Annales scientifiques de l'É.N.S.

J. Hadamard

# Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (deuxième mémoire)

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 22 (1905), p. 101-141

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__101_0>

# RECHERCHES

SUR LES

# SOLUTIONS FONDAMENTALES

ET L'INTÉGRATION DES

# ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

(DEUXIÈME MÉMOIRE.)

PAR M. HADAMARD.

## III. — Le cas hyperbolique pour $n=3$.

15. Dans un premier travail, nous avons démontré, pour toute équation linéaire du second ordre,

$$\mathcal{F}(u) = \sum a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum \mathrm{a}_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + lu = 0, \tag{2}$$

l'existence d'une solution fondamentale de la forme

$$u(x\mid a) = \mathrm{U}\Gamma^p \qquad \left(p = -\frac{n-2}{2}\right) \tag{19}$$

ou

$$u(x\mid a) = \mathrm{U}\Gamma^p + \mathrm{U}_1\log\Gamma \tag{19'}$$

(suivant la parité du nombre $n$ des variables), dans laquelle $\Gamma$ est le carré de la distance géodésique du point $x$ à un point déterminé quelconque $a$, relative à l'élément linéaire (¹)

$$\mathfrak{H}(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n; x_1, \ldots, x_n) : \Delta.$$

Cette solution est la généralisation naturelle du potentiel élémentaire et possède les mêmes propriétés pour les équations du type elliptique.

Je me propose, cette fois, de l'appliquer à l'étude des équations à trois variables du type hyperbolique.

La méthode appliquée jusqu'ici aux équations de cette nature (depuis les travaux de Kirchhoff et de M. Volterra jusqu'aux récentes *Thèses* de MM. Coulon et d'Adhémar) diffère, en un point important, de celle qui est employée dans la théorie du potentiel.

Cette dernière repose exclusivement sur la solution fondamentale singulière en un point, celle que nous avons définie dans ce qui précède par les formules (19) ou (19').

Les intégrales employées dans les travaux que nous venons de rappeler sont différentes. Elles ne sont pas seulement infinies sur un conoïde caractéristique, mais présentent, en outre, une *ligne singulière* réelle intérieure à ce conoïde.

Or cette ligne singulière, qui s'introduit naturellement par l'origine physique de la question, est, analytiquement parlant, sans aucune liaison avec l'équation.

Prenons, par exemple, l'équation des ondes cylindriques

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \tag{33}$$

où la variable $x_3$ représente le temps. La ligne singulière est alors représentée par les équations $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$. Mais il existe une infinité de changements de variables linéaires qui n'altèrent pas la forme de cette équation. Si l'on effectue l'un d'eux, la ligne singulière précédente est remplacée par une autre droite de direction absolument quelconque, pourvu qu'elle soit intérieure au conoïde.

(¹) Rappelons que, H étant la forme quadratique dont les coefficients sont les $a_{ik}$, $\Delta$ est le discriminant de H, et $\mathfrak{H}$ son adjointe.

Il existe, d'ailleurs, d'autres changements de variables non linéaires (analogues aux inversions de l'espace) qui conservent l'équation (33). La ligne singulière deviendrait alors une conique.

16. C'est dans ce caractère artificiel de la méthode employée qu'il faut voir la source des difficultés qu'a présentées la généralisation de la méthode de Riemann, alors que le problème étudié, celui de Cauchy, est le plus simple de la Physique mathématique.

On sait que la méthode de M. Volterra ne fournit pas directement les valeurs de la solution cherchée, mais bien une certaine intégrale définie portant sur ces valeurs. Ces dernières, dans le cas de l'équation (33), se déduisent de là sans difficulté par une différentiation. Mais, lorsqu'il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+\mathrm{K}u=0, \tag{34}$$

c'est seulement par une savante méthode d'approximations successives que M. Coulon ([1]) parvient au même résultat. Il arrive à l'étendre au cas où la constante K est remplacée par une fonction de $x_1$, $x_2$, $x_3$, mais non pas à celui où les termes en $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u}{\partial x_3}$ existent.

M. d'Adhémar ([2]) traite ce cas plus étendu. Seulement les résultats qu'il obtient, lui aussi, par un jeu d'approximations successives, n'ont plus la même signification que ceux des auteurs précédents. Il ne s'agit plus d'une solution particulière qui, formée une fois pour toutes pour chaque équation, fait reconnaître l'intégrale cherchée, quelles que soient les conditions initiales : le calcul d'approximations successives suppose ces conditions données dès l'abord, et doit être recommencé si on les change.

Mais, d'autre part, le cas traité par M. d'Adhémar n'est pas encore le cas général. Si l'on veut étudier celui-ci, il est impossible d'admettre que les dérivées du second ordre aient leurs coefficients constants. On arriverait probablement à généraliser la méthode de M. d'Adhémar

---

([1]) *Thèse*, n° 16, p. 43-45.

([2]) *Thèse*, 3e partie, Chapitre II; *Bull. Soc. math. fr.*, 1901, t. XXIX, p. 190-199.

dans ces nouvelles circonstances; il est certain, néanmoins, que celles-ci seraient un obstacle de plus à la formation des approximations successives convergentes.

17. Toutes ces difficultés tiennent uniquement à la défectuosité de méthode signalée tout à l'heure : elles disparaissent d'elles-mêmes, lorsqu'on emploie la solution fondamentale (19), et la méthode devient immédiatement applicable à une équation quelconque [1], ainsi que nous allons le voir, en nous bornant toutefois, pour le moment, au cas de $n=3$.

Ce n'est pas que les calculs auxquels nous serons conduits diffèrent essentiellement de ceux auxquels nous faisions allusion tout à l'heure : plus particulièrement, de ceux de M. Volterra. On retomberait exactement sur ceux-ci en traitant, comme nous allons l'indiquer, l'équation (33). La seule différence est que la solution particulière qui leur sert de base ne sera point considérée en elle-même, mais déduite de notre solution fondamentale, dont elle dérive par une quadrature.

Partons, en effet, de l'équation (2) ou, plus généralement, de l'équation

$$\mathcal{F}(u)=f(x_1, x_2, x_3); \tag{2'}$$

soit

$$\mathcal{G}(v)=0 \tag{35}$$

l'adjointe de (2). Désignons par $v(x\,|\,a)=V\Gamma^{-\frac{1}{2}}$ la solution fondamentale de cette adjointe, singulière sur le conoïde caractéristique de sommet $a(a_1, a_2, a_3)$.

Faisons maintenant décrire à ce point $a$ un segment de ligne $\mathcal{L}$, dont les différents points sont définis par les valeurs d'un paramètre $t$, l'une des extrémités O du segment correspondant à la valeur $t=0$,

---

[1] N'oublions pas, toutefois, que les méthodes d'approximations de MM. Coulon et d'Adhémar s'appliquent à des équations à coefficients non analytiques, que n'atteint pas jusqu'à présent la méthode actuelle, faute d'avoir démontré, pour ce cas, l'existence de la solution fondamentale.

l'autre O' à la valeur $t = T$ (laquelle sera supposée positive), et formons l'expression

$$\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{L}} m\, v(x \mid a)\, dt, \tag{36}$$

où $m$ est une fonction de $t$ seul (de sorte que $\mathfrak{v}$ est fonction de $x$ uniquement par la présence des coordonnées de ce point dans la fonction $v$).

La ligne $\mathfrak{L}$ sera quelconque. Toutefois, sa direction en chaque point sera supposée intérieure au cône caractéristique en ce point. Il est presque évident que, dans ces conditions, la ligne $\mathfrak{L}$ tout entière est intérieure au conoïde caractéristique ayant pour sommet l'un quelconque de ses points, O par exemple. C'est ce qu'il est aisé de vérifier en remarquant qu'en tout point P intérieur au conoïde caractéristique $\Gamma_0 = 0$ qui a pour sommet O, le plan tangent à la surface $\Gamma_0 =$ const. est, grâce à l'équation (18), extérieur au cône caractéristique en P et ne peut, par conséquent, contenir la tangente à $\mathfrak{L}$.

Si le point $x$ est tel que le conoïde caractéristique issu de ce point ne rencontre pas $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{v}$ satisfait visiblement à l'équation (35).

18. Si, au contraire, le conoïde caractéristique de sommet $x$ coupe la ligne $\mathfrak{L}$ en un point $\omega$, correspondant à une valeur $\theta$ du paramètre $t$, on se trouve dans un cas analogue à celui de plusieurs intégrales définies, connues en Physique mathématique, telles que l'intégrale de l'équation d'Euler (¹), ou encore les solutions de l'équation (33) considérées par M. Levi-Civita (²). Supposons, comme nous le ferons dans tout ce qui suit, l'équation écrite de manière que l'on ait

$$\Gamma > 0$$

pour deux points tels que chacun d'eux soit intérieur au conoïde caractéristique issu de l'autre : autrement dit, de manière que le dis-

(¹) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, n° 354, p. 66.

(²) *Supra una classe di integrali dell' equazione* $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ (*Nuovo Cimento*, série 4, t. VI; 1897).

criminant $\Delta$ de la forme H soit positif. Cette forme se composant d'un carré positif et de deux carrés négatifs. Supposons de plus que le point $x$ soit intérieur au conoïde de sommet O : il est, d'ailleurs, convenu que $\omega$ est le point (unique, d'après ce qui précède) où la ligne $\mathfrak{L}$ coupe celle des nappes du conoïde de sommet $x$ qui contient O à son intérieur. L'intégrale $\varphi$ sera une imaginaire

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$$

dont les deux termes $\varphi_1$ et $i\varphi_2$ correspondront aux deux arcs O$\omega$, $\omega$O', en lesquels $\mathfrak{L}$ est partagé par le point $\omega$. Chacun de ces termes, et, en particulier, le premier (¹)

$$(36') \qquad \varphi_1 = \int_0^{0} m v(x \mid a)\, dt$$

devra être une solution de l'équation $\mathcal{G} = 0$. C'est toutefois ce qu'il est nécessaire de vérifier directement, à cause de la singularité que présente, à la limite supérieure d'intégration, la fonction $v$.

Nous ferons aisément cette vérification en rapportant le point $x$ à un système de coordonnées formé de la manière suivante :

Le point $\omega$ est le sommet d'un conoïde caractéristique, qui passe par le point $x$. Sur ce conoïde, les différentes bicaractéristiques peuvent être considérées comme correspondant aux différentes valeurs d'un paramètre $\lambda$. Sur chacune d'elles, la position, les différents points correspondront aux valeurs du paramètre $s$ précédemment introduit. Il entre, il est vrai, une arbitraire dans le choix de ce paramètre, lequel n'est défini qu'à un facteur constant près sur chaque bicaractéristique. Il est clair que ce facteur peut avoir été choisi, pour chaque point $\omega$ de la ligne $\mathfrak{L}$ et pour chaque bicaractéristique issue de ce point, de manière :

1° Que la nappe du conoïde caractéristique à laquelle est intérieure la direction des $t$ croissants sur la ligne $\mathfrak{L}$ corresponde à des valeurs positives de $s$;

(¹) Ce terme $\varphi_1$ est celui qui intervient dans la solution du problème *intérieur* (suivant la dénomination de M. d'Adhémar). Le terme $\varphi_2$ s'introduirait à propos du problème extérieur, dont nous ne nous occuperons pas actuellement.

