L. DESAINT

Les séries de Taylor et la représentation exponentielle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 415-448
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__415_0>

LES

SÉRIES DE TAYLOR

ET LA

REPRÉSENTATION EXPONENTIELLE,

PAR M. L. DESAINT.

Dans une série de recherches dont une partie seulement a paru jusqu'ici (*Journal de Mathématiques*, 1902), j'ai eu plusieurs fois l'occasion de voir jusqu'à quel point la représentation exponentielle des fonctions, c'est-à-dire leur développement en somme d'exponentielles, était intimement liée à la détermination des points singuliers des séries de Taylor. Pour expliquer ce fait il suffit de se reporter à l'application immédiate du théorème de Cauchy, c'est-à-dire à la forme que ce théorème permet de donner aux coefficients d'une série de Taylor.

Si l'origine est point régulier de la fonction $f(z)$, celle-ci étant mise sous la forme

$$f(z) = \sum A(n) z^n,$$

on sait que la formule de Cauchy donne immédiatement

$$A(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t}\left(\frac{1}{t}\right)^n dt$$

et par suite $A(n)$ se rattache à une fonction $A(x)$ admettant le développement (ensemble continu) exponentiel

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t}\left(\frac{1}{t}\right)^x dt,$$

C désignant un contour à l'intérieur duquel $f(z)$ est holomorphe. D'ailleurs la variable x porte sur des quantités $\left(\frac{1}{t}\right)$, qui sont l'inverse des affixes des points du contour C.

Déterminer *a priori* un développement exponentiel de $A(x)$, c'était avoir la possibilité de déterminer le contour C, lorsque $f(z)$ n'est connu que par un noyau taylorien

$$f(z) = \sum A(n) z^n.$$

La recherche du développement exponentiel d'une fonction donnée a fait de ma part l'objet d'une Note aux *Comptes rendus* (26 mai 1902). Dans le Mémoire actuel j'ai donné la démonstration partielle des résultats contenus dans cette Note.

L'étude présente a son origine dans les résultats d'une méthode employée par Laguerre, appliquée par Stieltjes, et dont M. Le Roy a fait usage dans ses recherches sur les *Points singuliers*.

Nous considérons la suite

$$A(1), \quad A(2), \quad \ldots, \quad A(n), \quad \ldots$$

des coefficients du noyau taylorien

$$F(z) = \sum A(n) z^n$$

comme les valeurs pour l'ensemble des nombres entiers positifs d'une fonction analytique

$$A(x)$$

que nous pouvons même supposer entière (Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*). Il y aura lieu de distinguer immédiatement deux cas :

1° En remplaçant dans le coefficient $A(n)$ du développement taylorien donné, n par x, on obtient une fonction analytique

$$A(x);$$

2° On ne peut obtenir directement une fonction analytique par ce changement. Alors il faudra construire une fonction entière $G(x)$

prenant pour la suite des nombres entiers positifs, l'ensemble de valeurs représentées par les coefficients de la série de Taylor considérée.

Nous avons séparé ces deux cas par le caractère analytique immédiat de $A(x)$; il suffira toujours que $A(x)$ soit holomorphe pour les grandes valeurs de la variable dans une aire contenant la portion de l'axe des quantités réelles positives, relative à ces valeurs; le caractère analytique dans le plan tout entier est secondaire. Les deux cas se séparent nettement et les avantages naturels du premier ressortiront mieux après les quelques considérations suivantes.

Qu'il s'agisse d'une série de Taylor ou d'une autre opération quelconque lorsqu'une fonction n'est connue que par une telle opération valable dans une aire limitée réductible même à un point (Laguerre, Stieltjes, Poincaré, Borel, etc.) on est amené par la voie du prolongement analytique ou par la construction d'opérations de types différents (Borel) ou par idée d'analogie (Laguerre, Stieltjes), à faire suivre l'anneau fondamental d'une suite de plusieurs autres de même forme ou de forme différente; nous dirons que nous avons construit une chaîne.

On peut indiquer quelques conditions *a priori* pour qu'une chaîne soit bonne :

1° Elle devra présenter la plus rapide extension; c'est-à-dire que, pour faire connaître la fonction, la chaîne devra comprendre le plus petit nombre d'anneaux possible. Ainsi une fonction analytique étant définie par un noyau taylorien, la chaîne qui lui correspond peut être formée de deux anneaux; le premier étant la série de Taylor initiale et le second une série de fractions rationnelles ou de polynomes de MM. Runge, Painlevé ou Hilbert, valable dans tout le domaine d'existence de la fonction analytique envisagée;

2° Elle devra représenter clairement l'ensemble des singularités sur les formules mêmes de ses anneaux;

3° Elle devra satisfaire autant que possible à la moindre déformation paramétrique; c'est-à-dire qu'en passant d'une opération à une autre de la chaîne, les coefficients de la première doivent être mis en évidence et aussi simplement que possible sous les signes fonctionnels figurant dans la seconde de ces deux opérations.

Ceci se présente quand on passe par exemple d'une intégrale de Cauchy à la série de Taylor correspondante ou d'une série de Maclaurin initiale au développement de Mittag-Leffler correspondant; les coefficients d'un développement (M) sont en effet des fonctions linéaires et homogènes des coefficients du noyau taylorien initial.

On pourrait encore indiquer d'autres conditions intéressantes; nous nous arrêterons aux trois premières pour le travail présent.

Plaçons-nous dans le cas bien net où le premier anneau d'une chaîne est une série de Maclaurin

$$F(z) = \sum A(n) z^n;$$

prendre comme second anneau un développement (M) c'est tenir compte à peu près des conditions extrêmes; mais la deuxième condition n'est aucunement remplie.

En d'autres termes, il faut limiter la généralité de l'anneau initial si l'on veut avoir une chaîne où les trois conditions précédentes soient remplies. Les représentations tout à fait générales que l'on connaît des fonctions analytiques (Painlevé, Runge, Hilbert, etc.) ne satisfont pas aux exigences naturelles d'une bonne chaîne, à cause même de leur généralité.

Il nous reste à voir comment nous pouvons diminuer la généralité de l'anneau initial et quelle forme nous choisirons pour la chaîne afin de satisfaire pleinement à la seconde condition et aussi bien que possible aux deux conditions extrêmes en même temps.

Dans ce Mémoire nous prenons comme anneau initial une série de Taylor

$$F(z) = \sum A(n) z^n.$$

Les coefficients $A(n)$ seront d'autant mieux groupés que l'on pourra fixer immédiatement une fonction analytique

$$A(x)$$

admettant ces coefficients pour ses valeurs suivant la suite des nombres entiers positifs. Ce sera là une manière préalable de satisfaire à la troisième condition.

Comme nous l'avons déjà rappelé, les travaux de M. Borel ont montré qu'une telle fonction $A(x)$ existe toujours (il y en a d'ailleurs une infinité).

En général, il nous faudrait construire de telles fonctions. Nous nous placerons dans le cas où la construction est faite d'elle-même, c'est-à-dire qu'il suffit de remplacer dans le terme général

$$A(n)$$

n par x pour avoir la fonction cherchée. Cette simplification dans le problème que nous avons en vue est toute naturelle lorsque les coefficients $A(n)$ ne sont pas donnés numériquement.

Tant que

$$\sum A(n) z^n$$

a un rayon de convergence fini non nul, on peut supposer, sans diminuer aucunement la généralité des données de l'anneau initial, que cette série a pour rayon de convergence l'unité, tout en étant valable sur le cercle de rayon *un* ayant l'origine pour centre.

