{10}$$

M. Darboux a prouvé que cette hypothèse entraîne l'isothermie de la première nappe et, par suite aussi, de la seconde. En conséquence, *quand les deux nappes d'une enveloppe de sphères sont telles que leurs lignes de courbure se correspondent et que leurs éléments linéaires soient proportionnels, ces deux nappes, si elles ne sont pas inverses l'une de l'autre, sont des surfaces isothermiques.*

4. En vue d'applications ultérieures, nous allons éliminer θ entre la condition (10) de M. Darboux et l'équation (3) qui définit θ, savoir

$$-\frac{2}{\theta}=\frac{\mu^2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\Delta_1\lambda.$$

Si nous différentions celle-ci en ayant égard aux conditions (2), nous trouverons

$$\begin{aligned}\frac{2}{\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}&=-\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}+\frac{2\mu}{\lambda R}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\lambda}\Delta_1\lambda\right),\\ \frac{2}{\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}&=-\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}+\frac{2\mu}{\lambda R_1}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}+\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{1}{\lambda}\Delta_1\lambda\right).\end{aligned}$$

Substituons ces dérivées de θ dans l'équation (10); elle devient

$$\frac{2\mu}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\frac{1}{\lambda'_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\lambda}\Delta_1\lambda\right)-\frac{1}{\lambda'_{\rho_1}}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{1}{\lambda}\Delta_1\lambda\right)=0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2}+\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)+\frac{\Delta_1\lambda}{\lambda^2}-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\lambda'_\rho}\frac{\partial\Delta_1\lambda}{\partial\rho}+\frac{1}{\lambda'_{\rho_1}}\frac{\partial\Delta_1\lambda}{\partial\rho_1}\right)=0.$$

Mais, en ayant égard à l'expression de $\Delta_1\lambda$, qui devient

$$\Delta_1\lambda=\frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}\right)^2,$$

puisque $H_1^2=H^2$, on arrive aisément à l'identité générale

$$\frac{1}{\lambda'_\rho}\frac{\partial\Delta_1\lambda}{\partial\rho}+\frac{1}{\lambda'_{\rho_1}}\frac{\partial\Delta_1\lambda}{\partial\rho_1}=\frac{2}{H^2}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho_1^2}\right)=2\Delta_2\lambda,$$

où $\Delta_2\lambda$ est le second paramètre différentiel de λ relativement à l'élément linéaire (4) de la première nappe. En conséquence, l'équation précédente prend la forme

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2}+\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{\lambda^2}(\Delta_1\lambda-\lambda\Delta_2\lambda)=0,$$

ou encore

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2}+\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\Delta_2\log\lambda=0.$$

Il n'y a plus qu'à chasser μ au moyen de la relation (1) pour obtenir la condition définitive

$$\frac{1}{l^2}-\frac{1}{l}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\Delta_2\log\lambda=0, \tag{11}$$

où ne figurent que des symboles invariants. Réciproquement, si l'on part de cette équation et que l'on reprenne le calcul en sens inverse, on retrouve la condition (10). Le résultat s'énonce ainsi : *Une sphère reste constamment tangente à une surface* (S), *dont les rayons de courbure principaux sont* R *et* R_1 ; *le rayon de cette sphère est*

$$l=-\frac{\lambda}{\mu},$$

λ *et* μ *satisfaisant aux conditions* (2). *La seconde nappe de son enve-*

loppe est une surface dont les lignes de courbure correspondent à celles de (S). *Pour que les deux nappes aient leurs éléments linéaires proportionnels, sans être inverses l'une de l'autre, il faut et il suffit que l et λ vérifient l'équation* (11), *où le second paramètre différentiel Δ_2 est relatif à l'élément linéaire de la première nappe, nécessairement isothermique.*

II. — Recherche des surfaces isothermiques dont les sphères harmoniques sont tangentes à une autre surface isothermique.

5. Convenons d'appeler *sphère harmonique* d'une surface (S) en un point P la sphère tangente en P et qui a pour centre le conjugué harmonique de P par rapport aux deux centres de courbure principaux de (S) relatifs à ce point. Le rayon de cette sphère est égal à l'inverse de la courbure moyenne de (S) en P.

Dans le Mémoire déjà cité, M. Darboux a fait connaître une importante proposition, qui peut s'énoncer ainsi :

Pour qu'une surface (S) *soit isothermique, il faut et il suffit que ses sphères harmoniques touchent une autre surface* (Σ), *dont les lignes de courbure correspondent à celles de* (S).

Cette seconde nappe (Σ) n'est pas en général isothermique, parce que la correspondance entre (S) et (Σ) n'est pas *conforme*, c'est-à-dire qu'il n'y a point proportionnalité entre les éléments linéaires. C'est pourtant ce qui arrive pour certaines surfaces, qui ont été découvertes par M. Thybaut.

Appelons *surfaces de M. Thybaut* ou *surfaces* (Θ) les surfaces dont toutes les sphères harmoniques touchent un plan (non isotrope). Ces surfaces, sur lesquelles nous aurons à revenir, sont *isothermiques;* le plan étant aussi une surface isothermique, on peut dire que les sphères harmoniques des surfaces (Θ) ont une enveloppe dont les deux nappes sont isothermiques.

Soumettons une surface (Θ) à une inversion dont le pôle ne soit pas sur le plan que touchent ses sphères harmoniques; comme l'inversion conserve la propriété des sphères harmoniques, nous obtiendrons une nouvelle surface isothermique dont les sphères harmoniques seront tangentes à une sphère, surface isothermique.

Il y a donc lieu de *rechercher les surfaces isothermiques dont les sphères harmoniques touchent une autre surface isothermique*. Pour résoudre ce problème, il faut évidemment distinguer deux cas, suivant que la correspondance entre les deux nappes est ou n'est pas une inversion.

6. Premier cas : *La correspondance entre les deux nappes est une inversion.* — On sait que, quand les deux nappes d'une enveloppe de sphères se correspondent par inversion, les sphères enveloppées sont orthogonales à une sphère fixe, et réciproquement. Prenons pour origine des coordonnées le centre de la sphère fixe, qui sera le pôle d'inversion, et soit l_0 le rayon de cette sphère. Soient de plus (x, y, z) les coordonnées d'un point P de l'une des nappes; a, b, c les cosinus directeurs de la normale en ce point. On sait que la sphère enveloppée relative au point P a pour rayon

$$l = \frac{l_0^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{2(ax + by + cz)}.$$

Écrivons que ce rayon est égal à l'inverse de la courbure moyenne. Nous obtiendrons l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{l_0^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{ax + by + cz},$$

qui définit les surfaces cherchées. En effet, la seconde nappe vérifie également cette équation : pour le voir, développons les formules (6) en ayant égard aux relations (1) et (2); nous trouvons

$$(1) \qquad \frac{1}{R'} - \frac{1}{l} = \frac{\theta\lambda'_\rho}{\lambda\theta'_\rho}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l}\right), \qquad \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{l} = \frac{\theta\lambda'_{\rho_1}}{\lambda\theta'_{\rho_1}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{l}\right).$$

Mais, l étant l'inverse de la courbure moyenne de la première nappe, les parenthèses qui figurent dans les seconds membres sont égales et de signes contraires.

D'autre part, la correspondance étant une inversion, on a (nº 3)

$$\frac{\theta\lambda'_\rho}{\lambda\theta'_\rho} = \frac{\theta\lambda'_{\rho_1}}{\lambda\theta'_{\rho_1}}.$$

En conséquence, il vient

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R'_1} = \frac{2}{l},$$

ce qui justifie notre assertion.

Remarquons encore, comme l'a fait M. Thybaut (*Ann. Éc. Norm.*, 1900, p. 563), que, si l'on soumet ces surfaces à une inversion en prenant pour pôle un point de la sphère fixe, on les transforme en d'autres, dont les sphères harmoniques sont orthogonales à un plan fixe et ont, en conséquence, leurs centres sur ce plan. Ainsi *les surfaces cherchées sont les inverses des surfaces dont la développée harmonique est un plan* (non isotrope).

