

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES VORONOÏ

**Sur une fonction transcendante et ses applications à la
sommutation de quelques séries (suite)**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 21 (1904), p. 459-533

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__459_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE FONCTION TRANSCENDANTE

ET SES APPLICATIONS

A LA SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES.

PAR M. GEORGES VORONOI.



SECONDE PARTIE.

SOMMATION DES SÉRIES DÉPENDANT DU NOMBRE DES DIVISEURS
DE NOMBRES ENTIERS POSITIFS.



SECTION III.

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE SOMMATOIRE D'EULER-MACLAURIN.



Formule générale pour la sommation des séries.

24. Dans le Mémoire de Stieltjes : *Recherches sur les fractions continues* ⁽¹⁾, il se trouve une généralisation très importante des intégrales définies.

Considérons les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

en supposant que, comme à l'ordinaire, $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ soient des valeurs quelconques de la variable x contenues dans les intervalles

⁽¹⁾ *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VIII, 1894, p. 71.

correspondants

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \quad \text{où} \quad x_0 = a \quad \text{et} \quad x_n = b.$$

On appellera, d'après Stieltjes, *intégrale définie* le symbole $\int_a^b f(x) d\varphi(x)$ et l'on posera

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \lim S_n,$$

à condition que les sommes S_n tendent vers une limite fixe à mesure que toutes les différences $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}$ décroissent infiniment, en valeur numérique, en conservant toujours le signe de la différence $b - a$.

On déduira sans peine, à l'aide des méthodes connues, les propriétés suivantes du symbole $\int_a^b f(x) d\varphi(x)$:

1. *Le symbole $\int_a^b f(x) d\varphi(x)$ a toujours un sens à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans le domaine (a, b) et si l'on peut partager ce domaine en intervalles dont le nombre soit fini de manière que la fonction $\varphi(x)$ varie dans le même sens entre les limites de chaque intervalle.*

$$2. \quad \int_a^b f(x) d\varphi(x) + \int_a^b f(x) d\psi(x) = \int_a^b f(x) d[\varphi(x) + \psi(x)].$$

$$3. \quad \int_a^b \psi(x) d\varphi(x) = \varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a) - \int_a^b \varphi(x) d\psi(x).$$

En supposant que la fonction $\varphi(x)$ ait la dérivée $\varphi'(x)$, par rapport à la variable x , bien déterminée dans le domaine (a, b) , on peut poser

$$d\varphi(x) = \varphi'(x) dx,$$

et le symbole de Stieltjes $\int_a^b f(x) d\varphi(x)$ dans ce cas n'est autre chose

que l'intégrale définie ordinaire

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx.$$

25. Considérons la somme

$$\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n)$$

en supposant que la fonction $f(x)$ soit continue dans le domaine (a, b) et la fonction $\tau(n)$ soit bien déterminée pour toutes les valeurs entières de la variable n qui surpassent une limite fixe c .

Désignons

$$(1) \quad \varphi(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > c}} \tau(n)$$

et considérons l'intégrale définie de Stieltjes

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x)$$

où $a \geq c$ et $b > a$. En vertu de la définition du symbole $\int_a^b f(x) d\varphi(x)$, établie précédemment, on aura le théorème suivant :

THÉOREME. — La somme $\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n)$ peut être représentée par l'intégrale définie

$$(2) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x) d\varphi(x) \quad \text{où} \quad a \geq c \quad \text{et} \quad b > a$$

à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans le domaine $a < x < b$.

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ ait les dérivées $f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$, par rapport à la variable x , bien déterminées dans le domaine (a, b) .

Prenons une fonction quelconque $\varpi(x)$ bien déterminée dans le domaine $x > c$ et continue dans chaque intervalle fini (c, x) . Soit

$$A_0, A_1, \dots, A_m, \dots$$

une série infinie des nombres quelconques, pris arbitrairement.

THÉOREME FONDAMENTAL. — *La somme $\sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n)$ aura pour expression*

$$(\star) \quad \sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x) \varpi(x) dx + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)] \\ + (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(x) f^{(m)}(x) dx$$

à condition que les fonctions $r_0(x), r_1(x), \dots$ soient définies par la formule

$$(3) \quad r_k(x) = \sum_{n>c}^{n \leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} - \left[\int_c^x \frac{(x-u)^k}{k!} \varpi(u) du + \sum_{\lambda=0}^k A_\lambda \frac{(x-c)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right] \\ (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Considérons, en premier lieu, la fonction $r_0(x)$; on aura, d'après l'hypothèse,

$$r_0(x) = \sum_{n>c}^{n \leq x} \tau(n) - \int_c^x \varpi(u) du - A_0$$

ou, autrement, à cause de (1),

$$r_0(x) = \varphi(x) - \int_c^x \varpi(u) du - A_0.$$

En vertu de cette égalité, on conclut que la fonction $\varphi(x) - r_0(x)$ a la dérivée $\varpi(x)$, par rapport à la variable x , et l'on peut poser

$$\int_a^b f(x) d[\varphi(x) - r_0(x)] = \int_a^b f(x) \varpi(x) dx.$$

En observant que les intégrales de Stieltjes

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dr_0(x)$$

ont un sens dans le cas considéré, on obtient, d'après la propriété (2) de ces symboles,

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) - \int_a^b f(x) dr_0(x) = \int_a^b f(x) \varpi(x) dx,$$

d'où il résulte, à cause de (2),

$$\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x) \varpi(x) dx + \int_a^b f(x) dr_0(x).$$

L'intégration par parties donne

$$\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x) \varpi(x) dx + r_0(b) f(b) - r_0(a) f(a) - \int_a^b r_0(x) f'(x) dx. \quad (1)$$

Le théorème énoncé est donc démontré dans le cas $m = 1$.

Supposons maintenant que la formule (*) subsiste pour une valeur quelconque de m ; on aura, par hypothèse,

$$(4) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u) \varpi(u) du + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)] \\ + (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du.$$

L'application de cette formule au cas

$$a = c, \quad b = x \quad \text{et} \quad f(u) = \frac{(x-u)^m}{m!}$$

(1) Voyez le Mémoire de M. FRANEL, *Sur la théorie des séries* (*Mathematische Annalen*, t. LII, p. 529).

fournit, à cause de (3), le résultat suivant :

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > c}} \tau(n) \frac{(x-n)^m}{m!} = \int_c^x \frac{(x-u)^m}{m!} \mathfrak{P}(u) du + \sum_{\lambda=0}^{m-1} A_\lambda \frac{(x-c)^{m-\lambda}}{(m-\lambda)!} + \int_c^x r_{m-1}(u) du.$$

En vertu de (3), on peut mettre la formule obtenue sous la forme

$$r_m(x) = \int_c^x r_{m-1}(u) du - A_m.$$

A l'aide de cette formule, on peut transformer l'intégrale définie

$$(-1)^m \int_a^b r_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du$$

qui figure dans la seconde partie de la formule (4). En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du &= (-1)^m [r_m(b) f^{(m)}(b) - r_m(a) f^{(m)}(a)] \\ &\quad + (-1)^{m+1} \int_a^b r_m(u) f^{(m+1)}(u) du \end{aligned}$$

et, à cause de (4), il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) &= \int_a^b f(u) \mathfrak{P}(u) du + \sum_{k=0}^m (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)] \\ &\quad + (-1)^{m+1} \int_a^b r_m(u) f^{(m+1)}(u) du; \end{aligned}$$

donc le théorème est démontré.

26. La formule fondamentale (*) est susceptible d'applications nombreuses et importantes.

Considérons d'abord le cas le plus simple : $\tau(n) = 1$. En faisant

$$\mathfrak{P}(x) = 1 \quad \text{et} \quad c = 0,$$

on aura, en vertu de (3),

$$r_k(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \frac{(x-n)^k}{k!} - \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{\lambda=0}^k A_\lambda \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right].$$

En posant

$$A_\lambda = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \zeta(-\lambda) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots),$$

on obtient la fonction périodique

$$r_k(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \frac{(x-n)^k}{k!} - \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{\lambda=0}^k \zeta(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right]$$

ayant la période 1.

En vertu de la périodicité de la fonction $r_k(x)$, on aura

$$r_k(x) = - \left[\frac{(x - Ex)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{\lambda=0}^k \zeta(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{(x - Ex)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right];$$

il en résulte que la fonction $r_k(x)$ coïncide, dans le domaine $0 < x < 1$, avec la fonction de Bernoulli du degré $k+1$.

La formule sommatoire (*), dans le cas considéré, aura la forme

$$(5) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)] \\ + (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(x) f^{(m)}(x) dx.$$

En supposant que a et b soient des nombres entiers positifs, on aura, à cause de la périodicité des fonctions $r_0(x), r_1(x), \dots$,

$$r_k(a) = r_k(b) = r_k(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \zeta(-k),$$

et la formule précédente devient

$$\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} f(n) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\zeta(-k)}{k!} [f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)] \\ + (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(x) f^{(m)}(x) dx.$$

C'est la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin avec le terme complémentaire représenté par une intégrale définie. La formule (5) présente une généralisation de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin due à M. Sonine (1).

27. Considérons maintenant le cas où $\tau(n)$ désigne le nombre des diviseurs du nombre entier positif n .

En faisant $c = 0$ dans la formule (3), on aura

$$(6) \quad r_0(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) - \int_0^x \varpi(u) du - A_0.$$

La fonction $\varpi(x)$ et la constante A_0 restent arbitraires.

Lejeune-Dirichlet a démontré (2) que la fonction $\sum_{n=1}^{n \leq x} E \frac{x}{n}$ ou, ce qui revient au même, la somme $\sum_{n > 0}^{n \leq x} \tau(n)$ a la valeur asymptotique remarquable

$$x(\log x + 2C - 1),$$

où C désigne la constante d'Euler; de plus, en faisant

$$(7) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) = x(\log x + 2C - 1) + R(x),$$

(1) M. SONINE, *Sur une intégrale définie contenant la fonction numérique $[x]$* (*Bulletin de l'Université de Varsovie*, 1885, n° 3) (en russe).

(2) LEJEUNE-DIRICHLET, *Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlen-theorie* (*Lejeune-Dirichlet's Werke*, Berlin, 1897, t. II, p. 49).

on peut déterminer une constante A de manière que le reste $R(x)$ vérifie l'inégalité

$$(8) \quad |R(x)| < A\sqrt{x},$$

quelle que soit la valeur positive de x .

Puisque

$$x(\log x + 2C - 1) = \int_0^x (\log x + 2C) dx,$$

on en conclut qu'en posant

$$\varpi(x) = \log x + 2C,$$

on aura, à cause de (6) et (7),

$$r_0(x) = R(x) - A_0,$$

où la constante A_0 reste arbitraire. Il en résulte, en vertu de (8), que l'ordre de la fonction $r_0(x)$ ne surpasse pas celui de la fonction \sqrt{x} .

La méthode de Lejeune-Dirichlet exposée dans le Mémoire cité peut être appliquée aussi au calcul des valeurs approchées des sommes

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

De cette manière on pourrait déterminer, par la voie purement arithmétique, toutes les constantes A_0, A_1, \dots , dans la formule (3) et obtenir pour la fonction $r_k(x)$ une expression dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{k+1}{2}}$.

La méthode de Lejeune-Dirichlet ne permet pas de déterminer la fonction $r_k(x)$ avec plus de précision et, en général, la solution de cette question importante offre des difficultés énormes.

Les propriétés remarquables de la fonction $g(x)$ exposées dans la Section II de ce Mémoire ouvrent une voie nouvelle pour les recherches concernant les fonctions $r_0(x), r_1(x), \dots$

Représentation de la somme $\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n)$ par les intégrales définies.

28. Soient A et B les points de l'axe des coordonnées OX qui correspondent aux valeurs de la variable complexe z ,

$$z = a \quad \text{et} \quad z = b, \quad \text{où} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad a < b.$$

Supposons que tous les nombres entiers qui satisfont aux conditions $a < n < b$ forment la série

$$a < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < b.$$

Soient N_1, N_2, \dots, N_{k-1} les points de l'axe OX qui correspondent aux valeurs de z

$$z = n_1, \quad z = n_2, \quad \dots, \quad z = n_{k-1}.$$

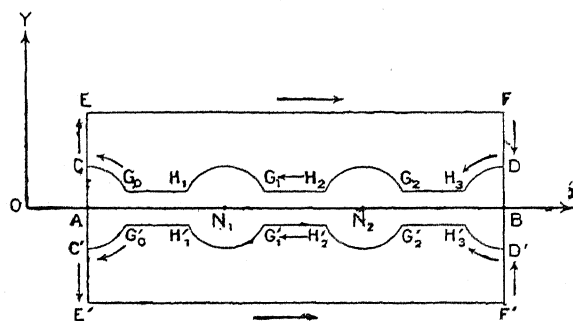
Décrivons des points A, $N_1, N_2, \dots, N_{k-1}, B$ les arcs de cercle

$$CG_0, H_1 G_1, H_2 G_2, \dots, H_{k-1} G_{k-1}, H_k D$$

et les arcs de cercle

$$C' G'_0, H'_1 G'_1, H'_2 G'_2, \dots, H'_{k-1} G'_{k-1}, H'_k D'$$

Fig. 3.



des rayons $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{k-1}, \rho_k$ (fig. 3).

Supposons que les droites $G_0H_1, G_1H_2, \dots, G_{k-1}H_k$ et $G'_0H'_1, G'_1H'_2, \dots, G'_{k-1}H'_k$ soient menées parallèlement à l'axe des coordonnées OX à une distance δ de cet axe. Menons, par les points A et B , parallèlement à l'axe OY , les droites EE' et FF' ; menons parallèlement à l'axe OX les droites EF et $E'F'$.