Le problème fondamental que nous voulons résoudre est le suivant :

Étant donnée la fonction $A(x)$, *en déduire l'ensemble des points singuliers de la fonction* $F(z)$.

Ce problème n'a vraiment de sens que si $F(z)$ est analytique. Nous supposerons tout d'abord que le cercle de convergence de $F(z)$ n'est pas une coupure pour cette fonction.

Une proposition de MM. Pringsheim et Borel montre immédiatement qu'on ne peut supposer $A(x)$ la plus générale possible, sans que par ce seul fait le cercle de convergence de $F(z)$ ne devienne une coupure pour cette fonction.

A priori nous ne pouvons supposer $A(x)$ tout à fait générale ; cependant nous avons à nous placer dans des conditions préalables assez générales. Il convient de fixer quelques-unes de ces circonstances.

L'ensemble des coefficients

$$A(1), \quad \ldots, \quad A(n),$$

n'a d'influence véritable sur l'ensemble des points singuliers de $F(z)$ que pour les valeurs infinies de n. Le point à l'infini de $A(x)$ doit donc jouer un rôle essentiel dans la recherche des points singuliers de $F(z)$. C'est ce que nous verrons d'une façon plus précise tout au long de ce Mémoire.

Nous montrerons de quelle manière les points singuliers de $F(z)$ *sortent du point singulier à l'infini de* $A(x)$.

Introduction de la représentation exponentielle générale.

Les principaux résultats relatifs à cette représentation ont été condensés dans une Note des *Comptes rendus* (26 mai 1902), mais les démonstrations qui s'y rapportent n'ont pas encore été données; nous nous y arrêterons donc quelques instants après avoir montré comment une telle représentation s'introduit d'elle-même dans la recherche des points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor.

Considérons une fonction analytique $F(z)$ et désignons par C un contour aussi voisin que l'on veut de l'ensemble des singularités de cette fonction, sans être infiniment près de cet ensemble (*Journal de Mathématiques*, 1902), de telle sorte que $F(z)$ garde une valeur finie sur C. Si l'infini est point singulier on en approchera autant que l'on pourra suivant les directions asymptotiques où $F(z)$ devient infinie; s'il existe sur le cercle de l'infini des arcs sur lesquels $F(z)$ est finie, on complétera par ces arcs le contour d'approximation; si ces arcs n'existaient pas on suivrait le point essentiel à l'infini au moyen d'une ligne à distance finie (cas du pôle).

En faisant usage d'un tel contour C, deux circonstances se présenteront à son égard.

Si l'infini est régulier nous écrirons, pour toute valeur z non singulière,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(t)\,dt}{t-z} + a,$$

a désignant la valeur de $F(z)$ à l'infini.

Si l'infini est point singulier, en faisant usage du contour C modifié comme il vient d'être dit, la formule précédente se réduit à

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(t)\,dt}{t - z};$$

dans ce dernier cas C peut être considéré comme *suivant d'aussi près que l'on veut* les points singuliers de $F(z)$.

En admettant que le premier cas est moins général que le second, c'est la seconde formule qui nous fournira notre point de départ pour exposer la méthode exponentielle.

Supposons que nous cherchions, en nous servant de l'intégrale précédente, la série de Taylor qui représente $F(z)$ au voisinage de l'origine, autour de laquelle cette fonction est holomorphe.

Nous écrirons dans ces conditions :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum z^n \int_C \frac{f(t)}{t} \left(\frac{1}{t}\right)^n dt.$$

Le coefficient $A(n)$ se présente ainsi sous la forme

$$A(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t} \left(\frac{1}{t}\right)^n dt.$$

La fonction $A(x)$ s'écrit immédiatement

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t} \left(\frac{1}{t}\right)^x dt. \tag{1}$$

Nous l'obtenons sous forme d'une somme d'exponentielles.

Dans certains cas d'ailleurs, la définition même de $f(z)$ peut conduire aux développements exponentiels par série; il en est ainsi, et dans des conditions très larges, lorsque $f(z)$ est donnée par des séries de fractions rationnelles, telles que

$$\sum \frac{\alpha_k}{a_k - z} \qquad (a_k \lessgtr 0)$$

où $\sum \frac{\alpha_k}{a_k}$ est absolument convergente. La fonction $A(x)$ se met sous la forme

$$(2) \qquad A(x) = \sum \frac{\alpha_k}{a_k}\left(\frac{1}{a_k}\right)^x.$$

Les développements exponentiels se sont présentés bien des fois en d'importantes questions d'Analyse, comme la théorie des fonctions simplement ou doublement périodiques et la représentation d'intégrales d'équations différentielles par la méthode de Laplace [1] ou par le procédé des déterminants infinis [méthode de Hill, Poincaré, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIV]. Ces développements sont liés aussi à des travaux se rattachant au calcul fonctionnel distributif (PINCHERLE, *Math. Annalen.*, t. XLIX). Ils se sont présentés, implicitement tout au moins, en des questions analogues à celles qui nous occupent dans les œuvres de Laguerre (aussi HERMITE, *Cours lithographié*) dans le Mémoire de Stieltjes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1894-1895), *dans le Mémoire de M. Borel, sur les Séries divergentes et dans celui de* M. Le Roy (*A. F. S. de Toulouse*, 1900). Je m'étais servi de la méthode de Laguerre dans ma Thèse (1897), et dans plusieurs Notes des *Comptes rendus*.

L'importance des développements exponentiels ne paraît donc pas douteuse; on pourrait dire qu'elle est naturelle si l'on considère le rôle considérable tenu par cette fonction en Analyse et rempli à beaucoup d'égards par la propriété

$$\varphi(x+a) = \varphi(x)\,\varphi(a).$$

A une fonction $f(z)$, c'est-à-dire à un ensemble (C) ou (a_k) de points singuliers, correspond un développement exponentiel (1) ou (2).

Réciproquement un développement exponentiel donné de $A(x)$ fait connaître pour $F(z)$ une aire à l'intérieur de laquelle cette fonction est holomorphe; l'ensemble des singularités de $F(z)$, en tous cas, se trouve limité. Il reste à chercher une approximation qui soit très avancée, c'est-à-dire aussi bonne que possible, de cet ensemble.

---

(1) POINCARÉ, *American Journal of Mathematics*; PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III.

D'une manière plus précise, étant donnée *a priori* la fonction

$$A(x),$$

nous devons en chercher une représentation exponentielle (en la supposant possible)

$$A(x) = \sum \beta_k \alpha^{-\gamma_k x}$$

telle que l'ensemble (a^{γ_k}) se rapproche le plus possible de l'ensemble des points singuliers de $F(z)$.

Nous avons dit que nous ne pouvions pas prendre

$$A(x)$$

quelconque, qu'il fallait en un mot limiter la généralité d'une telle fonction; d'avance, d'ailleurs, nous savons à peu près que le point à l'infini de $A(x)$ jouera un rôle exclusif dans la détermination de l'ensemble (E) des singularités de $F(z)$. Nous supposerons donc que (E) est tout à fait quelconque à distance finie; il nous restera à distinguer plusieurs circonstances, de plus en plus générales, du point à l'infini dans $A(x)$.

Nous n'examinerons pas le cas où l'infini est régulier. M. Leau (*Journal de Mathématiques*, t. V) a montré que la fonction $F(z)$ ne possède alors dans tout le plan comme point singulier que le point $z = 1$.

