

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. GUICHARD

Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 20 (1903), p. 181-288

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__181_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

SYSTÈMES ORTHOGONAUX

ET LES

SYSTÈMES CYCLIQUES

(SUITE),

PAR M. C. GUICHARD,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND.

CHAPITRE VI.

ESPACE A CINQ DIMENSIONS.

SOMMAIRE.

39. Réseaux O. — 40. Réseaux I, p I. — 41. Congruences O, p O. — 42. Loi d'orthogonalité des éléments p O; des éléments p I. — 43. Réseaux C, p C. — 44. Orthogonalité des congruences et des réseaux p C. — 45. Tableau des propriétés de ces éléments.

39. A chaque réseau O de l'espace à cinq dimensions, on peut faire correspondre (première Partie, Chap. II) un déterminant orthogonal. Soit

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \end{vmatrix}$$

ce déterminant orthogonal. On aura

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = a\tilde{z}, & \frac{\partial y}{\partial u} = e\tilde{\xi}, & \frac{\partial z}{\partial u} = g\tilde{\xi}, & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} = -ax - ey - gz - m\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\tilde{\xi}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = b\eta, & \frac{\partial y}{\partial v} = f\eta, & \frac{\partial z}{\partial v} = k\eta, & \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v} = n\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} = -bx - fy - kz - n\tilde{\xi}, \end{cases}$$

avec les conditions

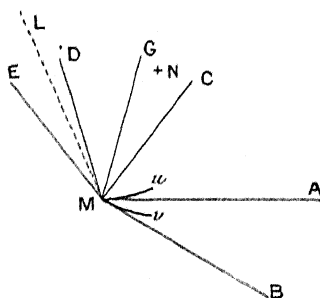
$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} = bm, & \frac{\partial e}{\partial v} = fm, & \frac{\partial g}{\partial v} = km, \\ \frac{\partial b}{\partial u} = an, & \frac{\partial f}{\partial u} = en, & \frac{\partial k}{\partial u} = gn, \end{cases} \quad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab + ef + gk = 0.$$

Soit alors $M(X_1, \dots, X_5)$ (*fig. 11*) le point qui décrit le réseau. On aura

$$(3) \quad \frac{\partial X}{\partial u} = h\xi, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = l\eta,$$

$$(4) \quad \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = hn.$$

Fig. 11.



Menons par le point M les droites $MA(\xi_1, \dots, \xi_5)$, $MB(\eta_1, \dots, \eta_5)$, $MC(x_1, \dots, x_5)$, $MD(\gamma_1, \dots, \gamma_5)$, $ME(z_1, \dots, z_5)$; MA et MB sont les tangentes du réseau M ; les droites MC, MD, ME sont des normales au réseau.

Considérons d'une manière générale les droites MG dont les paramètres directeurs sont

$$Y_i = \alpha x_i + \beta \gamma_i + \gamma z_i,$$

α, β, γ étant des constantes. On voit facilement que MG décrit une congruence, les foyers de cette congruence ont pour coordonnées

$$X_i - \frac{h}{a\alpha + e\beta + g\gamma} Y_i \quad \text{et} \quad X_i - \frac{l}{b\alpha + f\beta + k\gamma} Y_i.$$

Si $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, la congruence MG est I ; on obtient ainsi les ∞^1 congruences I conjuguées au réseau M .

Si $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 0$, la congruence MG est ≥ 1 ; on obtient ainsi les ∞^2 congruences ≥ 1 conjuguées au réseau M.

40. Il n'existe pas de réseaux nuls dans l'espace à cinq dimensions, mais un réseau de l'espace à cinq peut être applicable sur un espace à une dimension; de tels réseaux seront appelés *réseaux* I; d'une manière générale un réseau p I est un réseau applicable sur un réseau à p dimensions.

Il est facile de former les réseaux I; menons une normale isotrope au réseau M, par exemple la droite ML qui a pour paramètres directeurs $y_k + iz_k$; menons ensuite une normale ordinaire perpendiculaire à ML, par exemple la droite MC; je dis que le plan MCL enveloppe un réseau I. Les coordonnées (Z_1, \dots, Z_5) d'un point N de ce plan sont de la forme

$$Z = X + \rho(y + iz) + rx,$$

d'où, en différentiant

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u} &= (y + iz) \frac{\partial \rho}{\partial u} + x \frac{\partial r}{\partial u} + \xi[h + (e + ig)\rho + ar], \\ \frac{\partial Z}{\partial v} &= (y + iz) \frac{\partial \rho}{\partial v} + x \frac{\partial r}{\partial v} + \eta[l + (f + ik)\rho + br]. \end{aligned}$$

Si donc on détermine r et ρ par les équations

$$(5) \quad \begin{cases} h + (e + ig)\rho + ar = 0, \\ l + (f + ik)\rho + br = 0, \end{cases}$$

on aura

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial u} = (y + iz) \frac{\partial \rho}{\partial u} + x \frac{\partial r}{\partial u}, \\ \frac{\partial Z}{\partial v} = (y + iz) \frac{\partial \rho}{\partial v} + x \frac{\partial r}{\partial v}, \end{cases}$$

Les équations (5) donnent, en différentiant et en tenant compte de (2) et (4),

$$(7) \quad \begin{cases} (e + ig) \frac{\partial \rho}{\partial v} + a \frac{\partial r}{\partial v} = 0, \\ (f + ik) \frac{\partial \rho}{\partial u} + b \frac{\partial r}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

En différentiant les équations (6) et en tenant compte de (7) on aura

$$(8) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = (y + iz) \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + x \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}.$$

Les équations (6) et (8) montrent que le point N décrit un réseau, et que l'équation du réseau admet les solutions r et ρ . Les équations (6) donnent

$$\sum dZ^2 = dr^2.$$

Le réseau N est applicable sur le réseau de l'espace à une dimension qui a pour coordonnées r .

Les formules (6) et (7) montrent que les tangentes du réseau N ont leurs paramètres directeurs proportionnels aux quantités

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda = b(y + iz) - (f + ik)x, \\ \mu = a(y + iz) - (e + ig)x, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = n\mu + \xi[b(e + ig) - a(f + ik)], \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} = m\lambda + \eta[a(f + ik) - b(e + ig)]. \end{cases}$$

On voit que l'on a

$$\begin{aligned} \sum (y + iz)\lambda &= 0, & \sum (y + iz)\mu &= 0, \\ \sum (y + iz)\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= 0, & \sum (y + iz)\frac{\partial \mu}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

par conséquent la congruence (ML) est orthogonale au réseau N.

Tout réseau I peut être obtenu par la méthode précédente.

En effet si N est un réseau I, il y aura (26) une congruence harmonique (ML) qui sera I; les autres seront 2 I; soit MC l'une quelconque de ces dernières; le point d'intersection (M) de ces deux congruences décrit un réseau (9) qui est conjugué à (ML) et par conséquent O.

On voit que tout réseau I est orthogonal à la congruence I qui lui est harmonique et inversement; donc :

Toute congruence I est orthogonale à un réseau I et inversement.

On démontre, comme au n° 33, que le plan MDE enveloppe un réseau applicable sur l'espace à deux dimensions; c'est donc un réseau 2 I. On vérifie facilement que ce réseau est orthogonal à la congruence MC : comme on peut obtenir ainsi tous les réseaux 2 I (18) et toutes les congruences 2 I, on a le résultat :

Toute congruence 2 I est orthogonale à un réseau 2 I et inversement.

41. Si une congruence de l'espace à cinq dimensions est applicable sur une autre congruence, cette dernière appartient à un espace qui a trois dimensions au moins. Nous appellerons *congruences O* des congruences qui sont applicables sur une congruence de l'espace à trois dimensions; d'une manière générale, une *congruence p O* est une congruence applicable sur une congruence de l'espace à $p + 2$ dimensions.

Toute congruence O est orthogonale à un réseau O et inversement.

En effet, soit (G) une congruence O, parmi les réseaux conjugués il y a un réseau (M) qui est I (n° 27); la congruence (μ) orthogonale à M sera I (n° 40); parmi les réseaux conjugués à (μ) il y en a un (G) qui est orthogonal à (G); or, tous les réseaux conjugués à (μ) sont O; donc le réseau (G) orthogonal à (G) est O. On démontre de même que la congruence orthogonale à un réseau O est O.

Ce théorème permet de trouver les congruences O. Soient (Z_1, Z_2, \dots, Z_5) les paramètres directeurs d'une congruence (G) normale au réseau O défini n° 39. On devra avoir

$$(11) \quad \sum Z\xi = 0, \quad \sum Z\eta = 0,$$

$$(12) \quad \sum Z \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \quad \sum Z \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0.$$

Les équations (11) permettent de poser

$$Z = px + qy + tz,$$

Les équations (12) donneront

$$(13) \quad \begin{cases} ap + eq + gr = 0, \\ bp + fq + kr = 0; \end{cases}$$

ce qui détermine p, q, r et par suite les quantités z , à un facteur près. On aura ensuite

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial u} = x \frac{\partial p}{\partial u} + y \frac{\partial q}{\partial u} + z \frac{\partial r}{\partial u}, \\ \frac{\partial Z}{\partial v} = x \frac{\partial p}{\partial v} + y \frac{\partial q}{\partial v} + z \frac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

et, par conséquent, on aura

$$\begin{aligned} \sum Z^2 &= p^2 + q^2 + r^2, \\ \sum dZ^2 &= dp^2 + dq^2 + dr^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que la congruence $G(Z_1, \dots, Z_s)$ est applicable sur la congruence H de l'espace à trois dimensions, la droite H ayant pour paramètres directeurs p, q, r . Cette congruence H est K ; on forme ainsi toutes les congruences K de l'espace à trois dimensions.

42. *Toute congruence orthogonale à un réseau pO est pO et inversement.*

Toute congruence orthogonale à un réseau pI est pI et inversement.

Ce théorème est établi si $p = 1$; on démontre qu'il est général en faisant un raisonnement analogue à celui qui a été fait nos 28, 29 et 35.

43. Un réseau (x_1, \dots, x_n) de l'espace à n dimensions est nul au second degré lorsque l'on a non seulement

$$\sum dx^2 = 0,$$

mais encore

$$\sum (d^2 x)^2 = 0.$$

Si $\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n$ sont les paramètres normaux des tangentes au réseau, on aura

$$(15) \quad \begin{cases} \sum \xi^2 = 0, & \sum \xi \eta = 0, & \sum \eta^2 = 0, \\ \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 = 0, & \sum \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \right)^2 = 0; \end{cases}$$

de tels réseaux n'existent qu'à partir de l'espace à dix dimensions.

Toute congruence harmonique à un réseau nul au second degré est une congruence nulle.

En effet, les paramètres directeurs (X_1, \dots, X_n) d'une congruence harmonique sont donnés (6) par les formules

$$(16) \quad X = q\xi - p\eta;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= q \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \eta, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{\partial q}{\partial v} \xi - p \frac{\partial \eta}{\partial v}. \end{aligned}$$

En tenant compte des équations (15) et de celles qui s'en déduisent par dérivation, on trouve

$$\sum X^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = 0,$$

ce qui montre bien que la congruence (X_1, \dots, X_n) est nulle.

Après avoir défini un réseau nul au second degré, on en déduit, comme au n° 20, la définition des réseaux applicables au second degré sur un autre.

Si un réseau de l'espace à cinq dimensions est applicable au second degré sur un autre réseau, ce dernier appartient à un espace qui a au moins cinq dimensions. Nous appellerons *réseau C* un réseau applicable au second degré sur un réseau de l'espace à cinq dimensions; d'une manière générale un *réseau pC* est un réseau applicable au second degré sur un réseau de l'espace à $p + 4$ dimensions.

Soit $M(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_5)$ un réseau C, il sera applicable au second degré sur un réseau $N(z_1, \dots, z_5)$; soit θ une solution de l'équation des réseaux, posons

$$\begin{aligned} Y_i &= \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \gamma_i}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \gamma_i}{\partial v}, \\ Z_i &= \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial z_i}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial z_i}{\partial v}. \end{aligned}$$

Les congruences $G(Y_1, \dots, Y_5)$ et $H(Z_1, \dots, Z_5)$ sont respectivement harmoniques aux réseaux (M) et (N) ; ces congruences sont applicables l'une sur l'autre. Cela posé :

Si θ est une fonction linéaire isotrope de z_1, \dots, z_5 , on peut réduire de deux unités les fonctions Z , la congruence (G) est O .

Si θ est une fonction linéaire non isotrope de z_1, \dots, z_5 , on peut réduire de une unité les fonctions Z , la congruence G est $2O$.

Si θ est quelconque, la congruence G est $3O$.

Donc :

Parmi les congruences harmoniques à un réseau C , il y a :

∞^3 congruences O ;

∞^4 congruences $2O$;

Les autres sont $3O$.

44. *Toute congruence orthogonale à un réseau C est C , et inversement.*

En effet, soit (M) un réseau C ; il y a (43) une congruence O harmonique à (M) , soit (G) cette congruence. Le réseau (g) orthogonal à (G) est O ; il y aura une congruence (p) harmonique à (g) et orthogonale au réseau (M) ; le réseau (g) étant O , la congruence (p) est C .

En répétant un raisonnement analogue à celui des n^{os} 28, 29, 35, on peut énoncer le résultat général suivant :

Toute congruence orthogonale à un réseau pC est pC , et inversement.

45. Nous allons donner un Tableau indiquant les propriétés des éléments introduits; la loi d'orthogonalité des éléments et les notations choisies permettent d'énoncer des résultats qui s'appliquent à la fois aux réseaux et aux congruences :

Systèmes I.			
Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
Tous sont.....	O	1.....	I
		Les autres.....	$2I$
Systèmes 2I.			
Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
1 est.....	O	2 sont.....	I
Les autres.....	$2O$	∞^1	$2I$
		Les autres.....	$3I$

Systèmes 3I.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
2 sont	0	∞^1	2I
∞^1	20	∞^2	3I
Les autres	30	Les autres	4I

Systèmes p, I.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
∞^{p-3}	$p-2, 0$	∞^{p-2}	$p-1, I$
∞^{p-2}	$p-1, 0$	∞^{p-1}	p, I
Les autres	$p, 0$	Les autres	$p+1, I$

Systèmes 0.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
∞^1	I	Tous sont	C
∞^2	2I		
Les autres	3I		

Systèmes 20.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
∞^2	2I	I	C
∞^3	3I	Les autres	2C
Les autres	4I		

Systèmes 30.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
∞^3	3I	2 sont	C
∞^4	4I	∞^1	2C
Les autres	5I	Les autres	3C

Systèmes p, 0.

Systèmes conjugués.		Systèmes harmoniques.	
∞^p	p, I	∞^{p-3}	$p-2, C$
∞^{p+1}	$p+1, I$	∞^{p-2}	$p-1, C$
Les autres	$p+2, I$	Les autres	p, C

Systèmes p, C.

Systèmes harmoniques.	
∞^{p+2}	$p, 0$
∞^{p+3}	$p+1, 0$
Les autres	$p+2, 0$

CHAPITRE VII.

CONGRUENCES DE CERCLES ET DE SPHÈRES.

SOMMAIRE.

46. Représentation des cercles et des sphères de l'espace ordinaire dans un espace à cinq dimensions. — 47. Congruences de sphères. — 48. Congruences de cercles. — 49. Propriétés focales. — 50. Systèmes de cercles et de sphères orthogonaux. — 51. Systèmes harmoniques. — 52. Systèmes conjugués. — 53. Notations de ces systèmes. — 54. Systèmes I; p , I. — 55. Systèmes O; p , O. — 56. Systèmes C; p , C. — 57. Remarque sur l'inversion.

46. Considérons dans l'espace ordinaire une sphère (S), de rayon R et dont le centre a pour coordonnées x_1, x_2, x_3 . Nous appellerons *coordonnées de cette sphère* (DARBOUX, *Leçons*, 1^{re} Partie, Chap. VI) les cinq nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ qui ont les valeurs suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_1 = hx_1, & \alpha_2 = hx_2, & \alpha_3 = hx_3, & \alpha_4 = \frac{ih}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 + 1), \\ & & & \alpha_5 = \frac{h}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 - 1), \end{cases}$$

où h est un facteur de proportionnalité. Des équations (1), on déduit

$$(2) \quad \begin{cases} h = -(\alpha_5 + i\alpha_4), & x_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_5 + i\alpha_4}, & x_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_5 + i\alpha_4}, & x_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_5 + i\alpha_4}, \\ & & & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = -\frac{\alpha_5 - i\alpha_4}{\alpha_5 + i\alpha_4}. \end{cases}$$

Ces équations (2) permettent d'avoir le centre et le rayon de la sphère quand les cinq coordonnées α sont données.

Si X_1, X_2, X_3 sont des coordonnées courantes, l'équation de la sphère (S) peut s'écrire

$$(3) \quad 2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 + 2\alpha_3 X_3 + i\alpha_4(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1) + \alpha_5(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1) = 0.$$

Si $\alpha_5 + i\alpha_4$ est nul, la sphère se réduit à un plan.

Cela posé, considérons dans l'espace à cinq dimensions une droite (D) ayant pour paramètres directeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$; à cette

droite D les formules (2) ou (3) font correspondre une sphère (S); inversement, si la sphère S est donnée, les formules (1) définissent la direction d'une droite D dans l'espace à cinq dimensions. On peut donc dire :

A chaque droite de l'espace à cinq dimensions on peut faire correspondre une sphère; à deux droites parallèles correspond la même sphère; inversement, à chaque sphère, on fait correspondre une direction de droite.

On démontre facilement que l'angle de deux sphères est égal (DARBOUX, *Leçons*, I^{re} Partie, Chap. VI) à l'angle des droites qui leur correspondent.

Pour que la sphère se réduise à un point, il faut et il suffit que

$$(4) \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = 0.$$

Soient maintenant deux sphères quelconques $S(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$ et $T(\beta_1, \dots, \beta_5)$; les coordonnées d'une sphère passant par leur intersection sont

$$(5) \quad \alpha_1 + k\beta_1, \quad \alpha_2 + k\beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_5 + k\beta_5.$$

Ces deux sphères (S) et (T) se coupent suivant un cercle C. A un système de deux droites D et Δ qui ont respectivement pour paramètres directeurs $(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$, $(\beta_1, \dots, \beta_5)$ on fait correspondre un cercle C, intersection des sphères (S) et (T); inversement, si le cercle (C) est donné, on peut lui faire correspondre une infinité de directions, dont les paramètres ont la forme (5); cet ensemble forme ce que nous appelons *un réseau de directions*. Ainsi, à un réseau de directions correspond un cercle, et inversement.

47. Nous appellerons *congruence de sphères* l'ensemble des sphères qui correspondent aux droites d'une congruence dans l'espace à cinq dimensions. Pour qu'une sphère (S) décrive une congruence, il faut et il suffit que ses cinq coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ vérifient une même équation de Laplace. Il en résulte que

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2, \quad 1$$

sont aussi solutions d'une même équation de Laplace. Le centre M de

la sphère décrit un réseau, et l'équation du réseau admet la solution

$$\theta = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2.$$

On voit, en somme, que les congruences de sphères telles qu'elles sont définies ici, sont les congruences les plus générales de sphères supposées rapportées à leurs lignes principales (DARBOUX, *Leçons*, II^e Partie, Chap. XV).

48. Soient M un point qui décrit un réseau dans l'espace à cinq dimensions, MS et MT les tangentes à ce réseau. Les deux directions MS et MT définissent un cercle. L'ensemble des cercles qui correspondent à tous les points M du réseau forme une *congruence de cercles*. Il est facile d'indiquer la propriété caractéristique de ces systèmes. Au point M(u, v) correspond un cercle C intersection des sphères qui correspondent aux droites MS(ξ_1, \dots, ξ_5) et MT(η_1, \dots, η_5); au point M'($u + du, v$) correspond un cercle C' intersection des sphères M'S'($\xi + \frac{\partial \xi}{\partial u} du$) et M'T'($\eta + \frac{\partial \eta}{\partial u} du$); mais

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m \xi.$$

Donc, les quatre sphères, et, par suite, les deux cercles C et C', passent par les deux points communs aux trois sphères qui ont pour coordonnées

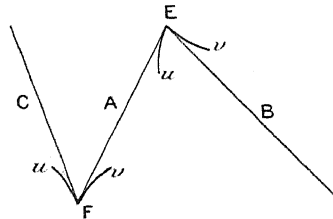
$$\xi, \quad \eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u}.$$

On voit que si u varie seul, chaque cercle du système est rencontré en deux points par un cercle infiniment voisin; même conclusion quand v varie seul. On obtient ainsi tous les systèmes qui possèdent cette propriété. C'est à ces systèmes doublement infinis de cercles que nous réservons le nom de *congruence de cercle*. Ces systèmes ont été étudiés par M. Darboux (*Leçons*, II^e Partie, Chap. XV).

49. Soit A une congruence de l'espace à cinq dimensions, E le point où A touche une enveloppe quand u varie; F l'autre foyer de A;

B et C les secondes tangentes des réseaux E et F (*fig. 12*). Nous allons chercher les éléments qui correspondent à cette figure dans l'espace à trois dimensions.

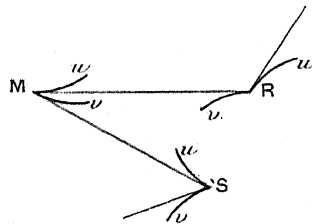
Fig. 12.



Je désignerai par $\alpha_1, \dots, \alpha_3$ les paramètres directeurs de A; ceux de B seront fonctions linéaires de α et $\frac{\partial \alpha}{\partial v}$; ceux de C de α et $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$.

Cela posé, à A correspond une sphère (A) dont le centre M(x_1, x_2, x_3) décrit un réseau; soient MR et MS les tangentes de ce réseau; R et S les seconds foyers des congruences MR et MS (*fig. 13*).

Fig. 13.



L'équation de la sphère (A) peut s'écrire

$$(6) \quad (X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2 - R^2 = 0;$$

quand u varie seul, cette sphère touche son enveloppe suivant un cercle C_1 intersection de la sphère A et du plan P_1 qui a pour équation

$$(7) \quad (X_1 - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (X_2 - x_2) \frac{\partial x_2}{\partial u} + (X_3 - x_3) \frac{\partial x_3}{\partial u} + R \frac{\partial R}{\partial u} = 0.$$

Le cercle C_1 peut aussi être considéré comme l'intersection des

sphères qui ont pour coordonnées α et $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ ou bien encore des sphères (A) et (C); le cercle C_1 correspond donc au réseau F.

Le cercle C_1 décrit donc une convergence. Le plan de ce cercle est perpendiculaire à MR.

De même si v varie seul, la sphère (A) touche son enveloppe suivant un cercle C_2 , intersection de la sphère (A) et du plan P_2 qui a pour équation

$$(8) \quad (X_1 - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial u} + (X_2 - x_2) \frac{\partial x_2}{\partial u} + (X_3 - x_3) \frac{\partial x_3}{\partial u} + R \frac{\partial R}{\partial u} = 0.$$

Le plan P_2 est perpendiculaire à MS; le cercle C_2 décrit une congruence qui correspond au réseau E.

Les congruences décrites par les cercles C_1 et C_2 sont les *congruences focales* de la congruence de sphère (A).

Les deux cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points I et I' définis par les équations (6), (7), (8). Ces points I et I' sont les points où la sphère A touche son enveloppe. Cette droite II' décrit une congruence orthogonale au réseau (M); les plans focaux de cette congruence sont les plans P_1 et P_2 (Ribeaucour).

Cherchons la sphère qui correspond à la congruence (B); d'après ce qui précède, elle doit contenir le cercle C_2 qui correspond au réseau E. C'est donc la sphère qui a pour centre S et qui passe par C_2 . Les deux sphères (A) et (B) sont les sphères focales de la congruence décrite par le cercle C_2 .

Considérons une congruence quelconque de cercles, par exemple, celle décrite par le cercle C_2 ; l'axe MS de ce cercle décrit une congruence; les sphères qui ont pour centres les foyers de cette congruence et qui passent par le cercle sont les congruences focales.