2° Que les valeurs de $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$ (ou encore les valeurs de $\pi_{01}$, $\pi_{02}$, $\pi_{03}$), prises au point $\omega$ sur la bicaractéristique $(\lambda)$ issue de ce point, soient des fonctions régulières de $\lambda$ et de $\theta$;

3° Que ces trois quantités ne soient jamais nulles à la fois, de sorte que la somme de leurs carrés, par exemple, ne soit jamais inférieure à un nombre positif fixe, quels que soient $\theta$ et $\lambda$.

Dans ces conditions, nous pourrons prendre comme coordonnées curvilignes du point $x$ les valeurs correspondantes de $\theta$, $\lambda$ et $s$. Non seulement $x_1$, $x_2$, $x_3$ seront des fonctions régulières de $\theta$, $\lambda$, $s$, mais l'inverse aura lieu tant qu'on ne sera pas au voisinage de $\mathfrak{L}$.

La quantité $\Gamma(x|a)$, formée avec le point $x$ et un point quelconque de $\mathfrak{L}$ (défini par une valeur de $t$, supposée inférieure à $\theta$) aura la forme

$$\Gamma(x\,|\,a) = (\theta - t)\,G \tag{37}$$

(où G sera une fonction régulière non nulle pour $t = \theta$) et, par conséquent, on aura

$$m(t)\,v(x\,|\,a) = w(\theta, \lambda, s, t)\,(\theta - t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

où $w$ est régulier.

Quant à l'équation (35), puisque la variable $\theta$ est caractéristique et la variable $s$ bicaractéristique, elle aura la forme

$$a\,\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial\theta} + b\,\frac{\partial v}{\partial\theta} + \mathcal{G}_1(v) = 0, \tag{40}$$

où $\mathcal{G}_1$ ne contient pas de dérivées par rapport à $\theta$.

Pour que l'expression (38) puisse satisfaire à l'équation (40), il faut que $a\frac{\partial w}{\partial s} + bw$ soit nul avec $\theta - t$. Si l'on tient compte de cette remarque, il suffit de faire, dans l'intégrale $\mathfrak{V}_1$, le changement de variable

$$\theta - t = \tau$$

(moyennant lequel la différentiation dans le signe $\int$ n'offre plus de difficulté) pour constater que $\mathfrak{V}_1$ est bien une solution de l'équation adjointe. Nous verrons d'ailleurs plus loin que ce fait doit être considéré comme évident *a priori*.

19. Nous avons considéré la fonction $\varphi_1$ en un point distant de $\mathfrak{L}$. Examinons comment se comporte cette même fonction lorsqu'on s'approche de $\mathfrak{L}$.

Supposons le point $x$ voisin d'un certain point $(a_1^0, a_2^0, a_3^0)$ de cette ligne, lequel correspond à une valeur $t_0$ du paramètre. Posons

$$x_i = a_i^0 + x_i', \qquad t = t_0 + t'.$$

Il est clair que le développement de $\Gamma(x|a)$ suivant les puissances de $x_1', x_2', x_3', t'$, aura la forme

$$\Gamma = \lambda + 2\mu t' + \nu t'^2 + \ldots,$$

où $\lambda$ commencera par des termes du second degré par rapport aux $x'$, $\mu$ par des termes du premier degré, tandis que $\nu$ aura une valeur initiale $\nu_0$ différente de zéro, savoir

$$\nu_0 = \frac{1}{\Delta} \mathfrak{H}\left(\frac{da_1}{dt_0}, \frac{da_2}{dt_0}, \frac{da_3}{dt_0}\right)$$

($\mathfrak{H}$ et $\Delta$ étant calculés au point $a^0$).

Il en résulte, d'après un théorème connu de Weierstrass, que l'on pourra écrire

$$\Gamma = n(x_1, x_2, x_3, t)[(t - A)^2 - B],$$

où $x$ est une fonction holomorphe, égale à $\nu_0$ pour $t = t_0$, $x_i = x_i^0$; A et B deux fonctions holomorphes de $x_1, x_2, x_3$ seuls.

La fonction A prend la valeur $t_0$ au point $a^0$ et, par conséquent, d'une manière générale, si le point $x$ vient en un point quelconque (1) de $\alpha$, se réduit à la valeur correspondante de $t$.

La fonction B, égalée à zéro, représente l'enveloppe des conoïdes ayant leurs sommets sur $\mathfrak{L}$, c'est-à-dire l'ensemble des deux surfaces caractéristiques qui passent par $\mathfrak{L}$ : ensemble qui est d'ailleurs imaginaire si la ligne $\mathfrak{L}$ est, par rapport aux conoïdes, située comme nous

(1) Les fonctions A et B sont définies dans tout le voisinage de $\mathfrak{L}$. La signification de l'équation $(t - A)^2 - B = 0$ montre immédiatement que leur définition est indépendante du choix de $t_0$.

l'avons supposé. Par exemple, pour l'équation (33), $\mathfrak{L}$ étant la ligne

$$(41)\qquad x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = t,$$

on aurait

$$B = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2.$$

Portons maintenant cette valeur de $\Gamma$ dans l'intégrale $\varphi_1$, où l'on a

$$v(x \mid a) = \frac{V(x \mid a)}{\sqrt{\Gamma}};$$

la quantité $\dfrac{m(t)\,V}{\sqrt{n}}$ étant développable suivant les puissances de $t'$, on peut évidemment poser

$$\frac{m(t)\,V}{\sqrt{n}} = R\,[(t-A)^2 - B] + a\,(t-A) + b,$$

R étant une fonction de $x$ et de $t$, holomorphe lorsque le point $x$ est voisin de $\mathfrak{L}$ et $a$, $b$ des fonctions des $x$ seuls. Dans l'intégrale

$$(42)\qquad \varphi_1 = \int_0^{A-\sqrt{B}} R\,dt\sqrt{(t-A)^2 - B} + \int_0^{A-\sqrt{B}} \frac{a(t-A)+b}{\sqrt{(t-A)^2-B}}\,dt,$$

le premier terme donne une quantité finie, ainsi que ses dérivées premières, dans tout le voisinage de $\mathfrak{L}$. La partie principale de $\varphi_1$ est donc

$$(43)\quad \int_0^{A-\sqrt{B}} \frac{a(t-A)+b}{\sqrt{(t-A)^2-B}}\,dt = -a\sqrt{A^2-B} - b\log(A+\sqrt{A^2-B}) + \frac{b}{2}\log B.$$

Tous les termes doivent être conservés si le point $x$ est voisin de O. Dans le cas contraire, le dernier seul est singulier et $\varphi_1$ est infini à la façon de $\log B$.

On retrouverait d'ailleurs une expression toute semblable à (43) en tenant compte de la première intégrale (42). La quantité R peut, en effet, se mettre sous forme d'une somme de termes

$$[\alpha(t-A) + B]\,[(t-A)^2 - B]^h,$$

lesquels, une fois multipliés par $\sqrt{(t-A)^2-B}\,dt$, ont, eux aussi, des intégrales de la forme

$$P \log\left(A - t + \sqrt{(t-A)^2 - B}\right) + Q\sqrt{(t-A)^2 - B}$$

(P et Q holomorphes).

20. On reconnaît, dans l'expression (43), la forme à laquelle appartiennent les solutions de l'équation (33) introduites par M. Volterra (du moins pour la région *intérieure* au conoïde caractéristique) dans son Mémoire *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (¹). Celles-ci, comme nous l'avons dit, sont bien des quantités $\varphi_1$ et dérivent par quadrature de la solution fondamentale

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x_3-a_3)^2-(x_1-a_1)^2-(x_2-a_2)^2}}. \tag{44}$$

La première (²)

$$\varphi_1 = \log \frac{x_3 - a_3 + \sqrt{(x_3-a_3)^2-(x_1-a_1)^2-(x_2-a_2)^2}}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}$$

correspond à $m(t) = 1$; la seconde (²)

$$\Phi_1 = \sqrt{(x_3-a_3)^2-(x_1-a_1)^2-(x_2-a_2)^2} - (x_3-a_3)\varphi_1$$

correspond à $m(t) = -t$ [la ligne $\mathfrak{L}$ étant toujours représentée par les équations (41)].

21. Nous venons de voir que $\varphi_1$ est infini, le long de $\mathfrak{L}$, comme un potentiel logarithmique, c'est-à-dire comme la solution fondamentale qui correspond à $n = 2$. D'une manière générale, au lieu de former directement, comme nous l'avons indiqué plus haut, la solution fondamentale relative à une valeur paire de $n$, on peut la déduire par quadrature de celle qui correspond à la valeur impaire immédiatement supérieure.

---

(¹) *Acta Mathematica*, t. XVIII, 1894.
(²) Mémoire cité, p. 169.

Soit, en effet,

$$(2) \qquad \mathcal{F}(u) = 0$$

une équation à $n = 2n_1$ variables indépendantes, pour laquelle nous supposons formée la quantité $\Gamma(x|a)$. Introduisons une $n+1^{\text{ième}}$ variable $z$ (en adjoignant de même, aux $n$ coordonnées $a$, une $n+1^{\text{ième}}\,c$) et considérons la nouvelle équation

$$(45) \qquad \mathcal{F}_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \mathcal{F}(u) = 0.$$

$\Gamma$ est ici remplacé par $\frac{(z-c)^2}{2} - \Gamma$ et l'équation que nous venons d'écrire admet la solution fondamentale

$$\frac{U(x_i, a_i, c-z)}{[(z-c)^2 - \Gamma]^{n_1 - \frac{1}{2}}}.$$

De celle-ci, en nous bornant en ce moment au cas de $n_1 = 1$, c'est-à-dire de $n = 3$, nous déduirons la suivante :

$$v_1 = \int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} \frac{U(x_i, a_i, c-z)}{[(c-z)^2 - \Gamma]^{n_1 - \frac{1}{2}}}\, dc,$$

$c_1$ étant un nombre fixe supérieur aux valeurs que peut prendre, dans une région R où nous ferons varier nos deux points, la limite inférieure $z + \sqrt{\Gamma}$.