Le cas où l'infini est pôle ne présente aucune difficulté et se ramène immédiatement au précédent, en remarquant l'identité

$$A(x) = b_s x^s + \ldots + b_0 + H(x)$$

où $H(x)$ est régulière à l'infini. Comme chacune des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_s n^s z^n$$

représente une fraction rationnelle ayant un unique pôle $z = 1$, la fonction $F(z)$ ne possède encore dans ce cas qu'un point singulier $z = 1$ dans tout le plan.

Nous supposerons donc que la fonction $A(x)$ possède un point singulier essentiel à l'infini. Nous envisagerons deux circonstances principales de cette fonction en ce point :

I. La fonction $A(x)$ est holomorphe à l'infini dans un angle quelconque de 180° au moins, comprenant l'axe des quantités réelles positives.

II. La fonction $A(x)$ est holomorphe à l'infini dans un angle quelconque à l'intérieur duquel se trouve l'axe des quantités réelles positives.

Dans ces deux cas, nous partons de l'axe des quantités réelles positives. Comme nous pouvons supposer que la série de Taylor

$$F(z) = \sum A(n) z^n$$

a un rayon de convergence au moins égal à l'unité, nous nous plaçons dans le cas où cette série converge pour $z = 1$. Dans ces conditions

$$A(x)$$

tend vers zéro à l'infini suivant le demi-axe des quantités réelles positives.

Nous partons de là :

$$A(x)$$

tend vers une valeur finie (nulle même) dans la direction de l'axe X des quantités réelles positives. Nous pouvons faire quatre hypothèses principales par rapport à cet axe *dont le rôle* a priori *est essentiel dans l'existence de l'ensemble* (E) *des singularités* $F(z)$:

1° Il n'existe aucun angle, si petit soit-il, comprenant X, où $A(x)$ soit holomorphe à l'infini.

En envisageant une somme quelconque d'exponentielles

$$\sum \beta_k \alpha^{-\gamma_k x}$$

il est naturel de considérer ce cas comme étant le plus général;

2° Il existe un angle fini comprenant X, où $A(x)$ est holomorphe à l'infini;

3° Cet angle fini est au moins égal à 180°;

4° La fonction $A(x)$ est holomorphe à l'infini dans l'angle de 180° formé par l'axe des quantités imaginaires (l'axe X se trouvant à l'intérieur d'un tel angle).

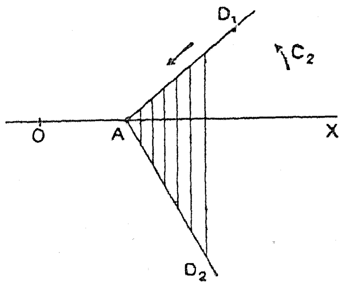
Nous verrons que le premier cas seul peut correspondre à une fonction analytique générale; nous arriverons à cette conclusion par l'étude des trois derniers cas; nous remarquerons que, dans chacun de ceux-ci, il existe un angle fini comprenant l'axe des quantités réelles positives où $A(x)$ est holomorphe à l'infini; par suite, dans chacun de ces cas, *il existera un angle fini, dont le sommet* S *est sur* X, *comprenant la portion de* X *qui s'étend de* S *à l'infini, la fonction* $A(x)$ *étant holomorphe à l'intérieur de cet angle que nous désignerons désormais sous le nom de* secteur d'holomorphisme, *par abréviation.* Il est entendu que la fonction $A(x)$ est finie et continue sur les deux côtés de cet angle.

Développements exponentiels dans un secteur donné.

Nous supposerons tout d'abord que ce secteur a une ouverture inférieure à 180°; c'est le cas le plus compliqué. Nous étudierons les développements exponentiels, non pas de $A(x)$ lui-même, mais de $\frac{A(x)}{x^2}$ en vue des recherches présentes sur les points singuliers des séries de Taylor.

Soit O l'origine et A le sommet de l'angle formé par le secteur considéré.

Fig. 1.



Soit encore $D_1\hat{A}D_2$ (*fig.* 1) le contour formé de deux droites qui, avec un arc de cercle C_2, de rayon infiniment grand, limite une aire R à l'intérieur de laquelle $\frac{A(x)}{x^2}$ est holomorphe. En tout point x de R, cette fonction s'écrit

$$\frac{A(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{A(t)\,dt}{t^2(t-x)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1} \frac{A(t)\,dt}{t^2(t-x)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{D_2} \frac{A(t)\,dt}{t^2(t-x)}.$$

La première intégrale est nulle. Il reste les deux dernières. Désignons par α et β les arcs mesurant les angles de AD_1 et de AD_2 avec X.

Nous écrirons l'identité précédente

$$\frac{A(x)}{x^2} = \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i}\int_{D_1} \frac{A(t)\,dt}{t^2(t-x)\,e^{i\alpha'}} + \frac{e^{-i\beta'}}{2\pi i}\int_{D_2} \frac{A(t)\,dt}{t^2(t-x)\,e^{-i\beta'}}$$

en posant $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Lorsque la variable x prend ses valeurs dans R, l'angle D_1AD_2 étant inférieur à $180°$, la partie réelle de

$$(x-t)\,e^{i\alpha'}$$

reste toujours positive, t se déplaçant sur D_1.

De même la partie réelle de

$$(x-t)\,e^{-i\beta'}$$

reste positive, t variant sur D_2.

On peut écrire dans ces conditions

$$\frac{1}{(x-t)\,e^{i\alpha'}} = \int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)e^{i\alpha'}}\,du,$$

$$\frac{1}{(x-t)\,e^{-i\beta'}} = \int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)e^{-i\beta'}}\,du.$$

La fonction $A(x)$ donnée par l'identité (1) prend cette nouvelle forme, D_1 et D_2 étant maintenant parcourus dans le sens D_2AD_1,

$$\frac{A(x)}{x^2} = \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i}\int_{D_1}\int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)e^{i\alpha'}}\frac{A(t)}{t^2}\,dt\,du + \frac{e^{-i\beta'}}{2\pi i}\int_{D_2}\int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)e^{-i\beta'}}\frac{A(t)}{t^2}\,dt\,du.$$

Remarquons tout de suite que dans cette identité nous pouvons remplacer successivement x par tous les nombres entiers positifs dont la valeur est supérieure à un nombre entier $(N - 1)$ supérieur, ou au moins égal à l'abscisse du point A.

Ce premier développement exponentiel se simplifie dans les deux cas suivants du secteur d'holomorphisme, c'est-à-dire lorsque ce secteur a une ouverture au moins égale à 180°.

Notre procédé ne permet pas de donner une représentation exponentielle dans un secteur d'ouverture supérieure à 180°; nous n'envisagerons donc une telle représentation que dans un secteur de 180°, c'est-à-dire limité par une droite D et un arc de cercle de rayon infiniment grand.

Ici

$$\beta = \pi - \alpha, \qquad \beta' = -\alpha',$$

$$\frac{A(x)}{x^2} = \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i}\int_D \int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)e^{i\alpha'}} \frac{A(t)}{t^2}\, dt\, du.$$

Les deux cas d'ouverture d'angle se sépareront dans la recherche des points singuliers de $F(z)$.

Si la fonction

$$A(x)$$

est holomorphe à l'infini dans l'angle de 180° déterminé par l'axe des quantités imaginaires (quatrième cas), l'identité précédente est encore plus simple, car, alors : $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha' = 0$, et

$$\frac{A(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_D \int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)} \frac{A(t)}{t^2}\, dt\, du$$

en désignant par D une parallèle à l'axe des quantités imaginaires parcourue de bas en haut.