Le plan P_2 de ce cercle enveloppe un réseau; l'une des tangentes de ce réseau est la corde de contact II' de la sphère de centre M avec son enveloppe; l'autre sera la corde de contact de la sphère de centre S (Voir DARBOUX, *Leçons*, Chap. XV).

50. Une congruence de sphères et une congruence de cercles sont dites *orthogonales* lorsque la congruence de droite et le réseau qui

leur correspondent sont orthogonaux. Soit alors $C(x_1, \dots, x_5)$ et $OPQ(\xi_1, \dots, \xi_5, \eta_1, \dots, \eta_5)$ une congruence et un réseau orthogonaux. On sait que l'on a (11)

$$(9) \quad \begin{cases} \sum \xi x = 0, & \sum \xi \frac{\partial x}{\partial u} = 0, & \sum \xi \frac{\partial x}{\partial v} = 0, & \sum \xi \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \\ \sum \eta x = 0, & \sum \eta \frac{\partial x}{\partial u} = 0, & \sum \eta \frac{\partial x}{\partial v} = 0, & \sum \eta \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \end{cases}$$

Si $OL(y_1, \dots, y_5)$ est une droite quelconque du réseau OPQ on aura donc

$$(10) \quad \sum y x = 0, \quad \sum y \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum y \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

A la congruence C correspond une congruence de sphères; soit (M) le réseau décrit par le centre de ces sphères; C_1 et C_2 les deux cercles focaux; (R) et (S) (*fig. 13*) les secondes sphères focales de C_1 et C_2 ; les coordonnées de R sont fonctions linéaires de x et $\frac{\partial x}{\partial v}$ (40); celles de (S) de x et $\frac{\partial x}{\partial u}$.

Au réseau OPQ correspond une congruence de cercles (C) ; à OL une sphère (L) passant par C . Les formules (10) montrent que toute sphère (L) passant par le cercle C est orthogonale aux sphères de centres M, R, S ; par conséquent, les pôles du cercle C sont les points I et I' communs à ces trois sphères; donc :

La congruence de cercles orthogonale à une congruence de sphères est formée par les cercles qui ont pour pôles les deux points où chaque sphère de la congruence touche son enveloppe.

Inversement :

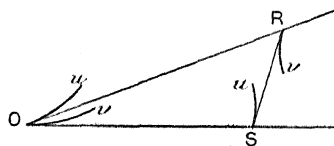
Soit C un cercle qui décrit une congruence, I et I' les pôles de C ; M le point où le plan de C touche son enveloppe, la sphère S qui a pour centre M et qui passe par I et I' décrit la congruence de sphères orthogonale à la congruence de cercles C .

51. Une congruence de sphères et une congruence de cercles sont dites *harmoniques* si la congruence de droite et le réseau qui leur correspondent sont harmoniques.

Soient alors $OR(\xi_1, \dots, \xi_s)$, $OS(\eta_1, \dots, \eta_s)$ les tangentes d'un réseau; $RS(X_1, \dots, X_s)$ une congruence harmonique (*fig. 14*). On aura (6)

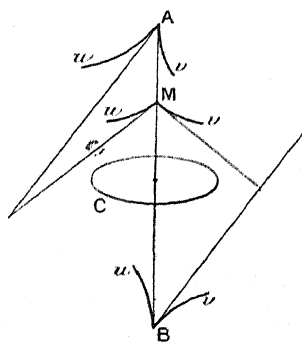
$$(11) \quad \begin{cases} X = q\xi - p\eta, \\ \frac{\partial X}{\partial u} = q \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \eta, \\ \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} \xi - p \frac{\partial \eta}{\partial v}. \end{cases}$$

Fig. 14.



Soient alors A et B les sphères qui ont respectivement pour coordonnées les quantités ξ et η , le cercle C qui correspond au réseau ORS est l'intersection des sphères A et B (*fig. 15*).

Fig. 15.



La première des formules (11) montre que la sphère S qui a pour coordonnée (X_1, \dots, X_s) passe par le cercle C; son centre M décrit donc un réseau conjugué à la congruence AB. Les formules qui donnent X et $\frac{\partial X}{\partial u}$ montrent que, si u varie seul, la sphère S touche son enveloppe suivant un cercle C_1 passant par l'intersection des trois sphères ayant respectivement pour coordonnées les quantités ξ , η , $\frac{\partial \xi}{\partial u}$; le cercle C_1 passe donc par les deux points où la sphère (A) touche

son enveloppe; de même, quand ν varie seul, la sphère S touche son enveloppe suivant un cercle C_2 passant par les deux points où la sphère B touche son enveloppe. Il en résulte que la corde de contact de la sphère S passe par le point où le plan de C touche son enveloppe.

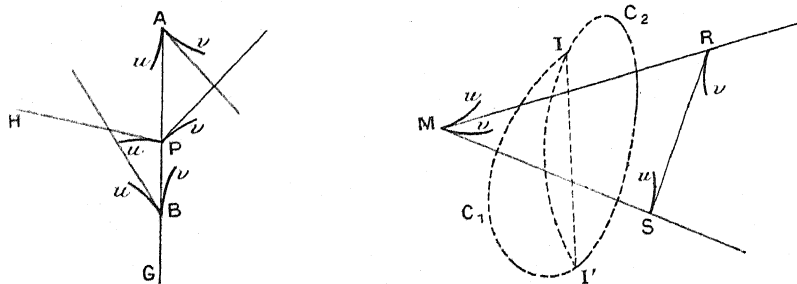
De tout ce qui précède résultent les conclusions suivantes :

Soient C un cercle qui décrit une congruence, D l'axe de ce cercle, M un point qui décrit un réseau conjugué à la congruence (D) ; la sphère S qui a pour centre M et qui passe par C décrit une congruence de sphères (S) harmonique à la congruence de cercles (C) ; on obtient, par cette méthode, toutes les congruences de sphères harmoniques à la congruence de cercles.

Soient S une sphère qui décrit une congruence, D sa corde de contact avec son enveloppe, M un point qui décrit un réseau conjugué à la congruence (D) , P le plan de ce réseau; le cercle C , intersection de la sphère S et du plan P , décrit une congruence (C) harmonique à la congruence de sphères (S) . On obtient ainsi toutes les congruences de cercles harmoniques à la congruence (S) .

52. Une congruence de sphères et une congruence de cercles sont dites *conjuguées* lorsque la congruence de droites et le réseau qui leur correspondent sont conjugués. Soient alors G (fig. 16), A et B ses réseaux

Fig. 16.



focaux, P un réseau conjugué à (G) , H et L les tangentes du réseau P .

A la congruence G correspond un système de sphères dont le centre décrit un réseau M ; aux réseaux focaux A et B correspondent les

cercles focaux C_1 et C_2 de la sphère; ces cercles passent par les points I et I' où la sphère touche son enveloppe.

A la tangente L correspond une sphère qui est sphère focale du cercle correspondant au réseau P. La congruence L étant harmonique au réseau A, cette sphère passe par le cercle C_1 ; son centre S est donc un réseau de la tangente MS au réseau M; de même, à la droite H correspond une sphère qui a son centre en R sur la tangente MR du réseau M. L'axe RS du cercle cherché est donc harmonique au réseau M; le cercle cherché passe par I et I'; la droite II' décrit une congruence harmonique au réseau enveloppé par le plan du cercle; donc :

Soient (M) le réseau décrit par le centre d'un système de sphères, (RS) une congruence harmonique à (M), le cercle qui a pour axe RS et qui passe par les points I et I', où la sphère touche son enveloppe, décrit une congruence conjuguée au système de sphères.

Soient C un cercle qui décrit une congruence, M le réseau enveloppé par le plan du cercle, (G) une congruence harmonique à ce réseau, I et I', les points où la droite G rencontre le cercle C; le plan P mené par l'axe du cercle perpendiculairement à G enveloppe un réseau μ . La sphère qui a pour centre μ et passe par I et I' décrit une congruence conjuguée à la congruence du cercle C.

53. Les systèmes de cercles et de sphères seront désignés par la même notation que le réseau ou la congruence qui leur correspondent. Ainsi, une congruence de cercles est p, I si le réseau qui lui correspond est p, I ; de même, une congruence de sphères est p, I si la congruence qui lui correspond est p, I .

Il est clair que si une congruence de sphères et une congruence de cercles sont orthogonales, ces congruences sont représentées par la même notation.

54. Soient $M(x_1, x_2, x_3)$ le centre d'une sphère (S), R son rayon; les cinq coordonnées de la sphère peuvent s'écrire :

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3, \quad X = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 + 1), \\ X_4 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 - 1). \end{array} \right.$$

Pour que la sphère décrive une congruence I, il faut et il suffit que

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0,$$

c'est-à-dire que R soit nul. L'équation du réseau M admet alors la solution $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et par conséquent M décrit un réseau O; inversement, toute sphère-point, dont le centre décrit un réseau O, forme une congruence I. Les cercles focaux de cette sphère sont des cercles-points ayant pour centre M et situés dans les plans principaux de la surface (M); la corde de contact de la sphère avec son enveloppe est la normale à la surface (M). Il en résulte que le cercle I orthogonal à cette sphère est le cercle-point qui a pour centre M et qui est situé dans le plan tangent à la surface (M).

Les sphères focales de ce cercle sont les sphères qui passent par M et ont pour centres les centres de courbure de la surface (M), donc :

Les congruences de sphères I sont formées de sphères-points dont le centre décrit un réseau de lignes de courbures.

Les congruences de cercles I sont des cercles-points dont le centre décrit une surface et dont le plan est le plan tangent à la surface. Le réseau enveloppé par le plan du cercle est formé par les lignes de courbure de la surface.

Pour que la sphère (S) décrive une congruence 2I il faut que l'équation à laquelle satisfont les coordonnées de cette sphère, équation qui est celle du réseau M, admette une solution Y telle que

$$\Sigma X^2 + Y^2 = 0,$$

d'où

$$Y = iR.$$

L'équation du réseau M admet donc les solutions

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad R \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2.$$

On reconnaît les sphères étudiées par M. Darboux (*Leçons*, 2^e Partie, Chap. XV); les points où cette sphère touche son enveloppe décrivent des réseaux formés de lignes de courbure. Ces points sont les centres des cercles I harmoniques aux sphères 2I.

Si R est constant, le point M décrit un réseau O; si R n'est pas cons-

tant, le point M décrit un réseau $2O$, la coordonnée complémentaire étant iR .

Dans le cas où R est constant, les cercles focaux de la sphère sont des cercles de rayon constant, de centre M, situés dans les plans principaux de la surface (M); le cercle $2I$ qui correspond à cette sphère a aussi pour centre M, son rayon est constant, il est situé dans le plan tangent à la surface (M).

Dans le cas le plus général, le plan d'un cercle $2I$ enveloppe un réseau $2O$. Les deux pôles H et H' de ce cercle décrivent des lignes de courbure, les normales à ces surfaces sont MH et MH'.

Pour que la sphère S décrive une congruence p, I , il faut que l'équation de Laplace qui admet comme solution les quantités X [formule (12)] admette, en outre, $p - 1$ solutions Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1} , telles que

$$\sum X^2 + \sum Y^2 = 0,$$

ce qui donne

$$\sum Y^2 = -R^2.$$

Le point M' qui a pour coordonnées $(x_1, x_2, x_3, Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1})$ décrit dans l'espace à $p + 2$ dimensions un réseau O ; cela posé, plusieurs cas sont à considérer.

Si

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \dots + \alpha_{p-1} Y_{p-1} = \text{const.}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{p-1}^2 = 0,$$

on peut supprimer deux des coordonnées complémentaires Y; par suite, le point M décrit un réseau $p - 2, O$.

Si

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \dots + \alpha_{p-1} Y_{p-1} = \text{const.}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{p-1}^2 \geq 0,$$

on peut supprimer une des coordonnées complémentaires Y, le point M décrit un réseau $(p - 1), O$.

Enfin, dans le cas général, les coordonnées Y sont linéairement indépendantes; le point M décrit un réseau p, O .

Donc :

Le centre d'une sphère p, I décrit un réseau qui est $p - 2, O$; $p - 1, O$ ou p, O .

Inversement

Si le centre d'une congruence de sphères décrit un réseau p , O , la congruence est $p, I; p + 1, I$ ou $p + 2, I$.

55. Pour que la sphère (S) dont les coordonnées sont données par les formules (12) décrive une congruence O , il faut que l'équation à laquelle satisfont ces coordonnées admette trois solutions y_1, y_2, y_3 , telles que

$$\begin{aligned}\Sigma X^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \\ \Sigma dX^2 &= dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}R^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \\ dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 &= dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2.\end{aligned}$$

Soit N le point qui a pour coordonnées y_1, y_2, y_3 . Les points M et N décrivent des réseaux applicables; le rayon de la sphère S est égal à la distance de N à un point fixe.

Inversement, soient $M(x_1, x_2, x_3)$ et $N(y_1, y_2, y_3)$ deux réseaux applicables; Σ une sphère de rayon R et de centre N ; pour que Σ décrive une congruence, il faut que l'équation du réseau admette la solution :

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - R^2.$$

Mais cette équation admet toujours la solution

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Si donc Σ décrit une congruence, l'équation des réseaux admettra la solution

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2,$$

et par conséquent la sphère S qui a pour centre M et pour rayon R décrit une congruence. On vérifie facilement que si l'on applique le réseau N sur le réseau M , les cercles focaux de Σ viennent coïncider avec ceux de S et par conséquent les points où Σ touche son enveloppe viennent coïncider avec ceux où S touche son enveloppe (théorème de M. Beltrami).



Les coordonnées de S sont :

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3, \quad X_4 = \frac{l}{2} \left(\sum x^2 - R^2 + 1 \right),$$

$$X_5 = \frac{1}{2} \left(\sum x^2 - R^2 - 1 \right);$$

celles de Σ :

$$Y_1 = y_1, \quad Y_2 = y_2, \quad Y_3 = y_3, \quad Y_4 = \frac{i}{2} \left(\sum y^2 - R^2 + 1 \right),$$

$$Y_5 = \frac{2}{1} \left(\sum y^2 - R^2 - 1 \right).$$

On voit que l'on a

$$\sum X^2 = \sum Y^2,$$

$$\sum dX^2 = \sum dY^2.$$

Cela posé, trois cas peuvent se présenter :

1° Il existe une relation linéaire isotrope entre les coordonnées Y, ce qui revient à dire que Σ passe par un point fixe; on peut alors supprimer deux des coordonnées Y; la congruence (S) est O.

2° Il existe une relation linéaire non isotrope entre les coordonnées Y, ce qui revient à dire que Σ est orthogonale à une sphère fixe; on pourra supprimer une des coordonnées Y, la congruence S est 2 O.

3° Il n'existe pas de relation linéaire entre les quantités Y, la convergence S est 3 O.

Il est facile de caractériser les cercles O. Si la sphère S est O, la sphère Σ passe par un point fixe A; Σ touche son enveloppe en A et au symétrique A' de A par rapport au plan tangent en N. Quand on fait rouler la surface N sur la surface M, A et A' viennent aux points B et B' où S touche son enveloppe. Le cercle O qui correspond à la sphère S a pour pôle B et B', donc ce cercle est la position que vient occuper l'intersection de la sphère point A avec le plan tangent en N, quand on fait rouler la surface (N) sur la surface (M). On reconnaît les cercles de Ribeaucour qui sont normaux à une famille de surfaces.

Supposons maintenant que le centre $M(x_1, x_2, x_3)$ décrive un réseau p, C applicable sur un réseau $N(y_1, y_2, \dots, y_{p+2})$; l'équation

des réseaux applicables admettra la solution :

$$\sum y^2 = R^2.$$

Posons alors

$$Y_i = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, p+2),$$

$$Y_{p+3} = \frac{i}{2} \left(\sum y^2 - R^2 + 1 \right), \quad Y_{p+4} = \frac{1}{2} \left(\sum y^2 - R^2 - 1 \right).$$

On aura encore

$$\sum X^2 = \sum Y^2,$$

$$\sum dX^2 = \sum dY^2.$$

Donc :

S'il existe une relation linéaire isotrope entre les Y , la congruence S est $p, 0$.

S'il existe une relation linéaire non isotrope, cette congruence est $p+1, 0$.

Dans le cas général elle sera $p+2, 0$.

Donc :

Si le réseau décrit par le centre est p, C , la congruence de sphères est $p, 0$; $p+1, 0$ ou $p+2, 0$.

Inversement :

Si une congruence de sphères est $p, 0$ un centre décrit un réseau qui est $p-2, C$; $p-1, C$ ou p, C .

56. Prenons les coordonnées d'une sphère S sous la forme (12); l'équation à laquelle satisfont ces coordonnées :

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Pour que la sphère S soit C , il faut qu'en choisissant convenablement les variables u et v l'on ait

$$\sum X^2 = h^2 + l^2,$$

ce qui donne :

$$(14) \quad R^2 = h^2 + l^2;$$

et par conséquent l'équation du réseau M admet la solution :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = h^2 + l^2.$$

Un calcul analogue à celui du n° 30, montre que l'on devra avoir :

$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = \sum \xi a;$$

par conséquent le réseau M est K. Inversement, si M décrit un réseau K, la sphère dont le rayon est donné par la formule (14) décrit une congruence G, si

$$R^2 = h^2 + l^2 + \text{const.}$$

La congruence (S) serait 2G.

Enfin si R est quelconque, la congruence est 3G.

On montre que d'une manière générale :

Si une congruence de sphères est p, G, le centre des sphères décrit un réseau p - 2, K; p - 1, K ou p, K.

Si le centre d'une sphère décrit un réseau p, K, la congruence correspondante est p, G; p + 1, G ou p + 2, G.

57. L'inversion effectuée sur un cercle ou une sphère revient à une substitution orthogonale dans l'espace à cinq dimensions. Cette substitution n'altère pas les propriétés dont nous nous occupons; il en résulte que *les propriétés que nous établissons dans cette théorie se conservent par l'inversion.*

CHAPITRE VIII.

LES SYSTÈMES DE CERCLES ET DE SPHÈRES PLUSIEURS FOIS C. CAS GÉNÉRAL OU U ET V NE SONT PAS DES CONSTANTES.

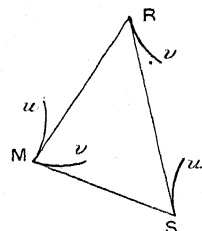
SOMMAIRE.

58. Congruences plusieurs fois C dans un espace d'ordre quelconque. Équations E_n . — 59. Réseaux O associés. — Réseaux O associés à un réseau plan. — 60. Réseaux O, 3O dans l'espace à cinq dimensions. — 61. Réseaux associés à un même réseau plan. — 62. Congruences O, 3O. — 63. Cercles et sphères O, 3O. — 64. Congruences C, C dans un espace à cinq dimensions. Propriétés des équations E_n . — 65. Transformation des équations E_n . — 66. Réseaux C, C. — 67. Cercles et sphères C, C. — 68. Équivalence de la transformation E_3 et du passage des systèmes C, C aux systèmes O, 3O. — 69. Systèmes I, 5I. Première transformation. — 70. Cercles et sphères I, 5I. Étude directe de la transformation précédente. — 71. Systèmes 2I, 4I. Deuxième transformation. — 72. Systèmes 3I, 3I. Troisième et quatrième transformation. — 73. Systèmes 2O, 2O. Cinquième transformation. — 74. Remarque sur ces diverses transformations.

58. Soit $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*fig. 17*) un point qui décrit un réseau O ; RS une congruence C qui lui est harmonique. On aura

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial u} = h \xi_i, & \frac{\partial h}{\partial v} = l m, & \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n \eta_i, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} = l \eta_i, & \frac{\partial l}{\partial u} = h n, & \frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m \xi_i. \end{cases}$$

Fig. 17.



Si θ est une solution de l'équation du réseau M, les coordonnées (y, \dots, y_n) de R et celles (z, \dots, z_n) de S sont données par

les formules

$$(2) \quad \begin{cases} y_i = x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial u}} \frac{\partial x_i}{\partial u}, \\ z_i = x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial v}} \frac{\partial x_i}{\partial v}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial u} = h \xi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = l \eta,$$

on aura

$$(4) \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = n \eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = m \xi.$$

Posons alors

$$(5) \quad r = -\frac{\theta}{\xi}, \quad \rho = -\frac{\theta}{\eta}.$$

Les formules (2) deviennent

$$(6) \quad \begin{cases} y_i = x_i + r \xi_i, \\ z_i = x_i + \rho \eta_i, \end{cases}$$

r et ρ représentant respectivement les longueurs MR et MS. Les points R et S étant les foyers de la congruence RS, on aura

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial v} = P(y_i - z_i), \\ \frac{\partial z_i}{\partial u} = Q(y_i - z_i). \end{cases}$$

Si maintenant x' est une solution quelconque de l'équation du réseau M et si

$$\xi' = \frac{1}{h} \frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \eta' = \frac{1}{l} \frac{\partial x'}{\partial v}.$$

Les équations (7) admettent la solution

$$(8) \quad \begin{cases} y' = x' + r \xi', \\ z' = x' + \rho \eta'. \end{cases}$$

En prenant

$$x' = \sum x_i^2,$$

on trouvera

$$y' = \sum y_i^2 - r^2, \quad z' = \sum z_i^2 - \rho^2.$$

Il en résulte que le système (7) admet les $n + 2$ couples de solutions

$$1, \quad 1; \quad y_i, \quad z_i \quad \text{et} \quad \sum y_i^2 - r^2, \quad \sum z_i^2 - \rho^2.$$

Ces équations sont de la forme

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial v} = A y + B z, \\ \frac{\partial z}{\partial u} = C y + D z. \end{cases}$$

Cette forme se conserve si l'on multiplie y par un facteur quelconque, z par un autre facteur quelconque. Si donc on pose

$$(10) \quad \begin{cases} Y_i = \frac{y_i}{r}, & Y_{n+1} = \frac{i}{2r} \left(\sum y_i^2 - r^2 + 1 \right), & Y_{n+2} = \frac{1}{2r} \left(\sum y_i^2 - r^2 - 1 \right), \\ Z_i = \frac{z_i}{\rho}, & Z_{n+1} = \frac{i}{2\rho} \left(\sum z_i^2 - \rho^2 + 1 \right), & Z_{n+2} = \frac{1}{2\rho} \left(\sum z_i^2 - \rho^2 - 1 \right). \end{cases}$$

Les quantités Y_k, Z_k sont solutions d'équations de la forme (9). On vérifie facilement que

$$(11) \quad \sum_1^{h+2} Y_k^2 = 1, \quad \sum_1^{h+2} Z_k^2 = 1, \quad \sum_1^{h+2} Y_k Z_k = 0.$$

Il en résulte que les quantités A et D sont nulles. On aura donc

$$(12) \quad \frac{\partial Y_k}{\partial v} = N Z_k, \quad \frac{\partial Z_k}{\partial u} = M Y_k,$$

et si l'on remarque que $\frac{1}{r}, \frac{1}{\rho}$ forment un système de solutions

$$(13) \quad N = \rho \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r} \right), \quad M = r \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho} \right),$$

il résulte de là que les quantités Y_k et Z_k forment les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal Δ à $(n + 2)$ lignes, [11].

Si l'on pose maintenant

$$(14) \quad X_i = \frac{x_i}{\theta}, \quad X_{n+1} = \frac{i}{2\theta} \left(\sum x_i^2 + 1 \right), \quad X_{n+2} = \frac{2\theta}{1} \left(\sum x_i^2 - 1 \right),$$

on aura, quel que soit k ,

$$(15) \quad \frac{\partial X_k}{\partial u} = \frac{h}{\theta} Y_k, \quad \frac{\partial X_k}{\partial v} = \frac{l}{\theta} Z_k.$$

Comme, d'autre part,

$$(16) \quad \sum_1^{h+2} X_k^2 = 0,$$

on voit que les quantités X_k forment une combinaison linéaire isotrope des éléments correspondants des n premières lignes de Δ . Inversement, à chacune de ces combinaisons isotropes, on fait correspondre un réseau M qui est O , harmonique à RS . On obtient ainsi ∞^{n-2} réseaux O harmoniques à la congruence C . Pour tous ces réseaux les longueurs MR et MS sont les mêmes.