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ de la variable complexe z soit holomorphe à l'intérieur du rectangle $EFF'E'$ et considérons l'intégrale définie

$$\int f(z) g(-z) dz,$$

prise, d'une part, le long du contour fermé $CEFDH_kG_{k-1}\dots G_0C$ et prise, d'autre part, le long du contour fermé $C'E'F'D'H'_kG'_{k-1}\dots G'_0C'$. Puisque la fonction $f(z)g(-z)$ est holomorphe à l'intérieur de ces contours, on aura, d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{(CE\dots G_0C)} f(z) g(-z) dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{(C'E'\dots G'_0C')} f(z) g(-z) dz = 0.$$

En partageant le chemin d'intégration $CE\dots G_0C$ en parties $CEFD$, $DH_k, H_kG_{k-1}, \dots, H_1G_0$ et G_0C , on obtient

$$(1) \quad \int_{(CEFD)} f(z) g(-z) dz = \int_{(CG_0)} f(z) g(-z) dz + \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{(G_\lambda H_{\lambda+1})} f(z) g(-z) dz \\ + \sum_{\lambda=1}^{k-1} \int_{(H_\lambda G_\lambda)} f(z) g(-z) dz + \int_{(H_k D)} f(z) g(-z) dz;$$

de la même manière, on trouve

$$(2) \quad \int_{(C'E'F'D')} f(z) g(-z) dz = \int_{(C'G'_0)} f(z) g(-z) dz + \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{(G'_\lambda H'_{\lambda+1})} f(z) g(-z) dz \\ + \sum_{\lambda=1}^{k-1} \int_{(H'_\lambda G'_\lambda)} f(z) g(-z) dz + \int_{(H'_k D')} f(z) g(-z) dz.$$

Désignons $a = n_0$ et $b = n_k$ et considérons deux intégrales définies

$$(3) \quad \int_{(G_\lambda H_{\lambda+1})} f(z) g(-z) dz \quad \text{et} \quad \int_{(G'_\lambda H'_{\lambda+1})} f(z) g(-z) dz$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

En observant que les droites $G_\lambda H_{\lambda+1}$ et $G'_\lambda H'_{\lambda+1}$ sont déterminées, d'après la supposition faite, par les équations

$$(G_\lambda H_{\lambda+1}) \quad z = u + \delta i, \quad (G'_\lambda H'_{\lambda+1}) \quad z = u - \delta i,$$

et par les conditions

$$n_\lambda + \sqrt{\rho_\lambda^2 - \delta^2} < u < n_{\lambda+1} - \sqrt{\rho_{\lambda+1}^2 - \delta^2},$$

on peut présenter les intégrales (3) sous la forme suivante :

$$(4) \quad \begin{cases} \int_{(G_\lambda H_{\lambda+1})} f(z) g(-z) dz = \int_{n_\lambda + \sqrt{\rho_\lambda^2 - \delta^2}}^{n_{\lambda+1} - \sqrt{\rho_{\lambda+1}^2 - \delta^2}} f(u + \delta i) g(-u - \delta i) du, \\ \int_{(G'_\lambda H'_{\lambda+1})} f(z) g(-z) dz = \int_{n_\lambda + \sqrt{\rho_\lambda^2 - \delta^2}}^{n_{\lambda+1} - \sqrt{\rho_{\lambda+1}^2 - \delta^2}} f(u - \delta i) g(-u + \delta i) du. \end{cases}$$

Considérons maintenant deux intégrales définies

$$\int_{(H_\lambda G_\lambda)} f(z) g(-z) dz \quad \text{et} \quad \int_{(H'_\lambda G'_\lambda)} f(z) g(-z) dz \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k-1).$$

En posant

$$z = n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i},$$

on obtiendra

$$(5) \quad \begin{cases} \int_{(H_\lambda G_\lambda)} f(z) g(-z) dz = - \int_{\varphi_\lambda}^{\pi - \varphi_\lambda} f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i}) g(-n_\lambda - \rho_\lambda e^{\omega i}) i \rho_\lambda e^{\omega i} d\omega, \\ \int_{(H'_\lambda G'_\lambda)} f(z) g(-z) dz = \int_{-\pi + \varphi_\lambda}^{-\varphi_\lambda} f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i}) g(-n_\lambda - \rho_\lambda e^{\omega i}) i \rho_\lambda e^{\omega i} d\omega, \end{cases}$$

où l'on a mis

$$(6) \quad \varphi_\lambda = \arcsin \frac{\partial}{\rho_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k-1).$$

Enfin, aux intégrales définies

$$\begin{aligned} & \int_{(CG_0)} f(z) g(-z) dz, \quad \int_{(H_k D)} f(z) g(-z) dz \\ \text{et} \quad & \int_{(C'G'_0)} f(z) g(-z) dz, \quad \int_{(H'_k D')} f(z) g(-z) dz, \end{aligned}$$

on peut prêter la forme suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{(CG_0)} f(z) g(-z) dz &= - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} f(a + \rho_0 e^{\omega i}) g(-a - \rho_0 e^{\omega i}) i \rho_0 e^{\omega i} d\omega, \\ \int_{(H_k D)} f(z) g(-z) dz &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \varphi_k} f(b + \rho_k e^{\omega i}) g(-b - \rho_k e^{\omega i}) i \rho_k e^{\omega i} d\omega, \\ \int_{(C'G'_0)} f(z) g(-z) dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varphi_0} f(a + \rho_0 e^{\omega i}) g(-a - \rho_0 e^{\omega i}) i \rho_0 e^{\omega i} d\omega, \\ \int_{(H'_k D')} f(z) g(-z) dz &= \int_{-\pi + \varphi_k}^{-\frac{\pi}{2}} f(b + \rho_k e^{\omega i}) g(-b - \rho_k e^{\omega i}) i \rho_k e^{\omega i} d\omega, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\partial}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \varphi_k = \arcsin \frac{\partial}{\rho_k}.$$

Supposons maintenant que les nombres positifs $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k$ soient aussi petits que l'on voudra et que le nombre positif δ tende vers la limite 0.

Cherchons la limite vers laquelle tendent les intégrales définies (5) à mesure que δ décroît infiniment. En supposant que ρ_λ soit suffisamment petit, on peut poser

$$(8) \quad f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i}) = f(n_\lambda) + A \rho_\lambda,$$

où le module de A ne surpasse pas une limite fixe.

Nous avons obtenu au n° 23 la formule suivante :

$$(9) \quad g(-x) = -g(x) - \frac{1}{2} \log x - C \pm \frac{\pi i}{4} \mp \frac{i}{4\pi x} \pm \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right),$$

où le signe \pm est celui de la partie imaginaire de x .

En vertu de cette formule, on aura

$$(10) \quad g(-n_{\lambda} - \rho_{\lambda} e^{\omega i}) = -g(n_{\lambda} + \rho_{\lambda} e^{\omega i}) - \frac{1}{2} \log(n_{\lambda} + \rho_{\lambda} e^{\omega i}) - C + \frac{\pi i}{4} \\ - \frac{i}{4\pi(n_{\lambda} + \rho_{\lambda} e^{\omega i})} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \left(\frac{1}{n_{\lambda} - n + \rho_{\lambda} e^{\omega i}} + \frac{1}{n_{\lambda} + n + \rho_{\lambda} e^{\omega i}} \right),$$

à condition que $0 < \omega < \pi$. On en conclut qu'en posant

$$(11) \quad g(-n_{\lambda} - \rho_{\lambda} e^{\omega i}) = \frac{\tau(n_{\lambda})}{2\pi} \frac{i}{\rho_{\lambda} e^{\omega i}} + B, \quad \text{où} \quad 0 < \omega < \pi,$$

le module de B ne surpassera pas une limite fixe.

A cause de (8) et (11), il vient

$$(12) \quad f(n_{\lambda} + \rho_{\lambda} e^{\omega i}) g(-n_{\lambda} - \rho_{\lambda} e^{\omega i}) i \rho_{\lambda} e^{\omega i} = -\frac{\tau(n_{\lambda})}{2\pi} f(n_{\lambda}) + P_{\lambda} \rho_{\lambda}, \quad 0 < \omega < \pi,$$

où le module de P_{λ} ne surpasse pas une limite fixe.

En supposant que $-\pi < \omega < 0$, on aura, en vertu de la formule (9),

$$g(-n_{\lambda} - \rho_{\lambda} e^{\omega i}) = -\frac{\tau(n_{\lambda})}{2\pi} \frac{i}{\rho_{\lambda} e^{\omega i}} + B', \quad -\pi < \omega < 0,$$

et, à cause de (8), il vient

$$(13) \quad f(n_{\lambda} + \rho_{\lambda} e^{\omega i}) g(-n_{\lambda} - \rho_{\lambda} e^{\omega i}) i \rho_{\lambda} e^{\omega i} = \frac{\tau(n_{\lambda})}{2\pi} f(n_{\lambda}) + P'_{\lambda} \rho_{\lambda}, \quad -\pi < \omega < 0,$$

où le module de P'_{λ} ne surpasse pas une limite fixe.

En vertu des égalités (12) et (13), les intégrales (5) prennent la

forme

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\varphi_\lambda}^{\pi-\varphi_\lambda} f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i}) g(-n_\lambda - \rho_\lambda e^{\omega i}) i \rho_\lambda e^{\omega i} d\omega \\ &= -\tau(n_\lambda) f(n_\lambda) \frac{\pi - 2\varphi_\lambda}{2\pi} + \rho_\lambda \int_{\varphi_\lambda}^{\pi-\varphi_\lambda} P_\lambda d\omega, \\ & \int_{-\pi+\varphi_\lambda}^{-\varphi_\lambda} f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i}) g(-n_\lambda - \rho_\lambda e^{\omega i}) i \rho_\lambda e^{\omega i} d\omega \\ &= \tau(n_\lambda) f(n_\lambda) \frac{\pi - 2\varphi_\lambda}{2\pi} + \rho_\lambda \int_{-\pi+\varphi_\lambda}^{-\varphi_\lambda} P'_\lambda d\omega. \end{aligned} \right.$$

En vertu de l'égalité (6), on obtient

$$\lim_{\delta=0} \varphi_\lambda = 0,$$

et, à cause de (14), on aura

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lim_{\delta=0} \int_{\varphi_\lambda}^{\pi-\varphi_\lambda} f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i}) g(-n_\lambda - \rho_\lambda e^{\omega i}) i \rho_\lambda e^{\omega i} d\omega = -\frac{1}{2} \tau(n_\lambda) f(n_\lambda) + A_\lambda \rho_\lambda, \\ & \lim_{\delta=0} \int_{-\pi+\varphi_\lambda}^{-\varphi_\lambda} f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i}) g(-n_\lambda - \rho_\lambda e^{\omega i}) i \rho_\lambda e^{\omega i} d\omega = \frac{1}{2} \tau(n_\lambda) f(n_\lambda) + A'_\lambda \rho_\lambda, \end{aligned} \right.$$

où les modules des variables A_λ et A'_λ ne surpassent pas des limites fixes.

De la même manière, on obtient les limites vers lesquelles tendent les intégrales définies (7) à mesure que δ décroît infiniment; on aura

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lim_{\delta=0} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} f(a + \rho_0 e^{\omega i}) g(-a - \rho_0 e^{\omega i}) i \rho_0 e^{\omega i} d\omega = -\frac{1}{4} \tau(a) f(a) + A_0 \rho_0, \\ & \lim_{\delta=0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\varphi_k} f(b + \rho_k e^{\omega i}) g(-b - \rho_k e^{\omega i}) i \rho_k e^{\omega i} d\omega = -\frac{1}{4} \tau(b) f(b) + A_k \rho_k, \\ & \lim_{\delta=0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varphi_0} f(a + \rho_0 e^{\omega i}) g(-a - \rho_0 e^{\omega i}) i \rho_0 e^{\omega i} d\omega = \frac{1}{4} \tau(a) f(a) + A'_0 \rho_0, \\ & \lim_{\delta=0} \int_{-\pi+\varphi_k}^{-\frac{\pi}{2}} f(b + \rho_k e^{\omega i}) g(-b - \rho_k e^{\omega i}) i \rho_k e^{\omega i} d\omega = \frac{1}{4} \tau(b) f(b) + A'_k \rho_k, \end{aligned} \right.$$

dans ces formules le symbole $\tau(a)$ a la valeur 0 quand a n'est pas un nombre entier positif, et le symbole $\tau(b)$ est défini de la même manière.

Cherchons, enfin, les limites vers lesquelles tendent les intégrales définies (4) quand δ décroît infiniment.

En vertu de la formule (9), on obtient

$$\lim_{\delta=0} g(-u - \delta i) = -g(u) - \frac{1}{2} \log u - C + \frac{\pi i}{4} - \frac{i}{4\pi u} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \left(\frac{1}{u-n} + \frac{1}{u+n} \right),$$

$$\lim_{\delta=0} g(-u + \delta i) = -g(u) - \frac{1}{2} \log u - C - \frac{\pi i}{4} + \frac{i}{4\pi u} - \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \left(\frac{1}{u-n} + \frac{1}{u+n} \right).$$

En désignant, pour abréger,

$$h(u) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4\pi u} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \left(\frac{1}{u-n} + \frac{1}{u+n} \right),$$

on aura

$$\lim_{\delta=0} g(-u - \delta i) = -g(u) - \frac{1}{2} \log u - C + ih(u);$$

$$\lim_{\delta=0} g(-u + \delta i) = -g(u) - \frac{1}{2} \log u - C - ih(u).$$

A l'aide de ces égalités, on trouve

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\delta=0} \int_{n_k + \sqrt{\rho_k^2 - \delta^2}}^{n_{k+1} - \sqrt{\rho_{k+1}^2 - \delta^2}} f(u + \delta i) g(-u - \delta i) du \\ \quad = \int_{n_k + \rho_k}^{n_{k+1} - \rho_{k+1}} f(u) [-g(u) - \frac{1}{2} \log u - C + ih(u)] du, \\ \lim_{\delta=0} \int_{n_k + \sqrt{\rho_k^2 - \delta^2}}^{n_{k+1} - \sqrt{\rho_{k+1}^2 - \delta^2}} f(u - \delta i) g(-u + \delta i) du \\ \quad = \int_{n_k + \rho_k}^{n_{k+1} - \rho_{k+1}} f(u) [-g(u) - \frac{1}{2} \log u - C - ih(u)] du. \end{array} \right.$$

En faisant $\delta = 0$ dans les égalités (1) et (2), on aura, en vertu, d'une part, de (4), (5), (7) et, en vertu, d'autre part, de (15),

(16), (17), les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz &= \frac{1}{2} \tau(a) f(a) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{k-1} \tau(n_\lambda) f(n_\lambda) + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{n_\lambda + \rho_\lambda}^{n_{\lambda+1} - \rho_{\lambda+1}} f(u) [-g(u) - \frac{1}{2} \log u - C + ih(u)] du - \sum_{\lambda=0}^k \Lambda_\lambda \rho_\lambda, \\ \int_{(\text{C'E'F'D'})} f(z) g(-z) dz &= \frac{1}{2} \tau(a) f(a) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{k-1} \tau(n_\lambda) f(n_\lambda) + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{n_\lambda + \rho_\lambda}^{n_{\lambda+1} - \rho_{\lambda+1}} f(u) [-g(u) - \frac{1}{2} \log u - C - ih(u)] du + \sum_{\lambda=0}^k \Lambda'_\lambda \rho_\lambda. \end{aligned}$$

En faisant la somme de ces égalités, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz + \int_{(\text{C'E'F'D'})} f(z) g(-z) dz \\ = \frac{1}{2} \tau(a) f(a) + \sum_{\lambda=1}^{k-1} \tau(n_\lambda) f(n_\lambda) + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) \\ + \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{n_\lambda + \rho_\lambda}^{n_{\lambda+1} - \rho_{\lambda+1}} f(u) [-2g(u) - \log u - 2C] du + \sum_{\lambda=0}^k (-\Lambda_\lambda + \Lambda'_\lambda) \rho_\lambda. \end{aligned}$$

En vertu de l'égalité obtenue, on peut poser

$$\begin{aligned} \int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz + \int_{(\text{C'E'F'D'})} f(z) g(-z) dz \\ = \frac{1}{2} \tau(a) f(a) + \sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau(n) f(n) + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) \\ + \int_a^b f(u) [-2g(u) - \log u - 2C] du + \varepsilon(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k), \end{aligned}$$

où la fonction $\varepsilon(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k)$ tend vers la limite 0 quand les variables $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k$ décroissent infiniment.