7. Second cas : *La correspondance entre les deux nappes n'est pas une inversion.* — Or la transformation a lieu avec correspondance des lignes de courbure, puisque la première nappe est supposée isothermique et que la sphère enveloppée est sa sphère harmonique. De plus, les éléments linéaires des deux nappes sont, par hypothèse, proportionnels. Nous devons donc appliquer les formules rappelées au n° 3; et, comme la correspondance n'est pas une inversion, c'est la relation (10) qui est valable. On aura donc

$$\frac{\theta \lambda'_\rho}{\lambda \theta'_\rho} = -\frac{\theta \lambda'_{\rho_1}}{\lambda \theta'_{\rho_1}},$$

et, si l'on se reporte aux formules (1), comme on a encore

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{l} = -\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{l}\right),$$

on voit que les deux rayons de courbure principaux R' et R'_1 de la seconde nappe sont égaux. Or les surfaces imaginaires de Monge, qui jouissent de cette propriété, sont exclues par les formules dont nous faisons usage, parce que leurs lignes de courbure sont confondues. Il ne reste que la sphère et le plan. Ainsi la seconde nappe de l'enveloppe des sphères harmoniques est un plan ou une sphère : *les surfaces de M. Thybaut et leurs inverses sont donc les seules qui répondent à la question.*

8. Nous allons former une équation invariante à laquelle satisfont ces deux classes de surfaces. A cet effet, introduisons la demi-somme Ω et la demi-différence Γ des courbures principales

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right), \qquad \Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right), \tag{2}$$

ainsi que la courbure totale

$$K = \frac{1}{RR_1},$$

entre lesquelles a lieu l'identité

$$K = \Omega^2 - \Gamma^2. \tag{3}$$

La courbure moyenne Ω étant l'inverse du rayon de la sphère harmonique, nous aurons

$$l = \frac{1}{\Omega}. \tag{4}$$

D'autre part, M. Darboux a démontré (*loc. cit.*) que, si la première nappe (S) est isothermique ($H_1^2 = H^2$), on satisfait aux équations (2) du n° 1 en prenant

$$\lambda = H^2\Gamma, \qquad \mu = - H^2\Omega\Gamma, \tag{5}$$

ce qui donne bien la sphère harmonique. Nous n'avons donc qu'à faire

$$l = \frac{1}{\Omega}, \qquad \lambda = H^2\Gamma$$

dans l'équation générale (11) obtenue au n° 4. Nous trouvons ainsi

$$\Omega^2 + \Delta_2 \log H^2\Gamma = 0. \tag{6}$$

Mais, comme la courbure totale K de l'élément linéaire

$$H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2)$$

a pour expression bien connue

$$K = - \Delta_2 \log H,$$

il vient finalement

$$\Omega^2 - 2K + \Delta_2 \log \Gamma = 0. \tag{7}$$

Telle est la relation que vérifient les surfaces (Θ) de M. Thybaut et leurs inverses.

III. — Surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle : formules générales; condition d'isothermie des lignes de courbure.

9. Nous rappellerons d'abord, en la modifiant légèrement dans sa forme, l'analyse d'Ossian Bonnet (*Journ. Éc. Polyt.*, cahier XLII, 1867, p. 1) relative à la recherche des surfaces qui admettent un élément linéaire donné, quand on les rapporte à leurs lignes de longueur nulle.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires des points d'une surface; α et β les paramètres des lignes de longueur nulle. On donne l'élément linéaire

$$ds^2 = 4\varphi^2(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \tag{1}$$

ce qui revient à poser les trois équations

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 2\varphi^2. \tag{4}$$

Introduisons les coordonnées complexes

$$x + iy = \xi, \qquad x - iy = \eta, \tag{5}$$

et soient p, q, r, s, t, les dérivées de ξ; celles η seront représentées par p_1, q_1, r_1, s_1, t_1. En vertu des équations (5), (2) et (3), on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}(p + p_1), \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{i}{2}(p - p_1), \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = i\sqrt{pp_1},\\ &\frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{1}{2}(q + q_1), \qquad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\frac{i}{2}(q - q_1), \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = i\sqrt{qq_1}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la condition (4), on trouve

$$(7)\qquad 2\varphi = \sqrt{p}\sqrt{q_1} - \sqrt{q}\sqrt{p_1}.$$

La condition d'intégrabilité de dz, savoir

$$(8)\qquad \sqrt{p_1}\frac{s}{\sqrt{p}} + \sqrt{p}\frac{s_1}{\sqrt{p_1}} = \sqrt{q_1}\frac{s}{\sqrt{q}} + \sqrt{q}\frac{s_1}{\sqrt{q_1}},$$

ordonnée et simplifiée, se réduit à

$$(9)\qquad \frac{s}{\sqrt{pq}} = \frac{s_1}{\sqrt{p_1 q_1}},$$

relation remarquable sur laquelle nous aurons à revenir. Elle donne lieu à la suite de rapports égaux

$$(9)'\qquad \frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta} = \frac{1}{\sqrt{p_1}}\frac{\partial\sqrt{q_1}}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sqrt{q_1}}\frac{\partial\sqrt{p_1}}{\partial\beta} = \frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial\sqrt{q}}{\partial\alpha}.$$

Mais, si l'on tire $\sqrt{q_1}$ de l'équation (7), la relation (9) devient

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{p_1}{p}} = -\frac{2}{\sqrt{q}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{p}}\right).$$

D'autre part, la même valeur de $\sqrt{q_1}$, substituée dans la condition

$$\frac{\partial\sqrt{p_1}}{\partial\beta} = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q}}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta},$$

qui est l'une des équations (9)', la transforme en

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{p_1}{p}} = -\frac{2\varphi}{\sqrt{q}}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

Les relations (10) et (11) permettent d'éliminer p_1. On obtient ainsi l'équation d'Ossian Bonnet

$$(12)\qquad \varphi(rt - s^2) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}qr - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}pt + 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}pq = 0,$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right)-\frac{s^2}{\varphi^4}+4\frac{pq}{\varphi^4}\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0, \tag{12'}$$

et que nous appellerons *l'équation de déformation*. Connaissant une solution ξ de cette équation, on déterminera $\sqrt{p_1}$ par quadrature

$$\sqrt{\frac{p_1}{p}}=2\int-\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{p}}\right)d\alpha+\frac{\varphi}{\sqrt{q}}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)d\beta; \tag{13}$$

l'équation (7) donne alors

$$\sqrt{q_1}=2\frac{\varphi}{\sqrt{p}}+\sqrt{q}\sqrt{\frac{p_1}{p}}.$$

On connaît ainsi les deux dérivées partielles p_1 et q_1 de η, qui s'obtient par quadrature; il est de même de z, qui a pour expression

$$z=i\int\sqrt{pp_1}\,d\alpha+\sqrt{qq_1}\,d\beta. \tag{14}$$

Remarque. — L'équation d'Ossian Bonnet jouit d'une propriété importante : *chacune de ses solutions fournit une surface admettant l'élément linéaire* $4\varphi^2\,d\alpha\,d\beta$; c'est ce qui résulte avec évidence de l'analyse précédente. On sait qu'il n'en est pas ainsi pour toute solution de l'équation de Bour et des équations similaires.

10. Nous empruntons encore au Mémoire d'Ossian Bonnet (p. 8) l'équation aux rayons de courbure principaux

$$\frac{1}{R^2}+\frac{is}{\varphi\sqrt{pq}}\frac{1}{R}-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0, \tag{15}$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)d\alpha^2+\frac{2s}{\varphi^2}d\alpha\,d\beta+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right)d\beta^2=0, \tag{16}$$

et celle des lignes de courbure

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)d\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right)d\beta^2 = 0. \tag{17}$$

La première de ces équations montre que, si l'on désigne par Ω la courbure moyenne et si l'on introduit la fonction

$$\tau = \frac{s^2}{4pq}, \tag{18}$$

qui jouera un grand rôle dans nos recherches, on a identiquement

$$\Omega^2 = -\frac{\tau}{\varphi^2}, \tag{19}$$

de sorte que l'élément linéaire (1) prend la forme remarquable

$$ds^2 = -\frac{4\tau\, d\alpha\, d\beta}{\Omega^2}, \tag{20}$$

qui exclut évidemment les surfaces minima ($\Omega = \tau = 0$), mais n'en exclut pas d'autres. La même équation (15) donne pour la courbure totale

$$K = -\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \tag{21}$$

Or, si l'on représente par

$$L\, d\alpha^2 + 2M\, d\alpha\, d\beta + N\, d\beta^2$$

la seconde forme quadratique fondamentale $a d^2x + b d^2y + c d^2z$, où a, b, c sont les cosinus directeurs de la normale au point (x, y, z), on sait que cette forme est proportionnelle au premier membre de l'équation (16) et qu'on a de plus

$$K = \frac{LN - M^2}{-4\varphi^4}.$$

Dès lors, si l'on pose

$$L : \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right) = M : \frac{s}{\varphi^2} = N : \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right) = \Im,$$

on a immédiatement

$$\mathfrak{S}^2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right)-\frac{s^2}{\varphi^4}\right]=4\varphi^2\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta};$$

d'où, par comparaison avec l'équation (12)′,

$$\mathfrak{S}=\frac{i\varphi^3}{\sqrt{pq}},$$

et, par suite,

$$(22)\qquad L=\frac{i}{\sqrt{pq}}(r\varphi-2p\varphi'_\alpha),\qquad M=\frac{i\varphi s}{\sqrt{pq}},\qquad N=\frac{i}{\sqrt{pq}}(t\varphi-2q\varphi'_\beta).$$

De là et de l'équation (15) résulte la formule générale

$$(19)'\qquad \Omega=-\frac{M}{2\varphi^2}.$$

Enfin, l'équation (17) va nous donner le caractère distinctif des surfaces isothermiques. En effet, il est aisé de voir que, si les lignes de courbure d'une surface forment un réseau isotherme, leur équation différentielle, relativement aux paramètres des lignes de longueur nulle, est de la forme

$$(23)\qquad A_0(\alpha)\,d\alpha^2-B_0(\beta)\,d\beta^2=0.$$

La réciproque étant vraie, les surfaces isothermiques sont caractérisées par l'équation

$$(24)\qquad \frac{1}{A_0(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)=\frac{1}{B_0(\beta)}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right)$$

que nous appellerons *l'équation* ou *la condition d'isothermie*.