Nous allons chercher s'il peut exister d'autres réseaux O harmoniques à la congruence RS . Il faut, pour cela, que, les quantités y_i et z_i conservant leurs valeurs, on puisse trouver d'autres quantités Y'_k, Z'_k , analogues aux quantités Y_k et Z_k qui formeront les deux dernières lignes d'un nouveau déterminant orthogonal Δ' . Soient r' et ρ' les nouvelles valeurs de r et de ρ qui servent à former ces quantités. Les quantités Y'_1, \dots, Y'_n ne diffèrent des quantités Y_1, Y_2, \dots, Y_n que par un même facteur $\frac{r'}{r}$; de même Z'_1, \dots, Z'_n ne diffèrent de Z_1, Z_2, \dots, Z_n que par le facteur $\frac{\rho'}{\rho}$. Des équations (12) et des équations analogues

$$(12') \quad \frac{\partial Y'_k}{\partial v} = N' Z'_k, \quad \frac{\partial Z'_k}{\partial u} = M' Y'_k$$

on conclut que le premier facteur doit être une fonction de u seul, le second de v seul. On peut donc poser

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} U, \\ \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} V. \end{cases}$$

Il en résultera

$$N' = N \frac{U}{V}, \quad M' = M \frac{V}{U}.$$

Les équations (12') admettent les solutions Y'_i, Z'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et $Y'_{n+2} + iY'_{n+1} = \frac{1}{r'}$, $Z'_{n+2} + iZ'_{n+1} = \frac{1}{\rho'}$; il faut en outre qu'ils admettent le système de solutions

$$Y'_{n+2} - iY'_{n+1} = \frac{\sum y_i^2 - r'^2}{r'}, \quad Z'_{n+2} - iZ'_{n+1} = \frac{\sum z_i^2 - \rho'^2}{\rho'}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sum y_i^2 - r'^2}{r'} &= U \frac{\sum y_i^2 - r^2}{r} + \left(U - \frac{1}{U} \right) r, \\ \frac{\sum z_i^2 - \rho'^2}{\rho'} &= V \frac{\sum z_i^2 - \rho^2}{\rho} + \left(V - \frac{1}{V} \right) \rho. \end{aligned}$$

On devra donc avoir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left[U \frac{\sum y_i^2 - r^2}{r} + \left(U - \frac{1}{U} \right) r \right] &= N \frac{U}{V} \left[V \frac{\sum z_i^2 - \rho^2}{\rho} + \left(V - \frac{1}{V} \right) \rho \right], \\ \frac{\partial}{\partial u} \left[V \frac{\sum z_i^2 - \rho^2}{\rho} + \left(V - \frac{1}{V} \right) \rho \right] &= M \frac{V}{U} \left[U \frac{\sum y_i^2 - r^2}{r} + \left(U - \frac{1}{U} \right) r \right]. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\sum y_i^2 - r^2}{r} = N \frac{\sum z_i^2 - \rho^2}{\rho},$$

on aura

$$\left(U - \frac{1}{U} \right) \frac{\partial r}{\partial v} = N \frac{U}{V} \left(V - \frac{1}{V} \right) \rho.$$

En remplaçant N par sa valeur (13) on trouve

$$(18) \quad \left(1 - \frac{1}{U^2} \right) r^2 + \left(1 - \frac{1}{V^2} \right) \rho^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{r}{\rho}$ est égal au quotient d'une fonction de U

par une fonction de V . Réciproquement, supposons que l'on ait

$$(19) \quad \frac{r}{\rho} = \frac{U_1}{V_1}.$$

Si l'on fait

$$(20) \quad \begin{cases} 1 - \frac{1}{U^2} = \frac{\alpha}{U_1^2} \\ 1 - \frac{1}{V^2} = \frac{-\alpha}{V_1^2}, \end{cases}$$

α étant une constante quelconque, la relation (19) sera vérifiée; les quantités Y' , Z'_k satisfont aux équations (12') et comme

$$\Sigma Y_k'^2 = 1, \quad \Sigma Z_k'^2 = 1,$$

ces quantités sont les éléments des deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal Δ' .

Nous dirons qu'une congruence est *plusieurs fois* C lorsqu'elle est harmonique à des systèmes différents de réseaux O. Dans ce cas, elle est harmonique à une infinité de systèmes, obtenus en faisant varier la constante α ; donc :

Pour qu'une congruence soit plusieurs fois C, il faut et il suffit que le rapport $\frac{r}{\rho}$ soit égal au quotient d'une fonction de u par une fonction de v .

Il est facile de transformer cette condition. Les paramètres directeurs de RS sont proportionnels aux quantités

$$r\xi_i - \rho\eta_i$$

ou encore aux quantités

$$\theta_i = r\xi_i - \xi\eta_i.$$

Ces quantités θ_i satisfont (6) à l'équation

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) \theta.$$

Pour que le rapport $\frac{r}{\rho}$ ou $\frac{\eta}{\xi}$ soit de la forme $\frac{U_1}{V_1}$, il faut et il suffit que l'équation (21) ait ses invariants égaux.

Ramenons alors cette équation à la forme canonique de M. Mou-

tard :

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M \theta.$$

Soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ les paramètres de la congruence qui sont solution de l'équation (22); en appliquant le criterium des congruences C (22) on trouve

$$(23) \quad \sum_1^n \theta_i^2 = U + V,$$

donc :

La recherche des congruences plusieurs fois C, dans un espace à n dimensions, revient à trouver une équation de M. Moutard, admettant n solutions dont la somme des carrés est égale à $U + V$.

Nous appellerons *équations* E_n les équations de M. Moutard qui possèdent cette propriété.

59. Deux réseaux O sont *associés* [Sur les réseaux O associés (Comptes rendus, 1897)] lorsque l'équation de ces deux réseaux est la même. Soit alors $M(x_1, \dots, x_n)$ et $N(y_1, \dots, y_p)$ deux points qui décrivent des réseaux O associés. Posons

$$(24) \quad \sum dx^2 = h^2 du^2 + l^2 dv^2, \quad \sum dy^2 = h'^2 du^2 + l'^2 dv^2.$$

Les équations des réseaux (M) et (N) sont

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h'} \frac{\partial h'}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{l'} \frac{\partial l'}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases}$$

Pour que ces deux équations soient identiques, il faut que

$$(26) \quad h' = hU, \quad l' = lV.$$

Et, par conséquent, entre les fonctions m et n du premier réseau et les fonctions m' et n' du second, on a les relations

$$(27) \quad m' = m \frac{U}{V}, \quad n' = n \frac{V}{U}.$$

On peut remarquer que le réseau (M) est en général $(p+1), O$; car des équations (24) on déduit

$$\sum dx^2 + \sum dy^2 = (h^2 + h'^2) du^2 + (l^2 + l'^2) dv^2.$$

Réciproquement, on voit que si un réseau M est $(p+1), O$ il est en général associé à un réseau O de l'espace à p dimensions.

Considérons, en particulier, les réseaux associés à un réseau plan, c'est-à-dire les réseaux O, 3O. Pour un réseau O plan, on a

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \varphi, & \xi_2 &= \sin \varphi, \\ \eta_1 &= -\sin \varphi, & \eta_2 &= \cos \varphi, \end{aligned}$$

φ désignant l'angle que fait la tangente à la courbe, u variable seul, avec l'axe des x_1 . Pour ce réseau on a

$$m = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad n = \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

donc :

Pour qu'un réseau O soit associé à un réseau plan il faut et il suffit que les fonctions m et n relatives à ce réseau aient pour valeurs

$$(28) \quad m = -\frac{U}{V} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad n = \frac{V}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Après ces généralités nous nous occuperons spécialement des réseaux et congruences de l'espace à cinq dimensions ou, ce qui revient au même, des systèmes de cercles et de sphères dans l'espace ordinaire.

60. A chaque réseau O de l'espace à cinq dimensions on fait correspondre un déterminant orthogonal (39):

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_5 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_5 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_5 \end{vmatrix}$$

entre les rotations a, e, g, b, f, k, m, n existent les relations

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} = bm, & \frac{\partial e}{\partial v} = fm, & \frac{\partial g}{\partial v} = km \\ \frac{\partial b}{\partial u} = an, & \frac{\partial f}{\partial u} = en, & \frac{\partial k}{\partial u} = gn \end{cases} \quad ab + ef + gk + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

Pour que le réseau correspondant soit O, 3O, c'est-à-dire associé à un réseau plan, il faut en outre que

$$(30) \quad m = -\frac{U}{V} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad n = \frac{V}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Si l'on porte ces valeurs de m et n dans les équations (29), on a un système de sept équations pour déterminer a, e, g, b, f, k et φ ; six de ces équations sont du premier ordre, la septième est de second ordre; par conséquent le problème est du *huitième ordre*.

Nous allons indiquer une propriété caractéristique de ces systèmes.

61. Cherchons s'il est possible, étant donné un déterminant orthogonal Δ , de trouver un autre déterminant orthogonal Δ' ,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_5 \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_5 \\ z'_1 & z'_2 & \dots & z'_5 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \dots & \xi'_5 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \dots & \eta'_5 \end{vmatrix},$$

dont les rotations a', e', g', b', f', k' aient pour valeurs

$$(31) \quad \begin{cases} a' = a\varphi, & e' = e\varphi, & g' = g\varphi, \\ b' = b\varphi, & f' = f\varphi, & k' = k\varphi. \end{cases}$$

On en déduira

$$(32) \quad m' = m \frac{\varphi}{\varphi}, \quad n' = n \frac{\varphi}{\varphi}.$$

Cela posé, on a les deux relations

$$(33) \quad ab + ef + gk + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0,$$

$$(34) \quad a'b' + e'f' + g'k' + \frac{\partial m'}{\partial v} + \frac{\partial n'}{\partial u} = 0.$$

La seconde peut s'écrire

$$(ab + ef + gk) \varpi \vartheta + \frac{\varpi}{\vartheta} \frac{\partial m}{\partial v} - m \frac{\varpi \vartheta'}{\vartheta^2} + \frac{\vartheta}{\varpi} \frac{\partial n}{\partial u} - n \frac{\vartheta' \varpi}{\varpi^2} = 0$$

ou encore

$$(35) \quad ab + ef + gk + \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial m}{\partial v} - m \frac{\vartheta'}{\vartheta^3} + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial n}{\partial u} - n \frac{\varpi'}{\varpi^3} = 0.$$

En retranchant les équations (33) et (35) on trouve

$$(36) \quad \frac{\partial m}{\partial v} \left(\frac{1}{\vartheta^2} - 1 \right) - m \frac{\vartheta'}{\vartheta^3} + \frac{\partial n}{\partial u} \left(\frac{1}{\varpi^2} - 1 \right) - n \frac{\varpi'}{\varpi^3} = 0$$

ou encore, en supposant que ϖ^2 et ϑ^2 sont tous deux différents de 1,

$$(37) \quad \sqrt{\frac{1}{\vartheta^2} - 1} \frac{\partial}{\partial v} \left(m \sqrt{\frac{1}{\vartheta^2} - 1} \right) + \sqrt{\frac{1}{\varpi^2} - 1} \frac{\partial}{\partial u} \left(n \sqrt{\frac{1}{\varpi^2} - 1} \right) = 0$$

ou bien

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(m \frac{\sqrt{\frac{1}{\vartheta^2} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{\varpi^2} - 1}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(n \frac{\sqrt{\frac{1}{\varpi^2} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{\vartheta^2} - 1}} \right) = 0,$$

ce qui permet de poser

$$(39) \quad m = - \frac{\sqrt{\frac{1}{\vartheta^2} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{\varpi^2} - 1}} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad n = \frac{\sqrt{\frac{1}{\varpi^2} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{\vartheta^2} - 1}} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

et par conséquent les déterminants Δ , Δ' correspondent à des réseaux 0, 30.

Inversement, si le déterminant Δ correspond à des réseaux 0, 30, on pourra déterminer une infinité de déterminants Δ' ; il suffira de poser

$$(40) \quad \sqrt{\frac{1}{\vartheta^2} - 1} = \alpha U, \quad \sqrt{\frac{1}{\varpi^2} - 1} = \alpha V,$$

d'où l'on déduit

$$(41) \quad \varpi = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 U^2}}, \quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 V^2}},$$

et pour le déterminant Δ' on aura

$$(42) \quad m' = -\frac{U'}{V'} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad n' = \frac{V'}{U'} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

U' et V' ayant les valeurs suivantes

$$(43) \quad \begin{cases} U' = U \psi = \frac{U}{\sqrt{1 - \alpha^2 U^2}}, \\ V' = V \psi = \frac{V}{\sqrt{1 + \alpha^2 V^2}}; \end{cases}$$

donc :

Si un réseau est O, 3 O, son déterminant orthogonal est associé à une infinité de déterminants orthogonaux.

Il est bon de remarquer que le calcul précédent peut s'effectuer dans des espaces d'ordre quelconque; le résultat qui vient d'être énoncé est donc absolument général.

62. Nous allons déterminer les congruences O, 3 O que la loi d'orthogonalité des éléments fait correspondre à ces réseaux O, 3 O.

La congruence (C) qui correspond au déterminant Δ a pour paramètres directeurs (41) les quantités X_1, \dots, X_3 définies par les équations

$$(44) \quad X_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i,$$

où λ, μ, ν satisfont aux équations

$$(45) \quad \begin{cases} a\lambda + e\mu + g\nu = 0, \\ b\lambda + f\mu + h\nu = 0. \end{cases}$$

Au déterminant Δ' correspondra une congruence G' ayant pour paramètres directeurs

$$(46) \quad X'_i = \lambda x'_i + \mu y'_i + \nu z'_i,$$

λ, μ, ν étant encore déterminés par les équations (45); on aura alors

$$\begin{aligned} \sum X^2 &= \sum X'^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \\ \sum dX^2 &= \sum dX'^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2. \end{aligned}$$

Soit (D) la congruence décrite dans l'espace à trois dimensions par la droite qui a pour paramètres λ, μ, ν . On voit que la congruence (G) est applicable sur la congruence (D) et sur toutes les congruences (G'); cette congruence est O et une infinité de fois 3O.

La congruence (D) étant applicable sur une infinité de congruences (G), (G'), ..., est K d'une infinité de manières.

Il résulte d'ailleurs, de ce qui précède, que si une congruence est K de deux manières, elle est K d'une infinité de manières.

63. A la congruence (G) correspond une congruence de sphères; le centre M de la sphère décrivant a pour coordonnées (46)

$$x_1 = -\frac{X_1}{X_5 + iX_4}, \quad x_2 = -\frac{X_2}{X_5 + iX_4}, \quad x_3 = -\frac{X_3}{X_5 + iX_4}.$$

Ce réseau (M) est applicable sur le réseau $N(y_1, y_2, y_3)$

$$y_1 = -\frac{\lambda}{X_5 + iX_4}, \quad y_2 = -\frac{\mu}{X_5 + iX_4}, \quad y_3 = -\frac{\nu}{X_5 + iX_4},$$

et sur une infinité de réseaux $Q(z_1, \dots, z_5)$, où

$$z_i = \frac{-X'_i}{X_5 + iX_4},$$

et l'on a, en outre,

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2;$$

on voit qu'en général le réseau M est C et une infinité de fois 3C.

Si $X_5 + iX_4$ est égal à une fonction linéaire isotrope des quantités X'_i , on pourra supprimer deux des coordonnées z , le réseau (M) sera plusieurs fois C.

Si $X_5 + iX_4$ est égal à une fonction linéaire non isotrope des quantités X'_i , on pourra supprimer une coordonnée du réseau (Q); le réseau M est C et 2C.

Inversement, soit $M(x_1, x_2, x_3)$ un réseau C, 3C applicable sur un réseau $N(y_1, y_2, y_3)$ et un réseau $Q(z_1, \dots, z_5)$; parmi les réseaux applicables respectivement parallèles aux réseaux M, N, Q, il en existe deux groupes M', N', Q' tels que la distance de N' à un point fixe soit égale à celle de Q' à un autre point fixe; nous pouvons supposer que

cette propriété est vérifiée pour les réseaux N et Q, c'est-à-dire que

$$\sum y^2 = \sum z^2 = R^2.$$

La sphère qui a pour centre M et pour rayon R décrit une congruence O, 3O. En effet, ses coordonnées sont

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1, & X_2 &= x_2, & X_3 &= x_3, \\ X_4 &= \frac{i}{2} \left(\sum x^2 - \sum y^2 + 1 \right), & X_5 &= \frac{i}{2} \left(\sum x^2 - \sum y^2 - 1 \right); \end{aligned}$$

on a ensuite

$$\begin{aligned} \sum X^2 &= \sum y^2 = \sum z^2, \\ \sum dX^2 &= \sum dy^2 = \sum dz^2. \end{aligned}$$

On peut donc dire que la recherche des systèmes O, 3O dans l'espace à cinq équivaut à celle des systèmes C, 3C de l'espace à trois.

Il résulte d'ailleurs de ce qui précède, que si dans l'espace à trois un système est C, 3C, il est 3C d'une infinité de manières.

Supposons que le réseau M soit C, 2C; applicable sur un réseau N(y_1, y_2, y_3) et sur un réseau Q(z_1, z_2, z_3, z_4); en remplaçant les réseaux par des réseaux parallèles, on peut supposer

$$\sum y^2 = \sum z^2 + 1 = R^2.$$

La sphère qui a pour centre M et pour rayon R est encore O, 3O. En effet, si l'on fait $z_3 = 1$, on aura encore

$$\begin{aligned} \sum X^2 &= \sum y^2 = \sum_{\substack{1 \\ 5}}^5 z^2, \\ \sum dX^2 &= \sum dy^2 = \sum_{\substack{1 \\ 5}}^5 dz^2. \end{aligned}$$

Nous verrons plus tard que, si un réseau est C et 2C, il est 2C d'une infinité de manières.

Supposons enfin que le réseau M soit C, C; il est C d'une infinité de manières (Ribaucour); soient N(y_1, y_2, y_3) et Q(z_1, z_2, z_3) deux

réseaux applicables sur (M); faisons

$$R^2 = \sum y^2.$$

La sphère qui a pour centre M et pour rayon R décrit une congruence O, 3O; car, si l'on pose

$$Z_1 = z_1, \quad Z_2 = z_2, \quad Z_3 = z_3, \\ Z_4 = \frac{i}{2} \left(\sum z^2 - \sum y^2 + 1 \right), \quad Z_5 = \frac{1}{2} \left(\sum z^2 - \sum y^2 - 1 \right),$$

on aura

$$\sum X^2 = \sum y^2 = \sum Z^2,$$

$$\sum dX^2 = \sum dy^2 = \sum dZ^2.$$

Ainsi, quand on connaîtra une solution du problème C, C dans l'espace à trois, on pourra y faire correspondre des solutions du problème O, 3O dans l'espace à cinq. Ces solutions dépendront de deux fonctions arbitraires, car tout réseau parallèle au réseau M permet de former une solution.

Ces solutions sont caractérisées par ce fait que les groupes de quantités X'_i , définies par les équations (46), admettent une combinaison linéaire isotrope commune.

64. Il y a deux congruences C harmoniques à un réseau 3O (45); si le réseau 3O est en outre O, ces congruences seront plusieurs fois C; inversement, tout réseau O harmonique à une congruence plusieurs fois C est aussi 3O. La recherche des éléments plusieurs fois C et celle des éléments O, 3O sont donc deux problèmes équivalents. Nous allons chercher les congruences C, C harmoniques aux réseaux O, 3O qui viennent d'être définis. Prenons les réseaux qui correspondent au déterminant Δ . Les deux congruences C, C harmoniques $G(\theta_1, \dots, \theta_5)$ et $H(\chi_1, \dots, \chi_5)$ ont leurs paramètres directs donnés par les formules

$$(47) \quad \theta_k = U\xi_k + iV\eta_k, \quad \chi_k = U\xi_k - iV\eta_k.$$

En effet, si l'on remarque que

$$(48) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta = \frac{V}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \eta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} = m\xi = -\frac{U}{V} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial n}{\partial u} \eta + mn\xi = \left(-\frac{VU'}{U^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{V}{U} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right) \eta - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \xi, \end{cases}$$

on trouve, en supprimant les indices,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= U \frac{\partial \xi}{\partial u} + \left(U' - iU \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \xi, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} &= U \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} - iU \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \xi + \left(U' - iU \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \frac{V}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \eta. \end{aligned}$$

Après réduction, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} &= V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \eta - U \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \xi - iU \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \xi - iV \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \eta \\ &= \left(-i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) (U\xi + iV\eta), \end{aligned}$$

et, par conséquent, les cinq quantités $\theta_1, \dots, \theta_5$ sont solutions de l'équation

$$(49) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta, \quad M = -i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

et l'on a

$$\sum \theta^2 = U^2 - V^2,$$

ce qui caractérise les congruences plusieurs fois C.

On verrait de même que les cinq quantités $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ sont solutions de l'équation

$$(50) \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} = M_1 \chi, \quad M_1 = i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

et l'on a encore

$$\sum \chi^2 = U^2 - V^2.$$

L'équation (49) admet la solution $\theta = e^{-i\varphi}$ et l'équation (50) la

solution $\gamma = e^{i\varphi}$. La solution $e^{-i\varphi}$ est celle qui, dans la méthode de M. Moutard, transforme l'équation (49) dans l'équation (50). On vérifie facilement que la transformée de θ_k est γ_k .

En prenant les déterminants orthogonaux Δ' associés à Δ , on voit que l'équation (49) admet les solutions

$$\theta'_k = U' \xi'_k + i V' \eta'_k,$$

où U' et V' sont donnés par les formules (43). On aura

$$(51) \quad \sum g'^2 = U'^2 - V'^2 = \frac{U^2}{1 + \alpha^2 U^2} - \frac{V^2}{1 + \alpha^2 V^2}.$$

On voit de même que l'équation (50) admet les solutions

$$\gamma'_k = U' \xi'_k - i V' \eta'_k.$$

On peut encore former d'autres solutions de ces équations. Déterminons x_1, x_2, x_3 par les quadratures

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{a}{U} e^{i\varphi}, & \frac{\partial x_2}{\partial u} &= \frac{e}{U} e^{i\varphi}, & \frac{\partial x_3}{\partial u} &= \frac{g}{U} e^{i\varphi}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \frac{-ib}{V} e^{i\varphi}, & \frac{\partial x_2}{\partial v} &= \frac{-if}{V} e^{i\varphi}, & \frac{\partial x_3}{\partial v} &= -\frac{ik}{V} e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

où a, e, g, b, f, k sont les rotations du déterminant Δ . On voit facilement que les quadratures qui donnent x_1, x_2, x_3 sont compatibles et que ces quantités sont solutions de l'équation

$$(52) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = i \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

D'autre part, l'équation

$$ab + ef + gk + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0$$

donne, en remplaçant m et n par leurs valeurs,

$$(53) \quad \frac{ab + ef + gk}{UV} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{V'}{V^3} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{U'}{U^3} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

En tenant compte de cette condition, on vérifie que l'équation (52)

admet aussi la solution

$$x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{e^{2i\varphi}}{U^2} + \frac{e^{2i\varphi}}{V^2},$$

et, par conséquent, l'équation (52) admet les cinq solutions suivantes :

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \frac{i}{2}(x+1), \quad \frac{1}{2}(x-1),$$

et, par suite, l'équation (49) admet les cinq solutions

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{-i\varphi} x_1, & X_2 &= e^{-i\varphi} x_2, & X_3 &= e^{-i\varphi} x_3, \\ X_4 &= e^{-i\varphi} \frac{i}{2}(x+1), & X_5 &= e^{-i\varphi} \frac{1}{2}(x-1), \end{aligned}$$

et l'on a

$$\sum X^2 = \frac{1}{U^2} - \frac{1}{V^2}.$$

On arriverait à des conclusions analogues pour l'équation (50); il suffit, dans les résultats précédents, de changer i en $-i$.