$v_1$ est une solution de l'équation (45) et non de la proposée. Mais si on l'écrit sous la forme

$$v_1 = \int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1 - z} \frac{U(x_i, a_i, \zeta)}{(\zeta^2 - \Gamma)^{n_1 - \frac{1}{2}}}\, d\zeta,$$

on voit que $\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}$ est une fonction holomorphe dans R, de sorte qu'il suffira de déterminer une autre fonction holomorphe $v'$ par la condition

$$\mathcal{F}(v') = -\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}$$

pour que la somme $v_1 + v'$ donne une solution de (2), solution singulière pour $\Gamma(x \mid a) = 0$ et qui, d'après ce que nous avons dit précédemment pour $\varphi_1$, se comporte bien dans le voisinage de cette multiplicité singulière, comme nous l'avons indiqué précédemment.

**22.** Nous venons d'obtenir la partie principale de l'intégrale $\varphi_1$, lorsqu'on l'exprime en fonction de $x_1$, $x_2$, $x_3$. Proposons-nous de calculer cette même partie principale, ainsi que celles des dérivées de $\varphi_1$, lorsqu'on emploie les coordonnées curvilignes $\theta$, $\lambda$, $s$ précédemment définies.

Au voisinage de $\mathfrak{g}$, l'expression (37) de $\Gamma$ n'est plus admissible. Mais la suivante est, au contraire, valable dans tous les cas :

$$\Gamma = 2 M s \tau + N \tau^2, \tag{46}$$

où $\tau$ désigne toujours la différence $\theta - t$, et où M, N sont deux fonctions régulières, prenant, pour $s = \tau = 0$, les valeurs

$$\left\{ \begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{\Delta} \sum_i \frac{1}{2} \frac{dx_i}{ds} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \dfrac{da_i}{dt}}, \\ N_0 &= \frac{1}{\Delta} \mathfrak{H}\left( \frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt} \right), \end{aligned} \right. \tag{46'}$$

lesquelles sont non seulement différentes de zéro, mais positives [ce fait correspondant, pour $N_0$, à l'hypothèse que $\Gamma > 0$ représente l'intérieur du conoïde et, pour $M_0$, à celle, également faite plus haut, que, sur la nappe à laquelle est intérieure la ligne $\mathfrak{g}$ suivie dans le sens des $t$ croissants, $s$ est positif [1]].

Il suffit, pour établir la formule (46), de remarquer que le second terme représente $\Gamma(\omega \mid a)$ et le premier la différence $\Gamma(x \mid a) - \Gamma(\omega \mid a)$. Nous voyons même ainsi que l'on peut supposer N indépendant de $s$ et de $\lambda$. Il n'en est pas de même de M et même la valeur initiale $M_0$ de cette quantité dépend encore, non seulement de $t$, mais encore, en général, de $\lambda$. Toutefois, on peut évidemment, si l'on veut, disposer

---

[1] En effet, dans ces conditions, en un point pour lequel $s > 0$, $\Gamma$ est positif avec $\tau$. Donc $\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial s\, \partial \tau}$ doit avoir une valeur positive (quel que soit $\lambda$) pour $s = \tau = 0$.

du choix des paramètres $s$ sur les différentes bicaractéristiques, de manière à ce que $M_0$ ne dépende que de $t$ : autrement dit, en langage géométrique, de manière à ce que les points d'un même conoïde qui correspondent à une même valeur très petite de $s$ soient sensiblement distribués dans un plan parallèle à la direction conjuguée de la tangente à $\mathcal{L}$.

$\Gamma$ étant ainsi évaluée, on a

$$\varphi_1 = \int_0^\theta \frac{m(\theta-\tau)\,V(\theta, \lambda, s, \theta-\tau)}{\sqrt{2Ms\tau + N\tau^2}}\,d\tau.$$

Rappelons d'ailleurs que V est une fonction holomorphe, égale à 1 pour $s = \tau = 0$. Quant à $m(t)$, nous le supposerons d'un signe invariable et, de plus, fini et différent de zéro (¹) sur toute la ligne $\mathcal{L}$.

Nous n'aurons pas besoin de la dérivée $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}$. On a

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda} = -\int_0^\theta \frac{mVM's\tau\,d\tau}{(2Ms\tau + N\tau^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^\theta \frac{m\dfrac{\partial V}{\partial\lambda}\,d\tau}{\sqrt{2Ms\tau + N\tau^2}},$$

en désignant par $M'$ la dérivée $\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}$;

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s} = -\int_0^\theta \frac{mV\left(M + s\dfrac{dM}{ds}\right)\tau\,d\tau}{(2Ms\tau + N\tau^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^\theta \frac{m\dfrac{\partial V}{\partial s}\,d\tau}{\sqrt{2Ms\tau + N\tau^2}}.$$

Occupons-nous d'abord de cette dernière quantité, dont le premier terme donne évidemment la partie principale. Autour d'un point déterminé quelconque $\omega$ de $\mathcal{L}$, correspondant à la valeur $\theta$ du paramètre, nous pouvons décrire une sphère telle que, si les points $x$ et $a$ sont à l'intérieur de cette sphère, les quantités M, N, $m$, V puissent être remplacées, avec une erreur inférieure à un nombre arbitraire-

(¹) On peut avoir à faire sur $m(t)$ d'autres hypothèses pour l'étude de questions voisines de celle qui nous occupe actuellement. C'est ainsi que, comme nous l'avons vu, l'une des intégrales auxquelles M. Volterra a été conduit correspond à $m(t) = -t$ : elle s'applique, non à l'intégration de l'équation (33), mais à celle d'un certain système qui en dérive.

ment petit, par les valeurs $M_0$, $N_0$, $m(0)$, 1, qu'elles ont au point $\omega$. $\tau_1$ étant la valeur positive de $\tau$ qui correspond au point où cette sphère coupe la ligne L, l'intégrale prise de $\tau_1$ à 0 reste finie quand $s$ tend vers *zéro*. Quant à l'intégrale prise de o à $\tau_1$, elle peut, d'après ce qui vient d'être dit, se représenter, avec une erreur relative très petite, par

$$M_0 m(0)\int_0^{\tau_1}\frac{\tau\,d\tau}{(2M_0 s\tau+N_0\tau^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{m}{s}\sqrt{\frac{\tau_1}{2M_0 s+N_0\tau_1}}.$$

$\tau_1$ étant choisi une fois pour toutes, ceci donne, lorsque $s$ tend vers *zéro*,

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\sim-\frac{m}{s\sqrt{N_0}},\tag{47}$$

le signe $\sim$ indiquant l'égalité asymptotique.

La même méthode [ou l'emploi des formules (42) ou (43)] pourrait donner la valeur approchée de $\varphi_1$ lui-même; mais on l'obtient immédiatement en intégrant l'égalité asymptotique précédente; on a

$$\varphi_1\sim\frac{-m}{\sqrt{N_0}}\log s.$$

Quant à $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}$, son premier terme est de même forme que celui de $\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}$, mais contient le facteur $s$; il est donc fini et tend vers

$$-\frac{mM_0'}{M_0\sqrt{N_0}}.\tag{47'}$$

Cette valeur limite est d'ailleurs nulle si l'on s'arrange, comme nous l'avons dit plus haut, pour que $M_0$ soit indépendant de $\lambda$.

Quant au second terme, qui a même dénominateur que $\varphi_1$ et serait, par conséquent, logarithmiquement infini si le numérateur était constant, il est cependant nul parce que, V étant une fonction holomorphe des $x$, $\frac{\partial V}{\partial\lambda}$ est évidemment de l'ordre de $s$.

23. Ces remarques faites, nous pouvons aborder l'application des quantités $\varphi$ et $\varphi_1$ à la résolution du problème de Cauchy.

La formule fondamentale qui sert de base à toutes les recherches de cette espèce est ici ([1])

$$(48)\qquad \iiint_R [v\mathcal{F}(u) - u\mathcal{G}(v)]\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$
$$= -\iint_S \left[\frac{1}{2}\left(v \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \pi_i} - u \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \pi_i}\right) + Luv\right] d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

où R est un volume, S sa surface limite, ou l'ensemble de ses surfaces limites; $\lambda_1$, $\lambda_2$, des coordonnées curvilignes sur S; $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, les déterminants fonctionnels des coordonnées $x$ par rapport à $\lambda_1$, $\lambda_2$, qui sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à S et qui doivent être pris de manière à avoir respectivement les mêmes signes que les cosinus de la normale dirigée vers l'intérieur de R. La quantité L a la valeur

$$L = \sum a_i \pi_i - \sum_{ik} \pi_i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}.$$

La somme $\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \pi_i}$ est proportionnelle à la dérivée de $u$ suivant la direction *conormale* $\nu$; si $\nu$ désigne la longueur d'un segment de conormale, on a

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \pi_i} = h\frac{du}{d\nu},$$
$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\sum \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_i}\right)^2}.$$

Plus généralement, $\nu$ pourra désigner un paramètre quelconque définissant un point de la conormale; $h$ est alors défini par les relations

$$h\frac{dx_i}{d\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \pi_i}$$

Nous supposerons toujours le paramètre $\nu$ choisi de manière que $h$ soit positif.

Rappelons encore que, si S est caractéristique, la conormale correspondante est tangente à S et n'est autre que la direction de la

---

([1]) *Voir* nos *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, n° 332, p. 318-320. En cet endroit, la normale est supposée prise extérieurement au volume d'intégration : aussi avons-nous changé, ici, le signe du second membre.

bicaractéristique située sur S, de sorte qu'on peut prendre, pour le paramètre conormal $\nu$, la variable nommée $s$ dans ce qui précède.

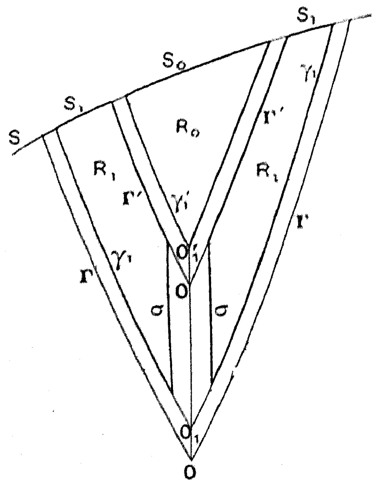
Soit maintenant donnée une surface S (*voir* la figure) dont le plan tangent soit extérieur au cône caractéristique ayant pour sommet l'un quelconque de ses points, et soit à chercher une solution $u$ de l'équation

$$\mathcal{F}(u) = f(x_1, x_2, x_3), \tag{2'}$$

(où $f$ est une fonction donnée), telle que $u$ et sa dérivée conormale $\frac{du}{d\nu}$ prennent sur S des valeurs données. Soit, en particulier, à calculer la valeur de $u$ en un point donné quelconque O.

Nous appliquerons la formule fondamentale à la fonction $u$, d'une part, aux fonctions $\varphi$ et $\varphi_1$ de l'autre, dans le domaine R compris

Fig. 1.




entre notre surface et une des deux nappes du conoïde caractéristique Γ qui a O pour sommet ([1]).