Ce sont là différents développements exponentiels qui nous seront utiles dans la recherche des points singuliers des séries de Taylor.

Il nous reste une dernière remarque à faire sur ces développements.

On peut être conduit à des fonctions $F(z)$ très générales par la fonction

$$A(x$$

lorsque celle-ci se présente sous la forme

$$A(x) = \sum A_\delta(x) B_\delta(x),$$

les fonctions

$$A_\delta(x)$$

appartenant à l'un des trois derniers cas et les fonctions $B_\delta(x)$ étant supposées développables en séries d'exponentielles quand la variable x prend des valeurs réelles positives très grandes.

La fonction $A(x)$ se met alors sous la forme

$$\sum_{\delta, \mu, \nu, \lambda} a(\mu, \nu, \lambda) A_\delta(x) e^{x\varphi(\mu,\nu,\lambda)}$$

et conduit à un développement exponentiel par intégrale et série. Si l'une des fonctions $A_\delta(x)$ admettait un pôle à l'infini, le développement

$$\sum A_\delta(x) B_\delta(x)$$

deviendrait

$$\sum a(\mu, \nu, \lambda) x^{k_\delta} A_\delta(x) e^{x\varphi(\mu,\nu,\lambda)},$$

$A_\delta(x)$ rentrant dans l'un des trois derniers cas de représentation exponentielle.

Considérons à nouveau la fonction

$$F(z) = \sum A(n) z^n.$$

Nous nous proposons de déterminer les points singuliers de cette fonction, dans l'un quelconque des trois cas suivants :

1° Le secteur d'holomorphisme de $A(x)$ est fini (non nul) mais inférieur à 180°;

2° Ce secteur est d'ouverture au moins égale à 180°;

3° Ce secteur comprend le demi-plan à droite d'une parallèle à l'axe des quantités imaginaires.

L'introduction des développements exponentiels qui précèdent permet de le faire simplement.

Prenons tout d'abord le premier cas. Il donne lieu à l'identité

$$\frac{A(x)}{x^2} = \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i}\int_{D_1}\int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)e^{i\alpha'}}\frac{A(t)}{t^2}\,dt\,du + \frac{e^{-i\beta'}}{2\pi i}\int_{D}\int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)e^{-i\beta'}}\frac{A(t)}{t^2}\,dt\,du$$

applicable aux entiers n, supérieurs ou égaux à l'entier N. Aussi

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum A(n)\,z^n \\
&= \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i}\sum_{N}^{\infty}\int_{D_1}\int_{-\infty}^{0} z^n e^{u(n-t)e^{i\alpha'}}\,n^2\,\frac{A(t)}{t^2}\,dt\,du \\
&\quad + \frac{e^{-i\beta'}}{2\pi i}\sum_{n=N}^{\infty}\int_{D_2}\int_{-\infty}^{0} z^n e^{u(n-t)e^{-i\beta'}}\,n^2\,\frac{A(t)}{t^2}\,dt\,du \\
&\quad + \sum_{0}^{N-1} A(n)\,z^n.
\end{aligned}$$

L'identité précédente se transformera de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
F(z) = \sum_{0}^{N-1} A(n)\,z^n &+ \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i}\int_{D_1}\int_{-8}^{0}\left(\sum_{n=N}^{\infty} n^2 z^n e^{u(n-N)e^{-i\alpha'}}\right) e^{u(N-t)e^{i\alpha'}}\,\frac{A(t)}{t^2}\,dt\,du \\
&+ \frac{e^{-i\beta'}}{2\pi i}\int_{D_2}\int_{-\infty}^{0}\left(\sum_{N}^{\infty} n^2 z^n e^{u(n-N)e^{-i\beta'}}\right) e^{u(N-t)e^{-i\beta'}}\,\frac{A(t)}{t^2}\,dt\,du.
\end{aligned}$$

Les deux sommes qui figurent sous le signe d'intégration peuvent se mettre sous la forme

$$z^N\sum_{0}^{\infty}(n+N)^2 z^n e^{une^{i\alpha'}} = z^N\sum_{0}^{\infty}(n+N)^2\left(ze^{ue^{i\alpha'}}\right)^n$$

$$z^N\sum_{0}^{\infty}(n+N)^2 z^n e^{une^{-i\beta'}} = z^N\sum_{0}^{\infty}(n+N)^2\left(ze^{ue^{-i\beta'}}\right)^n,$$

c'est-à-dire respectivement

$$\varphi(z, u) = z^N\left[\frac{2Nze^{ue^{i\alpha'}}}{\left(1-ze^{ue^{i\alpha'}}\right)^2} + \frac{N^2}{1-ze^{ue^{i\alpha'}}} + \frac{ze^{ue^{i\alpha'}}\left(1+ze^{ue^{i\alpha'}}\right)}{\left(1-ze^{ue^{i\alpha'}}\right)^3}\right],$$

$$\psi(z, u) = z^N\left[\frac{2Nze^{ue^{-i\beta'}}}{\left(1-ze^{ue^{-i\beta'}}\right)^2} + \frac{N^2}{1-ze^{ue^{-i\beta'}}} + \frac{ze^{ue^{-i\beta'}}\left(1+ze^{ue^{-i\beta'}}\right)}{\left(1-ze^{ue^{-i\beta'}}\right)^3}\right].$$

Ces fonctions $\varphi(z, u)$, $\psi(z, u)$, quelle que soit la valeur négative de u, finie ou infinie, n'admettent respectivement pour une valeur donnée de u que les points

$$1 - z e^{ue^{i\alpha'}} = 0,$$
$$1 - z e^{ue^{-i\beta'}} = 0$$

comme points singuliers.

Or la fonction $F(z)$ prend la forme définitive

$$F(z) = \sum_0^{N-1} A(n) z^n + \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i} \int_{D_1} \int_{-\infty}^{0} \varphi(z, u) e^{u(N-t)e^{i\alpha'}} \frac{A(t)}{t^2} dt\, du$$
$$+ \frac{e^{-i\beta'}}{2\pi i} \int_{D_2} \int_{-\infty}^{0} \psi(z, u) e^{u(N-t)e^{-i\beta'}} \frac{A(t)}{t^2} dt\, du.$$

Le second membre donne une représentation de $F(z)$ valable dans le plan en dehors des deux ensembles de points

$$1 - z e^{ue^{i\alpha'}} = 0,$$
$$1 - z e^{ue^{-i\beta'}} = 0,$$

u variant de 0 à $-\infty$. Ce sont deux arcs de spirale logarithmique partant du point $z = 1$. L'un de ces deux arcs, comme nous le montrerons, est toujours à l'extérieur du cercle de rayon *un*.

En dehors de ces deux ensembles de points, la représentation précédente de $F(z)$ est toujours valable; il suffit de remarquer que la partie réelle de

$$(N - t) e^{i\alpha'} \qquad (t \text{ sur } D_1)$$

et de

$$(N - t) e^{-i\beta'} \qquad (t \text{ sur } D_2)$$

est toujours positive; comme u reste négatif,

$$e^{u(N-t)e^{i\alpha'}}$$

et

$$e^{u(N-t)e^{-i\beta'}}$$

restent finis pour toutes les valeurs de u et de t ici, et tendent vers zéro à la manière de $e^{uk}(k > 0)$ pour u infini. Enfin

$$\frac{A(t)}{t^2}$$

admet l'infini comme racine d'ordre au moins égal à deux. Les deux dernières intégrales doubles n'auront donc aucun point singulier en dehors des deux arcs de spirale que nous venons d'introduire et dont les équations en coordonnées polaires sont

$$\rho = e^{\omega \cot \alpha'},$$
$$\rho = e^{-\omega \cot \beta'}$$

avec

$$\omega = - u \sin \alpha' \qquad (0 > u > -\infty)$$

pour le premier arc de spirale et

$$\omega = u \sin \beta' \qquad (0 > u > -\infty)$$

pour le second.