Du reste, ce groupe de solutions ne diffère pas essentiellement des groupes précédents. Prenons, en effet, le groupe qui correspond à la valeur α ; en multipliant toutes les solutions du groupe par la constante α^2 , la somme des carrés des solutions est (51):

$$\frac{\alpha^4 U^2}{1 + \alpha^2 U^2} - \frac{\alpha^4 V^2}{(1 + \alpha^2 V^2)} = \frac{\alpha^4 (U^2 - V^2)}{(1 + \alpha^2 U^2)(1 + \alpha^2 V^2)},$$

quand α croît indéfiniment, cette expression a pour limite $\frac{1}{V^2} - \frac{1}{U^2}$.

On peut donc dire que ce groupe correspond à la valeur $\alpha = \infty$.

On peut remarquer que les calculs précédents peuvent se répéter dans un espace d'ordre quelconque, ce qui permet d'énoncer la propriété suivante des équations E_n :

Si une équation de M. Moutard admet n solutions dont la somme des carrés est la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v , elle admet une infinité de groupes de n solutions possédant la même propriété.

Nous donnerons à ces solutions particulières de l'équation le nom de *solutions quadratiques*. Une combinaison linéaire, homogène, à coefficients constants des solutions d'un même groupe sera une solu-

tion linéaire, si la somme des carrés des coefficients n'est pas nulle, et une solution isotrope si la somme des carrés des coefficients est nulle. Ainsi $e^{-i\varphi}$ est une solution isotrope de l'équation (49).

65. Considérons une équation de M. Moutard :

$$(54) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M \theta,$$

et soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \lambda(n+1)$ solutions de cette équation; posons

$$\rho = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2.$$

On sait qu'on peut déterminer x_1, \dots, x_n par les quadratures

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial u} = \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial v} + \xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \end{cases}$$

et que les quantités x_1, \dots, x_n sont solutions de l'équation

$$(56) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Nous allons chercher dans quel cas l'équation (56) admet la solution

$$(57) \quad X = \sum x^2 - \lambda^2 \rho.$$

En différentiant on aura

$$(58) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = 2 \sum x \frac{\partial x}{\partial u} - 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \rho - \lambda^2 \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial X}{\partial v} = 2 \sum x \frac{\partial x}{\partial v} - 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \rho - \lambda^2 \frac{\partial \rho}{\partial v}, \end{cases}$$

$$(59) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} &= 2 \sum x \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + 2 \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - 2\lambda \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} \rho \\ &\quad - 2 \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \rho - 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} - 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \lambda^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Or, des équations (55) on déduit

$$(60) \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -\lambda^2 \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \sum \xi^2.$$

Or on a posé

$$(61) \quad \sum \xi^2 = \rho,$$

et, en différentiant,

$$(62) \quad \begin{cases} 2 \sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ 2 \sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial v} \end{cases}$$

et

$$2 \sum \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + 2 \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v},$$

et, par conséquent,

$$(63) \quad 2 \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - 2M\rho.$$

On aura donc

$$(64) \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -\lambda^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + 2M\lambda^2 \rho + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} - 2\rho \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

et, en remarquant que

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = M\lambda,$$

on aura

$$(65) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = 2 \sum x \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - 4 \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \rho - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

Écrivons que

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0.$$

On aura, en remarquant que les quantités x satisfont à l'équation (56),

$$-2\lambda^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\rho = U + V;$$

donc :

Pour que l'équation (56) admette la solution (57), il faut et il suffit que l'équation donnée (54) soit une équation E_n et que $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ soient les solutions quadratiques d'un groupe de cette équation.

Supposons cette condition réalisée; l'équation (56) admettra les solutions

$$x_1, \dots, x_n, \quad \frac{i}{2} \left(\sum x^2 - \lambda^2 \rho + 1 \right), \quad \frac{1}{2} \left(\sum x^2 - \lambda^2 \rho - 1 \right),$$

dont la somme des carrés est $\lambda^2 \rho$.

Il en résulte que l'équation

$$(66) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\frac{\partial^2 \frac{1}{\lambda}}{\partial u \partial v}}{\frac{1}{\lambda}} \theta,$$

équation qui est la transformée par la solution λ de l'équation (54) admet les $(n+2)$ solutions

$$X_k = \frac{X_k}{\lambda}, \quad X_{n+1} = \frac{i}{2\lambda} \left(\sum x^2 - \lambda^2 \rho + 1 \right), \quad X_{n+2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\sum x^2 - \lambda^2 \rho - 1 \right),$$

et la somme des carrés de ces solutions est égale à ρ , c'est-à-dire à $U + V$; l'équation transformée est donc, en général, une équation E_{n+2} .

Nous avons vu (64) que si la fonction transformante est égale à la solution isotrope $e^{-i\varphi}$, l'équation se transforme en une équation E_n ; le résultat subsiste pour une solution isotrope quelconque, puisque rien ne distingue ces solutions les unes des autres.

On verrait de même que si λ est une solution linéaire, la transformée est une équation E_{n+1} . Donc :

Si l'on transforme par la méthode de M. Moutard une équation E_n , la transformée sera :

*Une équation E_n si la solution transformante est une solution isotrope ;
Une équation E_{n+1} si cette solution est une solution linéaire ;
Une équation E_{n+2} dans le cas général.*

Il importe de remarquer que les équations E_{n+2} ainsi obtenues sont des équations particulières. En effet, on a

$$X_{n+2} + iX_{n+1} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Tous les groupes quadratiques ont une solution isotrope commune.

66. Soit A un réseau orthogonal à une congruence plusieurs fois C; ce réseau sera C d'une infinité de manières, c'est-à-dire (45) qu'il sera applicable au second degré sur une infinité de réseaux A', A'', ..., de l'espace à cinq dimensions. Soient $(\xi_1, \dots, \xi_5; \eta_1, \dots, \eta_5)$ les coordonnées normales des tangentes au réseau A; $(\xi'_1, \dots, \xi'_5; \eta'_1, \dots, \eta'_5)$ celles des tangentes à A'; $(\xi''_1, \dots, \xi''_5; \eta''_1, \dots, \eta''_5)$ celles des tangentes à A''. On aura (n° 45)

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \xi^2 = \sum \xi'^2 = \sum \xi''^2 \\ \sum \eta^2 = \sum \eta'^2 = \sum \eta''^2 \\ \sum \xi \eta = \sum \xi' \eta' = \sum \xi'' \eta'', \\ \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial \xi'}{\partial u} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial \xi''}{\partial u} \right)^2, \\ \sum \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial \eta'}{\partial v} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial \eta''}{\partial v} \right)^2. \end{array} \right.$$

On a, d'autre part,

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial v} = n \eta, \quad \frac{\partial \xi'}{\partial v} = n \eta', \quad \frac{\partial \xi''}{\partial v} = n \eta'', \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} = m \xi, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial u} = m \xi', \quad \frac{\partial \eta''}{\partial u} = m \xi'', \end{array} \right.$$

On en déduit facilement

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \eta \frac{\partial \xi}{\partial u} = \sum \eta' \frac{\partial \xi'}{\partial u} = \sum \eta'' \frac{\partial \xi''}{\partial u}, \\ \sum \xi \frac{\partial \eta}{\partial v} = \sum \xi' \frac{\partial \eta'}{\partial v} = \sum \xi'' \frac{\partial \eta''}{\partial v}, \\ \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} = \sum \frac{\partial \xi'}{\partial u} \frac{\partial \eta'}{\partial v} = \sum \frac{\partial \xi''}{\partial u} \frac{\partial \eta''}{\partial v}. \end{array} \right.$$

Soient alors (G), (G'), (G'') des congruences harmoniques correspondantes aux réseaux (A), (A'), (A''). Les paramètres (X_1, \dots, X_5) ; (X'_1, \dots, X'_5) ; (X''_1, \dots, X''_5) des droites G, G', G'' sont donnés (n° 6) par

les formules

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = q\xi - p\eta, \\ X' = q\xi' - p\eta', \\ X'' = q\xi'' - p\eta'', \\ \frac{\partial p}{\partial v} = nq, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = mp. \end{array} \right.$$

On en déduit

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial X}{\partial u} = q \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \eta, & \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} \xi - p \frac{\partial \eta}{\partial v}, \\ \frac{\partial X'}{\partial u} = q \frac{\partial \xi'}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \eta', & \frac{\partial X'}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} \xi' - p \frac{\partial \eta'}{\partial v}, \\ \frac{\partial X''}{\partial u} = q \frac{\partial \xi''}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \eta'', & \frac{\partial X''}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} \xi'' - p \frac{\partial \eta''}{\partial v}. \end{array} \right.$$

En tenant compte des formules (67) et (69) on aura

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X^2 = \sum X'^2 = \sum X''^2, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial X'}{\partial u} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial X''}{\partial u} \right)^2, \\ \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial X'}{\partial v} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial X''}{\partial v} \right)^2, \end{array} \right.$$

et, par conséquent, ces congruences (G), (G'), (G'') sont applicables les unes sur les autres.

Si l'on prend pour p une combinaison isotrope des quantités ξ'' , q sera la combinaison isotrope correspondante des quantités η'' ; il y aura une relation isotrope entre les quantités X'' , ce qui permet de diminuer leur nombre de deux unités; on voit que les congruences (G), (G') sont O, 30. On obtient ainsi toutes les congruences O, 30 harmoniques à cette série de réseaux C, C.

67. A une congruence plusieurs fois C correspond une congruence de sphères plusieurs fois C; les centres M de ces sphères décrivent un réseau plusieurs fois K. Les coordonnées d'une telle sphère étant les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$ (64) les coordonnées de M seront

$$x_1 = -\frac{\theta_1}{\theta_5 + i\theta_4}, \quad x_2 = -\frac{\theta_2}{\theta_5 + i\theta_4}, \quad x_3 = -\frac{\theta_3}{\theta_5 + i\theta_4},$$

et par conséquent le point M décrit un réseau ponctuel à invariants égaux. Ce réseau possède les mêmes propriétés que celui qui a été déterminé au n° 64 [équation (52)]. Inversement, si un réseau K est à invariants égaux en coordonnées ponctuelles, ce réseau est le réseau des centres d'un système plusieurs fois C; donc :

Pour qu'un réseau K soit d'une infinité de manières réseau K il faut et il suffit qu'il soit parallèle à un réseau à invariants ponctuels égaux.

68. REMARQUE. — Si l'on a une congruence C, C il y aura ∞^4 réseau O qui lui sont harmoniques; ces réseaux seront O, 3O; à chacun d'eux est harmonique une nouvelle congruence C, C. On a donc une transformation géométrique de ces congruences. Cette transformation est identique à la transformation analytique des équations E_s définie au n° 65; nous avons vu qu'une telle transformation, faite avec une solution isotrope, transformait les paramètres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ de la congruence G harmonique à un réseau O, 3O dans ceux ψ_1, \dots, ψ_s de la seconde congruence G' harmonique au même réseau.

On peut remarquer que, si l'on connaît toutes les solutions quadratiques d'une équation E_s , on pourra poursuivre la transformation en effectuant seulement des quadratures.

69. Il y a ∞^1 congruences I conjuguées à un réseau O; si le réseau est 3O ces congruences seront en outre 5I. Nous allons former ces systèmes. Pour avoir les paramètres directeurs d'une droite d'une congruence conjuguée à un réseau O, il faut former une combinaison linéaire isotrope des trois premières lignes du déterminant orthogonal Δ ; nous allons raisonner sur une combinaison isotrope des deux premières lignes. Nous aurons une congruence G (X_1, \dots, X_s) dont les paramètres directeurs sont

$$X_k = x_k + iy_k.$$

Aux déterminants Δ' on fera correspondre des congruences $G'(X'_1, \dots, X'_s)$:

$$X'_k = x'_k + iy'_k.$$

Toutes ces congruences sont I, 5I; pour déterminer les quatre

coordonnées complémentaires, je pose

$$(73) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial u} = \frac{1}{U} (a + ie) \cos \varphi, & \frac{\partial Y_2}{\partial u} = \frac{1}{U} (a + ie) \sin \varphi, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial v} = -\frac{1}{V} (b + if) \sin \varphi, & \frac{\partial Y_2}{\partial v} = \frac{1}{V} (b + if) \cos \varphi. \end{cases}$$

On voit facilement que les quadratures (73) sont compatibles et que le point Y_1, Y_2 décrit un réseau O plan; posons, en outre,

$$(74) \quad \begin{cases} Y_3 - iY_4 = -1, \\ Y_3 + iY_4 = Y_1^2 + Y_2^2. \end{cases}$$

On aura alors

$$(75) \quad \begin{cases} \sum X^2 = \sum X'^2 = \sum Y^2 = 0, \\ \frac{1}{U^2} \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{U'^2} \sum \left(\frac{\partial X'}{\partial u} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2, \\ \frac{1}{V^2} \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{V'^2} \sum \left(\frac{\partial X'}{\partial v} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2. \end{cases}$$

Enfin les quantités X, X', Y sont les solutions de l'équation

$$(76) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\frac{\partial}{\partial v} (a + ie)}{a + ie} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\frac{\partial}{\partial u} (b + if)}{b + if} \frac{\partial X}{\partial v}.$$

On voit bien que les congruences $(G), (G')$ sont $I, 5I$, les quatre coordonnées complémentaires étant Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 .

Cela posé, soit λ une solution quelconque de l'équation (73); les points $M\left(\frac{X_1}{\lambda}, \dots, \frac{X_5}{\lambda}\right); M'\left(\frac{X'_1}{\lambda}, \dots, \frac{X'_5}{\lambda}\right); N\left(\frac{Y_1}{\lambda}, \dots, \frac{Y_4}{\lambda}\right)$ décrivent des réseaux O associés, car des équations (76) on déduit facilement

$$\begin{aligned} \frac{1}{U^2} \sum \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{X}{\lambda} \right)^2 &= \frac{1}{U'^2} \sum \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{X'}{\lambda} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{Y}{\lambda} \right)^2, \\ \frac{1}{V^2} \sum \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{X}{\lambda} \right)^2 &= \frac{1}{V'^2} \sum \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{X'}{\lambda} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{Y}{\lambda} \right)^2; \end{aligned}$$

donc, en général, les réseaux M et M' sont $O, 5O$; les quatre coordonnées complémentaires pour former des réseaux $5O$ étant $\frac{Y}{\lambda}$.

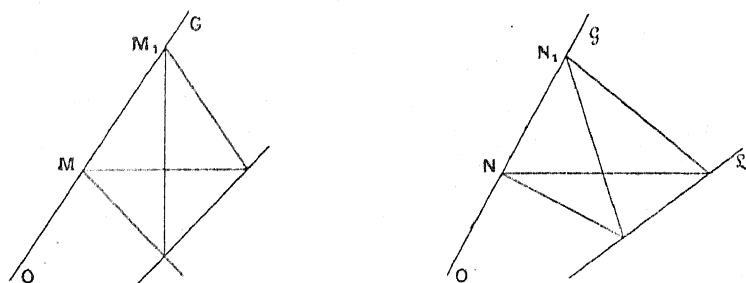
Si λ est une fonction linéaire isotrope des quantités Y , ces réseaux

sont $O, 3O$; on obtient ainsi ∞^2 réseaux $O, 3O$ conjugués à chacune des congruences G .

Ce passage d'un système $O, 3O$ à un système $I, 5I$, puis de ce dernier à un nouveau système $O, 3O$, donne évidemment une transformation du problème posé. Ce sera la *première transformation*; nous allons montrer qu'elle est contenue dans la transformation générale qui est constituée (n° 68) par le passage des systèmes C, C aux systèmes $O, 3O$.

En effet, soit G la droite qui a pour paramètre X_1, \dots, X_5 ; g celle qui a pour paramètre Y_1, \dots, Y_4 . Les points $M\left(\frac{X_1}{\lambda}, \dots, \frac{X_5}{\lambda}\right)$; $N\left(\frac{Y_1}{\lambda}, \dots, \frac{Y_4}{\lambda}\right)$ décrivent des réseaux O associés, si λ est solution de l'équation (76); soit λ_1 une autre solution; les points $M_1\left(\frac{X_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{X_5}{\lambda_1}\right)$ et $N_1\left(\frac{Y_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{Y_4}{\lambda_1}\right)$ décriront aussi des réseaux O associés. Les deux réseaux M et M_1 conjugués à une même congruence G sont harmoniques à une congruence L (fig. 18); de même N et N_1 sont conjugués

Fig. 18.



à une même congruence \mathcal{L} . Les paramètres de ces deux congruences satisfont à la même équation

$$(77) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} + RZ.$$

Ces deux congruences sont évidemment des congruences C ; si donc Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sont les paramètres de \mathcal{L} on aura

$$(78) \quad Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = h^2 U^2 + l^2 V^2.$$

Ces résultats subsistent quels que soient λ et λ_1 . Si l'on suppose

$$\lambda = Y_1 + i Y_2, \quad \lambda_1 = Y_3 \pm i Y_4,$$

M et M_1 décriront des réseaux O, 30; la somme des carrés des paramètres de \mathcal{L} est nulle, par conséquent

$$\frac{h}{l} = -\frac{V^2}{U^2}$$

et par suite, l'équation (77) est à invariants égaux, donc la congruence L est C, C.

On voit que la transformation générale permet de passer du réseau M au réseau M_1 . Ce résultat subsiste évidemment si λ et λ_1 sont deux solutions isotropes rectangulaires, c'est-à-dire si

$$(79) \quad \begin{cases} \lambda = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4, & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0, \\ \lambda_1 = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4, & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 0. \end{cases}$$

avec la condition

$$(80) \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0.$$

Cela posé, l'ensemble des réseaux O, 30 conjugués à C s'obtient en donnant à λ le système des valeurs (79). On peut représenter chacune de ces valeurs par un point ayant pour coordonnées homogènes a_1, a_2, a_3, a_4 ; ce point est situé sur la quadrique S qui a pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Notre première transformation permet de passer d'un de ces réseaux O, 30 à un autre quelconque; c'est-à-dire à aller d'un point de la quadrique S à un autre point quelconque.

D'autre part, la condition (80) prouve que les points qui correspondent à λ et à λ_1 sont situés sur une même génératrice de S. La transformation générale permet donc d'aller d'un point de S à un autre point situé sur une même génératrice.

Or on sait qu'on peut aller d'un point d'une quadrique à un autre par un chemin formé de génératrices; par conséquent, les réseaux donnés par les premières transformations pourraient être obtenus par deux transformations générales.

On aurait pu effectuer cette première transformation en introduisant les congruences O, 30 et les réseaux I, 51 au lieu des réseaux O, 30 et des congruences I, 51.

Considérons les quantités X, X' définies par les équations (44) et (46); soit ρ une solution de l'équation à laquelle satisfont ces quantités; les points $A\left(\frac{X_1}{\rho}, \dots, \frac{X_5}{\rho}\right), A'\left(\frac{X'_1}{\rho}, \dots, \frac{X'_5}{\rho}\right), B\left(\frac{\lambda}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}\right)$ décriront des réseaux applicables; si

$$\rho = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

on peut réduire à une seule les coordonnées de B; le réseau A est applicable sur un réseau à une dimension et sur une infinité de réseaux A' de l'espace à cinq dimensions; ce réseau A est I et une infinité de fois 51.

70. Soient X_1, \dots, X_5 les paramètres d'une congruence I, 51; Y_1, \dots, Y_4 les paramètres complémentaires; à cette congruence correspond une congruence de sphères; les coordonnées du centre M sont

$$x_1 = -\frac{X_1}{X_5 + iX_4}, \quad x_2 = -\frac{X_2}{X_5 + iX_4}, \quad x_3 = -\frac{X_3}{X_5 + iX_4}.$$

Le point M décrit un réseau O associé au réseau $N(Y_1, \dots, Y_4)$:

$$y_k = -\frac{Y_k}{X_5 + iX_4},$$

et l'on a

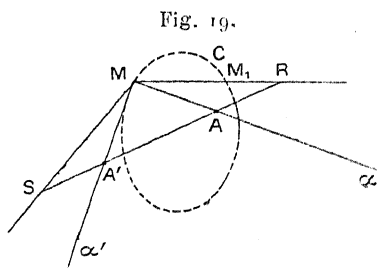
$$(81) \quad \sum y_k^2 = 0.$$

Le réseau M est donc O, 50 en général. Inversement, soit M' un réseau O, 50; il est associé à un réseau N' de l'espace à quatre dimensions; parmi les réseaux parallèles à N', il y en a deux qui satisfont à la condition (81). Soit N l'un de ces réseaux; parmi les réseaux parallèles à M', il y a un réseau M associé à N. La sphère point M décrit une congruence I, 51; donc : si M' est O, 50, il y a deux réseaux M, parallèles à M', qui correspondent à des sphères I, 51.

On verrait de même que, si M' est O, 40, il y a un réseau M parallèle à N', qui correspond à des sphères I, 51.

Enfin, si M' est O, 30, tout réseau M parallèle à M' donne une congruence de sphères I, 51.

Nous allons donner l'image de la première transformation sur l'espace à trois dimensions : soient M le point qui décrit une congruence de sphères I, 51 (*fig. 19*), C un cercle O, 30 conjugué à cette sphère ;



l'axe RS du cercle est harmonique au réseau M ; il y a deux sphères plusieurs fois C harmoniques à ce cercle ; les centres A et A' de ces sphères décrivent des réseaux conjugués à RS . Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de M ; ξ_1, ξ_2, ξ_3 les cosinus directeurs de MR ; η_1, η_2, η_3 ceux de MS . On aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= h\xi, & \frac{\partial h}{\partial v} &= lm, & \frac{\partial \xi}{\partial v} &= n\eta, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= l\eta, & \frac{\partial l}{\partial u} &= hn, & \frac{\partial \eta}{\partial u} &= m\xi. \end{aligned}$$

Les coordonnées y_1, y_2, y_3 de A peuvent s'écrire sous la forme

$$y = x + q\xi + p\eta;$$

d'où l'on tire

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\partial \xi}{\partial u} q + \left(h + \frac{\partial q}{\partial u} + pm \right) \xi + \frac{\partial p}{\partial u} \eta, \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\partial \eta}{\partial v} p + \frac{\partial q}{\partial v} \xi + \left(l + qn + \frac{\partial p}{\partial v} \right) \eta, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u} + \xi \left(mnq + \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} + m \frac{\partial p}{\partial v} + p \frac{\partial m}{\partial v} \right) \\ &\quad + \eta \left(mnp + \frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + n \frac{\partial q}{\partial u} + q \frac{\partial n}{\partial u} \right). \end{aligned} \right.$$

Le point A devant décrire un réseau, on doit avoir

$$(83) \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u \partial v} = P \frac{\partial \gamma}{\partial u} + Q \frac{\partial \gamma}{\partial v}.$$

Bien qu'il existe ici une relation linéaire homogène entre les groupes de quantités $\xi, \eta, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial v}$ les deux membres de (83) doivent contenir ces quantités avec les mêmes coefficients; sans cela le réseau A ne serait pas conjugué à une congruence harmonique au réseau M.