En observant que les chemins d'intégration CEFD et C'E'F'D' ne

dépendent que des variables ρ_0 et ρ_k , on peut écrire

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_0=0, \rho_k=0} & \left[\int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz + \int_{(\text{C'E'F'D'})} f(z) g(-z) dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \tau(a) f(a) + \sum_{\substack{n < b \\ n > a}} \tau(n) f(n) + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) + \int_a^b f(u) [-2g(u) - \log u - 2C] du. \end{aligned}$$

Cette formule peut être présentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) &= \int_a^b f(u) [\log u + 2C + 2g(u)] du + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) - \frac{1}{2} \tau(a) f(a) \\ &+ \lim_{\rho_0=0, \rho_k=0} \left[\int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz + \int_{(\text{C'E'F'D'})} f(z) g(-z) dz \right]. \end{aligned}$$

29. On peut prêter à la formule obtenue une forme remarquable, à l'aide du développement de la fonction $g(x)$ par la série infinie

$$(18) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \xi(4\pi^2 n x)$$

qui a été étudié au n° 16. En remplaçant dans cette égalité x par $-z$, on aura

$$g(-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \xi(-4\pi^2 n z).$$

La série infinie considérée est uniformément convergente à l'intérieur des domaines $\text{CEFDH}_k \dots G_0 C$ et $\text{C'E'F'D'H}'_k \dots G'_0 C'$; il en résulte

$$(19) \quad \begin{cases} \int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_{(\text{CEFD})} f(z) \xi(-4\pi^2 n z) dz, \\ \int_{(\text{C'E'F'D'})} f(z) g(-z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_{(\text{C'E'F'D'})} f(z) \xi(-4\pi^2 n z) dz. \end{cases}$$

En supposant que $\rho_0 = \rho_k = \rho$, on aura deux rectangles CEFD et

C'E'F'D'. Puisque

$$\int_{(CEFD)} f(z) \xi(-4\pi^2 n z) dz = \int_{(CD)} f(z) \xi(-4\pi^2 n z) dz,$$

$$\int_{(C'E'F'D')} f(z) \xi(-4\pi^2 n z) dz = \int_{(C'D')} f(z) \xi(-4\pi^2 n z) dz$$

et

$$\int_{(CD)} f(z) \xi(-4\pi^2 n z) dz = \int_a^b f(u + \rho i) \xi 4\pi^2 n (-u - \rho i) du,$$

$$\int_{(C'D')} f(z) \xi(-4\pi^2 n z) dz = \int_a^b f(u - \rho i) \xi 4\pi^2 n (-u + \rho i) du,$$

on aura, en vertu de (19),

$$\int_{(CEFD)} f(z) g(-z) dz + \int_{(C'E'F'D')} f(z) g(-z) dz$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b [f(u + \rho i) \xi 4\pi^2 n (-u - \rho i) + f(u - \rho i) \xi 4\pi^2 n (-u + \rho i)] du.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (1), on trouve

$$\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u) [\log u + 2C + 2g(u)] du + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) - \frac{1}{2} \tau(a) f(a)$$

$$+ \lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b [f(u + \rho i) \xi 4\pi^2 n (-u - \rho i) + f(u - \rho i) \xi 4\pi^2 n (-u + \rho i)] du.$$

La recherche de la limite de la somme infinie obtenue offre des difficultés énormes. Tout le problème se réduit à ceci : est-il permis d'intervertir le signe de limite avec le signe de sommation ? En admettant que cette interversion soit légitime, on obtient

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b [f(u + \rho i) \xi 4\pi^2 n (-u - \rho i) + f(u - \rho i) \xi 4\pi^2 n (-u + \rho i)] du$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b 2f(u) \eta(4\pi^2 n u) du,$$

puisqu'en vertu de la formule (1) du n° 8, on a

$$\lim_{\rho=0} \frac{\xi(-x + \rho i) + \xi(-x - \rho i)}{2} = \eta(x),$$

à condition que $x > 0$ et $\rho > 0$. En observant, d'autre part, qu'à cause de (18),

$$\int_a^b f(u) g(u) du = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b f(u) \xi(4\pi^2 nu) du,$$

on obtient la formule fondamentale

$$\begin{aligned} (\star) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) &= \int_a^b f(u) (\log u + 2\Gamma) du + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) - \frac{1}{2} \tau(a) f(a) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \int_a^b f(u) [\xi(4\pi^2 nu) + \eta(4\pi^2 nu)] du. \end{aligned}$$

On ne parvient à la démonstration rigoureuse de cette formule remarquable qu'en envisageant le problème posé sous un nouveau point de vue.

30. Supposons que la fonction $f(z)$ satisfasse à la condition suivante : le module du produit $f(z)g(-z)$ tend vers la limite 0 quand le module de la variable z croît infiniment tandis que la partie réelle de z reste comprise entre les limites a et b .

Considérons deux intégrales

$$\int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz \quad \text{et} \quad \int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz$$

obtenues précédemment. En partageant le chemin d'intégration CEFD en trois parties, CE, EF et FD, on aura

$$\begin{aligned} (20) \quad \int_{(\text{CEFD})} f(z) g(-z) dz \\ = \int_{(\text{CE})} f(z) g(-z) dz + \int_{(\text{EF})} f(z) g(-z) dz + \int_{(\text{FD})} f(z) g(-z) dz. \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve

$$(21) \quad \int_{(C'E'F'D')} f(z) g(-z) dz \\ = \int_{(C'E')} f(z) g(-z) dz + \int_{(E'F')} f(z) g(-z) dz + \int_{(F'D')} f(z) g(-z) dz.$$

A mesure que les droites EF et E'F' s'éloignent à l'infini, les deux intégrales

$$\int_{(EF)} f(z) g(-z) dz \quad \text{et} \quad \int_{(E'F')} f(z) g(-z) dz,$$

en vertu de l'hypothèse faite, tendent vers la limite 0.

En observant que les chemins d'intégration CE, DF et C'E', D'F' sont définis par les conditions

$$\begin{aligned} (CE) \quad z = a + ti, \quad t > \rho_0, & \quad (DF) \quad z = b + ti, \quad t > \rho_k, \\ (C'E') \quad z = a - ti, \quad t > \rho_0, & \quad (D'F') \quad z = b - ti, \quad t > \rho_k, \end{aligned}$$

on obtient, à cause de (20) et (21),

$$\begin{aligned} \int_{(CEFD)} f(z) g(-z) dz &= \int_{\rho_0}^{\infty} f(a + ti) g(-a - ti) i dt - \int_{\rho_k}^{\infty} f(b + ti) g(-b - ti) i dt, \\ \int_{(C'E'F'D')} f(z) g(-z) dz &= - \int_{\rho_0}^{\infty} f(a - ti) g(-a + ti) i dt + \int_{\rho_k}^{\infty} f(b - ti) g(-b + ti) i dt; \end{aligned}$$

il en résulte

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_0=0, \rho_k=0} & \left[\int_{(CEFD)} f(z) g(-z) dz + \int_{(C'E'F'D')} f(z) g(-z) dz \right] \\ &= \int_0^{\infty} [f(b - ti) g(-b + ti) - f(b + ti) g(-b - ti)] i dt \\ &\quad - \int_0^{\infty} [f(a - ti) g(-a + ti) - f(a + ti) g(-a - ti)] i dt. \end{aligned}$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (I), on trouve

$$(II) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u) [\log u + 2C + 2g(u)] du + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) - \frac{1}{2} \tau(b) f(b) \\ + \int_0^{\infty} [f(b - ti) g(-b + ti) - f(b + ti) g(-b - ti)] i dt \\ - \int_0^{\infty} [f(a - ti) g(-a + ti) - f(a + ti) g(-a - ti)] i dt.$$

La formule obtenue fournit une ressource précieuse pour le calcul des sommes considérées.

SECTION IV.

SUR LES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR LES SOMMES $\sum_{n \leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}$.

Représentation de la fonction $\zeta^2(s)$ par les intégrales définies.

31. Soit s une variable réelle positive. Comme on sait, la somme infinie

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

représente la fonction $\zeta^2(s)$ à condition que $s > 1$.

Considérons la somme

$$\sum_{n > a}^{n \leq b} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

en supposant que $0 < a < 1$ et $s > 1$.

Le module du produit $\frac{1}{z^s} g(-z)$, en vertu du théorème I du n° 22, décroît infiniment quand le module de la variable z devient infiniment grand et la partie réelle de z reste comprise entre les limites a et b ; on en conclut que la formule (II) du n° 30 est applicable au cas considéré, et il viendra

$$(1) \quad \sum_{n > a}^{n \leq b} \frac{\tau(n)}{n^s} = \int_a^b \frac{1}{u^s} [\log u + 2C + 2g(u)] du + \frac{1}{2} \frac{\tau(b)}{b^s} - \frac{1}{2} \frac{\tau(a)}{a^s} \\ + \int_0^\infty \left[\frac{g(-b+ti)}{(b-ti)^s} - \frac{g(-b-ti)}{(b+ti)^s} \right] i dt \\ - \int_0^\infty \left[\frac{g(-a+ti)}{(a-ti)^s} - \frac{g(-a-ti)}{(a+ti)^s} \right] i dt.$$

Puisque le nombre α présente une fraction positive, on aura

$$(2) \quad \tau(\alpha) = 0.$$

Supposons maintenant que le nombre b croisse infiniment en satisfaisant toujours aux conditions

$$(3) \quad \alpha < b - \epsilon b < \beta,$$

α et β étant deux fractions données, prises arbitrairement, on aura

$$(4) \quad \tau(b) = 0.$$

En vertu du théorème IV du n° 23, le module de la fonction $g(-b + ti)$ ne surpasse pas la limite

$$|g(-b + ti)| < A | -b + ti |^{\rho},$$

si petit que soit le nombre positif ρ . Puisque, d'après l'hypothèse faite, $s > 1$, on peut toujours choisir la valeur de ρ de manière que la différence $s - \rho$ soit aussi plus grande que 1, et l'on aura l'inégalité

$$\left| \int_0^{\infty} \left[\frac{g(-b + ti)}{(b - ti)^s} - \frac{g(-b - ti)}{(b + ti)^s} \right] i dt \right| < 2A \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\sqrt{b^2 + t^2})^{s-\rho}},$$

ou autrement

$$\left| \int_0^{\infty} \left[\frac{g(-b + ti)}{(b - ti)^s} - \frac{g(-b - ti)}{(b + ti)^s} \right] i dt \right| < \frac{2A}{b^{s-\rho-1}} \int_0^{\infty} \frac{du}{(\sqrt{u^2 + 1})^{s-\rho}}.$$

En vertu de l'inégalité obtenue, on conclut que l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{g(-b + ti)}{(b - ti)^s} - \frac{g(-b - ti)}{(b + ti)^s} \right] i dt$$

tend vers la limite 0 à mesure que le nombre b croît infiniment en satisfaisant toujours aux conditions (3).

En faisant $b = \infty$ dans l'égalité (1), on obtient, à cause de (2)

et (4),

$$(5) \quad \zeta^2(s) = \int_a^\infty \frac{1}{t^s} [\log t + 2C + 2g(t)] dt \\ - \int_0^\infty \left[\frac{g(-a+ti)}{(a-ti)^s} - \frac{g(-a-ti)}{(a+ti)^s} \right] i dt$$

où $0 < a < 1$ et $s > 1$.

32. Le développement connu ⁽¹⁾ de la fonction $\zeta(s)$ en série infinie

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \dots$$

donne

$$\zeta^2(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} + C^2 + 2C_1 + \dots$$

On en conclut que la fonction

$$\zeta^2(s) - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2C}{s-1}$$

est holomorphe dans toute région bornée du plan.

En observant que la fonction $\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1}$ peut être représentée par l'intégrale définie

$$\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} = \int_1^\infty (\log t + 2C) \frac{dt}{t^s}$$

à condition que $s > 1$, et en retranchant cette égalité de la formule (5), on obtient

$$(6) \quad \zeta^2(s) - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2C}{s-1} = \int_a^1 (\log t + 2C) \frac{dt}{t^s} + 2 \int_a^\infty \frac{g(t)}{t^s} dt \\ - \int_0^\infty \left[\frac{g(-a+ti)}{(a-ti)^s} - \frac{g(-a-ti)}{(a+ti)^s} \right] i dt.$$

⁽¹⁾ Voyez, par exemple, la Note de M. Jensen : *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris, t. CIV, 1887, p. 1156).

Les deux parties de la formule obtenue ont un sens, quelle que soit la valeur réelle de la variable s . Puisque la fonction

$$\zeta^2(s) - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2C}{s-1}$$

est holomorphe, on en conclut que cette formule subsiste, quelle que soit la valeur réelle de s .

Cela posé, considérons le cas $s < 1$. On peut représenter dans ce cas le fonction $\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1}$ par l'intégrale définie suivante :

$$\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} = - \int_0^1 (\log t + 2C) \frac{dt}{t^s}$$

où $s < 1$.

En ajoutant cette égalité à la formule (6), on obtient

$$(7) \quad \zeta^2(s) = - \int_0^a (\log t + 2C) \frac{dt}{t^s} + 2 \int_a^\infty \frac{g(t)}{t^s} dt \\ - \int_0^\infty \left[\frac{g(-a+ti)}{(a-ti)^s} - \frac{g(-a-ti)}{(a+ti)^s} \right] i dt;$$

cette formule subsiste à condition que $0 < a < 1$ et $s < 1$.

$$\text{Étude de la somme } \sum_{n \leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

33. Prenons un nombre quelconque a satisfaisant aux conditions

$$0 < a < 1$$

et considérons la somme

$$\sum_{n > a} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!},$$

x étant la variable positive et $k = 0, 1, 2, \dots$.