([1]) Moyennant l'hypothèse faite sur S, tout conoïde caractéristique, — du moins tout conoïde ayant son sommet suffisamment voisin de S — coupe cette surface suivant une courbe fermée unique et délimite avec elle un volume déterminé, une seule des deux nappes du conoïde servant de frontière à ce volume. Nous supposons, s'il y a lieu, le point O placé dans une région telle que ces différentes circonstances aient lieu.

Plus exactement, soit menée, par le point O, intérieurement à la nappe en question, la ligne $\mathcal{L}$ jusqu'en O' (*fig.* 1). Soient $o'_1$ un point situé sur le prolongement de cet arc OO', à une petite distance de O'; $o_1$, un point situé sur $\mathcal{L}$ à une petite distance du point O; $\Gamma'$, $\gamma_1$, $\gamma'_1$ les conoïdes caractéristiques de sommets O', $o_1$, $o'_1$. Soit encore $\sigma$ une petite surface analogue à une surface canal, entourant $\mathcal{L}$ : pour fixer les idées, nous prendrons pour $\sigma$ le lieu des points pour lesquels la coordonnée curviligne $s$, précédemment introduite, a une valeur constante très petite $s_0$.

Nous intégrerons d'une part dans le domaine $R_0$ délimité par S et $\gamma'_1$, en remplaçant $v$ par $\mathcal{V}$; d'autre part, dans le domaine $R_1$ délimité par $\Gamma'$, $\gamma_1$, S et $\sigma$, en remplaçant $v$ par $\mathcal{V}_1$.

24. Nous allons rechercher ce que devient l'intégrale double relative à $\sigma$, lorsque $s_0$ tend vers *zéro*.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les dérivées $\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}$; $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ les dérivées $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$; $\xi'_i$ les dérivées $\frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda}$ (en sorte que l'on a sensiblement, pour $s$ sensiblement très petit, $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} = s\xi'_i$); D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 \end{vmatrix}$$

de ces neuf quantités;

$$(49) \qquad \begin{cases} A_1 = \xi_2\xi'_3 - \xi_3\xi'_2, & A_2, \quad A_3, \\ X'_1 = \alpha_3\xi'_2 - \alpha_2\xi'_3, & X'_2, \quad X'_3, \end{cases}$$

les mineurs de D relatifs aux éléments $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ respectivement;

$$(49') \qquad X_1 = \alpha_3\xi_2 - \alpha_2\xi_3, \quad X_2, \quad X_3,$$

les mineurs par rapport à $\xi'_1$, $\xi'_2$, $\xi'_3$, changés de signe, de sorte que $X'_i$ est la dérivée de $X_i$ par rapport à $\lambda$.

Nous supposerons le paramètre $\lambda$ choisi de manière à être croissant lorsqu'on tourne dans le sens direct pour un observateur placé suivant $\mathcal{L}$ et dans le sens des $t$ croissants. On aura alors, en grandeur et en signe, avec une erreur de l'ordre de $s^2$, pour les quantités $\pi_i$ relatives à la surface $\sigma$ rapportée aux coordonnées curvilignes $\theta$, $\lambda$, les expressions

$$\pi_i = s X_i'. \tag{50}$$

Le déterminant D sera positif.

D'ailleurs les dérivées par rapport aux $x$ sont données en fonction des dérivées par rapport à $\theta$, $\lambda$, $s$, par les relations

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{A_i}{D}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{X_i'}{D}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{X_i}{sD}\frac{\partial}{\partial \lambda}$$

(aux termes d'ordre supérieur en $s$ près); par conséquent, moyennant les valeurs (50), il vient

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \pi_i} = \frac{s\Theta}{D}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\Lambda}{D}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} + \frac{sZ}{D}\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}, \tag{51}$$

où l'on a posé

$$\Theta = \sum_i \frac{1}{2} A_i \frac{\partial H}{\partial X_i'},$$

$$\Lambda = \sum_i \frac{1}{2} X_i \frac{\partial H}{\partial X_i'} = \sum_i \frac{1}{2} X_i' \frac{\partial H}{\partial X_i},$$

$$Z = H(X_1', X_2', X_3').$$

On peut transformer ces dernières expressions à l'aide d'une identité connue de la théorie des formes quadratiques; en remplaçant les X' par leurs valeurs (49), on a, par exemple,

$$Z = H(X_1', X_2', X_3') = \frac{1}{\Delta}\left[\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\,\mathfrak{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3') - \left(\sum_i \frac{1}{2}\alpha_i \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi_i'}\right)^2\right].$$

La quantité $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est celle que nous avons désignée plus haut [formule (46')] par $\Delta N_0$, pendant que $M_0$ est égal à $\frac{1}{\Delta}\sum \frac{1}{2}\xi_i \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \alpha_i}$

et que l'on a, par conséquent,

$$\sum_i \frac{1}{2}\alpha_i \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi'_i} = \sum \frac{1}{2}\xi'_i \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha_i} = \Delta M'_0,$$

d'où

$$Z = N_0 \mathcal{G}(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) - \Delta M'^2_0.$$

De même on a

$$H(X_1, X_2, X_3) = N_0 \mathcal{G}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \Delta M_0^2 = -\Delta M_0^2$$

[puisque la direction $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est tangente au conoïde caractéristique]; et, par conséquent,

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \lambda} H(X_1, X_2, X_3) = -\Delta M_0 M'_0.$$

Quant au coefficient $\Theta$, nous n'avons pas à nous en occuper, car il n'influe pas sur le résultat.

Nous avons, en effet, à intégrer l'expression (51) par rapport à $\lambda$ et à $\theta$, après l'avoir multipliée par $u$. Or l'intégrale provenant ainsi du terme en $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}$ peut se remplacer par la somme d'une intégrale double et de deux intégrales simples portant sur $\varphi_1$ : celles-ci s'annulent lorsque la surface $\sigma$ vient se confondre avec la ligne $g$, car le premier terme de la formule (51) contient $s$ en facteur et $\varphi_1$ n'est que logarithmiquement infini.

Ne retenons donc que les deux derniers termes de (51) : moyennant les évaluations (47) et (47') de $\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda}$ et les valeurs obtenues pour Z, $\Lambda$, leur ensemble se réduit à

$$(52) \qquad -\frac{\Lambda}{D}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} + \frac{sZ}{D}\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = -m\sqrt{N_0}\,\frac{\mathcal{G}(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)}{D}.$$

Nous aurions pu, d'ailleurs, d'après une remarque précédemment faite, supposer, dans le calcul qui précède, $M'_0 = 0$; on voit que cette hypothèse n'aurait en rien modifié le résultat.

Intégrons par rapport à $\lambda$. Le premier facteur de l'expression précédente reste constant ainsi que le facteur $u$ par lequel nous devons la multiplier et nous avons à considérer l'intégrale

$$\int \frac{\mathfrak{G}(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)}{D}\, d\lambda = \int \frac{\mathfrak{G}(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \end{vmatrix}}.$$

Cette intégrale, étendue à la conique

$$\mathfrak{G}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

décrite par le point de coordonnées homogènes $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, est finie lorsque le point $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est intérieur à cette conique (comme c'est le cas ici) et égale (puisque $\Delta^2$ est le discriminant de $\mathfrak{G}$) à

$$(53) \qquad \pm 2\pi \frac{\Delta}{\sqrt{\mathfrak{G}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}} = \pm 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{N_0}}$$

le signe dépendant du sens dans lequel la conique est décrite.

Dans le cas actuel, ce sens est, comme nous l'avons vu, tel que le déterminant qui figure au dénominateur soit positif. Comme il en est de même de $\Delta$ et que le point $(\xi'_1, \xi'_2, \xi_3)$ appartient à la région extérieure au conoïde, celle où l'on a $\frac{\mathfrak{G}}{\Delta} < 0$, c'est le signe $-$ qui doit être pris devant la quantité (53). Celle-ci vient détruire le facteur $\sqrt{N_0}$ de l'expression (52) et il nous reste, en intégrant maintenant par rapport à $\theta$,

$$\lim_{S=0} \int\int_\sigma u\left(-\frac{\Lambda}{D}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda} + \frac{sZ}{D}\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\right) d\lambda\, d\theta = 2\pi \int_\Gamma m\sqrt{\Delta}\, u(a)\, dt.$$

25. Les termes $\varphi_1 \sum \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \pi_i}$ et $Lu\varphi_1$ qui ne contiennent que $\varphi_1$ en facteur, sont, comme d'habitude, négligeables lorsque $\sigma$ est infiniment petite.

L'intégrale prise suivant $\gamma_1$ devient aussi nulle lorsque ce conoïde vient se confondre avec $\Gamma$, parce que $\varphi_1$ est évidemment nul avec $\theta$ (quels que soient $\lambda$ et $s$) et que, d'autre part (d'après la remarque faite plus haut sur la conormale aux caractéristiques), tous les termes qui interviennent dans l'intégrale relative à $\gamma_1$ contiennent en facteur $\varphi_1$ ou $\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}$.

Pour la même raison, les intégrales doubles relatives à $\Gamma'$ et à $\gamma'_1$ se détruisent [1], $\varphi$ et $\varphi_1$ étant égaux sur $\Gamma'$. On a donc

$$(54) \quad 2\pi \int_{\mathfrak{L}} m\sqrt{\Delta}\, u(a)\, dt = \int\int\int_{R_0+R_1} \varphi f\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \int\int_{S_0+S_1} \left[ h\left(\varphi \frac{du}{d\nu} - u\frac{d\varphi}{d\nu}\right) + \mathrm{L} u \varphi \right] d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

$R_0$, $S_0$ désignant les portions du volume R et de la surface donnée S intérieures à $\Gamma'$; $R_1$, $S_1$ les portions de R et de S extérieures à $\Gamma'$, mais intérieures à $\Gamma$, et où $\varphi$ devra être remplacé par $\varphi_1$.

26. Pour obtenir la valeur même de $u$, on n'a plus, comme dans la méthode de M. Volterra, qu'à faire varier le point O sur $\mathfrak{L}$ et à dériver par rapport à la position de ce point; ou encore, ce qui revient au même, à diviser par T et à faire tendre T vers zéro, par conséquent, le point O' vers le point O. Le premier membre de la formule (54) tend alors vers $2\pi m\, u_0$.

Le problème est donc résolu.

Dans cette solution, il est clair que la fonction $\varphi$ n'intervient qu'en apparence, puisque la ligne $\mathfrak{L}$ et la fonction $m$ sont choisies absolument au hasard.

Est-il possible de faire complètement disparaître $\varphi$ et de mettre en évidence la seule solution fondamentale $\rho$?

C'est à quoi l'on peut arriver en effet. Seulement le résultat se présente alors sous une forme assez différente de celles auxquelles on est habitué, et sur laquelle il est nécessaire de donner tout d'abord quelques explications.