On a donc

$$P = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v}, \quad Q = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u},$$

et en égalant les coefficients de ξ et η dans les deux membres de (83)

$$(84) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} + m \frac{\partial p}{\partial v} + p \frac{\partial m}{\partial v} + qmn + \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \left(h + \frac{\partial q}{\partial u} + pm \right) + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + n \frac{\partial q}{\partial u} + q \frac{\partial n}{\partial u} + pmn + \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u} \left(l + \frac{\partial p}{\partial v} + qn \right). \end{cases}$$

D'autre part, A est le centre d'une sphère plusieurs fois C, et, par conséquent, A décrit un réseau à invariants égaux, ce qui permet de poser

$$(85) \quad q = \rho U, \quad p = i\rho V.$$

En substituant ces valeurs de p et q dans les équations (84) on obtient, après quelques réductions faciles,

$$(86) \quad \begin{cases} U \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + mn\rho \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} h - \frac{\partial h}{\partial v} - \rho \left(m i V' + i V \frac{\partial m}{\partial v} \right), \\ i V \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + mn\rho \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} l - \frac{\partial l}{\partial u} - \rho \left(n U' + U \frac{\partial n}{\partial u} \right). \end{cases}$$

On voit que si l'on pose

$$(87) \quad \begin{cases} h = HU, & m = M \frac{U}{V}, \\ l = LV, & n = N \frac{V}{U}, \end{cases}$$

on aura encore

$$(88) \quad \frac{\partial H}{\partial v} = LM, \quad \frac{\partial L}{\partial u} = HN,$$

et les équations (86) deviennent

$$(89) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \text{MN} \rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} \text{H} - \frac{\partial \text{H}}{\partial v} - \rho i \frac{\partial \text{M}}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \text{MN} \rho = -i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \text{L} + i \frac{\partial \text{L}}{\partial u} + i \rho \frac{\partial \text{N}}{\partial u}. \end{cases}$$

On est conduit à faire le changement d'inconnue

$$\rho = \frac{1}{r}.$$

On trouve alors

$$(90) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} - \text{MN} r = \text{H} r \frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial \text{H}}{\partial v} r^2 + i \frac{\partial \text{M}}{\partial v} r, \\ = -i \text{L} r \frac{\partial r}{\partial u} - i \frac{\partial \text{L}}{\partial u} r^2 - i \frac{\partial \text{N}}{\partial u} r. \end{cases}$$

Nous allons employer ici un artifice de calcul, qui est tout naturel lorsqu'on fait une étude géométrique approfondie de la question. Nous égalons chacun des membres des égalités (90) à

$$\text{A} r + \text{B} r^2 + \text{C} r^3,$$

A, B, C étant des fonctions de u et v que nous déterminerons de façon à rendre les équations compatibles.

On aura alors

$$(91) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\text{C}}{\text{H}} r^2 + \frac{\text{B} - \frac{\partial \text{H}}{\partial v}}{\text{H}} r + \frac{\text{A} - i \frac{\partial \text{M}}{\partial v}}{\text{H}}, \\ \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{i \text{C}}{\text{L}} r^2 + \frac{i \text{B} - \frac{\partial \text{L}}{\partial u}}{\text{L}} r + \frac{i \text{A} - \frac{\partial \text{N}}{\partial u}}{\text{L}}, \end{cases}$$

$$(92) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = \text{C} r^3 + \text{B} r^2 + (\text{A} + \text{MN}) r.$$

Nous allons différentier la première des équations (91) par rapport à u , remplacer après la différentiation $\frac{\partial r}{\partial u}$ par sa valeur fournie par la seconde; on obtiendra ainsi une valeur de $\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}$; nous calculerons de même $\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}$ en partant de la seconde équation (91); nous identifierons ces deux valeurs avec celle que donne l'équation (92). On

trouve pour $\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}$ les valeurs.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} &= r^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{C}{H} \right) + r \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A - i \frac{\partial M}{\partial v}}{H} \right) \\ &\quad + \left(2r \frac{C}{H} + \frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H} \right) \left(\frac{iC}{L} r^2 + \frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} r + \frac{iA - \frac{\partial N}{\partial u}}{L} \right) \\ &= r^2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{iC}{L} \right) + r \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{iA - \frac{\partial N}{\partial u}}{L} \right) \\ &\quad + \left(2r \frac{iC}{L} + \frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} \right) \left(\frac{C}{H} r^2 + \frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H} r + \frac{A - i \frac{\partial M}{\partial v}}{H} \right). \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de r^3 on trouve

$$C = \frac{2iC^2}{LH} = \frac{2iC^2}{LH},$$

ce qui donne

$$(93) \quad C = -\frac{iLH}{2}.$$

En égalant les coefficients de r^2 on trouve

$$\begin{aligned} B &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{C}{H} \right) + \frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H} \frac{iC}{L} + \frac{2C}{H} \frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{iC}{L} \right) + \frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} \frac{C}{H} + \frac{2iC}{L} \frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H}. \end{aligned}$$

En remplaçant C par sa valeur (93) on trouve que les deux équations donnent

$$(94) \quad B = \frac{\partial H}{\partial v} - i \frac{\partial L}{\partial u}.$$

Égalons maintenant les coefficients de r . On aura

$$\begin{aligned} A + MN &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H} \right) + \frac{2C}{H} \frac{iA - \frac{\partial N}{\partial u}}{L} + \frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H} \frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} \right) + \frac{2iC}{L} \frac{A - i \frac{\partial M}{\partial v}}{H} + \frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} \frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H}. \end{aligned}$$

Si l'on remplace B et C par leurs valeurs, ces équations deviennent des identités.

Il ne reste plus qu'à égaliser à zéro les termes indépendants de r . On aura

$$(95) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A - i \frac{\partial M}{\partial v}}{H} \right) + \frac{B - \frac{\partial H}{\partial v}}{H} \frac{iA - \frac{\partial N}{\partial u}}{L} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{iA - \frac{\partial N}{\partial u}}{L} \right) + \frac{iB - \frac{\partial L}{\partial u}}{L} \frac{A - i \frac{\partial M}{\partial v}}{H} = 0. \end{cases}$$

Il faudrait exprimer que ces deux équations ont une solution commune en A; voici comment nous allons opérer. Posons

$$(96) \quad \begin{cases} \frac{A - i \frac{\partial M}{\partial v}}{H} = \frac{i}{2} L_1, \\ \frac{iA - \frac{\partial N}{\partial u}}{L} = \frac{1}{2} H_1. \end{cases}$$

Les équations (95) donnent, après avoir remplacé B, $\frac{\partial L}{\partial u}$, $\frac{\partial H}{\partial v}$ par leurs valeurs,

$$(97) \quad \frac{\partial H_1}{\partial v} = M L_1, \quad \frac{\partial L_1}{\partial u} = N H_1$$

et, en égalant les deux valeurs de A fournies par les équations (96), on trouve

$$(98) \quad \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{1}{2} (H L_1 + L H_1) = 0.$$

Les équations (88), (97), (98) montrent que si l'on pose

$$\begin{aligned} H &= (A + iE), & H_1 &= (A - iE), \\ L &= (B + iF), & L_1 &= (B - iF), \end{aligned}$$

les quantités A, E, B, F, M, N sont les rotations d'un déterminant orthogonal à quatre lignes. En conservant les notations habituelles pour ce déterminant, on aura

$$\begin{aligned} \sum [d(x + iy)]^2 &= (H^2 du^2 + L^2 dv^2), \\ \sum [d(x - iy)]^2 &= (H_1^2 du^2 + L_1^2 dv^2). \end{aligned}$$

On voit que le réseau donné (M) doit être associé au réseau décrit par le point $(x + iy)$; c'est la condition que nous avons trouvée autrement [équation (81)].

En remplaçant A, B, C par leurs valeurs, les équations de Ricatti qui déterminent r sont

$$(99) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial v} = -\frac{iL}{2} r^2 - iNr + \frac{iL_1}{2}, \\ \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{H}{2} r^2 + iMr + \frac{H_1}{2}. \end{cases}$$

On obtient ainsi une série de points A (*fig.* 18), tous placés sur la droite $M\alpha$ qui a pour paramètres directeurs

$$U\xi + iV\alpha.$$

En changeant i en $-i$ dans les équations (99), on aurait une autre série de points A', situés sur la droite $M\alpha'$ qui a pour paramètre directeur

$$U\xi - iV\alpha.$$

Supposons que l'on connaisse le réseau M, un point A et un point A', on pourra déterminer tous les autres points sur les droites $M\alpha, M\alpha'$ à l'aide de quadratures.

Prenons un point quelconque A_i de la série A, et un point quelconque A'_i de la série A'; la droite A_iA'_i sera axe d'un cercle passant par M; ce cercle est O, 30; il est normal à une famille de surfaces, on pourra déterminer les points M, où ce cercle coupe à angle droit une surface de la famille à l'aide de quadratures, car on connaît la surface (M). La sphère point M_i est I, 5I; dans le réseau M, on connaît le couple de points A_i, A'_i. On voit qu'on peut continuer les transformations en n'effectuant que des quadratures.

71. On voit que si un réseau $A(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta_1, \dots, \eta_s)$ est I, 5I, il est applicable sur une infinité de réseaux $A'(\xi'_1, \dots, \xi'_s; \eta'_1, \dots, \eta'_s)$, $A''(\xi''_1, \dots, \xi''_s; \eta''_1, \dots, \eta''_s)$ de l'espace à cinq dimensions et sur un réseau $\mathfrak{A}(\xi, \eta)$ de l'espace à une dimension; soient $(G)(X_1, \dots, X_s)$; $G'(X'_1, \dots, X'_s)$; $G''(X''_1, \dots, X''_s)$; $g(X)$ des congruences harmoniques

correspondantes de ces réseaux. On aura

$$\begin{aligned} X_k &= q\xi_k - p\eta_k, \\ X'_k &= q\xi'_k - p\eta'_k, \\ X''_k &= q\xi''_k - p\eta''_k, \\ X_k &= q\xi - p\eta. \end{aligned}$$

Toutes ces quantités X_k, X'_k, X''_k, X satisfont à la même équation de Laplace et l'on a

$$\sum X_k^2 = \sum X_k'^2 = \sum X_k''^2 = X^2.$$

Si l'on suppose p combinaison linéaire isotrope des quantités ξ' on pourra réduire à trois le nombre des paramètres X' ; les congruences $(G), (G'')$ sont 2I, 4I; la coordonnée complémentaire pour être 2I étant X , et pour être 4I les coordonnées complémentaires sont les trois quantités X' . De chacun des réseaux tels que A', A'', \dots on déduit ∞^3 congruences G , qui sont 2I, 4I. Nous allons former ces congruences 2I, 4I, d'une autre manière, en supposant que les paramètres aient été multipliés par un même facteur, de façon à réduire la coordonnée complémentaire X à l'unité.

Les trois coordonnées complémentaires X' que nous désignerons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ forment la première ligne d'un déterminant orthogonal

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

Soient a, b, m, n , les rotations qui satisfont à la relation

$$(100) \quad ab + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

Les paramètres (x_1, x_2, \dots, x_5) de G forment la première ligne d'un déterminant orthogonal Δ de l'espace à cinq dimensions :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_5 \\ y_1 & \dots & y_5 \\ z_1 & \dots & z_5 \\ \xi_1 & \dots & \xi_5 \\ \eta_1 & \dots & \eta_5 \end{vmatrix},$$

Soient A, B, E, F, G, K, M, N les rotations de ce déterminant, les quantités x, \dots, x_5 satisfaisant à la même équation de Laplace que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, on aura

$$(101) \quad \begin{cases} A = a\psi, \\ B = b\varphi, \end{cases}$$

et par suite

$$(102) \quad M = m \frac{\psi}{\varphi}, \quad N = n \frac{\varphi}{\psi},$$

et l'on aura la solution

$$(103) \quad ab\psi\varphi + EF + GK + \frac{\partial}{\partial v} \left(m \frac{\psi}{\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(n \frac{\varphi}{\psi} \right) = 0.$$

Des équations (100) et (103) on déduit que si l'on pose

$$(104) \quad \begin{cases} U = \frac{\psi}{\alpha\sqrt{1-\psi^2}}, & \psi_1 = \sqrt{1-\psi^2}, \\ V = \frac{\varphi}{\alpha\sqrt{1-\varphi^2}}, & \varphi_1 = \sqrt{1-\varphi^2}, \end{cases}$$

les quantités

$$(105) \quad \begin{cases} e = \frac{1}{\psi_1} E, & g = \frac{1}{\varphi_1} G, & m' = m \frac{U}{V}, \\ f = \frac{1}{\varphi_1} F, & k = \frac{1}{\psi_1} K, & n' = n \frac{V}{U}, \end{cases}$$

satisfont aux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial v} &= f m', & \frac{\partial g}{\partial v} &= k m', & ef + gk + \frac{\partial m'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= en', & \frac{\partial k}{\partial u} &= gn', \end{aligned}$$

et, par conséquent, ces quantités sont les rotations d'un déterminant orthogonal Δ_1 ,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x'_1 & \dots & x'_4 \\ y'_1 & \dots & y'_4 \\ \xi'_1 & \dots & \xi'_4 \\ \eta'_1 & \dots & \eta'_4 \end{vmatrix}.$$

Les réseaux O de l'espace à trois qui correspondent au détermi-

nant δ s'associent aux réseaux O de l'espace à quatre qui correspondent au déterminant Δ_1 .

Inversement si les déterminants δ et Δ_1 correspondent à des réseaux O associés, on pourra en déduire une infinité de déterminants Δ ayant pour rotations

$$a\vartheta, \quad e\vartheta_1, \quad g\vartheta_1, \quad M = m \frac{\vartheta}{\vartheta_1},$$

$$b\vartheta, \quad f\vartheta_1, \quad k\vartheta_1, \quad N = n \frac{\vartheta}{\vartheta_1},$$

où l'on suppose

$$\vartheta = \frac{\alpha U}{\sqrt{\alpha^2 U^2 + 1}}, \quad \vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 U^2 + 1}},$$

$$\vartheta = \frac{\alpha V}{\sqrt{\alpha^2 V^2 + 1}}, \quad \vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 V^2 + 1}},$$

α étant une constante arbitraire. On obtient ainsi la série des congruences 2I, 4I, G, G'',

Prenons une de ces congruences G qui correspond au déterminant Δ ; le réseau orthogonal à G est celui qui est enveloppé par le plan yz ; ce réseau est 2I, 4I. On forme, comme dans la théorie générale, le réseau de l'espace à deux dimensions sur lequel il est applicable; le réseau de l'espace à quatre sur lequel il est applicable est parallèle à celui qui est enveloppé par le plan $x_1 y_1$ du déterminant Δ_1 .

En faisant varier la constante α , on obtient une infinité de déterminants Δ et par suite une infinité de réseaux 2I, 4I; tous ces réseaux sont applicables les uns sur les autres, c'est-à-dire que ces réseaux sont d'une infinité de manières 5I.

Aux systèmes 2I, 4I correspond une congruence de sphères; le réseau (M) des centres est, en général, 2O, 4O. Inversement, si l'on a un réseau 2O, 4O, il y a parmi les réseaux qui lui sont parallèles deux réseaux qui sont décrits par le centre de sphères 2I, 4I.

Considérons maintenant la congruence décrite par la droite $H(\gamma \pm iz)$, cette congruence est I, 5I, les quatre coordonnées complémentaires étant les quantités $x' + y'i$ du déterminant Δ . On obtient ainsi les deux congruences I, 5I harmoniques au réseau 2I, 4I.

Ce passage des systèmes I, 5I à 2I, 4I, et inversement, constitue évidemment une transformation de notre problème. Nous dirons que c'est la *deuxième transformation*.

72. On sait que si (M) est un réseau 3O il y a ∞^3 congruences 3I qui lui sont conjuguées; si le réseau M est en outre O, ces congruences seront 3I d'une autre manière. On obtient donc des congruences 3I, 3I. Inversement soient $G(X_1, \dots, X_3)$ une congruence 3I, 3I; (Y_1, Y_2) les paramètres complémentaires pour la première manière; (Z_1, Z_2) ceux qui correspondent à la seconde. Si λ est une solution de l'équation à laquelle satisfont les quantités X, Y, Z, le point $\left(\frac{X_1}{\lambda}, \dots, \frac{X_3}{\lambda}\right)$ décrit un réseau qui sera en général 3O, 3O: les coordonnées complémentaires étant d'une part $\left(\frac{Y_1}{\lambda}, \frac{Y_2}{\lambda}\right)$ et d'autre part $\left(\frac{Z_1}{\lambda}, \frac{Z_2}{\lambda}\right)$.

Si $\lambda = Y_1 \pm iY_2$ le réseau devient O, 3O. On obtient ainsi deux séries A, A' de tels réseaux; si $\lambda = Z_1 \pm iZ_2$ on a encore des réseaux O, 3O; on obtient deux séries B, B' de ces réseaux.

Ce passage des systèmes O, 3O aux systèmes 3I, 3I et inversement donne une transformation de notre problème. Ce sera la *troisième transformation*. Nous allons montrer qu'elle est comprise dans la transformation générale.

En effet on vérifie facilement que les tangentes correspondantes des réseaux A et A' sont également inclinées sur la droite G, comme cela a lieu dans l'espace ordinaire pour l'inversion. Il ne peut donc pas en être de même des réseaux A et B; ces deux réseaux ont une congruence harmonique commune, soient R et S les foyers de cette congruence; les triangles RSA et RSB ne sont pas égaux, il en résulte (58) que la congruence RS est plusieurs fois C; donc la transformation générale permet de passer de A à B ou B', de A' à B ou B'; en la répétant deux fois on pourra passer de A à A'.

Or l'effet de la troisième transformation, quand on l'applique à des réseaux O, 3O, est de passer de A à A' ou B ou B'.

Il est facile de former les réseaux 3I, 3I en partant des congruences O, 3O. Soient en effet $G(X_1, \dots, X_3)$; $G'(X'_1, \dots, X'_3)$; $G''(X''_1, \dots, X''_3)$ des congruences O, 3O (62), toutes applicables les unes sur les autres et applicables sur la congruence $D(\lambda, \mu, \nu)$ de l'espace à trois dimensions; si ρ est une solution de l'équation à laquelle satisfont les quantités X, X', X'', λ, μ, ν , les points $A\left(\frac{X_1}{\rho}, \dots, \frac{X_3}{\rho}\right)$; $A'\left(\frac{X'_1}{\rho}, \dots, \frac{X'_3}{\rho}\right)$; $A''\left(\frac{X''_1}{\rho}, \dots, \frac{X''_3}{\rho}\right)$; $B\left(\frac{\lambda}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}\right)$ décrivent des réseaux applicables. Si ρ est

une combinaison linéaire isotrope des quantités X' on peut supprimer deux des coordonnées de A' , le réseau A est donc applicable sur deux réseaux A' et B de l'espace à trois; ce réseau est donc 3 I, 3 I; il est en outre applicable sur une infinité de réseaux A'' de l'espace à cinq; il est donc 5 I d'une infinité de manières. Nous avons déjà trouvé de pareils réseaux au n° 63.

Le centre M d'une congruence de sphères 3 I, 3 I décrit en général un réseau 3 O, 3 O. Inversement, si l'on se donne un réseau 3 O, 3 O, il y a deux réseaux parallèles qui sont le réseau des centres de congruences de sphères 3 I, 3 I. Il peut y avoir exception quand il y a des relations entre les deux groupes de coordonnées complémentaires, c'est par exemple le cas pour les réseaux d'une quadrique.

On peut ainsi obtenir les systèmes 3 I, 3 I en partant des systèmes 2 I, 4 I. En effet, soit, $A(x_1, \dots, x_5)$ un réseau 2 I, 4 I; il est applicable sur un réseau $M(y_1, y_2)$ de l'espace à deux; sur un réseau $N(z_1, z_2, \dots, z_4)$ de l'espace à quatre et sur une infinité de réseaux $A'(x'_1, \dots, x'_5)$ de l'espace à cinq; soient \mathcal{G} , \mathfrak{N} , \mathfrak{X} , \mathcal{G}' des congruences harmoniques correspondantes de ces réseaux formées avec une solution θ de l'équation qui a pour solutions les quantités x, x', y, z .

Si θ est une combinaison linéaire isotrope des z , on peut réduire de deux unités le nombre des paramètres de \mathfrak{X} ; il en résulte que les congruences \mathcal{G} , \mathcal{G}' sont 3 I, 3 I, les paramètres complémentaires étant d'une part les deux paramètres de \mathfrak{N} et d'autre part les deux de \mathfrak{X} . On obtient ainsi ∞^2 congruences \mathcal{G} qui sont 3 I, 3 I.

On verrait de même qu'à chaque réseau 3 I, 3 I sont harmoniques deux séries simplement infinies et de congruences 2 I, 4 I.

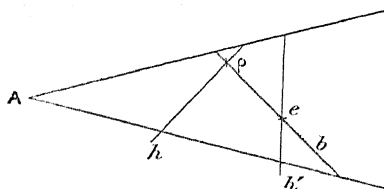
Ce passage des systèmes 2 I, 4 I aux systèmes 3 I, 3 I et inversement fournit une transformation de notre problème; c'est la *quatrième transformation*. Nous allons montrer qu'elle est comprise dans la transformation générale.

Désignons en effet par $\mathcal{G}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{X}_1, \mathcal{G}'_1$, les congruences qui correspondent à une solution θ_1 , de l'équation du réseau A ; par A_1, M_1, N_1, A' les points de rencontre de \mathcal{G} et \mathcal{G}_1 ; \mathfrak{N} et \mathfrak{N}_1 ; \mathfrak{X} et \mathfrak{X}_1 ; \mathcal{G}' et \mathcal{G}'_1 ; tous ces points décrivent des réseaux. Si θ et θ_1 sont des solutions quelconques, le réseau A_1 sera 3 O, 5 O; les coordonnées complémentaires étant d'une part les deux coordonnées de M_1 et d'autre part les quatre

de N_1 ; si θ et θ_1 sont des solutions isotropes rectangulaires on peut supprimer ces quatre coordonnées, le réseau A_1 est $O, 3 O$ et par conséquent le passage de G à G_1 peut se faire par la troisième transformation. On en déduit, comme au n° 69, que si G et G_1 correspondent à deux solutions isotropes non rectangulaires on pourra passer de l'une à l'autre en appliquant deux fois la troisième transformation.

Il est facile maintenant de voir l'effet de la deuxième transformation. Soient A le réseau $2 I, 4 I$ (*fig. 20*), \mathcal{E} et \mathcal{E}' les deux congruences $I, 5 I$

Fig. 20.



qui lui sont harmoniques; G une congruence harmonique $3 I, 3 I$; G rencontre \mathcal{E} et \mathcal{E}' en P et Q ; ces points P et Q décrivent des réseaux $O, 3 O$. Cela posé, la deuxième transformation revient à passer de l'élément \mathcal{E} à l'élément \mathcal{E}' ; ce passage peut s'effectuer par les trois opérations suivantes : 1° passage de \mathcal{E} au réseau P ; 2° passage de P à Q ; 3° passage de Q à \mathcal{E}' . La première et la troisième opération appartiennent à la première transformation; la deuxième opération n'est autre que la troisième transformation. Il en résulte que la deuxième transformation est aussi comprise dans la transformation générale.

73. Parmi les réseaux conjugués à une congruence est $4 I$, il y en a ∞' qui sont $2 O$; si en outre la congruence est $2 I$ ces réseaux seront $2 O$ d'une autre manière; on obtient donc ainsi des réseaux $2 O, 2 O$.

Inversement, si l'on a un système $2 O$ (congruence ou réseau), il y a ∞^2 systèmes conjugués (réseau ou congruence) qui sont $2 I$; si le système primitif est $2 O$ d'une autre manière, le système obtenu sera encore $4 I$; on déduit donc des systèmes $2 O, 2 O$, ∞^2 systèmes $2 I, 4 I$.

Ce passage des systèmes $2 I, 4 I$ aux systèmes $2 O, 2 O$, et inversement, constitue une nouvelle transformation de notre problème; c'est

la *cinquième transformation*. Nous allons montrer qu'elle est comprise dans la transformation générale.

Soit, en effet, $G(X_1, \dots, X_5)$ une congruence $2O, 2O$; elle est applicable sur deux congruences $H(Y_1, \dots, Y_4)$ et $L(Z_1, \dots, Z_4)$ de l'espace à quatre dimensions; soit λ une solution de l'équation à laquelle satisfont les quantités X, Y, Z . Les points $A\left(\frac{X_1}{\lambda}, \dots, \frac{X_5}{\lambda}\right)$, $B\left(\frac{Y_1}{\lambda}, \dots, \frac{Y_4}{\lambda}\right)$, $C\left(\frac{Z_1}{\lambda}, \dots, \frac{Z_4}{\lambda}\right)$ décrivent des réseaux applicables. Si λ est une combinaison linéaire isotrope des quantités Y , le point A décrit un réseau $2I, 4I$; il en est de même si λ est une combinaison linéaire isotrope des quantités Z . On obtient ainsi deux séries distinctes formées de ∞^2 réseaux $2I, 4I$ conjugués à G . On peut dire que notre cinquième transformation permet de passer de l'un de ces réseaux aux autres.