Remarque. — Quand cette relation est vérifiée, on peut évidemment, sans cesser de rapporter la surface à ses lignes de longueur nulle, faire un changement de variables tel que les fonctions A_0 et B_0 se réduisent à l'unité. Mais on ne peut plus alors disposer de fonctions arbitraires de α et de β, que nous rencontrerons par la suite. Aussi conserverons-nous à l'équation d'isothermie sa forme générale (24), qui est très avantageuse.

IV. — Les surfaces isothermiques d'Ossian Bonnet identifiées avec celles dont la développée harmonique est un plan isotrope.

11. On sait qu'une surface est entièrement déterminée, à la position près, quand on connaît son élément linéaire ds^2 et sa seconde forme quadratique fondamentale

$$L\,d\alpha^2 + 2\,M\,d\alpha\,d\beta + N\,d\beta^2 = a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z,$$

où a, b, c sont les cosinus de la normale au point (x, y, z). Les fonctions L, M, N ne sont pas d'ailleurs arbitraires; dans le cas où α et β sont les paramètres des lignes de longueur nulle, si l'on pose

$$ds^2 = 4\varphi^2(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta, \tag{1}$$

on a entre L, M et N les équations suivantes :

$$LN - M^2 = 4\varphi^2 \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\beta} = \varphi^2 \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{M}{\varphi^2}, \qquad \frac{\partial N}{\partial\alpha} = \varphi^2 \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{M}{\varphi^2}. \tag{3}$$

Avec ce système de notations, les surfaces isothermiques d'Ossian Bonnet sont définies par les hypothèses que voici :

$$\varphi = \frac{A+B}{2(\alpha+\beta)}, \quad L = \frac{-iA'}{\alpha+\beta}\,\frac{\beta+C}{\alpha-C}, \quad M = i\frac{A+B}{(\alpha+\beta)^2}, \quad N = \frac{-iB'}{\alpha+\beta}\,\frac{\alpha-C}{\beta+C}; \tag{4}$$

dans ces formules, que j'emprunte au Mémoire de M. Hazzidakis (p. 48), A est une fonction arbitraire de α; A′ est sa dérivée; B est une fonction arbitraire de β; B′ est sa dérivée; C est une constante arbitraire. La courbure moyenne, dont l'expression générale (19)′ donne ici

$$\Omega = -\frac{M}{2\varphi^2} = -\frac{2i}{A+B},$$

étant indépendante de C, toutes les surfaces déterminées par les diverses valeurs de C ont même élément linéaire et mêmes courbures principales aux points correspondants.

12. Ceci posé, nous allons définir intrinsèquement les surfaces dont la développée harmonique (lieu des centres des sphères harmoniques) est un plan isotrope. On démontre facilement que, si l'élément linéaire d'une surface est ds^2, si Ω et Γ désignent la demi-somme et la demi-différence de ses courbures principales, l'élément linéaire dS^2 de sa développée harmonique a pour expression

$$dS^2 = \left(d\frac{1}{\Omega}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{\Omega^2}ds^2. \tag{5}$$

Puisque nous supposons

$$ds^2 = 4\varphi^2\,d\alpha\,d\beta,$$

nous aurons

$$dS^2 = \frac{1}{\Omega^2}[(d\log\Omega)^2 + 4\Gamma^2\varphi^2\,d\alpha\,d\beta]. \tag{5'}$$

Écrivons que dS^2 est un carré parfait (propriété des développables isotropes); il vient

$$\frac{\partial\log\Omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\log\Omega}{\partial\beta} = -\Gamma^2\varphi^2 \tag{6}$$

ou, sous forme invariante,

$$\Delta_1\log\Omega + \Gamma^2 = 0, \tag{6'}$$

et il reste alors

$$dS^2 = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\Omega}\right)d\alpha - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\Omega}\right)d\beta\right]^2. \tag{7}$$

Pour que la développée harmonique soit un plan isotrope, il faut et il suffit que dS soit une différentielle exacte, ce qui exige

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(\frac{1}{\Omega}\right) = 0, \qquad \Omega = \frac{-2i}{A(\alpha)+B(\beta)}. \tag{8}$$

Or, si l'on désigne par K la courbure totale de la surface dont ds^2 est l'élément linéaire, la condition (6) n'est autre chose que

$$\frac{\partial\log\Omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\log\Omega}{\partial\beta} = \varphi^2(K-\Omega^2) = -\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \Omega^2\varphi^2. \tag{9}$$

Mais, d'après la formule générale (19) du n° 10,

$$\Omega^2\varphi^2 = -\tau,$$

on a visiblement

$$-\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \Omega^2\varphi^2 = \tau - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\log\tau}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial^2\log\Omega}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

de sorte que la relation précédente devient

$$(10)\qquad \tau - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\log\tau}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial\log\Omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\log\Omega}{\partial\beta} - \frac{\partial^2\log\Omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \Omega\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(\frac{1}{\Omega}\right) = 0.$$

Ainsi la fonction τ satisfait à une équation de Liouville

$$(11)\qquad \frac{\partial^2\log\tau}{\partial\alpha\,\partial\beta} - 2\tau = 0,$$

dont l'intégrale bien connue est :

$$\tau = \frac{\chi'(\alpha)\psi'(\beta)}{[\chi(\alpha)+\psi(\beta)]^2}.$$

Mais on peut, sans restreindre la généralité de la solution, prendre

$$(12)\qquad \tau = \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}.$$

Alors il viendra

$$(13)\qquad \varphi^2 = \frac{(A+B)^2}{4(\alpha+\beta)^2}.$$

Connaissant φ, nous aurons, par les relations (19)' et (8),

$$(14)\qquad M = -2\Omega\varphi^2 = i\frac{A+B}{(\alpha+\beta)^2}.$$

L'équation (2) donne alors

$$(15)\qquad LN = M^2 + 4\varphi^2\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{A'B'}{(\alpha+\beta)^2}.$$

D'après cela, nous poserons

$$(16)\qquad L = -\frac{iA'}{\alpha+\beta}\varpi, \qquad N = -\frac{iB'}{\alpha+\beta}\frac{1}{\varpi},$$

ϖ étant une fonction à déterminer. Or, si l'on substitue dans les équations (3) les expressions trouvées pour φ et pour M, ainsi que celles de L et N, on trouve simplement

$$(17)\qquad (\alpha+\beta)\frac{\partial\varpi}{\partial\beta} - \varpi = 1, \qquad (\alpha+\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\varpi} - \frac{1}{\varpi} = 1.$$

L'intégration de ces équations est immédiate et donne, avec une constante arbitraire C,

$$(18)\qquad \varpi = \frac{\beta + C}{\alpha - C}.$$

D'après les formules (13), (14) et (18), on retrouve précisément les expressions (4) de φ, de L, de M et de N par lesquelles sont définies les surfaces d'Ossian Bonnet.

Il importe de remarquer que notre analyse n'implique nullement l'isothermie des surfaces cherchées. Cette propriété résulte des expressions de L et de N, en vertu desquelles l'équation différentielle des lignes de courbure

$$L\,d\alpha^2 - N\,d\beta^2 = 0$$

prend la forme

$$\frac{A'\,d\alpha^2}{(\alpha - C)^2} - \frac{B'\,d\beta^2}{(\beta + C)^2} = 0$$

et rentre en conséquence dans le type

$$A_0(\alpha)\,d\alpha^2 - B_0(\beta)\,d\beta^2 = 0,$$

caractéristique (n^o 10) des surfaces isothermiques.