---

(1) Les dérivées de $\varphi$ sont, en général, infinies sur $\Gamma'$; mais il y a exception pour $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, qui est fini et égal à $\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}$.

Les valeurs asymptotiques (47), (47') sont en défaut au voisinage de O. Mais on constatera aisément que ceci ne trouble pas les résultats, grâce à ce fait que les dérivées de $\varphi_1$ augmentent alors *plus lentement* que ne le voudraient les formules en question.

Prenons, en premier lieu, l'intégrale simple

$$\int_a^b \frac{A}{(b-x)^{1+\alpha}}\,dx, \tag{55}$$

où A est une fonction de $x$, telle que $A(b) \neq 0$, et $\alpha$ un nombre compris entre zéro et un.

Cette intégrale n'a aucun sens.

Il en est de même pour l'expression

$$\frac{B}{(b-x)^{\alpha}}, \tag{56}$$

lorsqu'on y fait $x = b$, si $B(b) \neq 0$.

Mais la somme de ces deux expressions peut, au contraire, avoir une valeur finie et déterminée. C'est ce qui arrivera si l'on a

$$A(b) = -\alpha B(b), \tag{57}$$

et si, de plus, les deux fonctions A et B satisfont aux inégalités de Lipschitz

$$|A(b) - A(x)| < k(b-x), \quad |B(b) - B(x)| < k(b-x) \tag{58}$$

($k$ étant un nombre fixe); en particulier, si A et B ont des dérivées pour $x = b$.

Moyennant ces conditions, si l'on remplace la limite supérieure d'intégration dans l'intégrale (55), et la variable $x$ dans l'expression (56), par $b - \varepsilon$, on a une somme qui tend vers une limite quand $\varepsilon$ tend vers zéro. Il suffit, pour le voir, de remplacer A par $A - A(b)$ et B par $B - B(b)$, ce qui ne change pas le résultat $\left[\text{au terme fini } \frac{A(b)}{(b-a)^{\alpha}} \text{ près}\right]$, en vertu de (57).

Si la fonction B est assujettie à la condition d'être dérivable, cette somme des deux quantités infinies (55) et (56) peut se mettre sous la forme d'une intégrale finie, savoir

$$\frac{B(a)}{(b-a)^{\alpha}} + \int_a^b \frac{A + \alpha B + \frac{dB}{dx}(b-x)}{(b-x)^{1+\alpha}}\,dx. \tag{59}$$

*Le résultat ne dépend de* B *que par la valeur prise par cette quantité en* $b$ *même*, car, si on lui ajoute un terme nul en $b$ et ayant une dérivée par rapport à $x$, ce terme contiendra $b-x$ en facteur et donnera un résultat nul à la limite.

Enfin, comme cette valeur de B pour $x=b$ est donnée par la relation (57), la quantité qui nous occupe est entièrement déterminée une fois qu'on connaît A; moyennant les conventions précédentes, on peut parler sans aucune ambiguïté de la *partie finie* de l'intégrale (55).

27. On peut aller plus loin et considérer l'intégrale

$$(55')\qquad \int_a^b \frac{A}{(b-x)^{\alpha+p}}\,dx,$$

$p$ désignant un entier positif quelconque, et la fonction

$$(56')\qquad \frac{B}{(b-x)^{\alpha+p-1}}.$$

Supposons que A et B aient des dérivées jusqu'à l'ordre $p$ [1]. On rendrait évidemment finie chacune des deux quantités précédentes en retranchant de chacune des fonctions A et B son développement de Taylor correspondant à la valeur initiale $b$ et arrêté après le terme en $(b-x)^{p-1}$.

Pour que la somme des deux quantités (55′) et (56′) soit finie, il faut et il suffit que les termes ainsi retranchés se détruisent.

La valeur de la somme obtenue ne contient d'ailleurs la fonction B que par les $p$ coefficients numériques qui figurent dans les termes en question.

Comme les conditions que nous venons de trouver déterminent ces coefficients en fonction des coefficients analogues de A, on peut encore parler de la *partie finie* d'une intégrale de la forme

$$\int_a^b \frac{A}{(b-x)^{\beta}}\,dx,$$

[1] Ou jusqu'à l'ordre $p-1$, les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ satisfaisant à des conditions analogues à (58).

quel que soit le nombre $\beta$ plus grand que 1. Le seul cas d'exception, dont nous ne nous occuperons pas pour le moment, est celui de $\beta$ entier ([1]).

28. Les symboles que nous venons de définir se prêtent d'une manière particulièrement simple à la différentiation.

Considérons d'abord l'intégrale, finie au sens ordinaire du mot,

$$\mathrm{I} = \int_a^b \frac{\mathrm{A}}{(b-x)^\alpha}\,dx, \tag{60}$$

la fonction A (supposée toujours régulière) et la limite supérieure $b$ dépendant d'un paramètre $t$. La dérivée $\frac{d\mathrm{I}}{dt}$ s'obtient sans difficulté en prenant, comme précédemment, $b-x$ pour variable.

Mais le résultat obtenu, savoir

$$\frac{\mathrm{A}(a)}{(b-a)^\alpha}\frac{db}{dt} + \int_a^b \frac{\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + \frac{db}{dt}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}}{(b-x)^\alpha}\,dx$$

n'est autre que celui auquel on arriverait en différentiant directement comme si la fonction sous le signe $\int$ était continue, et appliquant les conventions qui précèdent, car on aurait ainsi

$$\int_a^b \frac{(b-x)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} - \alpha \mathrm{A}\frac{db}{dt}}{(b-x)^{\alpha+1}}\,dx + \left[\frac{\mathrm{A}}{(b-x)^\alpha}\right]_{x=b}\frac{db}{dt},$$

expression qui, écrite sous la forme (59), redonne la première. Nous trouvons donc *la partie finie de l'intégrale obtenue en différentiant sous le signe $\int$ de* (60).

Bien entendu, si la limite $a$ était également fonction de $t$, on n'aurait qu'à tenir compte de cette circonstance, absolument comme dans les cas où la différentiation sous le signe $\int$ est classiquement possible.

---

([1]) Pour $\beta = 1$, un logarithme remplacerait le terme complémentaire (56). Mais la *partie finie* ainsi obtenue ne serait pas invariante par un changement de la variable indépendante. Elle cesserait complètement d'être définie pour les valeurs entières suivantes de $\beta$.

Par contre, aucun terme n'est à ajouter de ce chef si la quantité sous le signe $\int$ présente au point $a$ un infini de même forme qu'au point $b$.

29. Je dis maintenant que *le même mode de différentiation s'applique à la partie finie de l'intégrale* (55′) : autrement dit, que la dérivée, par rapport à $t$, de cette partie finie est la partie finie de l'intégrale obtenue en différentiant la quantité sous le signe $\int$ (sous réserve des remarques qui viennent d'être faites quant à la limite inférieure $a$).

Cet énoncé se vérifie immédiatement lorsque A est constant ou fonction de $t$ seul; il se ramène, dès lors, au précédent en retranchant de A les $p$ premiers termes de son développement suivant les puissances de $b - x$, ainsi que nous avons été conduits à le faire plus haut.

30. Ces considérations s'étendent d'elles-mêmes aux intégrales multiples. Soient, par exemple, l'intégrale double

$$J_1 = \int\int F\, dS$$

(où $dS$ est un élément superficiel), étendue à l'aire S limitée par un certain contour, dont l'équation est $\Gamma = 0$, et l'intégrale curviligne

$$J_2 = \int \Phi\, d\lambda$$

prise le long de ce contour. Il est supposé que $\Gamma$ est toujours du premier ordre par rapport à la distance du point correspondant au contour, et que le paramètre $\lambda$ définit la position d'un point sur ce contour, de manière que les coordonnées de ce point aient, par rapport à $\lambda$, des dérivées finies et non toutes les trois nulles. Dans ces conditions, si, par chaque point de $\Gamma$, on mène une ligne (non tangente à cette courbe), dont on considérera tous les points comme correspondant à la même valeur de $\lambda$, il est clair qu'on pourra rapporter les points voisins de $\Gamma$ aux coordonnées curvilignes $\lambda$ et $\Gamma$, et que l'on aura

$$dS = K\, d\lambda\, d\Gamma, \tag{61}$$

K étant un coefficient fini et différent de zéro. La valeur de ce coefficient, en un point situé sur le contour, est d'ailleurs indépendante du choix des lignes $\lambda = \text{const.}$

Supposons, maintenant, que l'on ait

$$F = \frac{F_1}{\Gamma^{\alpha+p}},$$
$$\Phi = \frac{\Phi_1}{\Gamma^{\alpha+p-1}},$$

$F_1$ et $\Phi_1$ étant deux fonctions régulières (non nulles en général sur le contour); $p$ étant toujours un entier positif et $\alpha$ un nombre compris entre zéro et 1.

Les intégrales $J_1$ et $J_2$ sont alors toutes deux infinies.

Leur somme pourra encore avoir un sens. Pour la définir, on tracera un contour $g$ intérieur à $\Gamma$ (sans point commun avec lui) et l'on considérera :

1° L'intégrale $j_2$ analogue à $J_1$ et étendue, non plus à l'intérieur de $\Gamma$, mais à l'intérieur de $g$;

2° L'intégrale $j_1$ analogue à $J_2$ et prise non plus le long de $\Gamma$, mais le long de $g$.

Si la somme $j_1 + j_2$ a, lorsque $g$ varie en tendant vers $\Gamma$, une limite indépendante de la loi de cette variation, cette limite sera dite la *valeur de* $J_1 + J_2$.

La recherche des conditions, pour qu'il en soit ainsi, se ramène immédiatement au problème analogue relatif aux intégrales (55'), (56') : il suffit de remplacer, dans celles-ci, $x$ par $\Gamma$, $b$ par o, A par $KF_1$ et B par $\Phi_1$. Si les conditions ainsi obtenues sont vérifiées (avec continuité uniforme, quel que soit $\lambda$, de $F_1$, $\Phi_1$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $p$) quand on y donne à $\lambda$ une valeur constante, et cela quelle que soit cette valeur, l'expression considérée a un sens, car elle peut être obtenue en intégrant, par rapport à $\lambda$, la somme

$$(62) \qquad \int \frac{KF_1}{\Gamma^{\alpha+p}} d\Gamma + \frac{\Phi_1}{\Gamma^{\alpha+p-1}}.$$

Inversement, grâce au fait que la forme de $g$ est arbitraire sous la seule restriction qu'il tende vers $\Gamma$, on voit sans difficulté que la condition précédente est nécessaire.

En particulier, pour $p = 1$, la condition est que $KF_1 + \alpha\Phi_1$ s'annule sur $\Gamma$. La valeur de $J_1 + J_2$ ne contient alors $\Phi_1$ que par ses valeurs au contour, absolument comme il arriverait si les intégrales $J_1$ et $J_2$ se présentaient à la manière ordinaire.