Cela posé, soit λ_1 une solution autre que λ ; à cette solution correspondent des points A_1, B_1, C_1 . Les réseaux A et A_1 étant tous deux conjugués à la congruence G , ont une congruence harmonique commune \mathcal{G} ; de même B et B_1 sont harmoniques à une même congruence \mathcal{H} ; et C et C_1 à une congruence \mathcal{L} .

Si λ et λ_1 sont des solutions quelconques, la congruence \mathcal{G} sera $5I, 5I$; les paramètres complémentaires étant, d'une part, les quatre paramètres de \mathcal{H} , et, d'autre part, les quatre paramètres de \mathcal{L} .

Cela posé, si λ et λ_1 sont deux combinaisons isotropes perpendiculaires des quantités Y , on peut faire disparaître les quatre paramètres de \mathcal{H} , il en résulte que \mathcal{G} est $I, 5I$.

Le passage de A à A_1 peut s'effectuer par la deuxième transformation. On démontre, comme au n° 69, que si λ et λ_1 sont deux combinaisons isotropes non rectangulaires des quantités Y , on passera de A à A_1 en effectuant deux fois cette deuxième transformation; donc, si, parmi les réseaux $2I, 4I$ conjugués à une congruence $2O, 2O$, on considère ceux qui appartiennent à une même série, on peut passer de l'un à l'autre, par l'application de la deuxième transformation.

Supposons maintenant que λ soit combinaison linéaire isotrope des Y ; λ_1 combinaison linéaire isotrope des Z ; on pourra supprimer dans chacune des congruences \mathcal{H} et \mathcal{L} deux paramètres; par conséquent, la congruence \mathcal{G} sera $3I, 3I$. Le passage de A à A_1 se fait à l'aide de la quatrième transformation.

Remarquons, en terminant, que si une congruence de sphères est $2O, 2O$, le réseau des centres est, en général, $2C, 2C$. Inversement, si un réseau est $2C, 2C$, il y a, en général, deux réseaux parallèles qui sont le réseau des centres d'un système de sphères $2O, 2O$.

74. Bien que les cinq transformations particulières que nous venons d'indiquer rentrent toutes dans la transformation générale, elles n'en ont pas moins leur intérêt propre. D'une part, elles décomposent, pour ainsi dire, la transformation générale; en ce sens que la transformation générale équivaut à une opération différentielle qui introduit quatre constantes dans la solution générale; les transformations particulières se décomposent en opérations qui introduisent moins de constantes; c'est au point de vue analytique, comme si, ayant à résoudre une équation différentielle du quatrième ordre, on arrivait à trouver des équations de second ordre dont toutes les solutions sont solutions de la première. D'autre part, ces transformations permettent de prendre comme point de départ des éléments autres que ceux qui servent de base à la transformation générale. Il n'est pas indifférent, en effet, d'examiner un même problème sous les aspects multiples qu'il peut présenter; d'ailleurs, ces divers éléments, qui interviennent dans ce même problème, permettent plus facilement d'en séparer les solutions particulières. C'est ce que nous montrerons dans le Chapitre suivant, où nous indiquons, d'une façon rapide, les moyens de traiter le même problème en introduisant des éléments qui appartiennent à l'espace à quatre dimensions.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DU MÊME PROBLÈME DANS L'ESPACE A QUATRE DIMENSIONS.

SOMMAIRE.

75. Le problème revient à la détermination des systèmes I, 6I. — 76. Passage des systèmes I, 6I aux systèmes O, 4O ou L, 4L. — 77. Passage des systèmes O, 4O ou L, 4L aux systèmes 3I, 4I. — 78. Passage des systèmes 3I, 4I aux systèmes 2O, 3O ou 2L, 3L. — 79. Passage des systèmes 2O, 3O ou 2L, 3L aux systèmes 2I, 5I. — 80. Passage des systèmes O, 4O aux systèmes C, 2C ou de L, 4L, à K, 2K. — 81. Tableau des problèmes équivalents dans les espaces à cinq, quatre ou trois dimensions. — 82. Tableau des cas particuliers. — 83. Remarque sur l'espace à deux dimensions.

75. Nous allons, dans ce Chapitre, montrer comment on peut ramener le problème des sphères plusieurs fois C à la recherche d'éléments situés dans l'espace à quatre dimensions. Nous indiquerons très rapidement les résultats ainsi que les transformations qui se présentent.

Nous avons vu (n° 69) qu'il y a une infinité de congruences $G(X_1, \dots, X_3)$, $G'(X'_1, \dots, X'_3)$ qui sont I, 5I et qui ont les mêmes paramètres complémentaires Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 . La droite H de l'espace à quatre dimensions qui a pour paramètres Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 décrit une congruence I qui est d'une infinité de manières 6I; les coordonnées complémentaires étant soit X_1, \dots, X_3 , soit X'_1, \dots, X'_3 ; donc :

La recherche des congruences de sphères plusieurs fois C revient à la recherche des congruences I, 6I de l'espace à quatre dimensions.

Si dans cet espace une congruence est I, 6I, elle est 6I d'une infinité de manières.

76. Soit G une congruence 6I; on sait que parmi les réseaux conjugués il y en a ∞^3 qui sont 4O; si de plus on suppose que la congruence G est I, ces réseaux seront O; si donc on remarque qu'une congruence I, 6I est 6I de ∞^1 manières, on peut dire que cette congruence admet ∞^4 séries de réseaux conjugués qui sont O, 4O.

Inversement, soit M un réseau O , il y a deux congruences conjuguées qui sont I ; si, de plus, le réseau est $4O$, ces congruences seront $6I$. Ainsi tout réseau $O, 4O$ admet deux congruences conjuguées qui sont $I, 6I$.

En prenant les systèmes harmoniques au lieu des systèmes conjugués on passerait de même des systèmes $I, 6I$ aux systèmes $L, 4L$.

77. Soit M un réseau $4O$; il y a ∞^3 congruences conjuguées qui sont $4I$; si, de plus, le réseau M est O , ces congruences seront $3I$. On déduit ainsi de chaque réseau $O, 4O$, ∞^3 congruences $3I, 4I$.

Inversement, il y a parmi les réseaux conjugués à une congruence $3I$ deux réseaux O en général; si, de plus, la congruence est $4I$, ces réseaux seront $4O$.

On peut donc passer des congruences $3I, 4I$ aux réseaux $O, 4O$ et inversement.

On verrait de même qu'on peut passer des congruences $3I, 4I$ aux réseaux $L, 4L$.

78. Soit G une congruence $4I$, il y a ∞^1 réseaux conjugués qui sont $2O$; si, de plus, G est $3I$, ces réseaux seront $3O$.

Inversement, soit M un réseau $3O$, il y a ∞^2 congruences conjuguées qui sont $3I$; si, de plus, le réseau M est $2O$, ces congruences seront $4I$, donc :

On peut passer des congruences $3I, 4I$ aux réseaux $2O, 3O$ et inversement.

On verrait de même qu'on peut passer des congruences $3I, 4I$ aux réseaux $2L, 3L$ et inversement.

79. Soit M un réseau $2O$, il y a ∞^1 congruences conjuguées qui sont $2I$; si, de plus, le réseau M est $3O$, ces congruences seront $5I$.

Inversement, soit G une congruence $5I$, il y a ∞^2 réseaux conjugués qui sont $3O$; si, de plus, G est $2I$, ces réseaux seront $2O$.

On peut donc passer des réseaux $2O, 3O$ aux congruences $2I, 5I$ et inversement.

On verrait de même qu'on peut passer des réseaux $2L, 3L$ aux congruences $2I, 5I$ et inversement.

80. Soit M un réseau $4O$, il y a ∞^1 congruences $2C$ qui lui sont harmoniques; si, de plus, M est O , ces congruences seront C .

Inversement, soit G une congruence C , il y a ∞^2 réseaux O qui lui sont conjugués; si, de plus, G est $2C$, ces réseaux seront $4O$.

On peut donc passer des réseaux O , $4O$ aux congruences C , $2C$. On verrait de même qu'on peut passer des réseaux L , $4L$ aux congruences K , $2K$.

81. Les résultats des deux Chapitres VIII et IX permettent de former un Tableau, indiquant, dans les espaces à cinq, quatre et trois dimensions, les groupes d'éléments dont la recherche revient à celle des systèmes de sphères plusieurs fois C :

Espace à cinq dimensions :

$$(I, 5I), (2I, 4I), (3I, 3I), (O, 3O), (2O, 2O), (C, C).$$

Espace à quatre dimensions :

$$(I, 6I), (2I, 5I), (3I, 4I), (O, 4O), (L, 4L), (2O, 3O), (2L, 3L), \\ (C, 2C), (K, 2K).$$

Espace à trois dimensions :

$$(O, 5O), (2O, 4O), (3O, 3O), (C, 3C), (2C, 2C), (K, K).$$

82. En jetant les yeux sur ce Tableau, on met immédiatement en évidence un certain nombre de solutions particulières du problème. Nous grouperons ces éléments particuliers de telle sorte que les éléments d'un même groupe puissent se déduire les uns des autres en prenant les systèmes conjugués et harmoniques.

Espace à quatre dimensions. Premier groupe :

$$(I, 5I), (3I, 3I), (O, 3O), (L, 3L), (C, C), (K, K).$$

Deuxième groupe :

$$(2I, 4I), (2O, 2O), (2L, 2L).$$

Espace à trois dimensions. Premier groupe :

$$(O, 4O), (2O, 3O), (C, 2C).$$

Deuxième groupe :

$$(0, 30), (20, 20), (C, C).$$

Le premier groupe de l'espace à quatre revient à la recherche des solutions quadratiques d'une équation E_1 .

Le deuxième groupe de l'espace à quatre et le premier de l'espace à trois constituent des problèmes équivalents. En effet, soit A un réseau $2L, 2L$; il sera applicable aux deux réseaux B et B' de l'espace à trois; ces réseaux B et B' sont donc C et $2C$. Les deux groupes considérés ont donc un élément commun, les systèmes $2L, 2L$ et les systèmes C, $2C$.

Le deuxième groupe de l'espace à trois revient à la recherche des solutions quadratiques d'une équation E_3 .

83. On aurait pu faire une théorie des réseaux et des congruences de l'espace à deux dimensions; nous avons omis cette étude pour ne pas trop étendre ce Mémoire. Mais on voit bien que les éléments de l'espace à deux dimensions peuvent aussi fournir des relations particulières. J'indique les deux groupes suivants :

Premier groupe. Congruences (C, C); réseaux (0, 30).

Deuxième groupe. Réseaux (20, 20).

La détermination de chacun de ces groupes revient à la résolution de l'équation $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2(u-v)} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{1}{2(u-v)} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

CHAPITRE X.

CAS OU LES FONCTIONS U OU V SE RÉDUISENT A DES CONSTANTES.

SOMMAIRE.

84. Énumération des cas particuliers. — 85. Premier cas. — 86. Deuxième cas. — 87. Troisième cas. — 88. Quatrième cas. — 89. Cinquième cas.

84. Si la fonction U (n° 60) se réduit à une constante, il en sera de même de la fonction ψ (61) et par suite de la fonction U'; il en résulte (64) que dans l'équation E_s correspondante, la somme des carrés des solutions quadratiques d'un groupe est une fonction de v seulement; si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ forment un groupe de telles solutions on aura

$$(1) \quad \sum \theta^2 = V,$$

d'où l'on déduit

$$(2) \quad \sum \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

Posons

$$(3) \quad E = \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2.$$

On aura

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2 \sum \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 2M \sum \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

E est donc une fonction de u seul; quand on passe d'un groupe de solutions à un autre la fonction E est multipliée par un facteur constant. En effet, des formules du n° 64 on déduit, en supposant U' constant,

$$\sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = U'^2 \sum \left(\frac{\partial \xi'}{\partial u} \right)^2 = U'^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2.$$

Mais

$$\sum \left(\frac{\partial \xi'}{\partial u} \right)^2 = a'^2 + e'^2 + g'^2 + m'^2$$

ou bien, en remplaçant a' , e' , g' , m' par leurs valeurs,

$$\sum \left(\frac{\partial \xi'}{\partial u} \right)^2 = \mathfrak{V}^2 (a^2 + e^2 + g^2) + m^2 \frac{\mathfrak{V}^2}{V^2}.$$

Et, en remplaçant \mathfrak{V} et V par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{\partial \theta'}{\partial u} \right)^2 &= U^{1/2} \left[\frac{1}{1 + \alpha^2 U^2} (a^2 + e^2 + g^2) + \frac{1 + \alpha^2 V^2}{1 + \alpha^2 U^2} m^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \right] \\ &= \frac{U^{1/2}}{1 + \alpha^2 U^2} \left\{ a^2 + e^2 + g^2 + m^2 + \alpha^2 \left[V^2 m^2 - U^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Le coefficient de α^2 est nul dans la parenthèse; l'expression se réduit donc à

$$(4) \quad \sum \left(\frac{\partial \theta'}{\partial u} \right)^2 = U^2 (a^2 + e^2 + g^2 + m^2).$$

Si donc E est nul pour un groupe de solutions, il sera nul pour tous les autres. Si E n'est pas nul, on peut, par un choix convenable de la variable u , réduire E à l'unité; E sera constant pour tous les groupes de la même équation.

On peut donc avoir les cas particuliers suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \sum \theta^2 = V, & \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 1, \\ \text{(II)} & \sum \theta^2 = V, & \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 0, \\ \text{(III)} & \sum \theta^2 = \text{const.}, & \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 1, \quad \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 = 1, \\ \text{(IV)} & \sum \theta^2 = \text{const.}, & \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 = 1, \\ \text{(V)} & \sum \theta^2 = \text{const.}, & \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 = 0, \\ \text{(VI)} & \sum \theta^2 = 0, & \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 1, \quad \sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 = 1. \end{array}$$

Nous laissons de côté les groupes qui correspondent à des systèmes immédiatement intégrables par la méthode de Laplace.

Il est clair que toutes les propriétés du cas général et, en particulier, toutes les transformations que nous avons trouvées, subsistent dans tous les cas particuliers. Nous allons étudier rapidement les pro-

priétés qui correspondent à ces cas particuliers, en laissant de côté le sixième cas, auquel nous réservons un Chapitre spécial à cause de son importance.

85. Considérons la congruence décrite par la droite G qui a pour paramètres les quantités $\theta_1, \dots, \theta_5$; soit F son réseau focal quand u varie; FL la seconde tangente du réseau F; les paramètres de FL sont $\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial\theta_5}{\partial u}\right)$ et, comme on a ici

$$\sum \theta \frac{\partial\theta}{\partial u} = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 \neq 0.$$

Le réseau F est O; ainsi dans ce cas, toutes les congruences C, C sont focales d'un réseau O. Inversement, si la tangente d'un réseau O décrit une congruence C, cette congruence est plusieurs fois C. En effet, prenons un réseau O quelconque, prenons la tangente qui a pour paramètres (η_1, \dots, η_5) ; ces quantités sont solutions de l'équation

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} + mn \eta.$$

Pour que la congruence décrite soit C il faut que

$$I = U^2 + m^2 V^2.$$

L'équation (5) sera à invariants égaux, donc la congruence sera plusieurs fois C. Donc :

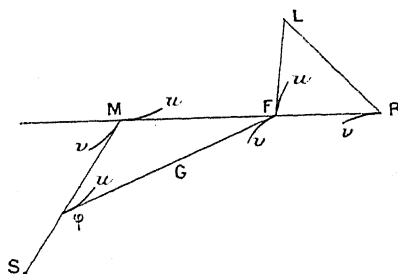
Ce premier cas particulier revient à trouver les congruences C dont l'un des réseaux focaux est O, ou bien à trouver une congruence O dont un réseau focal est C.

Il y correspond dans l'espace à trois dimensions un réseau K dont une congruence focale est C, ou un réseau C dont une congruence focale est K.

Soient M un réseau harmonique à la congruence C (*fig. 21*), MR et MS les tangentes de ce réseau; la congruence MR étant conjuguée au réseau F qui est O sera 3I. Inversement, si MR est 3I, il y a deux séries F et F' de réseaux O conjuguées à MR; les tangentes à ces réseaux qui

sont harmoniques à M sont des congruences C ayant un réseau focal qui est O . Les réseaux $O, 3O$ du cas général ont donc ici une congruence focale qui est $3I$; de même les congruences $O, 3O$ du cas

Fig. 21.



général deviennent ici tangentes à un réseau $3I$. Il y correspond dans l'espace à trois dimensions des réseaux C dont une congruence focale est $3O$ ou un réseau $3O$ dont une congruence focale est C .

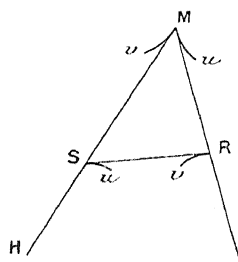
Soit maintenant H une congruence I conjuguée à M ; un réseau focal φ de cette congruence est harmonique à MR , donc φ est $4I$. Inversement, soit H une congruence I dont le réseau focal φ est $4I$; il y a ∞^2 congruences MR harmoniques à φ et qui sont $3I$; l'un des réseaux focaux M de cette congruence est conjugué à H , et, par suite, est O . On voit que les congruences $I, 5I$ du cas général sont des congruences I , tangentes à un réseau $4I$; de même, les réseaux $I, 5I$ deviennent des réseaux I , dont une congruence focale est $4I$.

Il y correspond dans l'espace à trois dimensions des réseaux O dont une tangente focale est $4O$ ou des réseaux $4O$ dont une tangente focale est O .

Nous ne rechercherons pas ce que deviennent les autres éléments du cas général; nous allons signaler de nouveaux éléments qui s'introduisent ici. Soit M (fig. 22) un réseau $3I$ dont la congruence focale H est O ; parmi les congruences RS harmoniques à M il y en a ∞^1 qui sont $2I$; le réseau focal S de cette congruence qui est conjugué à H sera $3I$. Inversement, supposons que la congruence RS soit $2I$, le réseau focal S étant $3I$; il y a deux congruences H conjuguées à S et qui sont O ; soit M le réseau focal de H qui est harmo-

nique à RS; M sera 3I. Il y a donc équivalence entre les deux systèmes d'éléments introduits; ce passage du système M, II au système RS, S fournit une *transformation de notre problème*.

Fig. 22.



Prenons maintenant un réseau M qui est 3I et dont la congruence focale H soit 2I; parmi les congruences harmoniques à M il y a ∞^1 RS qui sont 2I (fig. 22); le réseau S de cette congruence étant conjugué à H sera 2O; on obtient ainsi des congruences 2I dont un réseau focal est 2O. On remonte facilement de ce système à celui qui a servi de point de départ.

On peut encore obtenir ces systèmes d'une autre manière; supposons que le réseau M soit I et que sa congruence focale H soit 4I. Parmi les réseaux S conjugués à H, il y en a ∞^2 qui sont 2O; une tangente focale SR de ce réseau est harmonique à M et, par conséquent, 2I.

Comme nous avons à introduire les réseaux focaux d'une congruence ou les congruences focales d'un réseau, nous désignerons ces éléments par la même notation que celle de l'élément focal, en remplaçant la grande lettre par une petite; ainsi un réseau p, i est le réseau focal d'une congruence p, I ; une congruence p, o une des congruences focales d'un réseau p, O .

Il est facile de donner un Tableau de problèmes équivalents à ce premier cas particulier.

Espace à cinq dimensions :

$$(O, 3i), (2O, 2i), (I, 4i), (2I, 3i), (C, o), (3O, i).$$

Espace à quatre dimensions :

$$(I, 4o), (I, 4l), (2I, 3o), (2I, 3l), (3I, 2o), (3I, 2l), (4I, o), (4I, l), \\ (C, 2o), (2C, o), (K, 2l), (2K, l).$$

Espace à trois dimensions :

$$(O, 4o), (2O, 3o), (C, 3o), (2C, 2o), (3C, o), (K, c).$$

On voit tout de suite un certain nombre de solutions particulières : nous groupons toujours les éléments à déterminer de telle sorte que l'on puisse passer d'un élément du groupe aux autres en prenant les systèmes conjugués ou harmoniques.

Espace à quatre dimensions :

$$\begin{array}{l} 1^{\text{er}} \quad (I, 3l), (I, 3o), (3I, l), (3I, o), (C, o), (K, l); \\ 2^{\text{e}} \quad (2I, 2o), (2I, 2l). \end{array}$$

Espace à trois dimensions :

$$\begin{array}{l} 1^{\text{er}} \quad (O, 3o), (C, 2o); \\ 2^{\text{e}} \quad (2O, 2o), (2C, o); \\ 3^{\text{e}} \quad (O, 2o), (C, o). \end{array}$$

86. Considérons encore (*fig. 21*) la congruence décrite par la droite $G(0_1, \dots, 0_3)$; soient F le réseau focal correspondant à la variable o , FL la seconde tangente du réseau F . Ici on a

$$\sum \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 0;$$

par conséquent, la congruence décrite par FL est une congruence I ; ou, en employant les notations précédentes, le réseau F est c, i ; on démontre, comme au numéro précédent, que si l'une des congruences focales d'un réseau est I , l'autre C , cette dernière est plusieurs fois C ; donc :

Le deuxième cas particulier revient à la recherche des réseaux dont l'une des congruences focales est C et l'autre I .

Il y correspond dans l'espace à trois dimensions une congruence dont un réseau focal est O et l'autre K .

Soient

M (*fig. 21*) un réseau O harmonique à la congruence G ;

MR la tangente à ce réseau quand u varie ;

R le second réseau focal de MR ;

Ce réseau R est harmonique à la congruence FL ; par conséquent, R est 2I.

Inversement, si la congruence MR est telle que le réseau focal M soit O et le réseau focal R, 2I, il y aura deux congruences FL harmoniques à R qui seront des congruences I ; l'autre congruence focale FG du réseau F, étant harmonique à M, sera C. On peut donc passer des systèmes i, c aux systèmes $o, 2i$ et inversement.

Un réseau O, 3O du cas général est ici un réseau O, réseau focal d'une congruence dont l'autre réseau focal est 2I.

Il y correspond dans l'espace à trois dimensions un réseau dont l'une des congruences focales est C et l'autre 2O.

Enfin, si H est une congruence I conjuguée au réseau M, φ le réseau focal de cette congruence qui est harmonique à MR ; φ R sera une congruence harmonique à R et, par conséquent, sera 2O. Les systèmes I, 5I du cas général deviennent des systèmes I qui, par la méthode de Laplace, se transforment en systèmes 2O.

On peut, en partant de là, indiquer des problèmes équivalents à ce deuxième cas particulier.