Plaçons ces deux arcs de spirale par rapport au cercle de rayon *un*.

Voici les différents cas que l'on peut envisager ici, sous la condition $\alpha + \beta < \pi$:

1°	$\alpha > \frac{\pi}{2}$	alors	$\beta < \frac{\pi}{2}$	et	$\frac{-\pi}{2} < \alpha' < 0,$	$\frac{\pi}{2} > \beta' > 0;$
2°	$\alpha = \frac{\pi}{2}$		$\beta < \frac{\pi}{2}$		$\alpha' = 0,$	$\frac{\pi}{2} > \beta' > 0;$
3°	$\alpha < \frac{\pi}{2}$	avec	$\beta < \frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2} > \alpha' > 0,$	$\frac{\pi}{2} > \beta' > 0$
4°	$\alpha < \frac{\pi}{2}$		$\beta = \frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2} > \alpha' > 0,$	$\beta' = 0$
5°	$\alpha < \frac{\pi}{2}$		$\beta > \frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2} > \alpha' > 0,$	$\frac{-\pi}{2} < \beta' < 0.$

Dans le premier cas $\alpha' < 0$, $\beta' > 0$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$, l'arc A_1 de spirale

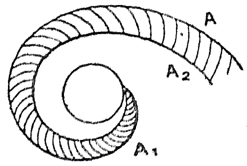
$$\left.\begin{aligned} \rho &= e^{\omega \cot \alpha'} \\ \omega &= - u \sin \alpha' \end{aligned}\right. \qquad (0 > u > -\infty)$$

est décrit dans le sens négatif à l'extérieur du cercle de rayon *un*. Le second arc A_2 de spirale

$$\begin{aligned} \rho &= e^{-\omega \cot \beta'} \\ \omega &= u \sin \beta' \end{aligned} \qquad (0 > u > -\infty)$$

est décrit dans le sens négatif à l'extérieur aussi du centre de rayon *un*. A distance finie la fonction n'admet de points singuliers que dans une aire partant de $z = 1$ et limitée par les deux arcs de spirale A_1 et A_2 (*fig.* 2).

Fig. 2.



Considérons le second cas. Le premier arc A_1 se réduit à la partie de l'axe des quantités réelles positives qui s'étend de $z = 1$ à $z = +\infty$, comme on le voit en partant de la définition initiale de cet arc

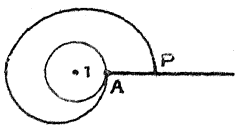
$$1 - z e^{u e^{i\alpha'}} = 0$$

avec

$$\alpha' = 0,$$

si le second arc A_2 est décrit (*fig.* 3) dans le sens négatif en dehors du cercle de rayon *un*. La droite A_1 rencontre l'arc A_2 en un

Fig. 3.

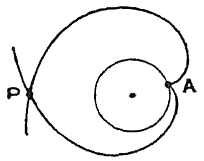


point P et la fonction $F(z)$ n'a aucun point singulier dans l'aire limitée par l'arc de spirale A_2 et la portion $AP\,(OA = 1)$ de l'axe des quantités réelles.

Dans le troisième cas, les deux arcs A_1 et A_2 se déroulent tous deux à l'extérieur du cercle de rayon *un*, mais en sens contraire.

La fonction $F(z)$ (*fig.* 4) est holomorphe dans l'aire limitée par les deux arcs de spirale A_1 et A_2 arrêtés à leur premier point de rencontre P.

Fig. 4.



Le quatrième cas admet une dégénérescence analogue à celle du deuxième cas; l'arc A_2 se réduit à la portion $(1\ldots+\infty)$ de l'axe des quantités réelles. L'arc A_1 se déroule dans le sens positif à l'extérieur du cercle de rayon *un*; en arrêtant cet arc à son premier point de rencontre avec l'axe X on détermine une aire où $F(z)$ n'a aucun point singulier.

Le cinquième cas est analogue au premier, mais ici les arcs A_1 et A_2 se déroulent tous deux dans le sens positif; limités à leur premier point de rencontre $z=1$, ils déterminent une aire où $F(z)$ est certainement holomorphe; cette aire se compose du plan moins l'aire en forme de ruban dont les bords sont A_1 et A_2, analogue à celle que nous avons figurée plus haut.

En résumé, *la fonction* $F(z)$ *n'a jamais qu'un point singulier* $z=1$ *sur son cercle de convergence quand le secteur d'holomorphisme de* $F(z)$ *a une ouverture finie* (*non nulle*) et l'on peut obtenir son prolongement analytique dans une aire comprenant le cercle de rayon *un*, cette aire étant limitée par des arcs de spirale logarithmique.

Si petit que soit l'angle (*comprenant l'axe des quantités réelles positives*) *dans lequel la fonction*

$$A(x)$$

est holomorphe à l'infini, la fonction

$$F(z)=\Sigma A(n)z^n$$

n'admet pas son cercle de convergence comme coupure, tant que cet angle n'est pas nul.

Considérons le second cas, l'ouverture du secteur d'holomorphisme étant au moins égale à 180°. Nous supposerons tout d'abord qu'elle est exactement égale à deux droits.

Nous partons du développement exponentiel

$$\frac{A(x)}{x^2} = \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i} \int \int_{-\infty}^{0} e^{u(x-t)e^{i\alpha'}} \frac{A(t)}{t^2}\, dt\, du.$$

Les deux cas d'ouverture d'angle se sépareront dans la recherche des points singuliers de la fonction $F(z)$ définie par la série de Taylor correspondante :

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n.$$

L'identité précédente qui définit $A(x)$, étant valable pour toutes les valeurs entières de x supérieures ou au moins égales à l'entier N, cette fonction $F(z)$ s'écrira :

$$F(z) = \sum_{0}^{N-1} A(n) z^n + \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i} \sum_{n=N}^{\infty} \int_{D} \int_{-\infty}^{0} n^2 z^n e^{u(n-t)e^{i\alpha'}} \frac{A(t)}{t^2}\, dt\, du$$

que nous transformons immédiatement ainsi :

$$F(z) = \sum_{0}^{N-1} A(n) z^n + z^N \frac{e^{i\alpha'}}{2\pi i} \int_{D} \int_{-\infty}^{0} \varphi(z, u) e^{u(N-t)e^{i\alpha'}} \frac{A(t)}{t^2}\, dt\, du$$

avec

$$\varphi(z, u) = \frac{2N z e^{ue^{i\alpha'}}}{(1 - z e^{ue^{i\alpha'}})^2} + \frac{N}{1 - z e^{ue^{i\alpha'}}} + \frac{z e^{ue^{i\alpha'}}(1 + z e^{ue^{i\alpha'}})}{(1 - z e^{ue^{i\alpha'}})^3}.$$

La fonction $\varphi(z, u)$, quelle que soit la valeur négative finie ou infinie de u, ne devient infinie que pour la valeur de z :

$$z = e^{-ue^{i\alpha'}}.$$

La dernière identité donne ainsi $F(z)$ par une représentation valable pour toutes les valeurs de z en dehors de l'ensemble de points

u prenant cette fois toutes ses valenrs réelles et négatives; il suffirait pour le montrer rigoureusement de reprendre la même discussion que nous avions déjà faite dans le cas précédent de représentation finale.