Nous avons donc établi ce théorème :

Les surfaces dont la développée harmonique est un plan isotrope sont isothermiques et identiques aux surfaces d'Ossian Bonnet.

Nous prendrons, à l'occasion, comme définition de ces surfaces, que nous appellerons *surfaces* (B), la propriété de leur développée harmonique.

13. Voici une autre propriété (non caractéristique) des surfaces d'Ossian Bonnet. Elle découle de la proposition suivante :

Pour que la seconde nappe de l'enveloppe de sphères tangentes à une surface soit tout entière rejetée à l'infini, il faut et il suffit que le lieu des centres de ces sphères soit une développable isotrope.

Démontrons d'abord cette proposition.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point P d'une surface; a, b, c les cosinus de la normale en ce point. La sphère (Σ), qui a pour rayon R et pour centre le point de coordonnées

$$x_0 = x + a\mathrm{R}, \qquad y_0 = y + b\mathrm{R}, \qquad z_0 = z + c\mathrm{R},$$

est tangente en P à la surface considérée. Son équation est

$$(\mathrm{X} - x_0)^2 + (\mathrm{Y} - y_0)^2 + (\mathrm{Z} - z_0)^2 - \mathrm{R}^2 = 0.$$

Différentions-la par rapport aux deux paramètres u et v dont dépendent x, y, z, afin d'avoir les équations de la corde des contacts de cette sphère avec son enveloppe. Nous trouvons

$$(\mathrm{X} - x_0)\frac{\partial x_0}{\partial u} + (\mathrm{Y} - y_0)\frac{\partial y_0}{\partial u} + (\mathrm{Z} - z_0)\frac{\partial z_0}{\partial u} + \mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} = 0,$$
$$(\mathrm{X} - x_0)\frac{\partial x_0}{\partial v} + (\mathrm{Y} - y_0)\frac{\partial y_0}{\partial v} + (\mathrm{Z} - z_0)\frac{\partial z_0}{\partial v} + \mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} = 0.$$

Cette corde passe par le point (x, y, z). Pour qu'elle n'ait pas d'autre point commun à distance finie avec la sphère (Σ), il faut et il suffit qu'elle soit une droite isotrope, c'est-à-dire que l'on ait

$$0 = \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial y_0}{\partial v} - \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial y_0}{\partial u}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2 \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2 - \left(\sum\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2.$$

Cette relation exprime que l'élément linéaire

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2$$

est un carré parfait. Le lieu des centres (x_0, y_0, z_0) des sphères considérées est donc une développable isotrope.

Or, pour les surfaces (B), le lieu des centres des sphères harmoniques est un plan isotrope. Donc *la seconde nappe de l'enveloppe des sphères harmoniques de ces surfaces est tout entière rejetée à l'infini.*

V. — Transformation conforme par normales parallèles : formules et propriétés générales.

14. On sait qu'une propriété, spéciale aux surfaces isothermiques (autres que les surfaces minima), est de correspondre *par plans tangents parallèles* à une autre surface, *la représentation* des deux surfaces l'une sur l'autre étant *conforme*, c'est-à-dire ayant lieu avec proportionnalité des éléments linéaires (Bour, Christoffel). Nous appellerons ce mode de correspondance *transformation (conforme) par normales parallèles :* il comporte l'indétermination d'une translation et d'une homothétie arbitraires, dont nous ferons abstraction.

Soit (S) une surface isothermique; soient (x, y, z) les coordonnées de chacun de ses points P et (ρ, ρ_1) les paramètres des lignes de courbure; on suppose ces paramètres choisis de telle sorte que l'élément linéaire ait la forme canonique

$$ds^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2). \tag{1}$$

La transformation conforme par normales parallèles consiste à faire correspondre au point P un point P' dont les coordonnées (x', y', z') sont déterminées par les relations

$$\left\{\begin{aligned} dx' &= \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\,d\rho - \frac{\partial x}{\partial \rho_1}\,d\rho_1\right),\\ dy' &= \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\,d\rho - \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\,d\rho_1\right),\\ dz' &= \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\,d\rho - \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\,d\rho_1\right),\end{aligned}\right. \tag{2}$$

d'où résulte l'élément linéaire

$$ds'^2 = \frac{1}{H^2}(d\rho^2 + d\rho_1^2). \tag{3}$$

Soient toujours

$$(4) \qquad \Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right), \qquad \Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$$

la demi-somme et la demi-différence des courbures principales de la surface (S).

Nous désignerons par R' et R'_1 les rayons de courbure principaux de la surface (S′) lieu du point P′ et nous poserons

$$(5) \qquad \Omega' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R'_1}\right), \qquad \Gamma' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R'_1}\right).$$

Il suffit d'avoir égard aux formules d'Olinde Rodrigues et aux relations (2) pour trouver

$$\frac{1}{R'} = \frac{H^2}{R}, \qquad \frac{1}{R'_1} = -\frac{H^2}{R_1},$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$(6) \qquad \Omega' = H^2\Gamma, \qquad \Gamma' = H^2\Omega.$$

Comparant alors les deux éléments linéaires ds^2 et ds'^2, on arrive aux identités importantes

$$(7) \qquad \Gamma'^2\, ds'^2 = \Omega^2\, ds^2, \qquad \Omega'^2\, ds'^2 = \Gamma^2\, ds^2,$$

qui montrent bien la réciprocité des deux surfaces et qui ne tarderont pas à nous servir [1].

15. Rapportons maintenant la surface (S) aux paramètres (α, β) de ses lignes de longueur nulle; puisqu'elle est isothermique, l'équation différentielle de ses lignes de courbure a (n° 10) la forme caractéristique

$$A_0(\alpha)\, d\alpha^2 - B_0(\beta)\, d\beta^2 = 0.$$

[1] La première des équations (6) donne des expressions remarquables des fonctions λ et μ de M. Darboux (n° 1) lorsque les sphères enveloppées sont les sphères harmoniques de la première nappe, supposée isothermique, de leur enveloppe (n° 8); on a, en effet, avec les notations du texte, $\lambda = \Omega'$, $\mu = -\Omega\Omega'$.

Nous poserons, en conséquence,

$$(8)\qquad \sqrt{A_0}\,d\alpha + \sqrt{B_0}\,d\beta = 2\,d\rho, \qquad \sqrt{A_0}\,d\alpha - \sqrt{B_0}\,d\beta = 2\,i\,d\rho_1,$$

de façon que l'élément linéaire

$$ds^2 = 4\,\varphi^2\,d\alpha\,d\beta$$

prenne la forme $H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2)$; nous aurons alors

$$(9)\qquad H^2 = \frac{4\,\varphi^2}{\sqrt{A_0 B_0}}.$$

Les relations (6) deviennent par suite

$$(6)'\qquad \Omega' = \frac{4\,\varphi^2\,\Gamma}{\sqrt{A_0 B_0}}, \qquad \Gamma' = \frac{4\,\varphi^2\,\Omega}{\sqrt{A_0 B_0}}.$$

Quant aux expressions mêmes des coordonnées x', y', z', on trouve

$$(2)'\qquad dx' = \frac{1}{4\,\varphi^2}\left(A_0\,\frac{\partial x}{\partial \beta}\,d\alpha + B_0\,\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,d\beta\right), \qquad dy' = \ldots, \qquad dz' = \ldots;$$

d'où l'on conclut

$$(3)'\qquad ds'^2 = \frac{A_0 B_0}{4\,\varphi^2}\,d\alpha\,d\beta.$$

On a de plus, en représentant par ξ' la somme $x' + iy'$,

$$d\xi' = \frac{1}{4\,\varphi^2}\left[A_0\,\frac{\partial(x+iy)}{\partial\beta}\,d\alpha + B_0\,\frac{\partial(x+iy)}{\partial\alpha}\,d\beta\right],$$

d'où résulte

$$p' = \frac{\partial \xi'}{\partial \alpha} = \frac{A_0\,q}{4\,\varphi^2}, \qquad q' = \frac{\partial \xi'}{\partial \beta} = \frac{B_0\,p}{4\,\varphi^2},$$

de sorte que l'équation d'isothermie (24) du n° 10 peut s'écrire

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial \beta}\,\frac{A_0\,q}{\varphi^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\,\frac{B_0\,p}{\varphi^2} = 4\,\frac{\partial^2 \xi'}{\partial \alpha\,\partial \beta}.$$

Elle exprime simplement la condition d'intégrabilité de $d\xi'$. La transformation conforme par normales parallèles correspond donc à ce fait analytique, qui n'a pas échappé à Ossian Bonnet : si une fonction ξ et une fonction φ satisfont à la fois à l'équation de déformation et à l'équation d'isothermie, on vérifiera ces mêmes équations en y remplaçant φ^2 par $A_0 B_0 : \varphi^2$ et ξ par

$$\int A_0 \frac{q}{\varphi^2} \, d\alpha + B_0 \frac{p}{\varphi^2} \, d\beta.$$

Cherchons ce que devient dans la transformation présente la fonction que nous avons appelée τ, savoir $s^2 : 4pq$. Nous aurons ici

$$\tau' = \frac{s'^2}{4p'q'} = \frac{1}{4} \frac{\partial \log p'}{\partial \beta} \frac{\partial \log q'}{\partial \alpha} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{q}{\varphi^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \log \frac{p}{\varphi^2} \right).$$

Or l'équation de déformation $(12)'$, trouvée au n° 9, peut s'écrire

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \log \frac{p}{\varphi^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{q}{\varphi^2} \right) = \frac{s^2}{4pq} - \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \tau - \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial \alpha \, \partial \beta}.$$

On a donc

$$\tau' - \tau = - \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial \alpha \, \partial \beta}, \tag{11}$$

ce qui montre bien le rôle réciproque de τ et de τ'.