Espace à cinq dimensions :

$$(i, c), (o, 2i), (i, 2o).$$

Espace à quatre dimensions :

$$(i, 2k), (i, 2c), (2i, k), (2i, c), (o, 2l), (l, 2o).$$

Espace à trois dimensions :

$$(o, k); (c, 2o); (o, 2c).$$

On voit immédiatement les solutions particulières suivantes :

Espace à quatre dimensions :

$$(i, c); (i, k); (o, l).$$

Espace à trois dimensions :

$$(o, c).$$

87. Dans le troisième cas particulier, les fonctions U^2 et V^2 se réduisent à des constantes distinctes. Il en résulte (85) que si l'on considère la congruence décrite par la droite $G(\theta_1, \dots, \theta_5)$ ses deux réseaux focaux sont O. Inversement, si les deux réseaux focaux d'une congruence sont O, cette congruence est plusieurs fois C. En effet, soient $M(x_1, \dots, x_5)$ un réseau O; $MR(\xi_1, \dots, \xi_5)$ la tangente au réseau quand u varie; on a

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = h\xi, & \frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, & \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = l\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi, & \frac{\partial l}{\partial u} = hn. \end{cases}$$

Les coordonnées (y_1, \dots, y_5) d'un point R de MR sont de la forme

$$(7) \quad y = x + \rho\xi.$$

On en déduit

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} = \xi \left(h + \frac{\partial \rho}{\partial u} \right) + \eta (n\rho), \\ \frac{\partial y}{\partial v} = \xi \frac{\partial \rho}{\partial v} + \eta (l + n\rho). \end{cases}$$

Pour que le point R soit le second foyer de la congruence MR il faut que

$$(9) \quad l + n\rho = 0.$$

Pour que le point R décrive un réseau O, il faut en outre

$$(10) \quad h + \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0.$$

Or, de l'équation (9) on déduit

$$(11) \quad n \left(h + \frac{\partial \rho}{\partial u} \right) + \rho \frac{\partial n}{\partial u} = 0,$$

par conséquent, les équations (9) et (10) entraînent la condition

$$\frac{\partial n}{\partial u} = 0$$

ou $n = V$; on peut, en choisissant convenablement la variable v , supposer n constant; dans cette hypothèse, l'équation à laquelle satisfont les quantités ξ est

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = mn \xi,$$

ce qui montre que la congruence MR est plusieurs fois C. Donc :

Le troisième cas particulier revient à la recherche des congruences de l'espace à cinq dimensions dont les deux réseaux focaux sont O.

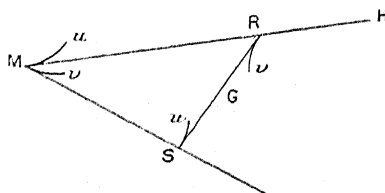
En revenant à l'espace à trois dimensions, on arrive au résultat suivant :

Le troisième cas particulier revient à la recherche des congruences de l'espace à trois dimensions dont les deux réseaux focaux sont C.

Ces congruences seront, d'après ce qui précède, plusieurs fois K.

Soit maintenant M un réseau O harmonique à la congruence $G(\theta_1, \dots, \theta_s)$ (fig. 23); les tangentes MR, MS de ce réseau décrivent

Fig. 23.



des congruences conjuguées aux réseaux focaux R et S; ces congruences sont donc 3I; ainsi les réseaux O, 3O du cas général deviennent ici des réseaux O dont les deux congruences focales sont 3I.

Soit inversement M un réseau O, dont les deux congruences focales sont 3I; à la congruence MR il y a deux séries de réseaux conjugués qui sont O; soit R l'un de ces réseaux; la tangente au réseau R, qui est harmonique à M, rencontre MS en S; le point S décrit un réseau qui est conjugué à MS; ce réseau S sera O, 2O ou 3O. Il sera O si les

Solutions particulières :

Espace à quatre dimensions :

1^{er} $(o, o), (l, l), (i, 3i);$

2^e $(2i, 2i).$

Espace à trois dimensions :

1^{er} $(o, 2o);$

2^e $(o, o).$

Ce dernier problème revient à la recherche des surfaces de M. Voss.

88. Dans ce quatrième cas particulier, la congruence G décrite par la droite dont les paramètres sont $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_3$ aura (87) un réseau focal φ (*fig.* 21) qui sera O; son réseau focal F admet pour seconde congruence focale la congruence FL, qui est une congruence I. Les deux réseaux focaux de G sont l'un O, l'autre i ; on voit qu'inversement, si les réseaux focaux d'une congruence G sont O et i , la congruence est plusieurs fois C.

Nous désignerons par la même notation, en accentuant la lettre pour l'un d'eux, deux systèmes, réseaux ou congruences, qui dérivent l'un de l'autre par l'application de la méthode de Laplace. Ainsi, si l'une des congruences focales d'un réseau est p, I , l'autre sera p, I' ; de même, si un réseau focal d'une congruence est p, O , l'autre sera p, O' .

La congruence G est, avec ces notations, O, I' ; ainsi :

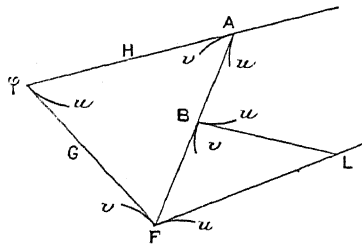
Le quatrième cas particulier revient à la recherche des systèmes o, I' ou O', i de l'espace à cinq dimensions.

Il y correspond dans l'espace à trois des systèmes c, O' ou C', o .

Soient maintenant H une congruence I conjuguée au réseau φ , A le réseau focal de A qui est harmonique à G; la congruence AF (*fig.* 25) est conjuguée au réseau F; le second réseau focal B de cette congruence est harmonique à FL, donc B est $2I$. Le réseau A est donc $i, 2I'$; la congruence AB est $I', 2i$. On voit facilement que, inversement du système HAB, on déduit deux systèmes GFL; il suffit de prendre pour FL les deux congruences I harmoniques à B.

A ces systèmes correspondent, dans l'espace à trois dimensions, des systèmes o , $2O'$ ou O' , $2o$.

Fig. 25.



Voici un Tableau indiquant des problèmes équivalents à ce quatrième cas particulier :

Espace à cinq dimensions

$$(o, I' \text{ ou } O', i), \quad (i, 2I' \text{ ou } I', 2i).$$

Espace à trois dimensions

$$(c, O' \text{ ou } C', o), \quad (o, 2O' \text{ ou } O', 2o).$$

Solutions particulières :

Espace à quatre dimensions

$$(o, I'), \quad (l, I').$$

Espace à trois dimensions

$$(o, O').$$

89. Dans le cinquième cas particulier, la congruence $G(\theta_1, \dots, \theta_5)$ est telle que ces deux réseaux focaux F et φ admettent pour secondes congruences focales des congruences I ; avec les notations que nous avons adoptées, la congruence G est (I', I') . On démontre que, inversement, si une congruence G est (I', I') , cette congruence est plusieurs fois C .

A ces systèmes correspondent dans l'espace à trois dimensions des systèmes (o', o') , c'est-à-dire des réseaux qui, par l'application de la méthode de Laplace, se transforment des deux côtés en réseaux O .

On voit tout de suite une solution particulière du problème, c'est

l'étude des systèmes (I', I') dans l'espace à quatre dimensions; ces systèmes sont ceux que j'ai étudiés dans mon Mémoire *Sur les surfaces minima non euclidiennes* (*Annales de l'École normale*, 1896).

CHAPITRE XI.

SURFACES ISOTHERMIQUES.

SOMMAIRE.

90. Sixième cas particulier. Systèmes I, C. — 91. Surfaces isothermiques. — 92. Déterminants orthogonaux qui correspondent à ces surfaces. — 93. Systèmes O, 2I. — 94. Systèmes I, 2O. — 95. Systèmes 2I, 2O, 4I et O, 3I, 4I. — 96. Systèmes 2I, 2O, 2O. — 97. Application à la déformation des quadriques de révolution. — 98. Cas où l'on part d'une surface minima. — 99. Cas où l'on part d'une surface à courbure moyenne constante. Déformation du parabolôïde quelconque. — 100. Problèmes équivalents dans l'espace à quatre dimensions. — 101. Systèmes I, C et systèmes O, L dans l'espace à quatre dimensions.

90. Dans le sixième cas particulier, la congruence $G(\theta_1, \dots, \theta_3)$ est I, C; inversement, si une congruence I est C, elle est C d'une infinité de manières. En effet, soient $\theta_1, \dots, \theta_3$ les paramètres d'une congruence I; on a

$$\sum_1^3 \theta_i^2 = 0.$$

Ces quantités θ satisfont à l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + R \theta.$$

En écrivant que la congruence est C, on trouve

$$0 = \sum \theta_i^2 = h^2 U^2 + l^2 V^2;$$

par conséquent, l'équation (1) a ses invariants égaux, donc (58) la congruence est plusieurs fois C; les systèmes C, C du cas général deviennent des systèmes I, C; ce cas se déduit du cas général en sup-

posant que les fonctions U et V se réduisent à des constantes égales.

Le centre A de la sphère qui a pour coordonnées $\theta_1, \dots, \theta_5$ décrit un réseau O; l'équation ponctuelle du réseau a ses invariants égaux; la surface A est donc une surface isothermique.

Inversement, si l'on prend le réseau formé par les lignes de courbures d'une surface isothermique, les paramètres de congruence de sphère I correspondante satisfont à une équation à invariants égaux; cette congruence est plusieurs fois C; donc :

La recherche des surfaces isothermiques revient à déterminer cinq solutions $\theta_1, \dots, \theta_5$ d'une équation

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M \theta$$

liées par la relation

$$\sum \theta_i^2 = 0$$

(DARBOUX, *Leçons*, Chap. XI).

On peut ajouter que l'équation (2) possède une infinité de groupes de cinq solutions dont la somme des carrés est nulle.

91. Nous allons indiquer rapidement quelques formules relatives aux surfaces isothermiques. Soit

$$\partial = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

un déterminant orthogonal (28) de l'espace à trois dimensions; A, B, N, M ses rotations liées (28) par les relations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial v} = BM, \\ \frac{\partial B}{\partial u} = AN, \end{cases} \quad \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial u} + AB = 0.$$

Soit (0) (X_1, X_2, X_3) un réseau O correspondant, on aura

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_i}{\partial u} = h \beta_i, & \frac{\partial h}{\partial v} = l M, \\ \frac{\partial X_i}{\partial v} = l \gamma_i, & \frac{\partial l}{\partial u} = h N, \end{cases}$$

Si le réseau (A) est isothermique, on pourra, en choisissant convenablement les variables u et v , poser

$$(5) \quad h = e^{i\varphi}, \quad l = ie^{i\varphi},$$

d'où

$$(6) \quad M = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad N = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

La recherche des surfaces isothermiques revient alors à trouver trois fonctions A, B, φ satisfaisant aux trois équations

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial v} = B \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial B}{\partial u} = -A \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + AB = 0.$$

Au déterminant δ on pourra (DARBOUX, *Leçons*, Chap. XI) faire correspondre une autre surface isothermique en prenant pour h et l les valeurs

$$h_1 = e^{-i\varphi}, \quad l_1 = -ie^{-i\varphi}.$$

En général, il n'existe pas d'autres surfaces isothermiques (on ne considère pas comme distinctes deux surfaces homothétiques) correspondant à δ . Il peut en être autrement, dans certains cas particuliers. Ainsi, si l'on considère le réseau formé par les lignes de courbure d'une quadrique, sa représentation sphérique est isothermique; on voit tout de suite trois surfaces isothermes qui ont cette représentation sphérique : la sphère, la quadrique et une surface minima. Lorsqu'un tel fait se produit, nous dirons que le réseau correspondant est *plusieurs fois isothermique*. Cherchons la condition pour qu'il en soit ainsi : s'il existe une surface isothermique correspondant à δ autre que les deux que nous venons d'indiquer, les paramètres h et l de cette surface auront les valeurs

$$h = \frac{1}{U} e^{i\psi}, \quad l = \frac{i}{V} e^{i\psi},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{l} \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{V}{U} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ N &= \frac{1}{h} \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{U}{V} \frac{\partial \psi}{\partial u}. \end{aligned}$$

En comparant avec les valeurs données par les formules (6) on trouve

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{V}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{U}{V} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{cases}$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$ tirées des équations (8) on a

$$(9) \quad (U^2 - V^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = VV' \frac{\partial \varphi}{\partial u} - UU' \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Il en résulte que, pour obtenir les systèmes plusieurs fois isothermiques, il faut trouver trois fonctions A, B, φ vérifiant les quatre équations (7) et (9). C'est un problème sur lequel je reviendrai; mais, dès maintenant, je remarque que l'équation (9) ne change pas si l'on augmente U^2 et V^2 d'une même constante; donc :

S'il y a plus de deux surfaces isothermiques qui ont une représentation sphérique donnée de leurs lignes de courbures, il en existe une infinité.

92. A chaque déterminant δ d'une surface isothermique nous ferons correspondre deux déterminants orthogonaux de l'espace à cinq dimensions : le premier

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_5 \\ y_1 & \dots & y_5 \\ z_1 & \dots & z_5 \\ \xi_1 & \dots & \xi_5 \\ \eta_1 & \dots & \eta_5 \end{vmatrix}$$

aura pour rotations (39)

$$(10) \quad \begin{cases} a = \mu \beta_1, & e = \mu \beta_2, & g = \mu \beta_3, & m = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ b = \mu \gamma_1, & f = \mu \gamma_2, & k = \mu \gamma_3, & n = +\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \end{cases}$$

où μ est une constante arbitraire. On voit facilement que ces valeurs des rotations satisfont aux équations (2) du n° 39.

Le second

$$\Delta' = \begin{vmatrix} x'_1 & \dots & x'_5 \\ y'_1 & \dots & y'_5 \\ z'_1 & \dots & z'_5 \\ \xi'_1 & \dots & \xi'_5 \\ \eta'_1 & \dots & \eta'_5 \end{vmatrix}$$

aura pour rotations

$$(11) \quad \begin{cases} a = A, & e = \mu \cos \varphi, & g = \mu \sin \varphi, & m = M = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ b = B, & f = \mu \sin \varphi, & h = \mu \cos \varphi, & n = N = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{cases}$$

μ étant la même constante que dans le cas précédent; on vérifie encore facilement que ces rotations satisfont aux équations (2) du n° 39.

Un calcul facile permet de vérifier que le second déterminant se déduit du premier par les formules

$$(12) \quad \begin{cases} x'_i = \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i, \\ \xi'_i = \beta_1 x_i + \beta_2 y_i + \beta_3 z_i, \\ \eta'_i = \gamma_1 x_i + \gamma_2 y_i + \gamma_3 z_i, \\ y'_i = -\cos \varphi \xi_i + \sin \varphi \eta_i, \\ z'_i = -\sin \varphi \xi_i - \cos \varphi \eta_i. \end{cases}$$

Si M décrit un réseau O correspondant au déterminant Δ , nous désignerons par Mx la droite passant par M et ayant pour cosinus directeurs x_1, \dots, x_5 ; on définit de même les droites $My, Mz, M\xi, M\eta$; toutes ces droites décrivent des congruences.

De même si M' décrit un réseau O correspondant au déterminant Δ' , on définira les droites $M'x', M'y', M'z', M'\xi', M'\eta'$.

93. Que deviennent les systèmes O, 3O du cas général? Les réseaux O, 3O sont ici harmoniques à une congruence I, ils sont par conséquent 2I. Inversement, si un réseau est O, 2I, les deux congruences I qui lui sont harmoniques sont C. Donc :

La recherche des surfaces isothermiques revient à celle des réseaux O de l'espace à cinq dimensions applicables sur un réseau plan.

Le réseau M, dont les tangentes ont pour paramètres les quantités $\xi_1, \dots, \xi_5; \eta_1, \dots, \eta_5$ du déterminant Δ , est O, 2I. Les tangentes du réseau plan applicable ont pour cosinus directeurs $\cos\varphi, \sin\varphi; -\sin\varphi, \cos\varphi$.

La droite M'x' décrit une congruence orthogonale au réseau M; cette congruence est O, 2I, c'est ce qu'il est facile de vérifier. En effet, les paramètres directeurs de cette congruence sont x'_1, \dots, x'_5 ; elle est 2I, le paramètre complémentaire étant i ; elle est O, car elle est manifestement applicable sur une congruence de l'espace à trois dimensions qui a pour paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Cette dernière congruence est K. Donc :

Toute congruence O, K de l'espace à trois dimensions est parallèle à une congruence de normales à une surface isothermique.

Considérons la sphère qui a pour coordonnées x'_1, \dots, x'_5 . Son centre P a pour coordonnées

$$(13) \quad X_1 = \rho x'_1, \quad X_2 = \rho x'_2, \quad X_3 = \rho x'_3, \quad -\rho = x'_5 + ix'_4,$$

son rayon est ρ .

Le réseau P est applicable sur le réseau Q(Y_1, \dots, Y_3) où

$$(14) \quad Y_1 = \rho \alpha_1, \quad Y_2 = \rho \alpha_2, \quad Y_3 = \rho \alpha_3.$$

Le rayon ρ de la sphère P est égal à la distance de Q à l'origine O.

La sphère P touche son enveloppe en deux points I et I' symétriques par rapport au plan tangent à P; l'un de ces points est la position que prend le point O quand on fait rouler la surface Q sur la surface P.

Les deux cercles I, harmoniques à la congruence de sphères P, ont pour centre les points I et I'; ces congruences de cercles sont aussi C; donc :

Les points I et I' où la sphère (P) touche son enveloppe décrivent des surfaces isothermiques.

Les réseaux P et Q sont C et en général 2O; la coordonnée complémentaire pour être 2O est ici $i\rho$.

Si ρ est constant, Q décrit une sphère, P une surface à courbure totale constante; les points I et I' sont placés sur la normale à P ; ils décrivent des surfaces à courbure moyenne constante. Dans ce cas, les réseaux P et Q sont C et O ; dans tous les autres cas ils sont $\geq O$.

Inversement, soient Q' un réseau C , $\geq O$; P' le réseau applicable. Q' étant $\geq O$, il y a deux congruences O , $Q'L$, $Q'L'$ conjuguées à Q' ; les droites $Q'L$ et $Q'L'$ sont symétriques par rapport au plan tangent à Q . Par un point fixe O menons une parallèle à $Q'L$, cette parallèle décrit une congruence, il y aura sur cette parallèle un point Q qui décrit un réseau parallèle à Q' ; le réseau Q sera applicable sur un réseau P parallèle à P' ; la sphère qui a pour centre P et pour rayon OQ décrira une congruence O , $\geq I$.

En menant par un point fixe O , une parallèle à $Q'L'$, on déterminera un second réseau Q_1 applicable sur un réseau P_1 , centre d'une congruence de sphères O , $\geq I$; donc :

Si P' est un réseau C , $\geq O$ il y a deux réseaux parallèles à P' qui sont les réseaux des centres d'une congruence de sphères O , $\geq I$.

Ces deux réseaux peuvent-ils être confondus? Il faut pour cela que Q et Q_1 soient confondus; c'est-à-dire que les droites menées de deux points fixes O , O_1 à chaque point de Q décrivent des congruences O ; ces deux droites seront également inclinées sur le plan tangent à Q ; par conséquent Q est une quadrique de révolution ayant pour foyer O et O_1 ; donc :

Pour que les réseaux P et P_1 soient confondus, il faut et il suffit que la surface P soit applicable sur une quadrique de révolution.

Nous désignerons par I_1 , I'_1 les points où la sphère P_1 touche son enveloppe. Ces points I_1 , I'_1 décrivent des surfaces isothermiques. Si l'on désigne par I le point où vient le point O quand on fait rouler Q sur P ; par I_1 le point où vient O_1 quand on fait rouler Q_1 sur P_1 , les réseaux isothermiques I et I'_1 sont parallèles; il en est de même des réseaux I' et I_1 .

En terminant, nous ferons remarquer que le cercle (P) qui a pour pôles I et I' décrit une congruence O , $\geq I$, car cette congruence de

cercles (P) est orthogonale à la congruence de sphères (P); de même le cercle (P₁) qui a pour pôles I₁ et I'₁ décrit une congruence O, 2I.

94. Les systèmes I, 5I, du cas général deviennent ici des systèmes I, 2O; en effet, ces systèmes sont des systèmes I conjugués à un réseau O, 2I, ils sont donc 2O. Inversement, si l'on se donne une congruence I, 2O, il y aura ∞^2 réseaux conjugués qui sont 2I, ces réseaux seront O puisqu'ils sont conjugués à une congruence I. On obtient une transformation des surfaces isothermiques qui correspond à la première transformation (69) du cas général.

Les paramètres directeurs d'une congruence I, 2O s'obtiennent en formant une combinaison linéaire isotrope des quantités x, y, z du déterminant Δ . Prenons, par exemple, la droite $G(X_1, \dots, X_5)$ où

$$(15) \quad X_k = x_k + iy_k, \quad (k = 1, 2, \dots, 5).$$

Déterminons Y_1 et Y_2 par les quadratures

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial u} = \mu(\beta_1 + i\beta_2) \cos \varphi, & \frac{\partial Y_2}{\partial u} = \mu(\beta_1 + i\beta_2) \sin \varphi, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial v} = -\mu(\gamma_1 + i\gamma_2) \sin \varphi, & \frac{\partial Y_2}{\partial v} = \mu(\gamma_1 + i\gamma_2) \cos \varphi, \end{cases}$$

qui sont compatibles, comme on le voit facilement. Posons ensuite

$$(17) \quad \begin{cases} Y_3 + iY_4 = -1, \\ Y_3 - iY_4 = Y_1^2 + Y_2^2. \end{cases}$$

Les quantités Y satisfont à la même équation de Laplace que les quantités X , et l'on a

$$\begin{aligned} \sum X^2 &= \sum Y^2 = 0, \\ \sum dX^2 &= \sum dY^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que la congruence $G(X_1, \dots, X_5)$ est I, 2O.

La congruence $G(Y_1, \dots, Y_4)$ de l'espace à quatre dimensions est applicable sur G , cette congruence est I, 2K.

Il est facile de former les réseaux I, 2O. Soit ρ une solution de l'équation à laquelle satisfont les quantités x'_1, \dots, x'_5 du détermi-

nant Δ' et les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ du déterminant δ . Le point A de l'espace à cinq dimensions qui a pour coordonnées $\frac{x'_1}{\rho}, \frac{x'_2}{\rho}, \dots, \frac{x'_5}{\rho}$ décrit un réseau applicable sur le réseau B qui a pour coordonnées $\frac{\alpha_1}{\rho}, \frac{\alpha_2}{\rho}, \frac{\alpha_3}{\rho}$.

Ces réseaux A et B sont $2O$, la coordonnée complémentaire étant $\frac{i}{\rho}$; si ρ est une combinaison linéaire isotrope de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ on pourra supprimer deux des coordonnées de B; le réseau A sera alors $I, 2O$.

Considérons la sphère H qui a pour coordonnées les quantités X_k ; son centre H a pour coordonnées

$$\frac{X_1}{\rho}, \quad \frac{X_2}{\rho}, \quad \frac{X_3}{\rho}, \quad -\rho = X_5 + iX_4.$$

Ce point H décrit un réseau O applicable sur le réseau K qui a pour coordonnées

$$\frac{Y_1}{\rho}, \quad \frac{Y_2}{\rho}, \quad \frac{Y_3}{\rho}, \quad \frac{Y_4}{\rho}.$$

Or, on a évidemment

$$\sum \frac{Y^2}{\rho^2} = 0.$$

Le réseau H est applicable sur un réseau situé sur une sphère de rayon nul de l'espace à quatre dimensions; il est clair que, réciproquement, si cette propriété existe, la sphère point qui décrit le réseau H forme une congruence $I, 2O$. Comme il n'y a pas de confusion possible, nous appellerons la surface H une *surface* $I, 2O$.

Le réseau H est donc, en général, un réseau $O, 2C$. Inversement, si l'on a un réseau $O, 2C$, il existe deux réseaux parallèles qui forment des surfaces $I, 2O$.

En effet, soient θ , le déterminant orthogonal qui correspond à un réseau $O, 2C$

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

a, b, m, n ses rotations qui satisfont à la relation

$$(18) \quad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab = 0.$$

Soit θ_2 le déterminant orthogonal qui correspond au réseau applicable de l'espace à quatre dimensions

$$\theta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_4 \\ \xi_1 & \cdot & \cdot & \xi_4 \\ \eta_1 & \cdot & \cdot & \eta_4 \end{vmatrix},$$

Les rotations m et n sont les mêmes pour θ_1 et θ_2 ; soient e, f, g, k les autres rotations de θ_2 . On aura

$$(19) \quad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ef + gk = 0.$$

Posons

$$(20) \quad \begin{cases} h = e + ig, & h_1 = e - ig, \\ l = f + ik, & l_1 = f - ik, \end{cases}$$

Déterminons les points $H(z_1, z_2, z_3)$, $H_1(t_1, t_2, t_3)$ par les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_k}{\partial u} &= h \beta_k, & \frac{\partial t_k}{\partial u} &= h_1 \beta_k, \\ \frac{\partial z_k}{\partial v} &= l \gamma_k, & \frac{\partial t_k}{\partial v} &= l_1 \gamma_k. \end{aligned}$$

Le point H décrit un réseau applicable sur le réseau K qui a pour coordonnées $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3, x_4 + iy_4$; de même le point H_1 décrit un réseau applicable sur le réseau K_1 qui a pour coordonnées $x_1 - iy_1, x_2 - iy_2, x_3 - iy_3, x_4 - iy_4$. Il en résulte que les surfaces H et H_1 sont des surfaces I, 20.