La fonction $F(z)$ a donc ses points singuliers sur l'arc de spirale

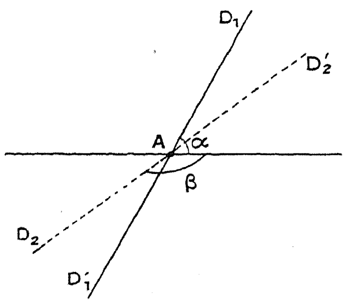
$$\rho = e^{\omega \cot \alpha'}$$

extérieur au cercle de rayon *un* et partant du point $z = 1$ de celui-ci. Cette spirale est décrite dans le sens positif si $\alpha' > 0$, dans le sens négatif si $\alpha' < 0$.

Nous pouvons étudier aisément le cas où l'ouverture du secteur d'holomorphisme de $A(x)$ dépasse 180° : *la fonction* $F(z)$ *n'admet qu'un point singulier à distance finie.*

Il ne peut se faire ici qu'une réduction des singularités précédentes d'après la méthode même que nous avons employée. Détachons du secteur $D_1 A D_2$ le secteur $\widehat{D_1 A D'_1}$ (*fig.* 5) d'ouverture égale à 180°

Fig. 5.



et faisons varier ce dernier secteur depuis sa position initale $D_1 A D'_1$ jusqu'à sa position finale $D'_2 \hat{A} D_2$ par une rotation égale à $(\alpha + \beta - \pi)$.

Les points singuliers de $F(z)$ ne pourront se trouver que parmi les points communs à toutes les spirales

$$\rho = e^{\omega \cot \alpha'},$$

α' variant de $\frac{\pi}{2} - \alpha$ à $\beta - \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pour un ensemble continu de valeurs de α'. Or, il est évident que ces spirales n'ont qu'un point commun $z = 1$ ($\omega = 0$, $\rho = 1$) à distance finie. La fonction $F(z)$ admet un seul point singulier à distance finie $z = 1$ dès que l'ouverture du secteur d'holomorphisme de $A(x)$ dépasse $180°$.

Supposons que le secteur d'holomorphisme de $A(x)$ soit formé d'un demi-plan limité par une parallèle à l'axe des quantités imaginaires, ce secteur s'étendant du côté de l'axe des quantités réelles positives. C'est un cas particulier de l'étude qui précède; il correspond à $\alpha' = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et constitue un cas de dégénérescence intéressant. Nous avons vu que la fonction $F(z)$ a ses points singuliers sur la spirale

$$\rho = e^{\omega \cot \alpha'}$$

sous la condition $\alpha' \gtrless 0$, c'est-à-dire $\alpha \gtrless \frac{\pi}{2}$.

Ici $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\alpha' = 0$); la spirale précédente se réduit à la partie de l'axe des quantités réelles positives qui s'étend de $z = 1$ à $+\infty$.

A ce sujet, je rappellerai une remarque faite dans un Mémoire sur les points singuliers des séries de Taylor (*Journal de Mathématiques*, 1902); elle consiste dans le fait suivant :

Lorsqu'on cherche les points singuliers d'une fonction donnée par une série de Taylor (à rayon de convergence au moins égal à un) *en tirant la connaissance de ses points singuliers de la fonction*

$$A(x),$$

il arrive que, pour des circonstances nombreuses et intéressantes de cette forme, la fonction considérée a tous ses points singuliers à distance finie sur l'axe des quantités réelles. (Page 446.)

L'explication que j'en donnais se rattache à l'énoncé même des théorèmes exposés dans ce Mémoire; une autre explication est possible dans le Mémoire présent après l'étude du dernier cas de dégénérescence que nous venons de faire; on peut la donner de la manière suivante :

Étant donnée une fonction analytique

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n,$$

si la fonction

$$A(x)$$

est holomorphe à l'infini dans un secteur de 180° *formé du demi-plan à gauche de l'axe des quantités imaginaires, la fonction* $F(z)$ *a tous ses points singuliers à distance finie sur l'axe des quantités réelles positives étendu de* $z = 1$ *jusqu'à l'infini.*

En faisant usage du théorème de M. Hadamard, les résultats qui précèdent sont susceptibles de montrer jusqu'à quel point *l'ensemble des points singuliers d'une fonction analytique* $F(z)$ *donnée par une série de Taylor*

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n$$

est *défini d'une manière imprécise par la* forme *du coefficient*

$$A(n).$$

« *Étant donnée une fonction analytique*

$$F(z) = \Sigma a(n) z^n,$$

on ne change pas son ensemble de points singuliers, à l'infini près, en multipliant le coefficient

$$a(n)$$

par une quantité de la forme

$$A(n)$$

où $A(x)$ *est holomorphe à l'infini dans un secteur d'holomorphisme d'ouverture supérieure à* 180°, *la série*

$$\Sigma A(n) z^n$$

n'étant d'ailleurs pas entière. »

La fonction

$$F_1(z) = \Sigma a(n) A(n) z^n$$

a pour points singuliers ceux qu'on obtient en multipliant chaque point singulier de

$$F(z) = \Sigma a(n) z^n$$

par l'unique point singulier $z = 1$ ($z = \infty$ étant réservé) de

$$f(z) = \Sigma A(n) z^n.$$

D'après une des propositions précédentes, la fonction $f(z)$ possède, à distance finie, un seul point singulier au plus, $z = 1$; et d'ailleurs ici elle le possède puisque cette fonction n'est pas entière.

Il resterait à justifier le point suivant :

Une fonction

$$A(x)$$

peut-elle être holomorphe à l'infini dans un secteur d'ouverture supérieure à 180° et la fonction

$$f(z) = \Sigma A(n) z^n$$

n'être pas entière?

La réponse est simple. Si $f(z)$ est entière pour une forme de $A(x)$, posons

$$B(x) = A(x) + \frac{1}{x};$$

la fonction $B(x)$ est holomorphe à l'infini dans le même angle que $A(x)$, et

$$f(z) = \Sigma B(n) z^n$$

admet $z = 1$ comme point singulier.

La proposition qui précède peut se compléter par la suivante :

Étant donnée une fonction analytique

$$F(z) = \Sigma a(n) z^n,$$

on ne change pas son étoile (à l'infini près) en multipliant le coefficient

$$a(n)$$

par la quantité

$$A(n),$$

où

$$A(x)$$

est holomorphe à l'infini dans un demi-plan limité à gauche par une *parallèle à l'axe des quantités imaginaires, la série*

$$\Sigma A(n) z^n$$

n'étant pas entière.

La démonstration qu'on aurait à en donner est tout à fait analogue à la précédente; il conviendrait d'appliquer le théorème de M. Hadamard combiné avec le cas de dégénérescence de l'étude qui précède.

Il est aisé, avec les résultats auxquels nous sommes arrivés dans ce Mémoire, de généraliser les deux théorèmes principaux d'un travail antérieur (*Journal de Mathématiques*, 1902).