Étant donnée la manière dont la somme $J_1 + J_2$ se déduit de l'expression (62), il est clair que toutes les autres propriétés précédemment obtenues relativement aux intégrales simples se transportent immédiatement au cas actuel. Ainsi :

La valeur de la somme est entièrement définie quand on donne l'expression $J_1$ : ainsi on peut parler sans ambiguïté de *la partie finie* de cette intégrale.

La dérivée de l'intégrale

$$\iint_S \frac{\Psi}{\Gamma^\alpha} dS$$

($\Psi$ étant une fonction régulière) par rapport à un paramètre $t$ (qui intervient tant dans le numérateur que dans le dénominateur et, par conséquent, dans la forme de l'aire d'intégration) n'est autre que la partie finie de l'intégrale

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Psi}{\Gamma^\alpha}\right) dS.$$

Plus généralement, la partie finie de l'intégrale

$$J_1 = \iint \frac{F_1}{\Gamma^{\alpha+p}} dS$$

a pour dérivée la partie finie de l'intégrale

$$\iint \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F_1}{\Gamma^{\alpha+p}}\right) dS.$$

31. Bien entendu, on peut, d'une infinité de manières, ramener une somme d'intégrales infinies telles que $J_1$ et $J_2$ à une intégrale ordinaire, en introduisant les dérivées de $\Phi_1$. Bornons-nous, pour sim-

plifier, au cas de $p = 1$ et supposons l'aire d'intégration rapportée à deux coordonnées $x$, $y$ telles que $dS = dx\,dy$. On pourra, d'une infinité de manières, poser $\Phi_1 = M\frac{dx}{d\lambda} + N\frac{dy}{d\lambda}$, M et N étant deux fonctions qu'on pourra, en outre, définir dans toute l'aire S ou du moins dans le voisinage du contour. L'intégrale $J_2$ pourra alors être remplacée par la somme de l'intégrale $j_2$ et de l'intégrale double

$$\int\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{\Gamma^\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{\Gamma^\alpha}\right)\right]dx\,dy,$$

prise entre les deux lignes $g$ et $\Gamma$; celle-ci viendra bien détruire la partie infinie de $J_1$, si la condition précédemment indiquée est vérifiée.

On arriverait aisément à des résultats analogues pour $p > 1$.

32. C'est une somme d'intégrales appartenant à la catégorie que nous venons d'étudier qui se présente dans la solution de notre problème; moyennant les définitions précédentes, cette solution prend une forme très simple.

Nous avons à différentier par rapport à T, pour $T = 0$, puis à diviser par $m(0)$. Or cette opération, appliquée à la quantité $\psi$, redonne la fonction $\varphi$ dont nous sommes partis [1]. Il est dès lors clair que, portant sur l'intégrale double qui figure au second membre de (54), elle donne la partie finie de l'intégrale analogue

$$\int\int\left[h\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu}\right) + Luv\right]d\lambda_1\,d\lambda_2.$$

Nous allons constater le même fait directement en donnant l'expression de l'intégrale curviligne qui doit être ajoutée à l'intégrale double.

Décomposons l'aire $S_0 + S_1$ interceptée sur S par le conoïde caractéristique $\Gamma$ de sommet $0$ en deux parties S', S'' (la première intérieure

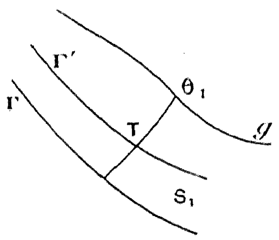
[1] Ceci s'applique à l'intégrale prise dans $S_0$. Mais on voit immédiatement que l'intégrale prise dans $S_1$ est infiniment petite d'ordre supérieur au premier en T (puisque $\nabla_1$ tend vers zéro avec $0$).

à la seconde) par une courbe fermée quelconque $g$. Nous pouvons d'ailleurs prendre T assez petit pour que l'aire que nous avons appelée $S_1$ soit tout entière comprise dans $S''$.

Sur $S'$, la différentiation sur le signe $\int$ est immédiatement possible.

Sur $S''$ nous introduirons, en même temps que les coordonnées curvilignes $\lambda_1$ et $\lambda_2$, les coordonnées $\theta$ et $\lambda$. Soit $\theta = \theta_1$ (où $\theta_1 > T$) la valeur de $\theta$ qui, pour une valeur donnée quelconque de $\lambda$, correspond à un point situé sur $g$ (*fig.* 2).

Fig. 2.




Les deux termes extrêmes $h\varphi\dfrac{du}{d\nu} + \mathrm{L}u\varphi$ de la quantité à intégrer donnent dans $S''$ un résultat négligeable : c'est-à-dire que l'intégrale correspondante, divisée par T, donne un quotient qui tend vers zéro avec $\theta_1$.

Nous avons vu, en effet, que $\varphi$ a la forme $\dfrac{\varpi}{(\theta - t)^{\frac{1}{2}}}$, où $\varpi$ est finie. Nous avons, d'autre part, à multiplier cette quantité par le coefficient

$$\mathrm{K} = m\left(h\frac{du}{d\nu} + \mathrm{L}u\right)\left|\frac{\mathrm{D}(\lambda_1, \lambda_2)}{\mathrm{D}(\theta, \lambda)}\right|$$

et à l'intégrer :

Par rapport à $t$, de o à T pour obtenir $\varphi$ (si $\theta > T$), ou de o à $\theta$ pour obtenir $\varphi_1$ (si $\theta < T$);

Par rapport à $\theta$, de o à $\theta_1$ ;

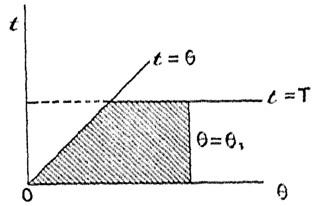
Par rapport à $\lambda$, pour toutes les valeurs que prend cette quantité.

Faisant abstraction de cette dernière intégration, nous avons à intégrer la différentielle

$$\mathrm{K}\varphi\, d\theta\, dt = \mathrm{K}\varpi(\theta - t)^{-\frac{1}{2}} d\theta\, dt$$

dans le trapèze (*fig.* 3) compris entre les lignes $\theta = t$, $\theta = \theta_1$, $t = 0$, $t = T$. Or, le résultat de cette intégration est égal au produit de T par une valeur moyenne de $K\varpi\sqrt{\theta_1 - t}$.

Fig. 3.




Observons tout de suite que le même calcul s'applique, dans la formule (54), à l'intégrale triple, de sorte que celle-ci peut être différentiée sous le signe $\int$.

33. Passons au terme $hu\frac{d\varphi}{d\nu}$.

En un point quelconque de la courbe Γ, trace du conoïde caractéristique de sommet O sur la surface S, ou, plus généralement, en un point quelconque de l'aire S″, la surface S et le conoïde caractéristique $\theta = \text{const.}$ sont sécants entre eux. Si donc nous considérons le segment dont les composantes suivant les axes sont $h\frac{dx_1}{d\nu}$, $h\frac{dx_2}{d\nu}$, $h\frac{dx_3}{d\nu}$, ce segment pourra, d'une infinité de manières, être décomposé en deux, dont l'un soit tangent à S, l'autre au conoïde, de manière à donner lieu aux équations

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} h\frac{dx_1}{d\nu} &= A\frac{\partial x_1}{\partial \theta} + B\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + \alpha\frac{\delta x_1}{\delta \lambda} + \beta\frac{\delta x_1}{\delta s},\\ h\frac{dx_2}{d\nu} &= A\frac{\partial x_2}{\partial \theta} + B\frac{\partial x_2}{\partial \lambda} + \alpha\frac{\delta x_2}{\delta \lambda} + \beta\frac{\delta x_2}{\delta s},\\ h\frac{dx_3}{d\nu} &= A\frac{\partial x_3}{\partial \theta} + B\frac{\partial x_3}{\partial \lambda} + \alpha\frac{\delta x_3}{\delta \lambda} + \beta\frac{\delta x_3}{\delta s}.\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, les symboles $\partial$ et $\delta$ désignent des dérivées d'espèces différentes. Les dérivées $\delta$ sont prises sur le conoïde caractéristique, $\lambda$, $s$ et $\theta$ étant considérées comme trois variables indépendantes;

les dérivées $\partial$ sont prises sur S et la quantité $s$ y est regardée comme une fonction de $\theta$ et de $\lambda$ définie par l'équation de cette surface.

Dans l'expression de la dérivée conormale de $\varphi$

$$(64)\qquad h\frac{d\varphi}{d\nu} = A\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + B\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

nous pouvons négliger les trois derniers termes. En effet, les trois directions $\left(\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}, \frac{\partial x_2}{\partial\lambda}, \frac{\partial x_3}{\partial\lambda}\right)$, $\left(\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}, \frac{\partial x_2}{\partial\lambda}, \frac{\partial x_3}{\partial\lambda}\right)$, $\left(\frac{\partial x_1}{\partial s}, \frac{\partial x_2}{\partial s}, \frac{\partial x_3}{\partial s}\right)$ étant tangentes au conoïde caractéristique, les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}, \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}, \frac{\partial\varphi}{\partial s}$ ne sont infinies que comme $v$ lui-même $\left(\text{c'est-à-dire comme } \Gamma^{-\frac{1}{2}}\right)$.

On peut donc traiter les termes qui les contiennent comme nous avons traité plus haut les termes en $v$ : la partie correspondante du quotient

$$(65)\qquad \frac{1}{mT}\iint hu\frac{d\varphi}{d\nu}\,d\lambda_1\,d\lambda_2 = \frac{1}{mT}\iint hu\frac{d\varphi}{d\nu}\left|\frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(\lambda, \theta)}\right| d\lambda\,d\theta$$

peut être rendue aussi petite qu'on le veut, et cela quel que soit T, en prenant la courbe $g$ assez voisine de $\Gamma$.

Remplaçons donc $h\frac{d\varphi}{d\nu}$ par son premier terme $A\frac{d\varphi}{d\theta}$. La quantité A, dépendant de la forme de la surface, peut être supposée dérivable. De plus, il y a lieu de faire la même hypothèse sur les valeurs données de $u$. C'est, en effet, ce qu'on admet implicitement lorsqu'on choisit à volonté la direction suivant laquelle on suppose que $u$ a une dérivée donnée. On peut donc intégrer par parties, par rapport à $\theta$, et (puisque $\varphi_1$ est nul pour $\theta = 0$ et que $\varphi = \varphi_1$ pour $\theta = T$) écrire, en posant pour simplifier

$$K_1 = A\left|\frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(\lambda, \theta)}\right|,$$

$$\frac{1}{mT}\iint Au\left|\frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(\lambda, \theta)}\right|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,d\lambda\,d\theta$$
$$= \frac{1}{mT}\iint K_1 u\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,d\lambda\,d\theta = \frac{1}{mT}\left[\iint K_1 u\varphi\,d\lambda - \iint \varphi\frac{\partial(K_1 u)}{\partial\theta}\,d\lambda\,d\theta\right],$$

où l'intégrale curviligne est prise suivant la courbe $g$ et où la dernière intégrale double est encore infiniment petite avec $\theta_1$.