16. Les identités (7) donnent lieu à la remarque suivante :

Si une surface isothermique est telle que des quatre formes $\Omega^2 \, ds^2$, $\Gamma^2 \, ds^2$, $\Omega'^2 \, ds'^2$, $\Gamma'^2 \, ds'^2$, *deux différentes aient même courbure totale, les quatre formes auront la même courbure totale.*

Désignons, en effet, par K[ ] la courbure de la forme quadratique binaire de différentielles qui sera inscrite entre les crochets [ ]. Les deux identités (7)

$$\Omega^2 \, ds^2 = \Gamma'^2 \, ds'^2, \qquad \Gamma^2 \, ds^2 = \Omega'^2 \, ds'^2,$$

entraînent visiblement

$$K[\Omega^2 \, ds^2] = K[\Gamma'^2 \, ds'^2], \qquad K[\Gamma^2 \, ds^2] = K[\Omega'^2 \, ds'^2].$$

Si donc les premiers membres ou les seconds sont égaux entre eux

$$K[\Omega^2 ds^2] = K[\Gamma^2 ds^2], \qquad K[\Gamma'^2 ds'^2] = K[\Omega'^2 ds'^2],$$

ou si un premier membre est égal à un second membre,

$$K[\Omega^2 ds^2] = K[\Omega'^2 ds'^2], \qquad K[\Gamma^2 ds^2] = K[\Gamma'^2 ds'^2],$$

les quatre expressions K[ ] seront égales. Nous appliquerons ultérieurement cette conclusion au cas où les deux courbures considérées sont égales à l'unité; mais elle est valable lors même que ces courbures ne sont pas constantes.

VI. — La transformation conforme par normales parallèles appliquée à deux classes de surfaces isothermiques.

17. Nous allons démontrer ici deux propriétés communes à deux classes de surfaces isothermiques, savoir les surfaces d'Ossian Bonnet et les surfaces (Θ) de M. Thybaut.

Voici la première de ces propriétés :

La transformation (conforme) par normales parallèles, appliquée aux surfaces de l'une de ces classes, leur fait correspondre des surfaces de la même classe.

Considérons d'abord les surfaces isothermiques d'Ossian Bonnet, que nous appelons *surfaces* (B), et que nous pouvons, d'après ce qui a été dit à la fin du n° 12, définir par la propriété d'avoir pour développée harmonique un plan isotrope.

Théorème I. — *A toute surface (nécessairement isothermique) dont la développée harmonique est un plan isotrope, la transformation par normales parallèles fait correspondre une autre surface dont la développée harmonique est un plan isotrope.*

Pour démontrer ce théorème, rappelons que les surfaces (B) dont il s'agit ici sont définies analytiquement (n° 11) par leurs deux formes quadratiques fondamentales

$$ds^2 = 4\varphi^2(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \qquad \mathrm{L}\, d\alpha^2 + 2\mathrm{M}\, d\alpha\, d\beta + \mathrm{N}\, d\beta^2,$$

où φ, L, M, N ont pour expressions respectives

$$\varphi = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2(\alpha+\beta)}, \qquad \mathrm{L} = \frac{-i\mathrm{A}'}{\alpha+\beta}\,\frac{\beta+\mathrm{C}}{\alpha-\mathrm{C}},$$
$$\mathrm{M} = \frac{i(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{(\alpha+\beta)^2}, \qquad \mathrm{N} = \frac{-i\mathrm{B}'}{\alpha+\beta}\,\frac{\alpha-\mathrm{C}}{\beta+\mathrm{C}}.$$

En conséquence, leur courbure moyenne Ω a pour carré (*ibid.*)

$$\Omega^2 = \frac{\mathrm{M}^2}{4\varphi^4} = \frac{-4}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2} \tag{1}$$

et l'équation différentielle des lignes de courbure

$$\mathrm{L}\, d\alpha^2 - \mathrm{N}\, d\beta^2 = 0$$

n'est autre que

$$\frac{\mathrm{A}'\, d\alpha^2}{(\alpha-\mathrm{C})^2} - \frac{\mathrm{B}'\, d\beta^2}{(\beta+\mathrm{C})^2} = 0. \tag{2}$$

Si donc on la rapporte au type

$$\mathrm{A}_0\, d\alpha^2 - \mathrm{B}_0\, d\beta^2 = 0,$$

on pourra prendre

$$\mathrm{A}_0 = \frac{\mathrm{A}'}{(\alpha-\mathrm{C})^2}, \qquad \mathrm{B}_0 = \frac{\mathrm{B}'}{(\beta+\mathrm{C})^2}. \tag{2$'$}$$

Cela étant, convenons d'affecter d'un accent tous les symboles relatifs à la surface (B′), transformée par normales parallèles d'une surface (B). D'après les résultats des nos 14 et 15, nous aurons pour l'élément linéaire de (B′)

$$ds'^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2 \mathrm{A}'\mathrm{B}'\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha-\mathrm{C})^2(\beta+\mathrm{C})^2(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2}, \tag{3}$$

et pour celui de sa développée harmonique (n° 12)

$$d\mathrm{S}'^2 = \left(d\,\frac{1}{\Omega'}\right)^2 + \frac{\Gamma'^2}{\Omega'^2}\, ds'^2,$$

ce que l'on peut écrire

$$dS'^2 = \left(d\frac{1}{\Omega'}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{\Gamma^2} ds'^2,$$

en vertu des relations

$$(4) \qquad \Omega' = \frac{4\varphi^2\Gamma}{\sqrt{A_0 B_0}}, \qquad \Gamma' = \frac{4\varphi^2\Omega}{\sqrt{A_0 B_0}}.$$

Nous avons donc à calculer Γ par la formule générale (3) du n° 8,

$$\Gamma^2 = \Omega^2 - K = \Omega^2 + \frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

qui, en raison des expressions actuelles de φ et de Ω, donne

$$(5) \qquad \Gamma^2 = -\frac{4(\alpha+\beta)^2 A' B'}{(A+B)^4} = \frac{\Omega^2(\alpha+\beta)^2 A' B'}{(A+B)^2}.$$

On conclut de là tout d'abord

$$\frac{\Omega^2}{\Gamma^2} ds'^2 = \frac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha - C)^2(\beta + C)^2},$$

et, en substituant dans celle des formules (4) qui fournit Ω',

$$(6) \qquad \frac{1}{\Omega'} = \frac{\alpha+\beta}{2i(\alpha - C)(\beta + C)};$$

d'où, par différentiation,

$$d\frac{1}{\Omega'} = -\frac{1}{2i}\left[\frac{d\alpha}{(\alpha - C)^2} + \frac{d\beta}{(\beta + C)^2}\right].$$

Nous connaissons maintenant les deux termes dont se compose dS'^2 et il vient finalement

$$dS'^2 = -\frac{1}{4}\left[\frac{d\alpha}{(\alpha - C)^2} - \frac{d\beta}{(\beta + C)^2}\right]^2;$$

ainsi dS' est une différentielle exacte et la développée harmonique de (B') est bien un plan isotrope (n° 12), ce qui prouve notre énoncé.