Le premier de ces deux théorèmes (p. 435) s'étendra de la manière qui suit :

Soit F(z) *une fonction donnée par une série de Taylor*

$$F(z) = \Sigma a(n) z^n,$$

valable à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à 1 *et soient*

$$\begin{gathered} A_1(x), \\ \ldots\ldots, \\ A_p(x) \end{gathered}$$

des fonctions holomorphes à l'infini dans des secteurs comprenant l'axe des quantités réelles et d'ouverture supérieure à 180°.

Si la fonction de $p+1$ *variables*

$$f(x, y, u, \ldots, w)$$

est holomorphe au voisinage de l'origine ($x=0$, $y=0$, ..., $w=0$), *la fonction*

$$\Phi(z) = \sum f\left[a(n), \frac{A_1(n)}{k^n}, \ldots, \frac{A_p(n)}{k^n}\right] z^n \qquad (k>1)$$

n'a pas d'autres points singuliers (sauf $z=1, k, k^2, \ldots$ *et* ∞*) que les points obtenus en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les points singuliers de* F(z) *et en prenant les homothétiques des points obtenus dans le rapport de* 1 *à* $k, k^2, \ldots$.

La seconde proposition (p. 431) se transforme ainsi :

Étant donné un nombre quelconque de fonctions

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \Sigma a_1(n) z^n, \\ F_2(z) &= \Sigma a_2(n) z^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p(z) &= \Sigma a_p(n) z^n, \end{aligned}$$

valables à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à l'unité, et soient

$$\begin{gathered} A_1(x), \\ \ldots\ldots, \\ A_q(x), \end{gathered}$$

q fonctions holomorphes à l'infini dans des secteurs comprenant l'axe des quantités réelles et d'ouverture supérieure à 180°.

Si la fonction de $p+q$ variables

$$f(x, y, \ldots, w)$$

est holomorphe au voisinage de l'origine ($x=0, y=0, \ldots, w=0$), *la fonction*

$$\Phi(z) = \sum f\left[a_1(n), \ldots, a_p(n), \frac{A_1(n)}{k^n}, \frac{A_2(n)}{k^n}, \ldots, \frac{A_q(n)}{k^n}\right] z^n \qquad (k>1)$$

n'a pas d'autres points singuliers (sauf $z=1, k, k^2, \ldots$ et ∞) que les points obtenus en multipliant entre eux de toutes les manières possibles les points singuliers des p fonctions

$$F_1(z), \quad \ldots, \quad F_p(z),$$

et en prenant les homothétiques successives dans le rapport de 1 à k des points ainsi formés

Remarque. — Si les fonctions

$$F_1(z), \quad \ldots, \quad F_p(z)$$

ont tous leurs points singuliers réels, la série de Taylor

$$\Phi(z) = \sum f\left[a_1(n),\ a_p(n),\ \frac{A_1(n)}{k^n},\ \ldots,\ \frac{A_q(n)}{k^n}\right] z^n \qquad (k > 1)$$

a tous ses points singuliers (sauf $z = \infty$) réels aussi.

Étude d'une singularité essentielle.

Les résultats que nous avons exposés ici ont fixé les rapports qu'il y avait entre les circonstances d'un point singulier essentiel et les circonstances d'un ensemble de points. Nous sommes partis du point singulier essentiel à l'infini de

$$A(x)$$

pour aboutir à l'ensemble E des points singuliers de

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n.$$

Par la méthode que nous avons employée, les qualités d'un point singulier essentiel se trouvent développées sur un ensemble de points E. C'est là certainement une remarque qu'il convient de faire en vue de la théorie générale des fonctions, l'étude d'une singularité essentielle étant toujours difficile et les théorèmes généraux qui s'y rapportent assez rares.

La méthode de représentation exponentielle et ses applications aux séries de Taylor constituent un procédé d'étude intrinsèque du point singulier essentiel d'une fonction.

Nous venons de rappeler que les propriétés du point essentiel de la fonction

$$A(x)$$

se trouvent appliquées sur un ensemble de points E *d'une fonction* $F(z)$ *donnée par une série de Taylor. Or des méthodes différentes de la nôtre fixent des propriétés de l'ensemble* E, *et, par suite, les propriétés correspondantes du point singulier essentiel de*

$$A(x),$$

d'après la donnée de l'ensemble dénombrable

$$A(n_1),\quad A(n_2),\quad \ldots,\quad A(n),\quad \ldots \quad (n_1 \geqq n_0)$$

des valeurs de $A(x)$ *pour les grandes valeurs entières et positives de la variable.*

La proposition suivante est ainsi le point de départ de nombreuses propositions sur l'existence d'une fonction autour d'un de ses points singuliers essentiels :

Étant donnee une fonction

$$A(x)$$

admettant l'infini comme point singulier essentiel, mais restant finie pour les grandes valeurs entières positives de x :

1° *Si la fonction*

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n$$

admet un point singulier à distance finie en dehors de $z = 1$, *la fonction* $A(x)$ *admet, autour de l'axe* X *des quantités réelles positives, un secteur d'holomorphisme d'ouverture au plus égale à* 180° ;

2° *Si* $F(z)$ *possède parmi ses points singuliers deux points non situés sur une même spirale partant du point* $z = 1$, *la fonction* $A(x)$ *possède autour de* X *un secteur d'holomorphisme d'ouverture inférieure à* 180°;

3° *Si* $F(z)$ *possède, sur le cercle de rayon* un, *des points singuliers différents de* $z = 1$, *la fonction* $A(x)$ *n'admet autour de* X *aucun secteur d'holomorphisme d'ouverture si petite soit-elle.*

Remarque. — Il convient de retenir que les spirales, dont il est ici question, satisfont aux conditions $\rho = e^{k\omega}$, $\rho > 1$, et que ces conditions sont suffisantes pour les définir.

De la première partie de ce théorème général on peut déduire avec facilité le corollaire suivant :

Lorsqu'une fonction

$$A(x),$$

présentant l'infini comme point singulier essentiel, prend, pour les grandes valeurs entières positives de la variable, l'ensemble dénombrable de valeurs représentées par

$$A(n) = e^{-\alpha n} a(n),$$

$a(n)$ *restant finie et non nulle* (α *étant un nombre à partie reelle posi-*

tive), cette fonction admet autour de l'axe X *un secteur d'holomorphisme d'ouverture au plus égale à* 180°.

Il suffit de remarquer que la fonction

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n$$

admet certainement le cercle de rayon $e^\alpha > 1$ comme cercle de convergence, et, par suite, possède sur ce cercle au moins un point singulier.

La seconde partie du théorème général, dont nous venons de faire usage, admet ce corollaire :

Quand une fonction

$$A(x),$$

qui admet l'infini comme point singulier essentiel, prend, pour les grandes valeurs entières et positives de x, *l'ensemble de valeurs*

$$A(n) = e^{-(r+is)n} A_1(n) + e^{-(u+iv)n} A_2(n) + e^{-\alpha n} a(n),$$

où :

1° $\alpha > u > r > 0$, r, u, α *étant des nombres réels ;*

2° $a(n)$, $A_1(n)$, $A_2(n)$ *restent différents de zéro à l'infini;*

3° $a(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$ *admettent l'infini comme pôle ou point régulier. Si*

$$\frac{s + 2k\pi}{r} \gtrless \frac{v + 2k_1\pi}{u},$$

la fonction $A(x)$ *admet autour de l'axe* X *un secteur d'holomorphisme d'ouverture inférieure à* 180°.