La formule (II) du n° 30 est applicable à la somme considérée, et

l'on aura

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n > a}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} &= \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} [\log t + 2C + 2g(t)] dt + \frac{1}{2} o^k \tau(x) \\ &\quad + \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i dt \\ &\quad - \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(x-a+ti)^k g(-a+ti) - (x-a-ti)^k g(-a-ti)] i dt. \end{aligned}$$

On peut prêter à cette égalité la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n > a}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} &= \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} [\log t + 2C] dt + \frac{1}{2} o^k \tau(x) - 2 \int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt \\ &\quad - \int_0^a \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C) dt + 2 \int_a^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i dt \\ &\quad - \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(x-a+ti)^k g(-a+ti) - (x-a-ti)^k g(-a-ti)] i dt. \end{aligned}$$

A l'aide des égalités

$$\frac{(x-t)^k}{k!} = \sum_{\lambda=0}^k t^\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \quad \text{et} \quad \frac{(x-a+ti)^k}{k!} = \sum_{\lambda=0}^k (a-ti)^\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!},$$

on déduit de l'égalité précédente la formule suivante :

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n > a}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} &= \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C) dt + \frac{1}{2} o^k \tau(x) - 2 \int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^k \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \left\{ - \int_0^a t^\lambda (\log t + 2C) dt + 2 \int_a^\infty t^\lambda g(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty [(a-ti)^\lambda g(-a+ti) - (a+ti)^\lambda g(-a-ti)] i dt \right\} \\ &\quad + \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i dt. \end{aligned}$$

En observant que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > a}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}$$

et, en vertu de la formule (7) du n° 32,

$$\begin{aligned} \zeta^2(-\lambda) = & - \int_0^a t^\lambda (\log t + 2C) dt + 2 \int_a^\infty t^\lambda g(t) dt \\ & - \int_0^\infty [(a-ti)^\lambda g(-a+ti) - (a+ti)^\lambda g(-a-ti)] i dt, \end{aligned}$$

on obtient, à cause de (1),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} = & \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C) dt \\ & + \sum_{\lambda=0}^k \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + \frac{1}{2} \circ^k \tau(x) - 2 \int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt \\ & + \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i dt. \end{aligned}$$

En désignant

$$\begin{aligned} (2) \quad r_k(x) = & \frac{1}{2} \circ^k \tau(x) - 2 \int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt \\ & + \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i dt \quad (k=0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} = & \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k} (\log t + 2C) dt \\ & + \sum_{\lambda=0}^k \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + r_k(x) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

34. En vertu de l'égalité obtenue, la fonction $r_k(x)$ aura pour

expression

$$(4) \quad r_k(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} - \left\{ \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C) dt + \sum_{\lambda=0}^k \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right\}.$$

En comparant cette formule avec la formule (3) du n° 25 :

$$r_k(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > c}} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} - \left\{ \int_c^x \frac{(x-t)^k}{k!} \varpi(t) dt + \sum_{\lambda=0}^k \Lambda_\lambda \frac{(x-c)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right\},$$

on voit que ces deux formules coïncident, si l'on pose

$$c = 0, \quad \varpi(t) = \log t + 2C \quad \text{et} \quad \Lambda_\lambda = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \zeta^2(-\lambda) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots).$$

La formule sommatoire générale (★) du n° 25 prend dans ce cas la forme

$$\begin{aligned} (\star) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) &= \int_a^b f(t) (\log t + 2C) dt \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)] + (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(t) f^{(m)}(t) dt. \end{aligned}$$

Cette formule peut servir au calcul des valeurs approchées de la somme $\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n)$ à condition que l'on connaisse les valeurs approchées des fonctions $r_0(x), r_1(x), \dots$.

Quant à la fonction $r_0(x)$, on sait, d'après ce qui a été dit au n° 27, que l'ordre de la fonction $r_0(x)$ ne surpasse pas celui de la fonction \sqrt{x} ; donc, on peut déterminer une constante A de manière que l'inégalité

$$|r_0(x)| < A\sqrt{x}$$

ait lieu à condition que $x > a$, le nombre positif a étant pris arbitrairement.

Dans le cas $0 < x < 1$, on aura

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = o,$$

et de la formule (4) il suit

$$r_0(x) = - \int_0^x (\log t + 2C) dt - \zeta^2(0)$$

ou, autrement,

$$(5) \quad r_0(x) = -x(\log x + 2C - 1) - \frac{1}{4} \quad (0 < x < 1),$$

puisque $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

La formule (2) fournit un moyen pour la recherche des valeurs approchées plus précises de la fonction $r_0(x)$ et des fonctions $r_1(x)$, $r_2(x)$,

Développement de la fonction $r_k(x)$ en une série infinie ($k = 1, 2, \dots$).

35. Nous avons défini la fonction $r_k(x)$ au n° 33 par la formule suivante :

$$(1) \quad r_k(x) = \frac{1}{2} o^k \tau(x) - 2 \int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt \\ + \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i dt \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Considérons l'intégrale définie

$$\int_\rho^N [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i dt$$

en supposant que $\rho > 0$ et $N > \rho$. A l'aide du développement de la

fonction $g(-x \pm ti)$ en série infinie

$$g(-x \pm ti) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \xi_4 \pi^2 n (-x \pm ti)$$

on obtient

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_{\rho}^N [(ti)^k g(-x + ti) - (-ti)^k g(-x - ti)] i dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_{\rho}^N [(ti)^k \xi_4 \pi^2 n (-x + ti) - (-ti)^k \xi_4 \pi^2 n (-x - ti)] i dt. \end{aligned}$$

En vertu de la formule (8) du n° 13, on a

$$\xi_4 \pi^2 n (-x \pm ti) = \mathfrak{P} \sqrt{\pi} \frac{e^{-4\pi \sqrt{n(-x \pm ti)}}}{|4\pi^2 n (-x \pm ti)|^{\frac{1}{4}}}$$

où $|\mathfrak{P}| < 1$, et il en résulte

$$|\xi_4 \pi^2 n (-x \pm ti)| < \sqrt{\pi} \frac{e^{-4\pi \sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+t^2}-x)}}}{(4\pi^2 n \sqrt{x^2+t^2})^{\frac{1}{4}}}.$$

A l'aide de cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_N^{\infty} [(ti)^k \xi_4 \pi^2 n (-x + ti) - (-ti)^k \xi_4 \pi^2 n (-x - ti)] i dt \right| \\ & < 2 \sqrt{\pi} \int_N^{\infty} t^k \frac{e^{-4\pi \sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+t^2}-x)}}}{(4\pi^2 n \sqrt{x^2+t^2})^{\frac{1}{4}}} dt, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_N^{\infty} [(ti)^k \xi_4 \pi^2 n (-x + ti) - (-ti)^k \xi_4 \pi^2 n (-x - ti)] i dt$$

tend vers la limite 0 quand N croît infiniment. En faisant $N = \infty$ dans l'égalité (2), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\rho}^{\infty} [(ti)^k g(-x + ti) - (-ti)^k g(-x - ti)] i dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_{\rho}^{\infty} [(ti)^k \xi_4 \pi^2 n (-x + ti) - (-ti)^k \xi_4 \pi^2 n (-x - ti)] i dt. \end{aligned}$$

En supposant que la variable positive ρ décroisse infiniment, on

trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(\iota i)^k g(-x + \iota i) - (-\iota i)^k g(-x - \iota i)] \iota dt \\ &= \lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^\infty \frac{\tau(n)}{k!} \int_\rho^\infty [(\iota i)^k \xi_4 \pi^2 n(-x + \iota i) - (-\iota i)^k \xi_4 \pi^2 n(-x - \iota i)] \iota dt \end{aligned}$$

où $k = 0, 1, 2, \dots$

En introduisant dans les recherches les fonctions $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots$ définies au n° 9, on peut calculer les intégrales définies qui figurent dans la seconde partie de la formule obtenue.

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \int_\rho^\infty [(\iota i)^k \xi_4 \pi^2 n(-x + \iota i) - (-\iota i)^k \xi_4 \pi^2 n(-x - \iota i)] \iota dt \\ &= \sum_{m=1}^{k+1} \frac{(\rho i)^{k+1-m} \xi_m 4 \pi^2 n(-x + \rho i) + (-\rho i)^{k+1-m} \xi_m 4 \pi^2 n(-x - \rho i)}{(k+1-m)! (4 \pi^2 n)^m}, \end{aligned}$$

et de l'égalité précédente il suit

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{1}{k!} \int_0^\infty [(\iota i)^k g(-x + \iota i) - (-\iota i)^k g(-x - \iota i)] \iota dt \\ &= \lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^{k+1} \tau(n) \frac{(\rho i)^{k+1-m} \xi_m 4 \pi^2 n(-x + \rho i) + (-\rho i)^{k+1-m} \xi_m 4 \pi^2 n(-x - \rho i)}{(k+1-m)! (4 \pi^2 n)^m}. \end{aligned}$$

36. Considérons la somme infinie

$$(4) \quad \sum_{n=1}^\infty \tau(n) \frac{\xi_m 4 \pi^2 n(-x \pm \rho i)}{(4 \pi^2 n)^m}.$$

En vertu de la formule (I) du n° 13, on peut prêter à la fonction $\xi_m 4 \pi^2 n(-x \pm \rho i)$ la forme suivante :

$$\begin{aligned} (5) \quad & \xi_m 4 \pi^2 n(-x \pm \rho i) \\ &= \sqrt{\pi} [2 \pi \sqrt{n(-x \pm \rho i)}]^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \pi \sqrt{n(-x \pm \rho i)}} \\ & \times \left\{ \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{(2m+2\lambda-1)(2m+2\lambda-3)\dots(2m+1-2\lambda)}{\lambda! [3 \pi \sqrt{n(-x \pm \rho i)}]^\lambda} + \varpi \frac{(4m-1)(4m-3)\dots 1}{m! [3 \pi \sqrt{n(-x \pm \rho i)}]^m} \right\}, \end{aligned}$$

où $|\varpi| < 1$.

En supposant que la valeur de x surpasse un nombre donné positif a , on peut déterminer, en vertu de cette égalité, une constante A de manière que l'inégalité

$$(6) \quad |\xi_m 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)| < A |2\pi\sqrt{n(-x \pm \rho i)}|^{m-\frac{1}{2}} e^{-4\pi\sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+\rho^2}-x)}}$$

ait lieu, quelle que soit la valeur entière positive de n et si petite que soit la valeur positive de ρ .

A l'aide de cette inégalité, on obtient

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_m 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{(4\pi^2 n)^m} \right| < A |\sqrt{-x \pm \rho i}|^{m-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{m-1}{2}+\frac{1}{4}}} e^{-4\pi\sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+\rho^2}-x)}}.$$

En supposant que $m \geq 2$, on aura l'inégalité

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_m 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{(4\pi^2 n)^m} \right| < A |\sqrt{-x \pm \rho i}|^{m-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{m-1}{2}+\frac{1}{4}}},$$

d'où il résulte que le module de la somme infinie (4) ne surpasse pas, à condition que $m \geq 2$, une limite fixe, si petite que soit la valeur de ρ .

Considérons maintenant le cas $m = 1$. La somme infinie correspondante

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n}$$

a un sens, quelque petite que soit la valeur de ρ , mais la fonction des variables ρ et x représentée par cette somme infinie n'est pas limitée; par la suite il sera démontré que le module de la somme (7) croît infiniment quand la variable ρ devient infiniment petite, la valeur de x étant un nombre entier positif, mais la somme (7) tend vers une limite fixe quand ρ décroît infiniment tant que la valeur de x n'est pas un nombre entier positif. De cette propriété remarquable de la somme (7) proviennent toutes les difficultés des recherches que nous allons exposer.

A l'aide de la formule sommatoire (*) du n° 34, on peut obtenir la limite supérieure du module de la somme (7) en fonction de la variable ρ .

En faisant $m = 1$ dans la formule (5), on aura

$$\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i) = \sqrt{\pi} (2\pi \sqrt{n(-x \pm \rho i)})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\pi \sqrt{n(-x \pm \rho i)}} \left[1 + \mathfrak{Z} \frac{3}{32\pi \sqrt{n(-x \pm \rho i)}} \right]$$

où $|\mathfrak{Z}| < 1$; il en résulte

$$(8) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n} \right| < \sqrt{\pi} |\sqrt{-x \pm \rho i}|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2 + \rho^2} - x)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\ + \sqrt{\pi} \frac{3}{16 |\sqrt{-x \pm \rho i}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}.$$

En vertu de l'inégalité obtenue, tout le problème se réduit à la recherche de la limite supérieure du module de la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2 + \rho^2} - x)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}.$$

A cet effet, considérons la somme

$$\sum_{\substack{n \leq N \\ n > \rho}} \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}}$$

en supposant que le nombre a soit positif et $0 < \rho < 1$.