Si, d'ailleurs, au lieu d'admettre la dérivabilité de $u$, on supposait seulement que $K_1$ et $u$, par conséquent aussi leur produit, satisfont à la condition de Lipschitz, on arriverait encore à la même conclusion, à savoir que l'on peut substituer à l'intégrale (65) l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{m\mathrm{T}}\int_g \mathrm{K}_1 u \varphi \, d\lambda,$$

il suffirait de remplacer l'intégration par parties par une application convenable du second théorème de la moyenne.

Comme, sur $g$, le quotient $\frac{\varphi}{m\mathrm{T}}$ tend vers $v$ pour T infiniment petit, on voit que $2\pi\sqrt{\Delta}\,u_0$ est la limite vers laquelle tend (lorsque $g$ tend vers $\Gamma$) la somme

$$\iiint_{\mathrm{R}} vf\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \iint_{\mathrm{S}'}\left[h\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{du}{d\nu}\right) + \mathrm{L}uv\right]d\lambda_1\,d\lambda_2 + \int_g \mathrm{K}_1 uv\,d\lambda.$$

Moyennant les conventions précédentes, ceci peut s'écrire (en appelant S la portion de la surface donnée intérieure au conoïde $\Gamma$)

$$(66)\quad \begin{aligned} 2\pi\sqrt{\Delta}\,u_0 &= \iiint_{\mathrm{R}} vf\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \\ &\quad + \left\{\iint_{\mathrm{S}}\left[h\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu}\right) + \mathrm{L}uv\right]d\lambda_1\,d\lambda_2 + \int_{\Gamma} \mathrm{K}_1 uv\,d\lambda\right\} \\ &= \iiint_{\mathrm{R}} vf\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \left\lceil \iint_{\mathrm{S}}\left[h\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu}\right) + \mathrm{L}uv\right]d\lambda_1\,d\lambda_2 \right., \end{aligned}$$

le signe $\lceil\;\;\;\;$ s'énonçant *partie finie de*.

Nous savons d'ailleurs que l'expression ainsi obtenue de $u_0$ peut être remplacée par une intégrale double ordinaire, si l'on suppose les valeurs données de $u$ dérivables et si l'on introduit leurs dérivées prises sur S, ou encore, si l'on retranche des valeurs de $v$ à l'intérieur ses valeurs sur le contour, comme nous le ferons plus loin.

34. L'intégrale double déterminant l'intégrale curviligne, nous pourrions nous dispenser de calculer le coefficient $K_1$. Proposons-nous

néanmoins de trouver, pour l'intégrale curviligne, une expression où ne figure plus la forme de la ligne $\mathcal{L}$.

A est, tout d'abord, donné par la relation (64), en y remplaçant $\varphi$ par $\Gamma$. Cette dernière quantité ayant sa dérivée nulle suivant toute direction tangente au conoïde caractéristique, il vient

$$A = h\frac{d\Gamma}{d\nu}\frac{d\theta}{d\Gamma} = \frac{d\theta}{d\Gamma}\left(\sum_i C_i\frac{\partial H}{\partial \pi_i}\right) = \frac{d\theta}{d\Gamma}\left(\sum_i \pi_i\frac{\partial H}{\partial C_i}\right). \tag{67}$$

[Nous avons le droit d'écrire $\frac{d\theta}{d\Gamma}$, au lieu de $\frac{1}{\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\right)}$, grâce à ce fait que, $\Gamma$ et $\theta$ s'annulant sur le même conoïde, leurs différentielles sont proportionnelles en tout point de ce conoïde].

De cette valeur de A, nous déduisons celle de $K_1$

$$K_1 = \left|\frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(\lambda, \theta)}\right|\frac{d\theta}{d\Gamma}\left(\sum \pi_i\frac{\partial H}{\partial C_i}\right), \tag{68}$$

laquelle est bien, comme il était évident *a priori*, indépendante du choix des coordonnées curvilignes $\lambda_1$, $\lambda_2$. On a, en effet, par exemple,

$$\pi_1\left|\frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(\lambda, \theta)}\right| = \pm\frac{D(x_2, x_3)}{D(\lambda, \theta)},$$

ou, en introduisant la variable $\Gamma$ au lieu de $\theta$,

$$\pi_1\frac{d\theta}{d\Gamma}\left|\frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(\lambda, \Gamma)}\right| = \pm\frac{D(x_2, x_3)}{D(\lambda, \Gamma)}. \tag{69}$$

Il est toutefois nécessaire de fixer le signe à prendre au second membre de cette formule.

Nous admettrons encore que le sens des $\lambda$ croissants est celui qui fait parcourir notre nappe de conoïde dans le sens direct, c'est-à-dire avec une rotation directe par rapport à un observateur ayant les pieds au sommet de la nappe et le corps dans l'intérieur de cette nappe. C'est une convention que nous avions déjà faite plus haut, où elle n'intervenait d'ailleurs qu'incidemment et n'influait pas sur le résultat final; il n'en sera, bien entendu, plus de même ici.

Moyennant cette convention, comme la normale intérieure à S en un point quelconque (celle dont les cosinus directeurs ont les mêmes signes que $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$) est du même côté de S qu'une nappe de conoïde ayant pour sommet ce point et tournée en sens inverse de la nappe $\Gamma$ à l'intérieur de laquelle nous intégrons, les directions $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \Gamma}, \frac{\partial x_2}{\partial \Gamma}, \frac{\partial x_3}{\partial \Gamma}\right)$ (laquelle est tournée vers l'intérieur de la nappe $\Gamma$), et $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}, \frac{\partial x_2}{\partial \lambda}, \frac{\partial x_3}{\partial \lambda}\right)$ forment un trièdre direct.

C'est donc le signe $-$ que l'on doit prendre dans la formule (69), et l'on a

$$K_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \Gamma} & \frac{\partial x_2}{\partial \Gamma} & \frac{\partial x_3}{d\Gamma} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial H}{\partial C_1} & \frac{\partial H}{\partial C_2} & \frac{\partial H}{\partial C_3} \end{vmatrix}. \tag{68'}$$

Mais on a évidemment

$$C_1 \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + C_2 \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} + C_3 \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} = 0$$

et, puisque $\Gamma$ est caractéristique,

$$C_1 \frac{\partial H}{\partial C_1} + C_2 \frac{\partial H}{\partial C_2} + C_3 \frac{\partial H}{\partial C_3} = 0,$$

$\frac{\partial x_2}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial C_3} - \frac{\partial x_3}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial C_2}$, $\frac{\partial x_3}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial C_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial C_3}$, $\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial C_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial C_1}$ sont donc proportionnels à $2C_1$, $2C_2$, $2C_3$ : la formule (68') nous montre $\left(\text{en tenant compte de l'identité } C_1 \frac{\partial x_1}{\partial \Gamma} + C_2 \frac{\partial x_2}{\partial \Gamma} + C_3 \frac{\partial x_3}{\partial \Gamma} = \frac{1}{2}\right)$ que le facteur de proportionnalité est précisément la quantité cherchée $K_1$.

La formule (66) s'écrit donc encore [en imitant une notation bien connue dans la théorie des fonctions abéliennes et employée par

M. Fredholm dans le Mémoire précédemment cité ([1])],

$$(66') \quad 2\pi u_0 = \int\int\int_R \varphi f \, dx_1 dx_2 dx_3$$
$$+ \left\{ \int\int_S \left[ h\left( \varphi \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\varphi}{d\nu} \right) + L u\varphi \right] d\lambda_1 d\lambda_2 - \int_\Gamma \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \frac{\partial H}{\partial C_1} & \frac{\partial H}{\partial C_2} & \frac{\partial H}{\partial C_3} \end{vmatrix}}{2(k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3)} u\varphi \right.$$

où $k_1$, $k_2$, $k_3$ sont des nombres arbitraires et qui n'interviennent qu'en apparence, et où il est rappelé que, dans l'intégrale curviligne, la courbe $\Gamma$ d'intersection de S et du conoïde caractéristique doit être suivie dans le sens direct sur le conoïde.

35. Appliquons ceci aux deux équations simples (33) et (34). Le conoïde caractéristique est ici

$$\Gamma = (x_3 - a_3)^2 - (x_1 - a_1)^2 - (x_2 - a_2)^2 = 0,$$

et ses différents points peuvent se représenter par les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + r\cos\varphi \\ x_2 &= a_2 + r\sin\varphi, \\ x_3 &= a_3 + \varepsilon r, \end{aligned}$$

$r$ désignant un nombre positif et $\varepsilon$ étant égal à $+1$ ou à $-1$, suivant que la nappe considérée est tournée dans le sens des $x_3$ croissants ou des $x_3$ décroissants.

Il vient alors facilement

$$\frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \frac{\partial H}{\partial C_1} & \frac{\partial H}{\partial C_2} & \frac{\partial H}{\partial C_3} \end{vmatrix}}{2(k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3)} = -\varepsilon r \, d\varphi.$$

([1]) *Acta math.*, t. XXIII, p. 7.

Mais si $\varepsilon = +1$, le sens direct sur le conoïde correspond aux $\varphi$ croissants, et c'est le contraire qui a lieu si $\varepsilon = -1$. Si donc on convient de faire toujours croître l'angle $\varphi$, on devra, dans tous les cas, ajouter à l'intégrale double prise sur S l'intégrale curviligne

$$
(70) \qquad -\int \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \frac{\partial H}{\partial C_1} & \frac{\partial H}{\partial C_2} & \frac{\partial H}{\partial C_3} \end{vmatrix}}{2(k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3)} u v = + \int u v r \, d\varphi.
$$

En ce qui regarde l'équation (33), nous nous bornerons au cas où S est le plan des $x_1 x_2$, c'est-à-dire au problème résolu par la formule de Poisson et Parceval [1]. Si, par exemple, $a_3$ est positif, on a $h\frac{d}{d\nu} = \frac{\partial}{\partial x_3}$. Comme $v$ est ici égal à $\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}$, $h\frac{dv}{d\nu}$ sera égal à $\Gamma^{-\frac{3}{2}}$. L'aire d'intégration est celle du cercle de centre $(a_1, a_2)$ et de rayon $a_3$. On a donc (en rapportant ce cercle aux coordonnées polaires $r$ et $\varphi$ et faisant $h = 1$) :

$$
(71) \qquad 2\pi u_0 = \left\{ \int\int \left( \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{du}{d\nu} - \frac{a_3}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} u \right) r \, dr \, d\varphi + a_3 \int \frac{u \, d\varphi}{\sqrt{\Gamma}} \right\},
$$

formule qui resterait valable pour $a_3 < 0$, à condition de remplacer $a_3$ par $|a_3|$ $\left(\frac{du}{d\nu}\right.$ étant égal à $\left.\pm \frac{du}{dx_3}\right)$.