Nous construisons la fonction

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n.$$

Elle s'écrit

$$F(z) = \Sigma e^{-(r+is)n} A_1(n) z^n + \Sigma e^{-(u+iv)n} A_2(n) z^n + \Sigma e^{-\alpha n} a(n) z^n$$

Les deux séries

$$f_1(z) = \Sigma e^{-(r+is)n} A_1(n) z^n,$$
$$f_1(z) = \Sigma e^{-(u+iv)n} A_2(n) z^n$$

ne peuvent respectivement admettre, d'après le théorème fondamental de M. Hadamard, que les points singuliers

$$e^{r+is} \quad \text{et} \quad e^{u+iv};$$

elles les admettent d'ailleurs, puisque $A_1(n)$ et $A_2(n)$ sont différents de zéro et que, par suite, pour $f_1(z)$ et $f_2(z)$ les cercles de rayon

$$e^{r} \quad \text{et} \quad e^{u}$$

sont certainement cercles de convergence.

Les deux points

$$e^{r+is} \quad \text{et} \quad e^{u+iv},$$

à cause des conditions

$$u > r > 0, \qquad \frac{s+2k\pi}{r} \gtrless \frac{v+2k_1\pi}{u},$$

sont situés au delà du cercle de rayon *un* et n'appartiennent jamais à une même spirale issue du point $z = 1$.

Quant à la fonction

$$f_3(z) = \Sigma e^{-\alpha n} a(n).$$

comme elle admet pour cercle de convergence un cercle de rayon au moins égal à

$$e^{\alpha},$$

et, par suite, supérieur aux modules de

$$e^{r+is} \quad \text{et} \quad e^{u+iv}$$

les points singuliers de $f_3(z)$ ne peuvent se réduire avec ceux de $f_1(z)$ et $f_2(z)$.

La fonction $F(z)$ admet certainement comme points singuliers

$$e^{r+is} \quad \text{et} \quad e^{u+iv};$$

ces deux points n'étant pas sur une même spirale issue de $z = 1$, la deuxième partie du théorème général auquel nous faisons appel montre que la fonction

$$A(x)$$

ne peut admettre autour de X qu'un secteur d'holomorphisme d'ouverture inférieure à $180°$.

La troisième partie du théorème général admet un corollaire dont l'énoncé est bien simple :

Lorsqu'une fonction

$$A(x)$$

admet l'infini comme point singulier essentiel, $A(n)$ *restant fini ou n'ayant, pour n infini, réel et positif, qu'un pôle ou zéro d'ordre fini de multiplicité, si*

$$\frac{A(n+1)}{A(n)}$$

admet une limite différente de un *lorsque n augmente indéfiniment, la fonction*

$$A(x)$$

n'admet autour de l'axe X *aucun secteur d'holomorphisme d'ouverture finie, si petite soit-elle.*

Il nous suffira de considérer la fonction

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n.$$

Elle admet le cercle de rayon *un* comme cercle de convergence; or, d'après une proposition de M. Fabry, le rapport

$$\frac{A(n+1)}{A(n)}$$

tendant vers une limite x_0, le point x_0 est singulier. La limite x_0 étant différente de *un*, la fonction $F(z)$ possède, sur le cercle de rayon *un*, ce point x_0 différent de $x = 1$. D'après la troisième partie du théorème général qui précède, la fonction $A(x)$ n'admet autour de X aucun secteur d'holomorphisme d'ouverture finie.

Le dernier corollaire auquel nous venons d'arriver rattache l'étude intrinsèque du point singulier essentiel au théorème de d'Alembert sur les séries, et ramène des questions de la théorie générale des fonctions à des propositions d'Algèbre élémentaire.

Ainsi toute fonction qui prend, pour les grandes valeurs entières positives de la variable, la suite de valeurs

$$\frac{(-1)^n}{n}$$

n'admet à l'infini, autour de X, aucun secteur d'holomorphisme d'ouverture finie si petite soit-elle.

Nous pouvons élargir cet exemple :

Lorsqu'une fonction

$$A(x)$$

prend, pour les grandes valeurs positives entières, la suite des valeurs

$$(-1)^n f(n),$$

où $f(n)$ est une fraction rationnelle de n, la fonction

$$A(x)$$

n'admet autour de l'axe X *aucun secteur d'holomorphisme d'ouverture finie.*

Cette dernière proposition n'est elle-même qu'un cas particulier d'un théorème plus général :

Quand une fonction

$$A(x)$$

prend pour les grandes valeurs entières positives de la variable la suite de valeurs

$$A(n) = n^k x_0^n f(n) \qquad (k \text{ entier}),$$

x_0 étant une imaginaire de module un, *et $f(n)$ tendant vers une limite pour n infini, cette fonction*

$$A(x)$$

n'admet autour de l'axe N *aucun secteur d'holomorphisme d'ouverture finie.*

Les quelques propositions qui précèdent permettent de préciser un peu la nature d'une fonction au voisinage d'un point singulier essentiel quand la fonction considérée est connue par un ensemble dénombrable de valeurs qu'elle prend le long d'un rayon qui aboutit au point singulier essentiel.

Jusqu'ici ce rayon était l'axe X des quantités réelles positives. Une transformation élémentaire permettrait de faire une pareille étude quand la fonction est donnée par un ensemble dénombrable de valeurs sur un *rayon quelconque*.

Il y a un point d'importance capitale à signaler pour résumer la dernière partie de cette étude relative aux singularités essentielles.

Nous avons la possibilité de traduire, au moyen des trois propositions fondamentales qui précèdent (p. 442), un théorème relatif aux points singuliers des séries de Taylor, en un théorème relatif à l'existence intrinsèque d'un point singulier essentiel.

Il convient de plus de faire la remarque suivante : dans certains problèmes d'interpolation générale dont M. Borel a donné la solution (Mémoire *Sur les séries divergentes*), il s'agit de trouver une fonction prenant des valeurs données pour un ensemble donné et dénombrable de valeurs de la variable, qu'on peut supposer se réduire à l'ensemble naturel $1, 2, \ldots, n, \ldots$ La fonction ainsi définie est indéterminée en ce sens que le problème d'interpolation générale qui précède comporte une infinité de solutions. Cependant, toutes les fonctions prenant les mêmes valeurs pour la suite des nombres entiers $1, 2, \ldots, n, \ldots$ peuvent-elles se rattacher entre elles par une propriété commune, par exemple d'après leur existence à l'infini ?

Les théorèmes qui précèdent répondent par l'affirmative et donnent une propriété qui leur est commune, d'après les valeurs

$$A(n)$$

que ces fonctions prennent pour les nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$.

Enfin, pour résumer ce travail, remarquons à sa base la décomposition d'une singularité essentielle complexe, en une somme (ici ensemble continu) de singularités essentielles élémentaires (exponentielles); mais nous n'avons effectué qu'une décomposition *élémentaire* aréolaire (*par fonctions admettant un secteur d'holomorphisme non nul autour de* X).

Il resterait à faire, *sur un rayon* X, *dans le cas d'un secteur d'holomorphisme nul, la décomposition de la singularité essentielle correspondante en une somme de singularités élémentaires* (*exponentielles à secteur d'holomorphisme nul ou non nul autour de* X), et les résultats les plus généraux de la théorie des points singuliers des séries de Taylor se trouveraient en rapport intime avec l'existence profonde d'une fonction autour d'un point singulier essentiel.

Nous n'avons pas encore assez d'éléments à l'heure actuelle pour entreprendre une telle recherche.