A l'aide de la formule sommatoire (*) du n° 34, on obtient

$$\sum_{\substack{n \leq N \\ n > \rho}} \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_{\rho}^N \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt + r_0(N) \frac{e^{-a\sqrt{N}}}{N^{\frac{3}{4}}} \\ - r_0(\rho) \frac{e^{-a\sqrt{\rho}}}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^N r_0(t) d \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

En observant que l'ordre de la fonction $r_0(x)$ ne surpasse pas celui

de la fonction \sqrt{x} , on trouve

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r_0(N) \frac{e^{-a\sqrt{N}}}{N^{\frac{3}{4}}} = 0,$$

et, en faisant $N = \infty$ dans l'égalité précédente, on aura

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt - r_0(\rho) \frac{e^{-a\sqrt{\rho}}}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} r_0(t) d \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^{n \leq N} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} - \int_0^N (\log t + 2C) \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} \right] \\ = - \int_0^{\rho} (\log t + 2C) \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} - \frac{r_0(\rho)}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} r_0(t) d \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}. \end{aligned}$$

La première partie de cette égalité ne dépend pas de la variable ρ ; donc, c'est une constante. A l'aide des raisonnements analogues à ceux qui ont été exposés au n° 32, on démontrera que cette constante est $\zeta^2\left(\frac{3}{4}\right)$; on aura donc l'égalité

$$\zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) + \int_0^{\rho} (\log t + 2C) \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} = - \frac{r_0(\rho)}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} r_0(t) d \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

En vertu de cette égalité, on peut prêter à la formule (9) la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt + \int_0^{\rho} (\log t + 2C) \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} \\ + \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) - r_0(\rho) \frac{e^{-a\sqrt{\rho}} - 1}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} r_0(t) d \frac{e^{-a\sqrt{t}} - 1}{t^{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

et, encore, une autre forme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt + \int_0^{\rho} (\log t + 2C) \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} \\ + \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) - \left[r_0(\rho) + \frac{1}{4}\right] \frac{e^{-a\sqrt{\rho}} - 1}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} \left[r_0(t) + \frac{1}{4}\right] d \frac{e^{-a\sqrt{t}} - 1}{t^{\frac{3}{4}}}. \end{aligned}$$

Cela posé, supposons que la variable positive ρ décroisse infiniment. En observant que, d'après la formule (5) du n° 34, on a

$$r_0(\rho) + \frac{1}{4} = -\rho(\log \rho + 2C - 1)$$

à condition que $0 < \rho < 1$, on trouve, en faisant $\rho = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt + \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) - \int_0^{\infty} \left[r_0(t) + \frac{1}{4}\right] d \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

Puisque, en vertu des formules connues, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt = 4 \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}) + C\Gamma(\frac{1}{2}) - \Gamma(\frac{1}{2}) \log a}{\sqrt{a}},$$

il vient

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = 4 \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}) + C\Gamma(\frac{1}{2}) - \Gamma(\frac{1}{2}) \log a}{\sqrt{a}} + \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) - \int_0^{\infty} \left[r_0(t) + \frac{1}{4}\right] d \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

D'après ce qui a été dit au n° 34, on peut déterminer une constante A de manière que l'inégalité

$$|r_0(t) + \frac{1}{4}| < A\sqrt{t}$$

ait lieu, quelle que soit la valeur positive de la variable t . En vertu de cette inégalité, on aura

$$\left| \int_0^{\infty} \left[r_0(t) + \frac{1}{4}\right] d \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} \right| < A \left(\frac{a}{2} \int_0^{\infty} e^{-a\sqrt{t}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} + \frac{3}{4} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} dt \right),$$

et puisque

$$\frac{a}{2} \int_0^{\infty} e^{-a\sqrt{t}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} + \frac{3}{4} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} dt = 4 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{a},$$

on peut poser

$$-\int_0^\infty \left[r_0(t) + \frac{1}{4} \right] d \frac{e^{-a\sqrt{t}} - 1}{t^{\frac{3}{4}}} = \varpi 4A\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{a} \quad \text{où} \quad -1 < \varpi < 1.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (10), on trouve

$$\sum_{n=1}^\infty \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = 4 \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}) + \Gamma(\frac{1}{2}) - \Gamma(\frac{1}{2}) \log a}{\sqrt{a}} + \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) + \varpi 4A\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{a}$$

où $-1 < \varpi < 1$.

Cette formule subsiste, quelle que soit la valeur positive de a .

En supposant que le paramètre a satisfasse aux conditions $0 < a < 1$, on peut déterminer une constante P de manière que l'inégalité

$$\sum_{n=1}^\infty \tau(n) \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} < P \frac{\log \frac{1}{a}}{\sqrt{a}}$$

ait lieu, quelque petite que soit la valeur de a .

En revenant à l'inégalité (8), on obtient

$$(11) \quad \left| \sum_{n=1}^\infty \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n} \right| < \sqrt{\pi} |\sqrt{-x \pm \rho i}|^{\frac{1}{2}} \frac{P}{(4\pi^2)^{\frac{3}{4}}} \frac{\log \frac{1}{a}}{\sqrt{a}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{16 |\sqrt{-x \pm \rho i}|^{\frac{1}{2}}} \frac{\zeta^2(\frac{3}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{3}{4}}}$$

où l'on a posé

$$a = 4\pi \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + \rho^2} - x)}.$$

En vertu de cette égalité, on aura

$$a = \rho \frac{4\pi}{\sqrt{2(\sqrt{x^2 + \rho^2} + x)}};$$

donc, en supposant que la variable ρ soit suffisamment petite, on peut déterminer, à cause de (11), une constante A de manière que l'iné-

galité

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n (-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n} \right| < A \frac{\log \frac{1}{\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

ait lieu quelque petite que soit la valeur de ρ .

A l'aide des résultats obtenus, on peut simplifier la formule (3). Puisque la fonction de la variable ρ représentée par la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{(\rho i)^{k+1-m} \xi_m 4\pi^2 n (-x + \rho i) + (-\rho i)^{k+1-m} \xi_m 4\pi^2 n (-x - \rho i)}{(k+1-m)! (4\pi^2 n)^m},$$

d'après ce qui a été dit précédemment, tend vers la limite 0 quand ρ décroît infiniment, tant que

$$k+1-m \geq 1 \quad \text{et} \quad m \geq 1,$$

la formule (3) prend la forme

$$(12) \quad \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} [(\iota i)^k g(-x + \iota i) - (-\iota i)^k g(-x - \iota i)] i d\iota \\ = \lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x + \rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x - \rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}.$$

Dans cette formule on peut poser $k = 0, 1, 2, \dots$

37. Examinons, en premier lieu, le cas $k \geq 1$. Prenons un nombre positif N , aussi grand que l'on voudra, et partageons la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x + \rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x - \rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

en deux parties

$$(13) \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \leq N}}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x + \rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x - \rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} \\ = \sum_{n=1}^N \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x + \rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x - \rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} \\ + \sum_{n > N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x + \rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n (-x - \rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}.$$

En vertu de l'inégalité (6), on aura

$$\left| \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} \right| \\ < 2A \left| \sqrt{x^2 + \rho^2} \right|^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}},$$

et l'on peut poser

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} \\ = 2A \left| \sqrt{x^2 + \rho^2} \right|^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}}$$

où $-1 < \vartheta < 1$. En faisant dans cette égalité $\rho = 0$, il vient

$$(14) \quad \lim_{\rho=0} \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} \\ = 2A x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}}$$

où $-1 < \vartheta < 1$.

En observant que

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{n \leq N} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{n \leq N} \tau(n) \frac{2\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}},$$

en vertu de la formule (1) du n° 11, on trouve, à cause de (13) et (14),

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_{k+1} 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} \\ = \sum_{n=1}^{n \leq N} \tau(n) \frac{2\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} + 2A x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}}$$

où $-1 < \vartheta < 1$.

En faisant dans cette égalité $N = \infty$, on obtient

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1}(4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_{k+1}(4\pi^2 n(-x-\rho i))}{(4\pi^2 n)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

et, à cause de (12), il vient

$$\frac{1}{k!} \int_0^{\infty} [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)] i dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

où $k = 1, 2, \dots$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (1), on trouve

$$(15) \quad r_k(x) = -2 \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

A l'aide du développement de la fonction $g(t)$ en série infinie

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \xi(4\pi^2 nt),$$

on obtient

$$\int_x^{\infty} \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^k}{k!} \xi(4\pi^2 nt) dt,$$

et l'intégration par parties donne

$$\int_x^{\infty} \frac{(x-t)^k}{k!} g(t) dt = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}},$$

en vertu de la formule (1) du n° 9; donc la formule (15) peut être mise sous la forme suivante :

$$r_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{(-1)^{k+1} \xi_{k+1}(4\pi^2 nx) + \eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

où $k = 1, 2, \dots$

A l'aide de la formule (I) du n° 13 et de la formule (II) du n° 14,

on peut développer la fonction $r_k(x)$ en une autre série

$$\begin{aligned}
 (1) \quad r_k(x) = & 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{r-1} x^{\frac{k-\lambda}{2} + \frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\dots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{2}\left(\lambda - k - \frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}} \\
 & + (-1)^{k+1} 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{s-1} x^{\frac{k-\lambda}{2} + \frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\dots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}} \\
 & + 2\sqrt{\pi} x^{\frac{k-r}{2} + \frac{1}{4}} \frac{(2k+2r+1)(2k+2r-1)\dots(2k+3-2r)}{2^{4r}r!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+r}{2} + \frac{3}{4}}} \\
 & + (-1)^{k+1} \varepsilon 2\sqrt{\pi} x^{\frac{k-s}{2} + \frac{1}{4}} \frac{(2k+2s+1)(2k+2s-1)\dots(2k+3-2s)}{2^{4s}s!} \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+s}{2} + \frac{3}{4}}}
 \end{aligned}$$

où

$$-1 < \varepsilon < 1, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad \text{et} \quad r \geq k+1, \quad s \geq k+1 \quad (k=1, 2, \dots).$$

Sur les valeurs approchées des fonctions $r_1(x)$, $r_2(x)$,

38. La formule (I) du n° 37 peut servir au calcul des valeurs approchées des fonctions $r_1(x)$, $r_2(x)$, ... à condition que la valeur de la variable positive x soit suffisamment grande.

THÉOREME I. — *Étant donné un nombre positif a , pris arbitrairement, on peut toujours déterminer une constante A de manière que l'inégalité*

$$|r_k(x)| < A x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} \quad \text{où} \quad k \geq 1$$

ait lieu, quelle que soit la valeur de la variable x satisfaisant à la condition $x > a$.

Les sommes infinies qui figurent dans la formule (I) du n° 37 ne surpassent pas les limites suivantes :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos \left[4\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{2} \left(\lambda - k - \frac{1}{2} \right) \right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}} \right| < \frac{\zeta^2 \left(\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4} \right)}{(4\pi^2)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}} < \frac{\zeta^2 \left(\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4} \right)}{(4\pi^2)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}}.$$

En faisant, dans la formule (I) du n° 37, $r=s=k+1$, on obtiendra

$$|r_k(x)| < 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{k+1} x^{\frac{k-\lambda}{2} + \frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\dots(2k+3-2\lambda)}{2^{1\lambda}\lambda!} \frac{2\zeta^2 \left(\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4} \right)}{(4\pi^2)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}}.$$

En vertu de cette inégalité, le théorème énoncé devient évident.

THÉORÈME II. — *En posant*

$$\begin{aligned} r_k(x) = & 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{m-1} x^{\frac{k-\lambda}{2} + \frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\dots(2k+3-2\lambda)}{2^{1\lambda}\lambda!} \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos \left[4\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{2} \left(\lambda - k - \frac{1}{2} \right) \right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}} + R_k(x), \end{aligned}$$

on obtient la fonction $R_k(x)$ dont la valeur numérique ne surpasse pas la limite

$$|R_k(x)| < Ax^{\frac{k-m}{2} + \frac{1}{4}} \quad \text{où} \quad k=1, 2, \dots \quad \text{et} \quad m=0, 1, 2, \dots$$

quelle que soit la valeur de x satisfaisant à la condition $x > a$, A étant une constante fixe.

On démontre ce théorème à l'aide de la formule (I) du n° 37 ayant

égard à ce que les sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{n}x}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}} \quad \text{où} \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

décroissent, à mesure que la variable x croît infiniment, plus vite qu'aucune puissance de x .

39. En rappelant la formule (3) du n° 33 :

$$\begin{aligned} \sum_{n>0}^{n \leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} &= \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C) dt \\ &+ \sum_{\lambda=0}^k \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + r_k(x), \end{aligned}$$

on en conclut que la fonction numérique

$$\varphi_k(x) = \sum_{n>0}^{n \leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}$$

peut être représentée par la fonction analytique

$$\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C) dt + \sum_{\lambda=0}^k \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!},$$

en vertu du théorème I, avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}}$.

La fonction

$$\begin{aligned} &\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C) dt \\ &+ \sum_{\lambda=0}^k \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{m-1} x^{\frac{k-\lambda}{2} + \frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\dots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos \left[4\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{2} \left(\lambda - k - \frac{1}{2} \right) \right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

représente la fonction numérique $\varphi_k(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{k-m}{2} + \frac{1}{4}}$ où $m = 0, 1, 2, \dots$

Il en résulte qu'en faisant $m = k + 1$, on obtient la fonction

$$\begin{aligned} \psi_k(x) = & \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (\log t + 2C) dt \\ & + \sum_{\lambda=0}^k \left\{ \zeta^2(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + 2\sqrt{\pi} x^{\frac{k-\lambda}{2} + \frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\dots(2k+3-2\lambda)}{2^{1\lambda}\lambda!} \right. \\ & \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos \left[4\pi \sqrt{nx} + \frac{\pi}{2} (\lambda - k - \frac{1}{2}) \right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2} + \frac{3}{4}}} \right\} \end{aligned}$$

qui jouit de la propriété suivante :

La valeur numérique de la différence $\varphi_k(x) - \psi_k(x)$ tend vers la limite 0 à mesure que x croît infiniment.

Développement de la fonction $r_0(x)$ en une série infinie.

40. Nous avons défini au n° 33 la fonction $r_0(x)$ par la formule suivante :

$$(1) \quad r_0(x) = \frac{1}{2} \tau(x) - 2 \int_x^{\infty} g(t) dt + \int_0^{\infty} [g(-x+ti) - g(-x-ti)] i dt.$$

La seconde intégrale qui figure dans cette formule présente, comme nous l'avons vu au n° 35, la limite de la somme infinie

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_0^{\infty} [g(-x+ti) - g(-x-ti)] i dt \\ & = \lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\zeta_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \zeta_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}. \end{aligned}$$

Considérons la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\zeta_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n}.$$

D'après la formule (I) du n° 13, on aura

$$\begin{aligned} & \xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) \\ &= \sqrt{\pi} [2\pi \sqrt{n(-x + \rho i)}]^{\frac{1}{2}} e^{-4\pi \sqrt{n(-x + \rho i)}} + \mathfrak{S} \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \frac{e^{-4\pi \sqrt{n(-x + \rho i)}}}{[2\pi \sqrt{n(-x + \rho i)}]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

où $|\mathfrak{S}| < 1$. En vertu de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} (3) \quad & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i)}{4\pi^2 n} \\ &= \sqrt{\pi} (\sqrt{-x + \rho i})^{\frac{1}{2}} \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi \sqrt{n(-x + \rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} + \mathfrak{S}_0 \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \frac{1}{|\sqrt{-x + \rho i}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

où $|\mathfrak{S}_0| < 1$, N étant un nombre positif, aussi grand que l'on voudra.