18. Théorème II. — *A toute surface (nécessairement isothermique) dont les sphères harmoniques touchent un plan, la transformation par normales parallèles fait correspondre une autre surface dont les sphères harmoniques touchent un plan.*

Les surfaces (Θ) de M. Thybaut sont définies (*Ann. École Norm.*, 1900, p. 516) par la propriété d'avoir leurs sphères harmoniques tangentes au plan $z=0$ et sont représentées à l'aide de la fonction

$$F = \frac{1 + A(\alpha)B(\beta)}{\sqrt{A'(\alpha)B'(\beta)}} \tag{7}$$

par les formules

$$\xi = x + iy = 2\left(\alpha - \frac{Q}{S}\right), \qquad \eta = x - iy = 2\left(\beta - \frac{P}{S}\right), \qquad z = \frac{2}{S}, \tag{8}$$

où l'on a posé

$$P = \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial \beta}, \qquad S = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta}.$$

La fonction F est l'intégrale générale de l'équation

$$SF = PQ + 1. \tag{9}$$

Si l'on fait encore

$$R = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}, \qquad T = \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2},$$

on a, pour les surfaces considérées,

$$\Omega = \frac{1}{F}, \qquad \Gamma = \frac{S}{F\sqrt{RT}}, \qquad ds^2 = 4\frac{\Omega^2}{\Gamma^2}\, d\alpha\, d\beta = 4\frac{RT}{S^2}\, d\alpha\, d\beta. \tag{10}$$

Effectuant les calculs, on trouve

$$\left\{\begin{aligned} R &= -\frac{2A'A''' - 3A''^2}{4A'^2}F = -F\mathcal{F}(A), \\ T &= -\frac{2B'B''' - 3B''^2}{4B'^2}F = -F\mathcal{F}(B), \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$S = \frac{4A'^2B'^2 - 2AA''B'^2 - 2BB''A'^2 + (1 + AB)A''B''}{4A'B'\sqrt{A'B'}}. \tag{12}$$

L'équation des lignes de courbure est

$$\mathcal{F}(A)\,d\alpha^2 - \mathcal{F}(B)\,d\beta^2 = 0, \tag{13}$$

ce qui prouve (n° 10) que les surfaces (Θ) sont isothermiques. Rapportée au type

$$A_0\,d\alpha^2 - B_0\,d\beta^2 = 0,$$

elle donne visiblement

$$A_0 = \mathcal{F}(A), \qquad B_0 = \mathcal{F}(B). \tag{13'}$$

Ceci posé, rappelons la condition (8) obtenue (n° 2) pour exprimer que la seconde nappe d'une enveloppe de sphères est un plan; nous avons trouvé

$$\lambda l\left(\frac{1}{l^2} + \Delta_1 \log\lambda\right) = \text{const.}$$

Exprimons que la sphère enveloppée est la sphère harmonique de la première nappe de son enveloppe; nous aurons (n° 8)

$$l = \frac{1}{\Omega}, \qquad \lambda = H^2\Gamma.$$

Il vient, en conséquence,

$$\frac{H^2\Gamma}{\Omega}(\Omega^2 + \Delta_1 \log H^2\Gamma) = \text{const.}, \tag{14}$$

le paramètre différentiel Δ_1 se rapportant à l'élément linéaire

$$ds^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho_1^2) = 4\varphi^2\,d\alpha\,d\beta$$

de la première nappe (S) de l'enveloppe.

Appliquons ce résultat à la surface (S′), transformée de (S) par normales parallèles. Il viendra

$$\frac{H'^2\Gamma'}{\Omega'}(\Omega'^2 + \Delta'_1 \log H'^2\Gamma') = \text{const.} \tag{15}$$

Le paramètre différentiel Δ'_1 se rapporte maintenant à l'élément linéaire de la transformée (S′) :

$$ds'^2 = H'^2(d\rho^2 + d\rho_1^2) = \frac{A_0 B_0}{4\varphi^2}\, d\alpha\, d\beta$$

Nous savons de plus (n^{os} 14 et 15) que l'on a

$$H'^2 \Gamma' = \Omega, \qquad \Omega' = \frac{4\varphi^2 \Gamma}{\sqrt{A_0 B_0}}.$$

Enfin, on vérifie sans peine l'identité générale

$$\Delta'_1 \psi = \frac{16\varphi^4}{A_0 B_0}\, \Delta_1 \psi.$$

Par suite, la condition (15) peut être exprimée uniquement au moyen de symboles relatifs à la surface (S) et devient

$$(15)' \qquad \frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{A_0 B_0}}\,[\varphi^2\Gamma^2 + \varphi^2\Delta_1 \log\Omega] = \frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{A_0 B_0}}\left(\varphi^2\Gamma^2 + \frac{\partial \log\Omega}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\log\Omega}{\partial\beta}\right) = \text{const.}$$

Introduisons maintenant les hypothèses propres au cas où la surface (S) est une surface (Θ). On a vu qu'on avait pour ces surfaces

$$\Omega = \frac{1}{F}, \qquad \Gamma = \frac{S}{F\sqrt{RT}}, \qquad R = -F\mathcal{F}(A), \qquad T = -F\mathcal{F}(B), \qquad \varphi^2 = \frac{RT}{S^2};$$

d'où résulte

$$\varphi^2\Gamma^2 = \frac{1}{F^2}, \qquad \frac{\partial\log\Omega}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\log\Omega}{\partial\beta} = \frac{PQ}{F^2}.$$

Par suite, la condition (15)′ devient

$$\frac{F\sqrt{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)}}{S\sqrt{A_0 B_0}}\,\frac{PQ+1}{F^2} = \frac{\sqrt{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)}}{\sqrt{A_0 B_0}} = \text{const.},$$

à cause de l'équation (9). Les relations (13)′ montrent qu'elle est bien vérifiée et il est prouvé par là que, *dans la transformation par normales parallèles, une surface* (Θ) *devient une autre surface* (Θ).

19. Voici maintenant la seconde propriété commune aux surfaces (B) et aux surfaces (Θ) :

Si l'on multiplie l'élément linéaire de l'une d'elles par le carré Γ^2 de la demi-différence des courbures principales ou par le carré Ω^2 de la courbure moyenne, on obtient dans les deux cas l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1.

Considérons d'abord les surfaces (B); nous avons vu (n° 11) qu'on a, pour ces surfaces,

$$ds^2 = \frac{(A+B)^2\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha+\beta)^2}, \qquad \varphi = \frac{A+B}{2(\alpha+\beta)}, \qquad \Omega = -\frac{2i}{A+B};$$

d'où résulte immédiatement

$$\Omega^2\,ds^2 = -\frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha+\beta)^2}. \tag{16}$$

C'est bien là l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1.

Rappelons maintenant la formule (5) du n° 17

$$\Gamma^2 = -\frac{4(\alpha+\beta)^2 A'B'}{(A+B)^4}.$$

On en conclut

$$\Gamma^2\,ds^2 = -\frac{4\,dA\,dB}{(A+B)^2}. \tag{17}$$

C'est encore là l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1.

Passons aux surfaces (Θ). Pour ces surfaces on a (n° 18)

$$ds^2 = 4\,\frac{\Omega^2}{\Gamma^2}\,d\alpha\,d\beta, \qquad \Omega^2 = \frac{A'B'}{(1+AB)^2},$$

d'où résulte immédiatement

$$\Gamma^2\,ds^2 = \frac{4\,dA\,dB}{(1+AB)^2}. \tag{18}$$

Ainsi $\Gamma^2\,ds^2$ est bien l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1.

D'autre part, on a aussi (*ibid.*)

$$ds^2 = \frac{4RT}{S^2}\, d\alpha\, d\beta.$$

En raison des expressions trouvées pour R, S, T, on peut écrire

$$(19)\qquad R = -F\mathcal{F}(A), \qquad T = -F\mathcal{F}(B), \qquad S = \frac{A''B''(1+A_1B_1)}{4A'B'\sqrt{A'B'}},$$

en posant

$$(20)\qquad A_1 = A - \frac{2A'^2}{A''}, \qquad B_1 = B - \frac{2B'^2}{B''},$$

formules d'où l'on déduit

$$(21)\qquad A'_1 = \frac{4A'^3}{A''^2}\mathcal{F}(A), \qquad B'_1 = \frac{4B'^3}{B''^2}\mathcal{F}(B).$$

Il vient alors, par élimination de R, S, T, A″ et B″,

$$(22)\qquad ds^2 = 4F^2\frac{dA_1\, dB_1}{(1+A_1B_1)^2} = \frac{4}{\Omega^2}\,\frac{dA_1\, dB_1}{(1+A_1B_1)^2}.$$

En conséquence, $\Omega^2\, ds^2$ est bien l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1.