Il est aisé de remplacer les intégrales infinies qui figurent dans cette formule par des intégrales de forme ordinaire (en supposant, bien entendu, que les valeurs données de $u$ satisfassent à la condition de Lipschitz). Il suffit de retrancher de la valeur de $u$ en chaque point la valeur $u'$ que prend cette même quantité sur le cercle à l'extrémité du rayon qui passe en ce point. Il vient ainsi aisément

$$
(72) \qquad 2\pi u_0 = \int\int \left[ \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{du}{d\nu} - \frac{|a_3|}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} (u - u') \right] r \, dr \, d\varphi + \int u' \, d\varphi.
$$

---

(1) *Voir* le Mémoire de M. Volterra : *Acta math.*, t. XVIII, p. 214-215.

36. Passons à l'équation (34). La solution fondamentale est

$$v = \frac{e^{\sqrt{K\Gamma}} + e^{-\sqrt{K\Gamma}}}{2\sqrt{\Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \operatorname{Ch}\sqrt{K\Gamma}.$$

Cette solution bien simple nous fait cependant comprendre comment M. Coulon a eu tant de peine à étendre au cas actuel la méthode de M. Volterra. Il est clair, en effet, que son intégration par rapport à $x_3$ est compliquée et ne peut s'effectuer sous forme finie à l'aide des transcendantes usuelles. Nous voyons, par ce qui précède, que cette intégration est inutile et qu'il suffit, pour arriver au résultat, de substituer la quantité $v$ que nous venons d'écrire dans la formule (66'), la relation (70) restant d'ailleurs valable.

Si S est le plan des $x_1$ $x_2$, on aura (en tenant compte de ce que le cosinus hyperbolique est égal à 1 au contour)

$$= \left\{ \int\int \left[ \frac{\operatorname{Ch}\sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} \frac{du}{d\nu} - |\alpha_3| \left( \frac{\operatorname{Ch}\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{K}\operatorname{Sh}\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma} \right) u \right] r\,dr\,d\varphi + |\alpha_3| \int \frac{u\,d\varphi}{\sqrt{\Gamma}} \right\}$$

ou encore, sous forme entièrement finie,

$$2\pi u_0 = \int\int \left[ \frac{\operatorname{Ch}\sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} \frac{du}{d\nu} - |\alpha_3| \left( \frac{\operatorname{Ch}\sqrt{K\Gamma} - 1}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{K}\operatorname{Sh}\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma} \right) u \right] r\,dr\,d\varphi$$
$$- |\alpha_3| \int\int \frac{(u - u')}{\Gamma^{\frac{3}{2}}} r\,dr\,d\varphi + \int u'\,d\varphi.$$

37. Dans le cas où S est caractéristique ou formé de portions de caractéristiques, on sait qu'il suffit de connaître sur S les valeurs de $u$, en fonction desquelles nos formules donnent $u_0$.

On peut aisément les transformer, dans ces conditions, de manière à ne faire figurer sous le signe $\int\int$ que $u$ lui-même. Nous ne nous occuperons pas en ce moment de ce calcul. Par contre, nous remarquerons que la solution fondamentale possède, relativement à l'échange des deux points dont elle dépend, la même propriété que les fonctions connues de Green et de Riemann.

Soit, en effet, $O_1$ le sommet d'un conoïde caractéristique dont une nappe $\Gamma_1$ contient le point O à son intérieur (*fig.* 4). Formons la solution fondamentale

$$u = \frac{U}{\sqrt{\Gamma_1}}$$

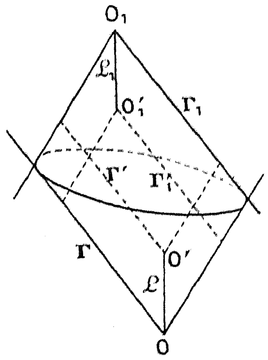
de l'équation *donnée* (2), relative à ce point. Plus généralement, formons la fonction $u$ correspondant à chaque point d'une ligne $\mathcal{L}_1$ issue de $O_1$ et intérieure à $\Gamma_1$. Nous pourrons alors construire la solution

$$\mathfrak{v} = \int_0^{T_1} n(t_1)\, u\, dt_1 \tag{73}$$

analogue à $\varphi$ ($t_1$ désignant le paramètre qui définit la position d'un point sur $\mathcal{L}_1$). De même que, pour les points situés entre $\Gamma$ et le conoïde $\Gamma'$ de sommet $O'$, nous remplacions $\varphi$ par $\varphi_1$, nous réduirons le second membre de la formule (73) à sa partie réelle $\mathfrak{v}_1$ en tout point situé entre $\Gamma_1$ et le conoïde caractéristique $\Gamma'_1$ qui a pour sommet le point $O'_1$, extrémité de la ligne d'intégration.

Appliquons aux deux fonctions $\mathfrak{v}$ et $\varphi$ ainsi définies la formule fondamentale (48), dans le volume intérieur à la fois aux deux nappes caractéristiques $\Gamma$, $\Gamma_1$ (*fig.* 4). Il est clair, comme précédemment :

Fig. 4.




1° Que les deux surfaces de passage $\Gamma'$, $\Gamma'_1$ n'interviennent pas dans le résultat;

2° Qu'il en est de même des frontières $\Gamma$, $\Gamma_1$ sur lesquelles s'annulent respectivement $\varphi$ et $\mathfrak{v}$.

La formule se réduit donc à

$$2\pi\int_{\mathcal{L}} m\sqrt{\Delta}\,\mho\,dt = 2\pi\int_{\mathcal{L}_1} n\sqrt{\Delta}\,\varphi\,dt_1.$$

Si nous faisons tendre T et $T_1$ vers zéro, après avoir divisé par $TT_1$, il viendra

$$u_0\sqrt{\Delta_0} = v_{0'}\sqrt{\Delta_{0'}}.$$

Il convient de diviser cette relation par $\sqrt{\Delta_0\Delta_{0'}}$ et d'écrire

$$\frac{u_0}{\sqrt{\Delta_{0'}}} = \frac{v_{0'}}{\sqrt{\Delta_0}}. \tag{74}$$

Ainsi la propriété d'échange a lieu, non pour la fonction $\varphi$ définie comme nous l'avons fait jusqu'ici, mais pour cette fonction divisée par la racine carrée de la valeur du discriminant au point singulier.

37 *bis.* L'équation (74), ayant ses deux membres analytiques par rapport aux coefficients, *a aussi lieu dans le cas elliptique*, où elle serait peut-être malaisée à démontrer directement.

38. Il resterait à faire la synthèse des solutions précédentes, c'est-à-dire à montrer qu'elles vérifient bien toutes les conditions du problème. On sait que cette partie de la question n'est pas sans présenter quelque difficulté. M. d'Adhémar est le seul qui s'en soit occupé pour l'équation (33); encore n'a-t-il fait la vérification que pour les conditions aux limites, en laissant de côté l'équation aux dérivées partielles elle-même. Nous renverrons à un prochain travail cette vérification, laquelle sera manifestement simplifiée dans une large mesure par les théorèmes précédemment établis sur les parties finies des intégrales infinies.

39. Les résultats que nous avons obtenus nous permettent d'élucider immédiatement la question du *principe de Huyghens* pour les équations à trois variables.

On sait que l'équation des ondes sphériques se distingue de celle des ondes cylindriques, c'est-à-dire de l'équation (33) par un caractère remarquable. La solution du problème de Cauchy, les données étant distribuées sur une multiplicité S, ne dépend point de celles de ces données qui sont relatives aux points de S intérieurs à $\Gamma$, mais seulement de ce qui passe aux points situés *sur* $\Gamma$ : cette solution ne contient pas d'intégrale triple, mais seulement des intégrales doubles étendues à la multiplicité d'intersection de S et de $\Gamma$. C'est ce qui constitue, pour l'équation des ondes sphériques, dans les espaces à 3, 5, 7, ... dimensions le principe de Huyghens.

On ne connaît, jusqu'à présent, aucune autre équation pour laquelle cette propriété ait lieu.

J'ai précédemment établi (¹) qu'il ne pouvait y en avoir aucune pour $n = 2$.

*Il n'en existe pas non plus pour le cas de trois variables indépendantes.*

Le principe de Huyghens exigerait, en effet, que $u_0$ fût nul toutes les fois que les données aux limites seraient nulles sur $\Gamma$, leurs valeurs à l'intérieur de l'aire d'intégration étant quelconques.

Or, c'est ce qui, dans la formule (66'), ne peut évidemment pas se produire.

40. Par contre, on remarquera, dans cette formule, l'influence prédominante exercée par les données voisines du contour.

Ce sont même les termes correspondant à ces données qui, dans des circonstances assez générales, donnent leur signe au résultat.

En effet, la conormale $\nu$ étant intérieure au conoïde caractéristique qui a pour sommet son pied et, plus précisément (²), à la nappe de ce conoïde qui contient le point O, on a

$$\frac{d\Gamma}{d\nu} < 0. \tag{75}$$

(¹) *Sur l'intégrale résiduelle* (*Bul. Soc. math. de France*, 1900).

(²) Étant donnée la manière dont a été écrite la forme H (à savoir avec un carré positif et deux négatifs) la conormale est du même côté de S que la normale qui lui a donné naissance.

D'où, si la surface S et le point O sont assez voisins l'un de l'autre,

$$h\frac{dv}{d\nu} - \mathrm{L}v > 0.$$

Par conséquent, pour $\frac{du}{d\nu}$ constamment nul et $u$ constamment positif sur S, l'intégrale double seule donnerait, au voisinage de S,

$$\mu_0 < 0,$$

résultat évidemment absurde.

Il faut donc que l'intégrale curviligne

$$\int \mathrm{K}_1 uv\, d\lambda$$

soit négative, ce qui est évident *a priori*, puisqu'elle doit compenser la partie principale de l'intégrale double, et qui apparaît d'ailleurs sur la formule (67), en vertu de l'inégalité (75).

Mais, de plus, il faut que ce terme négatif soit prépondérant.

C'est ce que l'on vérifiera aisément sur la formule (71) en y faisant $\frac{du}{d\nu} = 0$, $u = 1$.

---

*ERRATUM.*

Page 108, ligne 9 en commençant par en bas : *au lieu de :* où $x$ est une fonction holomorphe, *lire :* où $u$ est une fonction holomorphe.