A l'aide de la formule sommatoire (★) du n° 34, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi \sqrt{n(-x + \rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\ &= \int_N^{\infty} \frac{e^{-4\pi \sqrt{t(-x + \rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt - r_0(N) \frac{e^{-4\pi \sqrt{N(-x + \rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} \\ &+ r_1(N) D_N \frac{e^{-4\pi \sqrt{N(-x + \rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} + \int_N^{\infty} r_1(t) D_t^2 \frac{e^{-4\pi \sqrt{t(-x + \rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} dt, \end{aligned}$$

puisque l'ordre de la fonction $r_0(t)$ ne surpasse pas celui de la fonction $t^{\frac{1}{2}}$ et que l'ordre de la fonction $r_1(t)$, en vertu du théorème I du n° 38, ne surpasse pas celui de la fonction $t^{\frac{3}{4}}$ et, par conséquent, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_0(t) \frac{e^{-4\pi \sqrt{t(-x + \rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r_1(t) D_t \frac{e^{-4\pi \sqrt{t(-x + \rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} = 0.$$

En effectuant les différentiations dans l'égalité précédente, on

trouve

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n > N}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\
 &= \int_N^{\infty} \frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt - r_0(N) \frac{e^{-4\pi\sqrt{N(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} \\
 & \quad - r_1(N) \frac{e^{-4\pi\sqrt{N(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} \left[\frac{2\pi\sqrt{(-x+\rho i)}}{\sqrt{N}} + \frac{3}{4N} \right] \\
 & \quad + \sqrt{2\pi}(-x+\rho i) \int_N^{\infty} r_1(t) \frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{7}{4}}} dt \\
 & \quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-x+\rho i) \int_N^{\infty} r_1(t) \frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{9}{4}}} dt + \frac{21}{16(4\pi^2)^{\frac{3}{4}}} \int_N^{\infty} r_1(t) \frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{11}{4}}} dt.
 \end{aligned}$$

En vertu de cette égalité, on peut poser

$$(4) \quad \sum_{n > N}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2\pi}(-x+\rho i) \int_N^{\infty} r_1(t) \frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{7}{4}}} dt + \delta_0(N, \rho),$$

et la fonction $\delta_0(N, \rho)$ satisfera aux conditions suivantes : quelque petit que soit le nombre positif ε , pris arbitrairement, il est possible de déterminer un nombre positif N_0 , de manière que l'inégalité

$$(5) \quad |\delta_0(N, \rho)| < \varepsilon$$

ait lieu tant que

$$(6) \quad N > N_0, \quad a < x < b \quad \text{et} \quad 0 < |\rho| < \rho_0.$$

En vertu du théorème II du n° 38, on peut prêter à la fonction $r_1(t)$ la forme suivante :

$$r_1(t) = 2\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} + \mathfrak{A} t^{\frac{1}{4}}$$

où $t > t_0$, $|\mathfrak{A}| < 1$ et A désigne une constante fixe. L'égalité (4), après

la substitution de cette expression de la fonction $r_1(t)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-i\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \pi (-x + \rho i) \int_N^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} e^{-i\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}} \frac{dt}{t} + \delta_1(N, \rho) \end{aligned}$$

où la fonction $\delta_1(N, \rho)$ satisfait aussi aux conditions (5) et (6).

Dans la formule obtenue il est permis d'intervertir le signe de sommation avec le signe d'intégration; il viendra

$$\begin{aligned} & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-i\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \pi (-x + \rho i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \int_N^{\infty} e^{-i\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \delta_1(N, \rho). \end{aligned}$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (3), on trouve

$$\begin{aligned} (7) \quad & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n (-x + \rho i)}{4\pi^2 n} \\ &= (2\pi)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{-x + \rho i})^{\frac{5}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \int_N^{\infty} e^{-i\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \delta_2(N, \rho) \end{aligned}$$

où la fonction $\delta_2(N, \rho)$ satisfait aux conditions (5) et (6).

Considérons l'intégrale définie

$$\int_N^{\infty} e^{-i\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t}.$$

Cette intégrale peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \int_N^{\infty} e^{-i\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2} \int_N^{\infty} e^{-i\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x+\rho i} + i\sqrt{n})} \frac{dt}{t} + \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{2} \int_N^{\infty} e^{-i\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x+\rho i} - i\sqrt{n})} \frac{dt}{t}; \end{aligned}$$

trouve

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{n}(-x+\rho i)}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\
 &= \int_N^{\infty} \frac{e^{-4\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt - r_0(N) \frac{e^{-4\pi\sqrt{N}(-x+\rho i)}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} \\
 & \quad - r_1(N) \frac{e^{-4\pi\sqrt{N}(-x+\rho i)}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} \left[\frac{2\pi\sqrt{(-x+\rho i)}}{\sqrt{N}} + \frac{3}{4N} \right] \\
 & \quad + \sqrt{2\pi}(-x+\rho i) \int_N^{\infty} r_1(t) \frac{e^{-4\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)}}{t^{\frac{7}{4}}} dt \\
 & \quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-x+\rho i) \int_N^{\infty} r_1(t) \frac{e^{-4\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)}}{t^{\frac{9}{4}}} dt + \frac{21}{16(4\pi^2)^{\frac{3}{4}}} \int_N^{\infty} r_1(t) \frac{e^{-4\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)}}{t^{\frac{11}{4}}} dt.
 \end{aligned}$$

En vertu de cette égalité, on peut poser

$$(4) \quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{n}(-x+\rho i)}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2\pi}(-x+\rho i) \int_N^{\infty} r_1(t) \frac{e^{-4\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)}}{t^{\frac{7}{4}}} dt + \delta_0(N, \rho),$$

et la fonction $\delta_0(N, \rho)$ satisfera aux conditions suivantes : quel que petit que soit le nombre positif ε , pris arbitrairement, il est possible de déterminer un nombre positif N_0 , de manière que l'inégalité

$$(5) \quad |\delta_0(N, \rho)| < \varepsilon$$

ait lieu tant que

$$(6) \quad N > N_0, \quad a < x < b \quad \text{et} \quad 0 < |\rho| < \rho_0.$$

En vertu du théorème II du n° 38, on peut prêter à la fonction $r_1(t)$ la forme suivante :

$$r_1(t) = 2\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} + \mathfrak{A} t^{\frac{1}{4}}$$

où $t > t_0$, $|\mathfrak{A}| < 1$ et A désigne une constante fixe. L'égalité (4), après

En vertu de l'égalité (8), on peut poser

$$(9) \quad \int_N^\infty e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)} \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} = \frac{\mathfrak{S}}{\sqrt{N}} \frac{\Lambda}{\pi},$$

où $|\mathfrak{S}| < 1$ et $|n - x| \geq \alpha$.

En partageant en trois parties la somme infinie qui figure dans la seconde partie de l'égalité (7), on obtient

$$(10) \quad \sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n>0}^{n \leq x-\alpha} f(n) + \sum_{n>x-\alpha}^{n \leq x+\alpha} f(n) + \sum_{n>x+\alpha}^\infty f(n),$$

où l'on a mis, pour abréger,

$$f(n) = \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^\infty e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)} \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t}.$$

En vertu de l'égalité (9), il vient

$$\left| \sum_{n>0}^{n \leq x-\alpha} f(n) \right| < \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\Lambda}{\pi} \sum_{n>0}^{n \leq x-\alpha} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}, \quad \left| \sum_{n>x+\alpha}^\infty f(n) \right| < \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\Lambda}{\pi} \sum_{n>x+\alpha}^\infty \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}$$

et il en résulte

$$\left| \sum_{n>0}^{n \leq x-\alpha} f(n) + \sum_{n>x+\alpha}^\infty f(n) \right| < \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\Lambda}{\pi} \frac{\zeta^2(\frac{5}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}};$$

donc, l'égalité (10) peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^\infty \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^\infty e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)} \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{n>x-\alpha}^{n \leq x+\alpha} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^\infty e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{t}(-x+\rho i)} \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \mathfrak{S} \frac{\Lambda}{\pi\sqrt{N}} \frac{\zeta^2(\frac{5}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}}, \end{aligned}$$

où $|\mathfrak{S}| < 1$.

En substituant le résultat obtenu dans l'égalité (7), on peut poser

$$(11) \quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n} \\ = (2\pi)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{-x+\rho i})^{\frac{5}{2}} \sum_{n>x-\alpha}^{\frac{n \leq x+\alpha}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \delta(N, \rho),$$

et la fonction $\delta(N, \rho)$ satisfera aux conditions

$$(12) \quad |\delta(N, \rho)| < \varepsilon \quad \text{tant que } N > N_0, \quad a < x < b \quad \text{et} \quad 0 < |\rho| < \rho_0.$$

41. Supposons, en premier lieu, que l'on ait attribué à la variable x une valeur positive quelconque qui n'est pas un nombre entier; on peut déterminer, dans ce cas, la constante α de manière qu'aucun nombre entier n ne satisfasse aux conditions

$$x - \alpha < n \leq x + \alpha.$$

La formule (11) prend, dans ce cas, la forme

$$(13) \quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n} = \delta(N, \rho);$$

il en résulte, à cause de (12), que les sommes infinies

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n},$$

dans le cas considéré, tendent vers des limites fixes quand la variable positive ρ décroît infiniment.

En partageant la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}$$

en deux parties

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} \\ = & \sum_{n=1}^{n \leq N} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} \\ & + \sum_{n > N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} \\ & = \sum_{n=1}^{n \leq N} \tau(n) \lim_{\rho=0} \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} + \delta(N); \end{aligned}$$

la fonction $\delta(N)$, à cause de (12), vérifie l'inégalité

$$(14) \quad |\delta(N)| < 2\varepsilon \quad \text{à condition que } N > N_0.$$

En observant que

$$\lim_{\rho=0} \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} = 2 \frac{\eta_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n},$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} \\ & = \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n} + \delta(N); \end{aligned}$$

et puisque, à cause de (14),

$$\lim_{N=\infty} \delta(N) = 0,$$

on trouve, en faisant $N = \infty$,

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n}.$$

42. Considérons maintenant le cas qui offre le plus de difficultés : la variable x est un nombre entier positif.

Dans ce cas, la formule (11) devient

$$\begin{aligned} & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i)}{4\pi^2 n} \\ &= (2\pi)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{-x + \rho i})^{\frac{5}{2}} \frac{\tau(x)}{(4\pi^2 x)^{\frac{5}{2}}} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{x t} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + o(N, \rho). \end{aligned}$$

En supposant que la variable ρ soit positive, on peut écrire

$$\begin{aligned} (15) \quad & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n} \\ &= \frac{\tau(x)}{2\pi} \left(\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}} \right)^{\frac{5}{2}} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x \pm \rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{x t} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + o(N, \rho). \end{aligned}$$

Considérons l'intégrale définie

$$\int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x \pm \rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{x t} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t};$$

cette intégrale peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x \pm \rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{x t} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{e^{\pm \frac{3\pi i}{4}}}{2} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(\sqrt{-x \pm \rho i} \pm i\sqrt{x})}} \frac{dt}{t} + \frac{e^{\mp \frac{3\pi i}{4}}}{2} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(\sqrt{-x \pm \rho i} \mp i\sqrt{x})}} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

En observant que

$$\begin{aligned} & \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(\sqrt{-x \pm \rho i} \mp i\sqrt{x})}} \frac{dt}{t} \\ &= -2C - \log N - 2\log 4\pi(\sqrt{-x \pm \rho i} \mp i\sqrt{x}) + \int_0^N (1 - e^{-4\pi\sqrt{t(\sqrt{-x \pm \rho i} \mp i\sqrt{x})}}) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

et

$$\int_0^N (1 - e^{-i\pi\sqrt{i}(\sqrt{-x\pm\rho i\mp i\sqrt{x}})}) \frac{dt}{t} = \mathfrak{S}_0 \sqrt{N} 8\pi (\sqrt{-x\pm\rho i\mp i\sqrt{x}}),$$

où $|\mathfrak{S}_0| < 1$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_N^\infty e^{-i\pi\sqrt{i}(\sqrt{-x\pm\rho i\mp i\sqrt{x}})} \frac{dt}{t} \\ = -2C - \log N - 2\log 4\pi (\sqrt{-x\pm\rho i\mp i\sqrt{x}}) + \mathfrak{S}_0 \sqrt{N} 8\pi (\sqrt{-x\pm\rho i\mp i\sqrt{x}}). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{e^{\pm \frac{3\pi i}{4}}}{2} \int_N^\infty e^{-i\pi\sqrt{i}(\sqrt{-x\pm\rho i\pm i\sqrt{x}})} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\mathfrak{S}_1}{2\pi(\sqrt{-x\pm\rho i\pm i\sqrt{x}})},$$

où $|\mathfrak{S}_1| < 1$; donc, il vient

$$\begin{aligned} (16) \quad \int_N^\infty e^{-i\pi\sqrt{i}(\sqrt{-x\pm\rho i})} \cos\left(4\pi\sqrt{x}t - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ = \frac{e^{\pm \frac{3\pi i}{4}}}{2} \left[-2C - \log N - 2\log 4\pi (\sqrt{-x\pm\rho i\mp i\sqrt{x}}) + \mathfrak{S}_0 \sqrt{N} 8\pi (\sqrt{-x\mp\rho i\mp i\sqrt{x}}) \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\mathfrak{S}_1}{2\pi(\sqrt{-x\pm\rho i\pm i\sqrt{x}})}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\log 4\pi (\sqrt{-x\pm\rho i\mp i\sqrt{x}}) = \log \frac{\pm 4\pi\rho i}{\sqrt{-x\pm\rho i\pm i\sqrt{x}}} = \log \rho + \log \frac{4\pi}{\sqrt{x\mp\rho i + \sqrt{x}}}$$

et

$$\sqrt{-x\pm\rho i\mp i\sqrt{x}} = \frac{\rho}{\sqrt{x\mp\rho i + \sqrt{x}}},$$

on peut mettre l'égalité (16) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_N^\infty e^{-i\pi\sqrt{i}(\sqrt{-x\pm\rho i})} \cos\left(4\pi\sqrt{x}t - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ = \frac{e^{\pm \frac{3\pi i}{4}}}{2} \left(-2C - \log N - 2\log \frac{2\pi}{\sqrt{x}} - 2\log \rho \right) + \frac{\mathfrak{S}}{4\pi\sqrt{Nx}} + \delta_0(\rho), \end{aligned}$$

où $|\vartheta| < 1$ et la fonction $\delta_0(\rho)$ satisfait à la condition

$$\lim_{\rho=0} \delta_0(\rho) = 0.$$

En substituant le résultat obtenu dans l'égalité (15), on trouve

$$(17) \quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n} \\ = \frac{\tau(x)}{2\pi} \left(\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}} \right)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{e^{\mp \frac{3\pi i}{4}}}{2} \left(-2C - \log N - 2 \log \frac{2\pi}{\sqrt{x}} - 2 \log \rho \right) \right. \\ \left. + \frac{\vartheta}{4\pi\sqrt{Nx}} + \delta_0(\rho) \right] + \delta(N, \rho).$$

Puisque

$$\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}} = \pm i \sqrt{1 \mp \frac{\rho i}{x}} = e^{\pm \frac{\pi i}{2}} \sqrt{1 \mp \frac{\rho i}{x}},$$

il vient

$$\left(\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}} \right)^{\frac{5}{2}} = e^{\pm \frac{5\pi i}{4}} \left(1 \mp \frac{\rho i}{x} \right)^{\frac{5}{2}},$$

et l'on peut poser

$$\left(\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}} \right)^{\frac{5}{2}} = e^{\pm \frac{5\pi i}{4}} + A\rho,$$

où le module de A ne surpasse pas une constante fixe; donc l'égalité (17) peut s'écrire

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n} \\ = \frac{\tau(x)}{2\pi} \left(e^{\pm \frac{5\pi i}{4}} + A\rho \right) \left[\frac{e^{\mp \frac{3\pi i}{4}}}{2} \left(-2C - \log N - 2 \log \frac{2\pi}{\sqrt{x}} - 2 \log \rho \right) \right. \\ \left. + \frac{\vartheta}{4\pi\sqrt{Nx}} + \delta_0(\rho) \right] + \delta(N, \rho).$$

En vertu de cette égalité, on peut poser

$$(18) \quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n} \\ = \mp i \frac{\tau(x)}{2\pi} \left(C + \log 2\pi \sqrt{\frac{N}{x}} + \log \rho \right) + \partial(\rho) + \partial(N, \rho),$$

où la fonction $\partial(N, \rho)$ satisfait aux conditions (12) et

$$\lim_{\rho=0} \partial(\rho) = 0.$$

A mesure que la variable ρ décroît infiniment, le module de la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n}$$

croît infiniment, en vertu de l'égalité (18). En prenant la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n} \pm i \frac{\tau(x)}{2\pi} \log \rho,$$

on obtient la fonction de la variable ρ qui tend vers une limite fixe quand ρ décroît infiniment.