20. *Remarque.* — En raison des théorèmes des n^os 17 et 18, il eût suffi de démontrer la propriété soit du produit $\Gamma^2\, ds^2$, soit du produit $\Omega^2\, ds^2$. En effet, avec les notations du n° 16, on a pour toute surface (B)

$$K[\Omega^2\, ds^2] = 1;$$

comme sa transformée par normales parallèles est aussi une surface (B), on aura pour celle-ci

$$K[\Omega'^2\, ds'^2] = 1.$$

De là et de l'identité générale $\Omega'^2\, ds'^2 = \Gamma^2\, ds^2$, démontrée au n° 14, résulte

$$K[\Gamma^2\, ds^2] = 1.$$

De même, pour toute surface (Θ), on a

$$K[\Gamma^2\, ds^2] = 1;$$

comme la transformée par normales parallèles est aussi une surface (Θ), on aura pareillement

$$K[\Gamma'^2\, ds'^2] = K[\Omega^2\, ds^2] = 1.$$

Ces résultats peuvent être considérés comme des exemples de la remarque générale faite au nº 16.

VII. — Détermination des surfaces isothermiques dont l'élément linéaire devient celui d'une sphère de rayon 1, quand on le multiplie par le carré de la demi-différence des courbures principales.

21. La propriété énoncée dans le titre ci-dessus est commune à diverses classes de surfaces isothermiques. En effet, nous avons vu au paragraphe précédent qu'elle appartient aux surfaces (B) d'Ossian Bonnet ainsi qu'aux surfaces (Θ) de M. Thybaut.

En outre, si l'on désigne par R et $R_1 = -R$ les rayons de courbure principaux d'une *surface minima*, par ds^2 son élément linéaire, par $d\sigma^2$ celui de sa reproduction sphérique, on a la relation bien connue

$$ds^2 = R^2\, d\sigma^2.$$

On a aussi, d'après la définition des surfaces minima,

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{R},$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\Gamma^2\, ds^2 = d\sigma^2,$$

ce qui prouve que la propriété en question appartient aux surfaces minima.

D'autre part, il est aisé de voir que, si l'on transforme par inversion une surface quelconque (S), quels que soient le pôle et la puissance d'inversion, on aura identiquement

$$\Gamma_{-1}^2\, ds_{-1}^2 = \Gamma^2\, ds^2,$$

ds_{-1}^2 étant l'élément linéaire de la surface (S_{-1}) inverse de (S) et Γ_{-1} désignant la demi-différence de ses courbures principales.

En conséquence, la propriété qu'exprime (n° 16) la relation

$$K[\Gamma^2\, ds^2] = 1$$

sera commune aux surfaces (B) d'Ossian Bonnet et à leurs inverses, aux surfaces (Θ) de M. Thybaut et à leurs inverses, qui sont les surfaces (Θ_{-1}) dont les sphères harmoniques touchent une sphère, aux surfaces minima (M) et aux surfaces (M_{-1}), inverses des surfaces minima.

22. Il nous reste à déterminer la nature des surfaces (B_{-1}), inverses des surfaces (B).

Rappelons d'abord que l'inversion conserve la propriété des sphères harmoniques et que les sphères harmoniques d'une surface minima, ayant leur rayon infini, ne sont autres que les plans tangents. Si donc on soumet une surface minima (M) à une inversion dont le pôle est un point P, les sphères harmoniques de la surface inverse (M_{-1}) ainsi obtenue passeront toutes en P. Réciproquement, si les sphères harmoniques d'une surface passent toutes par un même point P, une inversion faite avec P pour pôle transforme cette surface en une surface dont toutes les sphères harmoniques sont des plans, c'est-à-dire en une surface minima. Ainsi, *les inverses* (M_{-1}) *des surfaces minima sont caractérisées par la propriété que leurs sphères harmoniques passent toutes par un même point.*

Cela posé, nous nous contenterons d'énoncer un lemme dont la démonstration est facile :

Si l'on considère toutes les sphères qui passent par un point P_1 *et qu'on prenne leurs inverses par rapport à un point* P_2 *situé à distance nulle de* P_1, *toutes ces sphères inverses ont leurs centres sur un plan isotrope qui ne contient pas le pôle* P_2. Réciproquement, *si l'on considère toutes les sphères qui ont leurs centres sur un plan isotrope et qu'on prenne* *leurs inverses par rapport à un point* P_2 *non situé sur le plan isotrope, toutes ces sphères inverses passent par un même point* P_1, *situé à distance nulle du pôle* P_2.

Dès lors, si l'on soumet une surface minima (M) à une inversion par rapport à un pôle P_1, la transformée (M_{-1}) sera telle que toutes ses sphères harmoniques passeront au point P_1. Si l'on considère l'inverse (M_{-2}) de (M_{-1}) par rapport à un point P_2 situé à distance nulle de P_1, les sphères harmoniques de (M_{-2}) auront toutes leurs centres sur un plan isotrope, ce qui montre que les surfaces (M_{-2}) sont des surfaces (B) d'Ossian Bonnet.

Considérons maintenant une surface (B) et soumettons-la à une inversion par rapport à un pôle P. Si ce pôle est situé sur le plan isotrope lieu des centres des sphères harmoniques, on retrouve une autre surface (B), dont les sphères harmoniques ont leurs centres sur le même plan isotrope. Mais, si le pôle P n'appartient pas au plan isotrope, la surface (B) se transforme en une surface dont toutes les sphères harmoniques passent par un point fixe, situé à distance nulle de P, c'est-à-dire en une surface (M_{-1}) inverse de surface minima.

Ainsi, *les surfaces* (B) *sont les inverses des inverses des surfaces minima, la seconde inversion étant faite d'un pôle situé à distance nulle du point qu'on a pris comme pôle pour faire l'inversion des surfaces minima.*

En outre, les inverses des surfaces (B) étant, soit des surfaces (B), soit des surfaces (M_{-1}), nous n'avons, en réalité, trouvé que *cinq* classes distinctes de surfaces isothermiques jouissant de la propriété qu'exprime la relation

$$K[\Gamma^2 ds^2] = 1;$$

ce sont 1° et 2° les surfaces (Θ) de M. Thybaut et leurs inverses; 3° et 4° les surfaces minima et leurs inverses; 5° les surfaces (B) d'Ossian Bonnet.

23. Nous allons prouver qu'il n'y a pas d'autres surfaces isothermiques jouissant de cette propriété.

ment linéaire

$$(1)\qquad ds^2 = \mathrm{H}^2(d\rho^2 + d\rho_1^2),$$

étant multiplié par le carré Γ^2 de la demi-différence des courbures principales, devient l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1. Or, si l'on égale à 1 la courbure totale de la forme

$$\mathrm{H}^2\Gamma^2(d\rho^2 + d\rho_1^2),$$

on trouve, d'après une règle bien connue,

$$1 = -\frac{1}{\mathrm{H}^2\Gamma^2}\left(\frac{\partial^2 \log \mathrm{H}\Gamma}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 \log \mathrm{H}\Gamma}{\partial\rho_1^2}\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$(2)\qquad \Gamma^2 + \Delta_2 \log \mathrm{H}\Gamma = \Gamma^2 + \Delta_2 \log \mathrm{H} + \Delta_2 \log \Gamma = 0,$$

le second paramètre différentiel Δ_2 se rapportant à l'élément linéaire (1) des surfaces cherchées. On a, d'autre part, en désignant par K la courbure totale d'une surface quelconque

$$(3)\qquad \mathrm{K} = -\Delta_2 \log \mathrm{H}, \qquad \Gamma^2 = \Omega^2 - \mathrm{K},$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$(4)\qquad \Omega^2 - 2\mathrm{K} + \Delta_2 \log \Gamma = 0.$$

Or, c'est là précisément l'équation (7) du n° 8, que vérifient les surfaces (Θ) et (Θ_{-1}) de M. Thybaut. Ici nous l'obtenons d'une manière générale, et sans supposer aucunement qu'il s'agisse de surfaces isothermiques.

Précédemment, nous y avions été conduits en exprimant que *les sphères harmoniques d'une surface isothermique ont pour seconde nappe de leur enveloppe une autre surface isothermique, sans que les deux nappes se correspondent par inversion.*

Si donc les sphères harmoniques d'une surface ont pour seconde nappe de leur enveloppe une *véritable surface*, la propriété relative au produit $\Gamma^2\, ds^2$ pour la première nappe se traduit ainsi : *si la première nappe est isothermique, la seconde l'est aussi, sans lui correspondre par* *inversion*, de sorte que cette première nappe est nécessairement (n° 7) une surface (Θ) ou une surface (Θ_{-1}).

Mais les sphères harmoniques d'une surface n'ont pas toujours pour seconde nappe de leur enveloppe une véritable surface. Voici quels sont évidemment les trois seuls cas d'exception possibles :

1° *Les sphères harmoniques ne sont point des sphères, mais des plans.* C'est le cas des surfaces minima, qui sont isothermiques et possèdent la propriété relative au produit $\Gamma^2\,ds^2$.