Désignons, en vertu de l'égalité (18),

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i)}{4\pi^2 n} = -i \frac{\tau(x)}{2\pi} \left(C + \log 2\pi \sqrt{\frac{N}{x}} + \log \rho \right) + \partial_0(\rho) + \partial_0(N, \rho), \\ \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} = i \frac{\tau(x)}{2\pi} \left(C + \log 2\pi \sqrt{\frac{N}{x}} + \log \rho \right) + \partial_1(\rho) + \partial_1(N, \rho).$$

En faisant la somme de ces égalités, on obtient

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x + \rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x - \rho i)}{4\pi^2 n} = \partial_0(\rho) + \partial_1(\rho) + \partial_0(N, \rho) + \partial_1(N, \rho),$$

et il en résulte

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n>N} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \bar{\xi}_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n} = \delta(N),$$

où la fonction $\delta(N)$ satisfait, à cause de (12), aux conditions

$$|\delta(N)| < 2\varepsilon \quad \text{tant que } N > N.$$

Il en résulte

$$\lim_{N=\infty} \delta(N) = 0,$$

et en faisant $N = \infty$, on obtient l'égalité

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \bar{\xi}_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

qui subsiste donc, quelle que soit la valeur positive de la variable x .

43. En substituant le résultat obtenu dans la formule (2), on trouve

$$\int_0^{\infty} [g(-x+ti) - g(-x-ti)] i dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}.$$

En vertu de (1), on obtient

$$r_0(x) = \frac{1}{2}\tau(x) - 2 \int_x^{\infty} g(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

et puisque

$$\int_x^{\infty} g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

il vient

$$(19) \quad r_0(x) = \frac{1}{2}\tau(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}.$$

A l'aide de la formule (I) du n° 43 et de la formule (II) du n° 44,

on peut développer la fonction $r_0(x)$ en une autre série infinie

$$\begin{aligned}
 (I) \quad r_0(x) = & \frac{1}{2}\tau(x) + 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{r-1} x^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}} \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\dots(3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} \\
 & - 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{s-1} x^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}} \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\dots(3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} \\
 & + \varepsilon 2\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \frac{(2r+1)(2r-1)\dots(3-2r)}{2^{4r}r!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}} \\
 & - \varepsilon 2\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \frac{(2s+1)(2s-1)\dots(3-2s)}{2^{4s}s!} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{s}{2}+\frac{3}{4}}},
 \end{aligned}$$

où $-1 < \varepsilon < 1$, $0 < \varepsilon < 1$ et $r \geq 1$, $s \geq 1$.

Sur les valeurs approchées de la fonction $r_0(x)$.

44. THÉORÈME. — *En posant*

$$r_0(x) = \frac{1}{2}\tau(x) + 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{m-1} x^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}} \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\dots(3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} + R_0(x),$$

où $m \geq 1$, on aura la fonction $R_0(x)$ dont la valeur numérique ne surpasse pas, à condition que $x > a$, la limite

$$|R_0(x)| < A x^{\frac{1}{4}-\frac{m}{2}},$$

A étant une constante fixe.

On démontrera aisément le théorème énoncé à l'aide de la formule (I) du n° 43.

En rappelant la formule (3) du n° 33 :

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) = \int_0^x (\log t + 2C) dt + \zeta^2(0) + r_0(x),$$

ou, autrement,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) = x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + r_0(x),$$

on en conclut que la fonction numérique

$$\varphi_0(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n)$$

peut être représentée par la fonction

$$x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \tau(x) + 2\sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^{m-1} x^{\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2}} \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\dots(3-2\lambda)}{2^{i\lambda} \lambda!} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos \left[4\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{4}}},$$

où $m = 1, 2, \dots$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{1}{4} - \frac{m}{2}}$.

Il en résulte qu'en faisant $m = 1$, on obtient la fonction

$$\psi_0(x) = x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \tau(x) + 2\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos \left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4} \right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$

qui jouit de la propriété suivante :

La valeur numérique de la différence $\varphi_0(x) - \psi_0(x)$ tend vers la limite 0 à mesure que la variable x croît infiniment.

SECTION V.

FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALISÉE SOUS UNE FORME NOUVELLE.

Étude de la convergence de la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$.

45. THÉOREME I. — *La série infinie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

est uniformément convergente dans chaque intervalle $m + \alpha < x < m + \beta$, m étant un nombre entier positif quelconque ou zéro, et α et β deux fractions positives, prises arbitrairement.

Considérons la somme infinie

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

N étant un nombre positif aussi grand que l'on voudra.

En vertu de la formule (II) du n° 14, on aura

$$\eta_1(4\pi^2 nx) = \sqrt{\pi} (2\pi \sqrt{nx})^{\frac{1}{2}} \left[\cos \left(4\pi \sqrt{nx} - \frac{\pi}{4} \right) + \varepsilon_0 \frac{3}{32\pi \sqrt{nx}} \right],$$

$$-1 < \varepsilon_0 < 1;$$

il en résulte

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} &= \sqrt{\pi} x^{\frac{1}{4}} \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos \left(4\pi \sqrt{nx} - \frac{\pi}{4} \right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\ &+ \varepsilon \frac{3\sqrt{\pi}}{16x^{\frac{1}{4}}} \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \quad (-1 < \varepsilon < 1). \end{aligned}$$

A l'aide de la formule sommatoire (*) du n° 34, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\ &= \int_N^{\infty} \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{tx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} (\log t + 2C) dt - r_0(N) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{Nx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} \\ & \quad + r_1(N) D_N \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{Nx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} + \int_N^{\infty} r_1(t) D_t^2 \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{tx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} dt. \end{aligned}$$

En effectuant les différentiations et en substituant dans la seconde intégrale qui figure dans cette égalité l'expression de la fonction $r_1(t)$ obtenue au n° 38 :

$$r_1(t) = 2\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} + 2At^{\frac{1}{4}},$$

on peut poser

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\ &= -2^{\frac{3}{2}}\pi x \int_N^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \delta_0(N, x), \end{aligned}$$

et la fonction $\delta_0(N, x)$ vérifiera l'inégalité

$$(3) \quad |\delta_0(N, x)| < \varepsilon \quad \text{à condition que } N > N_0 \quad \text{et} \quad a < x < b,$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra.

En introduisant un nombre positif T, aussi grand que l'on voudra, on aura

$$\begin{aligned} (4) \quad & \int_N^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{T=\infty} \int_N^T \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} \int_N^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

il viendra, à cause de (2) et (4),

$$\begin{aligned} \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \\ = -2^{\frac{3}{2}} \pi x \lim_{T=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \partial_0(N, x). \end{aligned}$$

En vertu de (1), on peut poser

$$\begin{aligned} (5) \quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} \\ = - (2\pi)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{5}{4}} \lim_{T=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \partial_1(N, x), \end{aligned}$$

et la fonction $\partial_1(N, x)$ satisfera aux conditions (3).

En observant que

$$\begin{aligned} \int_N^T \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ = -\frac{1}{2} \int_N^T \cos 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} + \sqrt{n}) \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_N^T \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} (6) \quad \lim_{T=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} \\ = -\frac{1}{2} \lim_{T=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} + \sqrt{n}) \frac{dt}{t} \\ - \frac{1}{2} \lim_{T=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

A l'aide de la formule

$$(7) \quad -\frac{1}{2} \int_N^T \cos 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} + \sqrt{n}) \frac{dt}{t} = \frac{\mathfrak{S}_0}{2\pi(\sqrt{x} + \sqrt{n})} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \right)$$

où $-1 < \mathfrak{S}_0 < 1$, on obtient

$$\left| -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} + \sqrt{n}) \frac{dt}{t} \right| < \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{n}},$$

et, à plus forte raison,

$$\left| -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} + \sqrt{n}) \frac{dt}{t} \right| < \frac{\zeta^2(\frac{7}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{7}{4}}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \right).$$

En vertu de l'égalité obtenue, on peut poser

$$(8) \quad -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} + \sqrt{n}) \frac{dt}{t} = \frac{\mathfrak{S}}{\sqrt{N}} \frac{\zeta^2(\frac{7}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{7}{4}}},$$

où $-1 < \mathfrak{S} < 1$.

Prenons maintenant une fraction positive quelconque ρ et considérons l'intégrale définie

$$-\frac{1}{2} \int_N^T \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t}$$

en supposant que $|x - n| \geq \rho$.

En observant que

$$-\frac{1}{2} \int_N^T \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t} = \frac{\mathfrak{S}_0}{2\pi(\sqrt{x} - \sqrt{n})} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \right),$$

et

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{n}} \right| \leq \frac{x + \sqrt{x + \rho}}{\rho},$$

on obtient

$$\left| -\frac{1}{2} \int_N^T \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t} \right| < \frac{x + \sqrt{x + \rho}}{2\pi\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \right);$$

done, on peut poser

$$(9) \quad -\frac{1}{2} \int_N^T \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t} = \varpi \frac{x + \sqrt{x + \rho}}{2\pi\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \right),$$

où $-1 < \varpi < 1$ et $|x - n| \geq \rho$.

En partageant la somme infinie

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t}$$

en trois parties, d'après les conditions

$$\begin{aligned} 0 &< n \leq x - \rho, \\ x - \rho &< n \leq x + \rho, \\ x + \rho &< n \leq \infty, \end{aligned}$$

on aura, à cause de (9),

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t} \\ &= \varpi_0 \frac{x + \sqrt{x + \rho}}{2\pi\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{T}} \right) \frac{\zeta^2(\frac{5}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \leq x + \rho \\ n > x - \rho}} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

où $-1 < \varpi_0 < 1$; il en résulte

$$\begin{aligned} (10) \quad &-\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\varpi}{\sqrt{N}} \frac{x + \sqrt{x + \rho}}{2\pi\rho} \frac{\zeta^2(\frac{5}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \leq x + \rho \\ n > x - \rho}} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^{\infty} \sin 4\pi \sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

En vertu de (8) et (10) on peut prêter à l'égalité (6) la forme sui-

vante :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^T \cos\left(4\pi\sqrt{x}t - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4\pi\sqrt{n}t - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{N}} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \leq x+\rho \\ n > x-\rho}} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^{\infty} \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t},$$

où la variable A ne surpasse pas, en valeur numérique, une limite fixe à condition que $a < x < b$ et $\rho_0 < \rho < 1$.

En substituant le résultat obtenu dans la formule (5), on peut écrire

$$(11) \quad \sum_{n > N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} x^{\frac{5}{4}} \sum_{\substack{n \leq x+\rho \\ n > x-\rho}} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^{\infty} \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t} + \delta(N, x),$$

et la fonction $\delta(N, x)$ vérifiera l'inégalité

$$(12) \quad |\delta(N, x)| < \varepsilon \quad \text{à condition que } N > N_0, \quad a < x < b \quad \text{et} \quad \rho_0 < \rho < 1,$$

ε étant un nombre positif, pris arbitrairement.

Ces préliminaires posés, supposons que la valeur de x satisfasse aux conditions

$$(13) \quad m + \alpha < x < m + \beta,$$

m étant un nombre positif ou zéro et α et β deux fractions positives données. On peut, dans ce cas, déterminer une fraction positive ρ de manière qu'aucun nombre entier n ne vérifie les inégalités

$$m + \alpha - \rho < n < m + \beta + \rho;$$

on aura alors, identiquement,

$$\sum_{\substack{n \leq x+\rho \\ n > x-\rho}} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_N^{\infty} \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t} = 0,$$

tant que la variable x satisfera aux conditions (13), et, en vertu de (11), il vient

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} = \delta(N, x).$$

A cause de (12), on aura l'inégalité

$$(14) \quad \left| \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} \right| < \varepsilon,$$

qui subsiste à condition que

$$N > N_0 \quad \text{et} \quad m + \alpha < x < n + \beta,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

46. THÉORÈME II. — *La convergence de la série infinie*

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

est à variation limitée dans chaque intervalle fini $a < x < b$ où $a > 0$.

La somme infinie (15) représente, comme nous l'avons vu au n° 43, une fonction numérique qui passe brusquement d'une valeur à une autre dans le voisinage des valeurs entières positives de la variable x ; pour cette cause, la convergence de la série considérée ne peut être uniforme dans chaque intervalle fini. Cette série jouit d'une propriété importante, à savoir :

La valeur numérique de la somme

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

ne surpasse pas une limite fixe, quelle que soit la valeur attribuée à N quand la valeur de x est comprise entre les limites données $a < x < b$.

En vertu de cette propriété de la série infinie (15), on peut dire que la convergence de cette série est à variation limitée.

Le théorème énoncé est une conséquence immédiate de la formule (11), puisque la valeur numérique de l'intégrale définie

$$\int_N^\infty \sin 4\pi \sqrt{t}(\sqrt{x} - \sqrt{n}) \frac{dt}{t}$$

ne surpasse pas une limite fixe, quelle que soit la valeur de N ; c'est ce qu'on vérifie sans peine.

Nouvelle forme de la formule sommatoire généralisée.

47. Nous avons vu au n° 25 que la somme

$$\sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n)$$

peut être représentée par l'intégrale définie

$$(1) \quad \sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x) d\varphi(x),$$

prise dans le sens de Stieltjes, où l'on a mis

$$(2) \quad \varphi(x) = \sum_{n>0}^{n \leq x} \tau(n).$$

La formule (1) subsiste à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a < x < b$.

De la même manière, on démontrera que l'intégrale définie

$$\int_a^b \varphi(x) df(x)$$

a aussi un sens et que deux intégrales

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b \varphi(x) df(x)$$

sont liées par la relation

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \varphi(b)f(b) - \varphi(a)f(a) - \int_a^b \varphi(x) df(x).$$

En vertu de (1), on aura

$$(3) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \varphi(b)f(b) - \varphi(a)f(a) - \int_a^b \varphi(x) df(x).$$

Nous avons défini au n° 33 la fonction $r_0(x)$ par la formule

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n) = \int_0^x (\log t + 2C) dt + \zeta^2(0) + r_0(x);$$

donc, à cause de (2), on aura

$$(4) \quad \varphi(x) = x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4} + r_0(x).$$

En substituant cette expression de la fonction $\varphi(x)$ dans l'intégrale $\int_a^b \varphi(x) df(x)$, on obtient

$$\int_a^b \varphi(x) df(x) = \int_a^b [x(\log x + 2C - 1) + \frac{1}{4}] df(x) + \int_a^b r_0(x) df(x),$$

et l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) df(x) &= [b(\log b + 2C - 1) + \frac{1}{4}] f(b) - [a(\log a + 2C - 1) + \frac{1}{4}] f(a) \\ &\quad - \int_a^b f(x)(\log x + 2C) dx + \int_a^b r_0(x) df(x). \end{aligned}$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (3), on obtient, à cause de (4),

$$(5) \quad \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x) (\log x + 2C) dx + r_0(b) f(b) - r_0(a) f(a) - \int_a^b r_0(x) df(x).$$

Cette formule subsiste à la seule condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a < x < b$.

48. Supposons, de plus, que la fonction $f(x)$ ait dans l'intervalle $a < x < b$ un nombre limité de maxima et de minima.

En développant la fonction $r_0(x)$ en série obtenue au n° 43, on peut poser

$$r_0(x) = \frac{1}{2} \tau(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} + R(x, N)$$

où

$$(6) \quad R(x, N) = \sum_{n > N} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}.$$

En vertu de la propriété (2) (n° 24) des intégrales définies de Stieltjes, on déduit de l'égalité précédente la formule suivante :

$$\begin{aligned} & \int_a^b r_0(x) df(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \tau(x) df(x) + \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} df(x) + \int_a^b R(x, N) df(x). \end{aligned}$$

Comme la fonction $\tau(x)$ a la valeur *zéro* chaque fois que la valeur de x n'est pas un nombre entier positif, on aura

$$\int_a^b \tau(x) df(x) = 0,$$

et l'égalité précédente devient

$$(7) \quad \int_a^b r_0(x) df(x) = \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} df(x) + \int_a^b R(x, N) df(x).$$

Le reste de cette série

$$\int_a^b R(x, N) df(x)$$

tend vers la limite *zéro* à mesure que N croît indéfiniment.

Pour le démontrer, désignons par n_1, n_2, \dots, n_{k-1} tous les nombres entiers satisfaisant aux conditions

$$a < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < b,$$

puis prenons un nombre positif ρ , aussi petit que l'on voudra, et partageons l'intervalle (a, b) en des intervalles suivants :

$$(a, a + \rho), \quad (a + \rho, n_1 - \rho), \quad (n_1 - \rho, n_1), \quad (n_1, n_1 + \rho), \quad \dots, \\ (n_{k-1} + \rho, b - \rho), \quad (b - \rho, b).$$

En supposant que la fonction $f(x)$ ne possède dans l'intervalle (a, b) qu'un nombre limité de maxima et de minima, on peut déterminer un nombre positif ρ de manière que la fonction $f(x)$ varie dans le même sens entre les limites de chaque intervalle

$$(a, a + \rho), \quad (n_1 - \rho, n_1), \quad (n_1, n_1 + \rho), \quad \dots, \quad (n_{k-1}, n_{k-1} + \rho), \quad (b - \rho, b).$$

En désignant $a = n_0$ et $b = n_k$, on peut présenter le reste de la formule (7) sous la forme suivante :

$$\int_a^b R(x, N) df(x) \\ = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \left\{ \int_{n_\lambda}^{n_\lambda + \rho} R(x, N) df(x) + \int_{n_\lambda + \rho}^{n_{\lambda+1} - \rho} R(x, N) df(x) + \int_{n_{\lambda+1} - \rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N) df(x) \right\}.$$

Considérons l'intégrale définie

$$(9) \quad \int_{n_\lambda + \rho}^{n_{\lambda+1} - \rho} R(x, N) df(x) \quad \text{où} \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Quelque petit que soit le nombre positif ε , pris arbitrairement, on

peut toujours déterminer un nombre N_λ de manière que l'inégalité

$$(10) \quad |R(x, N)| < \varepsilon$$

ait lieu à condition que

$$(11) \quad N > N_\lambda \quad \text{et} \quad n_\lambda + \rho < x < n_{\lambda+1} - \rho \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

En effet, nous avons démontré au n° 45 que la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

est uniformément convergente dans le domaine $n_\lambda + \rho < x < n_{\lambda+1} - \rho$, où $0 < \rho < 1$; d'autre part, la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

en vertu des propriétés de la fonction $\xi_1(x)$ démontrées au n° 13, est uniformément convergente dans chaque intervalle $a < x < b$ où $a > 0$, il en résulte que la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $n_\lambda + \rho < x < n_{\lambda+1} - \rho$; donc, à cause de (6), la fonction $R(x, N)$ satisfait aux conditions (10) et (11).

En observant que la fonction $f(x)$ ne possède qu'un nombre limité de maxima et de minima dans l'intervalle $(n_\lambda, n_{\lambda+1})$, on peut déterminer une constante positive A_λ qui ne dépend pas de ρ de manière que l'inégalité

$$\left| \int_{n_\lambda + \rho}^{n_{\lambda+1} - \rho} R(x, N) df(x) \right| < MA_\lambda$$

ait lieu, M étant la limite supérieure des valeurs numériques de la

fonction $R(x, N)$ dans l'intervalle $(n_\lambda + \rho, n_{\lambda+1} - \rho)$; on en conclut que la valeur numérique de l'intégrale définie (9) vérifie, à cause de (10) et (11), l'inégalité

$$(12) \quad \left| \int_{n_\lambda - \rho}^{n_{\lambda+1} - \rho} R(x, N) df(x) \right| < \varepsilon A_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

Considérons maintenant deux intégrales définies

$$\int_{n_\lambda}^{n_\lambda + \rho} R(x, N) df(x) \quad \text{et} \quad \int_{n_{\lambda+1} - \rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N) df(x) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

En vertu du théorème II du n° 46, la fonction $R(x, N)$ vérifie l'inégalité

$$(13) \quad |R(x, N)| < B \quad \text{à condition que} \quad a < x < b,$$

B étant une constante fixe.

Puisque la fonction $f(x)$ varie dans le même sens dans l'intervalle $(n_\lambda, n_\lambda + \rho)$ et aussi dans l'intervalle $(n_{\lambda+1} - \rho, n_{\lambda+1})$, on aura les inégalités

$$\left| \int_{n_\lambda}^{n_\lambda + \rho} R(x, N) df(x) \right| < B |f(n_\lambda + \rho) - f(n_\lambda)|$$

et

$$\left| \int_{n_{\lambda+1} - \rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N) df(x) \right| < B |f(n_{\lambda+1}) - f(n_{\lambda+1} - \rho)|.$$

En observant que la fonction $f(x)$ est continue dans les intervalles $(n_\lambda, n_\lambda + \rho)$ et $(n_{\lambda+1} - \rho, n_{\lambda+1})$, on peut supposer que le nombre positif ρ soit choisi de manière que les inégalités

$$|f(n_\lambda + \rho) - f(n_\lambda)| < \eta \quad \text{et} \quad |f(n_{\lambda+1}) - f(n_{\lambda+1} - \rho)| < \eta$$

aient lieu, η étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra.

En vertu des inégalités précédentes, il vient

$$(14) \quad \left| \int_{n_\lambda}^{n_\lambda + \rho} R(x, N) df(x) \right| < \eta B \quad \text{et} \quad \left| \int_{n_{\lambda+1} - \rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N) df(x) \right| < \eta B$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

Ayant égard aux inégalités (12) et (14), on obtient, à cause de (8),

$$\left| \int_a^b R(x, N) df(x) \right| < \sum_{\lambda=0}^{k-1} (\varepsilon A_\lambda + 2\eta B).$$

Cette inégalité subsiste à condition que

$$N > N_\lambda \quad \text{où} \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Il en résulte qu'en faisant $N = \infty$, on aura

$$(15) \quad \lim_{N=\infty} \int_a^b R(x, N) df(x) = 0.$$

49. THÉORÈME I. — *La somme $\sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n)$ peut être développée en série infinie*

$$\begin{aligned} (\star) \quad \sum_{n>a}^{n \leq b} \tau(n) f(n) &= \int_a^b f(x) (\log x + 2C) dx + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) - \frac{1}{2} \tau(a) f(a) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \int_a^b f(x) [\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)] dx, \end{aligned}$$

à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (a, b) et qu'elle ne possède dans cet intervalle qu'un nombre limité de maxima et de minima.

Considérons l'intégrale définie

$$\int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} df(x).$$

En intégrant par parties à l'aide de la formule (2) du n° 9 et de la formule (4) du n° 11

$$D_x \frac{\xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} = -\xi(4\pi^2 nx) \quad \text{et} \quad D_x \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} = \eta(4\pi^2 nx),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} df(x) \\ &= \frac{\eta_1(4\pi^2 nb) - \xi_1(4\pi^2 nb)}{4\pi^2 n} f(b) - \frac{\eta_1(4\pi^2 na) - \xi_1(4\pi^2 na)}{4\pi^2 n} f(a) \\ & \quad - \int_a^b f(x) [\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)] dx; \end{aligned}$$

et, en vertu de la formule (7), il vient

$$\begin{aligned} & \int_a^b r_0(x) df(x) \\ &= \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nb) - \xi_1(4\pi^2 nb)}{4\pi^2 n} f(b) - \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 na) - \xi_1(4\pi^2 na)}{4\pi^2 n} f(a) \\ & \quad - \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \int_a^b f(x) [\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)] dx + \int_a^b R(x, N) df(x). \end{aligned}$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (5) on aura

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) \\ &= \int_a^b f(x) (\log x + 2C) dx + \left[r_0(b) - \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nb) - \xi_1(4\pi^2 nb)}{4\pi^2 n} \right] f(b) \\ & \quad - \left[r_0(a) - \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 na) - \xi_1(4\pi^2 na)}{4\pi^2 n} \right] f(a) \\ & \quad + \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \int_a^b f(x) [\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)] dx - \int_a^b R(x, N) df(x). \end{aligned}$$

En observant qu'en vertu de la formule (19) du n° 43 on aura

$$\begin{aligned} r_0(a) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 na) - \xi_1(4\pi^2 na)}{4\pi^2 n} &= \frac{1}{2} \tau(a), \\ r_0(b) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n \leq N} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nb) - \xi_1(4\pi^2 nb)}{4\pi^2 n} &= \frac{1}{2} \tau(b), \end{aligned}$$

et en faisant, dans l'égalité précédente, $N = \infty$, on obtient, à cause de (15),

$$\sum_{\substack{n \leq N \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x) (\log x + 2C) dx + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) - \frac{1}{2} \tau(a) f(a) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) [\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)] dx;$$

donc le théorème énoncé est démontré.

50. THÉORÈME II. — La somme $\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n)$ peut être développée en série infinie

$$(\star \star) \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) \\ = \int_a^b f(x) (\log x + 2C) dx + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)] \\ + (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \int_a^b \frac{(-1)^m \xi_m(4\pi^2 nx) + \eta_m(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^m} f^{(m)}(x) dx,$$

à condition que la fonction $f(x)$ ait m dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$ bien déterminées et limitées dans l'intervalle (a, b) , ($m = 1, 2, \dots$).

Revenons à la formule (7). Le reste de cette formule peut être présenté, dans le cas considéré, sous la forme suivante :

$$(16) \int_a^b R(x, N) f'(x) dx \\ = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \left\{ \int_{n_{\lambda}}^{n_{\lambda}+\rho} R(x, N) f'(x) dx \right. \\ \left. + \int_{n_{\lambda}+\rho}^{n_{\lambda+1}-\rho} R(x, N) f'(x) dx + \int_{n_{\lambda+1}-\rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N) f'(x) dx \right\}.$$

Comme la fonction $f'(x)$ est, par hypothèse, limitée dans l'inter-

valle (a, b) , on aura

$$|f'(x)| < A,$$

où $a < x < b$, A étant une constante fixe.

Il en résulte, en vertu de (10),

$$\left| \int_{n_{\lambda} + \rho}^{n_{\lambda+1} - \rho} R(x, N) f'(x) dx \right| < \varepsilon A (n_{\lambda+1} - n_{\lambda} - 2\rho) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1),$$

et, en vertu de (13),

$$\left| \int_{n_{\lambda}}^{n_{\lambda+1} + \rho} R(x, N) f'(x) dx \right| < \rho AB$$

et

$$\left| \int_{n_{\lambda+1} - \rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N) f'(x) dx \right| < \rho AB \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

A cause de (16) on obtient

$$\left| \int_a^b R(x, N) f'(x) dx \right| < \sum_{\lambda=0}^{k-1} [\varepsilon A (n_{\lambda+1} - n_{\lambda} - 2\rho) + 2\rho AB],$$

où $N > N_{\lambda}$ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, k-1$).

On en conclut qu'en faisant $N = \infty$, on aura

$$\lim_{N=\infty} \int_a^b R(x, N) f'(x) dx = 0.$$

En faisant $N = \infty$ dans la formule (7), on obtient, à cause de (6),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) &= \int_a^b f(x) (\log x + 2C) dx + r_0(b) f(b) - r_0(a) f(a) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} f'(x) dx; \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème énoncé dans le cas $m = 1$. En intégrant

par parties les intégrales définies qui se trouvent dans l'égalité obtenue, on déduira aisément la formule générale.

La formule $(\star \star)$, qui ne diffère de la formule sommatoire (\star) du n° 34 que par la forme du reste, présente une généralisation de la célèbre formule sommatoire de Poisson ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ POISSON, *Mémoire sur le calcul des intégrales définies* (*Mémoires de l'Institut de France*, année 1823, t. VI, p. 571).