2° *Les sphères harmoniques sont bien des sphères, mais la seconde nappe de leur enveloppe se réduit à un point.* Nous avons rappelé que c'est là un caractère spécial aux surfaces inverses des surfaces minima, qui sont aussi des surfaces isothermiques et possèdent la propriété relative au produit $\Gamma^2\,ds^2$.

3° *Les sphères harmoniques sont bien des sphères, mais la seconde nappe de leur enveloppe est tout entière rejetée à l'infini.* Nous allons prouver que les surfaces correspondantes sont les surfaces isothermiques (B) d'Ossian Bonnet.

24. Théorème. — *Si une surface isothermique est telle que la seconde nappe de l'enveloppe de ses sphères harmoniques soit tout entière rejetée à l'infini, et si, de plus, son élément linéaire, multiplié par le carré de la demi-différence des courbures principales, devient l'élément linéaire d'une sphère de rayon* 1, *la développée harmonique de cette surface est un plan isotrope.*

Pour que la seconde nappe de l'enveloppe de sphères tangentes à une surface soit tout entière rejetée à l'infini, il faut et il suffit (n° 13), que le lieu des centres soit une développable isotrope. Si les sphères enveloppées sont les sphères harmoniques de la première nappe, en désignant par Ω la courbure moyenne de cette nappe et par dS^2 l'élément linéaire de sa développée harmonique, on a (n° 12)

$$dS^2 = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\Omega}\right)d\alpha - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\Omega}\right)d\beta\right]^2.$$

Cette développée sera un plan isotrope, si Ω vérifie la condition nécessaire et suffisante (*ibid.*)

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha\, \partial \beta}\left(\frac{1}{\Omega}\right) = 0.$$

Telle est la relation que nous voulons établir. A cet effet, reportons-nous au n° 1 et exprimons à l'aide de la formule (3)

$$-\frac{2\lambda}{\theta} = \frac{1}{l^2} + \Delta_1 \log\lambda,$$

que la seconde nappe de l'enveloppe de sphères est rejetée à l'infini, ou que θ est infini. Nous aurons

$$\frac{1}{l^2} + \Delta_1 \log\lambda = 0, \tag{5}$$

et, puisque les sphères enveloppées sont les sphères harmoniques de la première nappe,

$$\frac{1}{l} = \Omega, \qquad \mu = -\lambda\Omega.$$

Les relations (2) du n° 1 deviennent alors

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial \rho} = \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial \Omega}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial \log\lambda}{\partial \rho_1} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1}, \tag{6}$$

et la condition $\theta = \infty$ revient à

$$\Omega^2 + \Delta_1 \log\lambda = 0. \tag{7}$$

Il suffirait de tenir compte des équations (6), qui donnent visiblement

$$\Delta_1 \log\lambda = \frac{1}{\Gamma^2}\Delta_1 \Omega,$$

pour ramener cette condition (7) à la forme

$$\Delta_1 \log\Omega + \Gamma^2 = 0,$$

sous laquelle elle s'est présentée au n° 12. Nous garderons l'équation (7).

La première nappe de l'enveloppe de sphères étant isothermique, représentons son élément linéaire par

$$ds^2 = \mathrm{H}^2(d\rho^2 + d\rho_1^2).$$

On peut alors, en vertu d'une remarque de M. Darboux (n° 8), obtenir les sphères harmoniques en prenant

$$\lambda = \mathrm{H}^2\Gamma. \tag{8}$$

Introduisons maintenant les paramètres (α, β) des lignes de longueur nulle par les formules

$$d\rho + i\,d\rho_1 = \sqrt{\mathrm{A}_0(\alpha)}\,d\alpha, \qquad d\rho - i\,d\rho_1 = \sqrt{\mathrm{B}_0(\beta)}\,d\beta,$$

déjà employées au n° 15. Les relations (6) prennent la forme suivante

$$\frac{\sqrt{\mathrm{B}_0}}{\sqrt{\mathrm{A}_0}}\frac{\partial \log\lambda}{\partial\alpha} = \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \qquad \frac{\sqrt{\mathrm{A}_0}}{\sqrt{\mathrm{B}_0}}\frac{\partial \log\lambda}{\partial\beta} = \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}; \tag{6)'$$

l'équation (7) s'écrit

$$\Omega^2 = -\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial\alpha}\frac{\partial \log\lambda}{\partial\beta}; \tag{7)'$$

quant à l'expression (8) de λ, d'après la formule (9) du n° 15, elle devient

$$\lambda = \frac{4\varphi^2\Gamma}{\sqrt{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}}, \tag{8)'$$

et l'on a aussi

$$ds^2 = \mathrm{H}^2\sqrt{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}\,d\alpha\,d\beta = 4\varphi^2\,d\alpha\,d\beta.$$

Exprimons enfin que cet élément linéaire, multiplié par Γ^2, devient l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1. Nous poserons, à cet effet,

$$\Gamma^2\varphi^2 = -\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}, \tag{9}$$

ce qui transforme l'expression de λ en

$$\lambda = \frac{4i\varphi}{(\alpha+\beta)\sqrt{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}}. \tag{10}$$

Mais, comme on a toujours

$$\Gamma^2 = \Omega^2 - K = \Omega^2 + \frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

l'équation (9) revient à

$$(11) \qquad \Omega^2 = -\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{\varphi}{\alpha+\beta}.$$

Rapprochons ce résultat de l'équation (7)'; nous aurons

$$\frac{\partial\log\lambda}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\log\lambda}{\partial\beta} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{\varphi}{\alpha+\beta},$$

ce qui, en raison de la relation (10), peut s'écrire

$$\frac{\partial\log\lambda}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\log\lambda}{\partial\beta} = \frac{\partial^2\log\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

ou finalement

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\frac{1}{\lambda} = 0.$$

On a donc, en désignant par A et B deux fonctions qui ne dépendent respectivement que de α et de β,

$$(12) \qquad \lambda = \frac{4i}{A+B}.$$

En conséquence, les relations (10) et (9) donnent

$$\varphi = \frac{(\alpha+\beta)\sqrt{A_0B_0}}{A+B}, \qquad \frac{1}{\Gamma} = -i\,\frac{(\alpha+\beta)^2\sqrt{A_0B_0}}{A+B}.$$

Enfin, l'expression (11) de Ω^2 devient

$$(13) \qquad \Omega^2 = -\frac{A'B'}{A_0B_0(\alpha+\beta)^2}.$$

Substituons dans les équations (6)' les expressions de λ et de Γ qui viennent d'être obtenues; nous aurons

$$\frac{A'\sqrt{B_0}}{\sqrt{A_0}} = i(\alpha+\beta)^2\sqrt{A_0 B_0}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \qquad \frac{B'\sqrt{A_0}}{\sqrt{B_0}} = i(\alpha+\beta)^2\sqrt{A_0 B_0}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha},$$

ce qu'on peut, en vertu de la relation (13), écrire

$$\frac{B_0}{B'} = i\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\Omega}\right), \qquad \frac{A_0}{A'} = i\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\Omega}\right).$$

De là résulte évidemment

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(\frac{1}{\Omega}\right) = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

En portant les expressions (12) et (13) dans la condition (7), on détermine les fonctions A_0, B_0, qui sont celles du n° 17, et l'on retrouve pour Ω et ds^2 les expressions données dans ce passage pour Ω' et ds'^2.

25. *Remarque.* — On peut déterminer par un tout autre procédé les surfaces isothermiques qui jouissent de la propriété considérée. Exprimons, en effet, cette propriété par l'équation

$$K[\Gamma'^2\,ds'^2] = 1$$

et appliquons aux surfaces cherchées la transformation par normales parallèles; l'identité générale (n° 14)

$$\Gamma'^2\,ds'^2 = \Omega^2\,ds^2$$

montre que leurs transformées jouiront de la propriété

$$K[\Omega^2\,ds^2] = 1.$$

La réciproque étant vraie, on pourra chercher les surfaces isothermiques dont l'élément linéaire, multiplié par le carré de la courbure moyenne, devient l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1. On n'aura plus qu'à effectuer sur elles la transformation par normales parallèles pour obtenir les surfaces primitivement demandées.

En raison des relations (18), (19) et (20) du n° 10, qui donnent

$$\Omega^2\, ds^2 = -\frac{s^2}{pq}\, d\alpha\, d\beta,$$

il faudra trouver les surfaces isothermiques pour lesquelles on a

$$(14)\qquad \frac{s^2}{4pq} = \frac{1}{(\alpha+\beta)^2},$$

condition équivalente à la condition $K[\Omega^2\, ds^2] = 1$. Cette nouvelle solution du problème actuel sera développée dans la seconde partie de ces recherches.

(*A suivre.*)