Des équations (18) et (19) on déduit

$$ef + gk = ab.$$

L'équation (20) donne ensuite

$$(21) \quad hl_1 + lh_1 = 2ab$$

ou bien, en désignant par R et R' les rayons de courbure de (H) , par R_1 et R'_1 les rayons de courbure correspondants de H_1 , on aura

$$RR'_1 + R'R_1 = 2;$$

si l'on remplace les surfaces H et H_1 par des surfaces homothétiques, on aura

$$(22) \quad RR'_1 + R'R_1 = \text{const.}$$

La constante étant différente de zéro. En reprenant les calculs en sens inverse, on voit que si deux surfaces ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure et si les rayons de courbure correspondants sont liés par la relation (22), ces surfaces sont $I, 2O$. Nous dirons que ces deux surfaces sont *associées*.

Surfaces associées à une sphère. — Il faut supposer $R = R' = \text{const.}$; on trouve que $R_1 + R'_1$ est constant, la surface est parallèle à une surface minima.

Si deux surfaces associées H et H_1 sont confondues, ces surfaces sont des surfaces à courbure totale constante.

Deux surfaces associées peuvent-elles être des surfaces parallèles? S'il en est ainsi le milieu M de HH_1 décrit une surface normale à HH_1 ; soient ρ et ρ' les rayons de courbure de M , $2h$ la longueur HH_1 ; les rayons de courbure de H sont $\rho - h$ et $\rho' - h$; ceux de H_1 sont $\rho + h$, $\rho' + h$; en portant dans la relation (22), on trouve que $\rho\rho'$ est constant et différent de h^2 . La surface H a sa courbure constante.

Considérons un cercle H , qui décrit une convergence $I, 2O$ conjuguée à la sphère P ; le centre H du cercle sera sur le cercle P ; ce cercle sera formé des droites isotropes HI, HI' ; la normale à la surface H est la tangente au cercle P . On voit que le point H s'obtient ainsi: par le point fixe O on mène une droite isotrope fixe Δ , cette droite coupe le plan tangent de la surface Q en h ; quand on fait rouler Q sur P , le point h vient en H , H décrit une surface $I, 2O$.

Menons ainsi, par le point fixe O_1 , une droite isotrope fixe Δ_1 parallèle à Δ ; elle coupe le plan tangent à Q_1 en h_1 . Si l'on fait rouler Q_1 sur P_1 , h_1 vient en H_1 ; le point H_1 décrit aussi une surface $I, 2O$. Les deux surfaces H et H_1 sont associées.

On sait qu'il y a ∞^2 congruences de cercles $O, 2I$ conjuguées à une congruence de sphères $I, 2O$. Les pôles I et I' de ces cercles sont situés sur les tangentes isotropes de la surface H et ces pôles décrivent

des surfaces isothermiques. La détermination de ces surfaces intervient dans la première transformation des surfaces isothermiques.

On a une première série de surfaces isothermiques situées sur la tangente isotrope de H qui a pour paramètres directeurs

$$\beta_1 + i\gamma_1, \quad \beta_2 + i\gamma_2, \quad \beta_3 + i\gamma_3.$$

Ces surfaces se déterminent en résolvant les équations de Riccati :

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{h}{2} r^2 + imr + \frac{h_1}{2}, \\ \frac{\partial r}{\partial v} = -\frac{il}{2} r^2 - inr + \frac{il_1}{2}. \end{cases}$$

Ces équations sont compatibles (n° 70). En changeant i en $-i$, on aurait les équations qui déterminent les surfaces isothermiques placées sur l'autre tangente isotrope.

On peut remarquer que chaque réseau isothermique déduit de H est parallèle à un réseau isothermique déduit de H_1 .

Si la surface H est parallèle à une surface minima, la surface H_1 sera une sphère, tous les réseaux isothermiques déduits de H_1 seront situés sur cette sphère; par conséquent tous ceux qui se déduiront de H sont des surfaces minima.

95. En suivant la même marche qu'au n° 71, on formera, dans ce cas particulier, les systèmes 2I, 4I. Prenons comme point de départ les déterminants orthogonaux θ_1 et θ_2 (n° 94); formons un nouveau déterminant orthogonal θ' :

$$\theta' = \begin{vmatrix} x'_1 & \dots & x'_5 \\ y'_1 & \dots & y'_5 \\ z'_1 & \dots & z'_5 \\ \xi'_1 & \dots & \xi'_5 \\ \eta'_1 & \dots & \eta'_5 \end{vmatrix},$$

ayant pour rotations

$$(24) \quad \begin{cases} a \cos \theta, & e \sin \theta, & g \sin \theta, & m \\ b \cos \theta, & f \sin \theta, & k \sin \theta, & n \end{cases}$$

où θ est une constante arbitraire. On vérifie facilement, en tenant

compte des équations (18) et (19), que toutes les relations qui doivent exister entre les rotations sont satisfaites.

Soit alors (N) un réseau O correspondant au déterminant θ' ; désignons par Nx' la droite passant par N et ayant pour cosinus directeurs x'_1, \dots, x'_5 ; définissons de même les droites $Ny', Nz', N\xi', N\eta'$.

La droite Nx' décrit une congruence 2I, 4I. La coordonnée complémentaire qui rend la congruence 2I est i ; les coordonnées complémentaires pour la rendre 4I sont ix_1, ix_2, ix_3 . De plus, cette congruence est 2O; en effet, si l'on pose

$$(25) \quad t_1 = \cos \theta x_1, \quad t_2 = \cos \theta x_2, \quad t_3 = \cos \theta x_3, \quad t_4 = \sin \theta,$$

on a bien

$$\Sigma x'^2 = \Sigma t^2, \quad \Sigma dx'^2 = \Sigma dt^2.$$

Cette congruence est une congruence 2I, 2O spéciale; elle est caractérisée par ce fait que la coordonnée complémentaire qui rend la congruence 2I (avec le choix que nous avons fait des paramètres cette coordonnée complémentaire est i) est donc un rapport constant avec l'un des paramètres (ici t_4) de la congruence sur laquelle elle est applicable.

Le plan $Ny'\xi'$ enveloppe un réseau qui est orthogonal à la congruence Nx' ; ce réseau est 2I, 2O, 4I. Il y a deux congruences I, 2O qui lui sont harmoniques.

Considérons, en effet, la congruence G qui a pour paramètres directeurs les quantités $y'_k + iz'_k$, cette congruence est manifestement I; d'autre part, elle est applicable sur la congruence II de l'espace à quatre dimensions qui a pour paramètres directeurs les quantités $\sin \theta (x_k + iy_k)$. On arrive au même résultat en changeant i en $-i$. On obtient ainsi les deux congruences I, 2O harmoniques au réseau.

Les formules qui précèdent permettent d'étudier la deuxième transformation du cas général (n° 71).

Le réseau N est applicable à la fois sur un réseau de l'espace à trois dimensions et sur un réseau de l'espace à quatre dimensions. Ce réseau est donc O, 3I, 4I. Inversement, tout réseau O, 3I, 4I fournit un réseau O de l'espace à trois dimensions applicable sur un réseau à quatre dimensions et permet par conséquent d'obtenir des surfaces isothermiques. Ces systèmes O, 3I, 4I jouent un rôle important dans

la déformation des quadriques, comme nous le montrerons plus tard.

Considérons maintenant la sphère (R) qui a pour coordonnées x'_1, \dots, x'_3 ; son centre R a pour coordonnées

$$\frac{x'_1}{\rho}, \quad \frac{x'_2}{\rho}, \quad \frac{x'_3}{\rho} - \rho = x'_3 + ix'_1.$$

Le réseau R est applicable sur un réseau (S) de l'espace à quatre dimensions qui a pour coordonnées

$$\frac{\alpha_1 \cos \theta}{\rho}, \quad \frac{\alpha_2 \cos \theta}{\rho}, \quad \frac{\alpha_3 \cos \theta}{\rho}, \quad \frac{\sin \theta}{\rho}.$$

Ces réseaux sont 2O, la coordonnée complémentaire étant $\frac{i}{\rho}$.

On voit que le réseau R est 2O, 2C; mais c'est un réseau 2O, 2C spécial, caractérisé par ce fait que la coordonnée complémentaire qui le rend 2O est dans un rapport constant avec une coordonnée du réseau de l'espace à quatre dimensions sur lequel il est applicable. La recherche de pareils réseaux équivaut à celle des surfaces isothermiques et l'introduction de ces réseaux permet de suivre la deuxième transformation dans l'espace à trois dimensions.

96. Soit ρ une solution de l'équation qui admet comme solutions communes les quantités $x'_1, \dots, x'_3; t_1, \dots, t_4$ (n° 95). Le point $E\left(\frac{x'_1}{\rho}, \dots, \frac{x'_3}{\rho}\right)$ de l'espace à cinq dimensions décrit un réseau applicable sur le réseau $F\left(\frac{t_1}{\rho}, \dots, \frac{t_4}{\rho}\right)$ de l'espace à quatre dimensions. Ces réseaux sont toujours 2O, la coordonnée complémentaire étant $\frac{i}{\rho}$. Prenons pour ρ une combinaison linéaire isotrope de t_1, t_2, t_3 ; par exemple

$$\rho = \alpha_2 + i\alpha_3.$$

On pourra supprimer deux des coordonnées de F, le réseau E sera 2I; il est applicable sur un réseau plan ayant pour coordonnées

$$\frac{t_3}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{t_4}{\rho}.$$

De plus, le réseau E sera encore une fois 2O, la coordonnée complémentaire étant cette fois $\frac{i\alpha_1}{\rho}$. Le réseau E est donc 2O, 2O, 2I.

Soient (z_1, z_2, \dots, z_3) les coordonnées de E; T_1 et T_2 les coordonnées complémentaires qui séparément le rendent ≥ 0 ; les coordonnées du réseau plan applicable seront

$$i \cos \theta T_1 \quad \text{et} \quad i \sin \theta T_2.$$

Il est facile de définir les congruences correspondantes. Soit G une congruence ≥ 0 , ≥ 0 , ≥ 1 ; elle sera applicable sur deux congruences H et H₁ situées dans l'espace à quatre dimensions; ces congruences H et H₁ sont d'abord ≥ 1 , elles sont applicables l'une sur l'autre, elles sont donc K. Les congruences qui leur sont orthogonales seront ≥ 1 , C. Cette remarque permet de les former tout de suite; considérons deux déterminants orthogonaux de l'espace à quatre dimensions

$$\begin{aligned} \Pi' &= \begin{vmatrix} x'_1 & \dots & x'_4 \\ y'_1 & \dots & y'_4 \\ \xi'_1 & \dots & \xi'_4 \\ \eta'_1 & \dots & \eta'_4 \end{vmatrix}, \\ \Pi'' &= \begin{vmatrix} x''_1 & \dots & x''_4 \\ y''_1 & \dots & y''_4 \\ \xi''_1 & \dots & \xi''_4 \\ \eta''_1 & \dots & \eta''_4 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

ayant pour rotations le premier

$$a, \quad \cos \varphi, \quad m = -\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$b, \quad \sin \varphi, \quad n = +\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Le second

$$a, \quad i \sin \varphi, \quad m = -\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$b, \quad -i \cos \varphi, \quad n = +\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

de sorte qu'entre a, b, φ devront exister les relations

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} = -b \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial b}{\partial u} = a \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases} \quad - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + ab + \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

On pourra former un déterminant orthogonal de l'espace à cinq dimensions

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_5 \\ y_1 & \dots & y_5 \\ z_1 & \dots & z_5 \\ \xi_1 & \dots & \xi_5 \\ \eta_1 & \dots & \eta_5 \end{vmatrix}$$

ayant pour rotations

$$a, \quad \cos \theta \cos \varphi, \quad i \sin \theta \sin \varphi, \quad m = -\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$b, \quad \cos \theta \sin \varphi, \quad -i \sin \theta \cos \varphi, \quad n = +\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

θ étant une constante arbitraire.

La congruence G qui a pour paramètres x_1, \dots, x_5 est 2I; elle est de plus 2O, 2O, car elle est applicable sur les congruences $\mathbf{H}(x'_1, \dots, x'_5)$ et $\mathbf{H}_1(x''_1, \dots, x''_5)$ de l'espace à quatre dimensions.

On pourra avec les formules des deux derniers paragraphes étudier le passage des systèmes 2I, 2O, 4I aux systèmes 2I, 2O, 2O, ce qui correspond (n° 73) à la cinquième transformation du cas général.

97. J'ai publié une Note (*Comptes rendus*, janvier 1899) relative à la déformation des quadriques de révolution. Les résultats de cette Note ont été indiqués sans démonstration, je me suis borné à dire que la démonstration repose sur la théorie des systèmes de cercles et de sphères. Depuis, ces résultats ont été démontrés par M. Darboux (*Comptes rendus*, 1899) et par M. Bianchi. Je vais donner ici la démonstration que je possédais.

Soient

Q une quadrique de révolution;

F et F' ses foyers;

C son centre;

A et A' les sommets de l'axe;

$2a$ la longueur de cet axe.

Soit P une surface applicable sur cette quadrique; menons le système conjugué commun à P et à Q; soient QL, QL' les tangentes conjuguées, QG et QG' les génératrices de la quadrique.

Tout réseau Q de cette quadrique est $2O$, les deux congruences O qui lui sont conjuguées sont décrites par les droites QF , QF' . (On vérifie que si de F comme centre on décrit une sphère, la trace de QF sur cette sphère décrit un réseau orthogonal quand Q décrit un réseau conjugué.) Il en résulte (n° 93) que les deux sphères qui ont pour centre P et pour rayon QF et QF' décrivent des congruences O , $2I$. Les points où ces sphères touchent leurs enveloppes décriront des surfaces isothermiques.

Désignons par φ et φ' les symétriques de F et F' par rapport au plan tangent de Q ; faisons rouler Q sur P ; les points F , F' , φ , φ' viennent en F_1 , F'_1 , φ_1 , φ'_1 . La sphère de rayon QF touche son enveloppe en F_1 et φ_1 ; l'autre en F'_1 et φ'_1 .

Les droites $F_1P\varphi_1$ et $F'_1P\varphi'_1$ décrivent des congruences O ; les surfaces isothermiques F_1 et φ_1 ayant même normale sont (théorème de M. Bonnet) des surfaces à courbure moyenne constante; il en est de même de F'_1 et φ'_1 .

Menons par l'axe un plan isotrope; il coupe le plan tangent suivant une droite Δ ; par chacun des points A , A' , F , F' , C menons la droite isotrope de ce plan, les droites ainsi menées rencontrent Δ en a , a' , f , f' , c ; les points a , a' sont sur les génératrices QG , QG' ; la droite Δ rencontre QL et QL' en l et l' , les points l et l' sont conjugués harmoniques par rapport à aa' et l'on a

$$cl \times cl' = \overline{ca}^2 = a^2.$$

Si l'on fait rouler Q sur P , la droite Δ vient en Δ_1 , les points a , a' , f , f' , c , l , l' viennent en a_1 , a'_1 , f_1 , f'_1 , c_1 , l_1 , l'_1 . La droite Δ_1 est normale aux surfaces décrites par a_1 , a'_1 , f_1 , f'_1 et c_1 . Les centres de courbure de ces surfaces sont l_1 et l'_1 , et comme

$$c_1 l_1 \times c_1 l'_1 = a^2,$$

c_1 décrit une surface à courbure totale constante; les points a_1 et a'_1 décrivent des surfaces à courbure moyenne constante.

On peut ajouter, aux résultats indiqués dans la Note citée, le résultat suivant: Les points f_1 et f'_1 décrivent (n° 94) des surfaces I , $2O$ associées. Considérons, par exemple, la surface f_1 , son plan tangent est $f_1F_1\varphi_1$. Les points F_1 et φ_1 décrivent des réseaux isother-

miques déduits de f_1 (n° 94). On est donc conduit à la construction suivante de la déformée d'une quadrique de révolution :

On prend une surface dont la courbure totale est égale au carré a^2 du demi-axe; sur la normale à cette surface on porte une longueur c égale à la distance du foyer au centre. Le point ainsi obtenu décrit une surface (S). En résolvant l'équation de Riccati (23) et celle qui s'en déduit en remplaçant i par $-i$ au deuxième membre, on déterminera sur une tangente isotrope de S une première série de points F, sur la seconde une série de points φ . Le plan mené par la normale à S perpendiculairement à une quelconque des droites F φ enveloppe une surface applicable sur la quadrique.

Toutes les surfaces F et φ qui se déduisent de la surface S sont des surfaces à courbure moyenne constante.

98. Si l'on part d'une surface minima, il faut supposer dans les formules des n°s 91 et 92

$$A = e^{i\varphi}, \quad B = ie^{i\varphi}.$$

Les deux dérivées des quantités (déterminant Δ' , n° 92)

$$\mu x'_k - (y'_k + iz'_k)$$

sont nulles, ces quantités se réduisent à des constantes. On peut donc poser

$$(27) \quad \mu x'_k - y'_k - iz'_k = p_k.$$

En élevant au carré on trouve

$$\sum p_k^2 = \mu^2.$$

En faisant une substitution orthogonale, on peut supposer

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0, \quad p_5 = \mu.$$

En multipliant chaque équation (27) par x'_k , et en ajoutant, on trouve

$$\mu = \sum p_k x'_k,$$

et avec la façon dont nous avons choisi les quantités p

$$(28) \quad x_3 = 1.$$

Ce qui montre que la sphère P qui a pour coordonnées x_1, \dots, x_3 est tangente à une sphère fixe (la sphère qui a pour coordonnées $0, 0, 0, 0, 1$). Par une inversion, on peut supposer que la sphère P, qui est O, 2I, est tangente à un plan fixe II. Le réseau P est alors applicable sur un réseau Q, la distance de P à un plan fixe II étant égale à la distance du point correspondant Q à un point fixe O. [J'ai signalé ces surfaces dans mon Mémoire *Sur la déformation des surfaces* (*Journal de Mathématiques*, 1896), elles ont été étudiées depuis par M. Lévy-Civita.]

Le point de contact de la sphère P avec le plan II décrit un réseau orthogonal isotherme. Le réseau P est parallèle à un réseau C du parabolôïde de révolution.

Si la sphère P est tangente à une sphère fixe Σ de centre Ω , la somme ou la différence de ΩP et OQ est égale au rayon de Σ ; on trouve ainsi les couples de surfaces applicables, telles que la somme ou la différence des distances de deux points correspondant à un point fixe est constante. (Surfaces étudiées par M. Lévy-Civita.)

On peut remarquer que la condition $x_3 = 1$ entraîne

$$y_3 + iz_3 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = 0,$$

de sorte que, dans ce cas particulier, le déterminant Δ' se réduit à un déterminant à quatre lignes.

La droite de l'espace à quatre dimensions, qui a pour paramètres x_1, x_2, x_3, x_4 décrit une congruence I, C, K. Ce sont des systèmes que nous retrouverons plus loin.

99. Si l'on part d'une surface à courbure moyenne constante, il faut supposer

$$A = \cos \varphi, \quad B = -\sin \varphi,$$

de sorte que φ sera solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Les deux dérivées des quantités (déterminant Δ' , n° 92)

$$\mu x'_k - y'_k$$

sont nulles. On peut donc poser

$$(29) \quad \mu x'_k - y'_k = p_k,$$

p_k étant une constante. En élevant au carré, on trouve

$$\sum p_k^2 = 1 + \mu^2.$$

Nous distinguons deux cas :

$$1^\circ \quad 1 + \mu^2 \geq 0.$$

En faisant une substitution orthogonale, on peut supposer

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_k = 0, \quad p_3 = \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Des équations (29) on déduit

$$\sum p_k x'_k = \mu, \quad \sum p_k y'_k = -1$$

et, par conséquent,

$$(30) \quad x'_3 = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad y'_3 = \frac{-1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

On en déduit

$$z'_3 = 0, \quad \xi'_3 = 0, \quad \eta'_3 = 0,$$

de sorte que le déterminant Δ' se déduit facilement d'un déterminant à quatre lignes.

La sphère P, qui a pour coordonnées x_1, \dots, x_3 , coupe une sphère fixe sous un angle constant dont le cosinus est $\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

En transformant par une inversion la sphère fixe en un plan II, la sphère (P) qui reste O, 21 coupe ce plan sous un angle constant. Le réseau P est donc applicable sur un réseau Q, et la distance d'un point de P à un plan fixe II est dans un rapport constant avec la distance du point correspondant de Q à un point fixe O.

Soient X_1, X_2, X_3 les coordonnées de P, X_3 la distance de P au

plan II, R le rayon de la sphère (P). On aura

$$X_3 = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} R.$$

L'équation du réseau P admet la solution

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = R^2,$$

c'est-à-dire

$$X_1^2 + X_2^2 - \frac{1}{\mu^2} X_3^2.$$

Le réseau P est donc parallèle à un réseau C de la quadrique

$$(31) \quad X_1^2 + X_2^2 - \frac{1}{\mu^2} X_3^2 = 1;$$

par conséquent, quand on connaîtra un réseau P, on pourra, à l'aide de quadratures seulement, trouver une déformée de la quadrique (31) et inversement.

Les congruences qui ont pour paramètres x'_1, \dots, x'_5 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont applicables; il en sera de même des congruences G et H qui ont pour paramètres

$$(G) \quad x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3, \quad x'_4,$$

$$(H) \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \frac{i\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Ces congruences sont 2I, la coordonnée complémentaire étant

$$X = \sqrt{\frac{\mu^2}{1 + \mu^2} - 1} = \frac{i}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Soit ρ une solution de l'équation à laquelle satisfont les quantités x' et α ; les points A et B qui ont pour coordonnées

$$(A) \quad \frac{x'_1}{\rho}, \quad \frac{x'_2}{\rho}, \quad \frac{x'_3}{\rho}, \quad \frac{x'_4}{\rho},$$

$$(B) \quad \frac{\alpha_1}{\rho}, \quad \frac{\alpha_2}{\rho}, \quad \frac{\alpha_3}{\rho}, \quad \frac{i\mu}{\rho\sqrt{1 + \mu^2}}$$

décrivent des réseaux applicables; ces réseaux sont 2O, la coordonnée

complémentaire étant

$$\frac{i}{\rho\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Si l'on prend pour ρ une combinaison linéaire isotrope de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, par exemple

$$\rho = \alpha_1 + i\alpha_2,$$

on pourra réduire de deux unités les coordonnées de B; de sorte que les points A(X_1, \dots, X_4) et B(Y_1, Y_2),

$$X_k = \frac{x'_k}{\rho}, \quad Y_1 = \frac{\alpha_3}{\rho}, \quad Y_2 = \frac{i\mu}{\rho\sqrt{1+\mu^2}}$$

décrivent des réseaux applicables. Ces réseaux sont $2O$, la coordonnée complémentaire étant

$$\frac{1}{\mu} Y_2.$$

Il en résulte que l'équation de ces réseaux admet la solution

$$Y_1^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) Y_2^2.$$

Si l'on considère alors les deux réseaux de l'espace à trois dimensions applicables l'un sur l'autre : A(X_1, X_2, X_3), B(Y_1, Y_2, iX_4), on voit que le réseau B₁ est parallèle à un réseau C du parabolôïde

$$(32) \quad Y_1^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) Y_2^2 = 2Y_3.$$

Donc :

Quand on connaît une déformée de la quadrique (31) on en déduit, à l'aide de quadratures, une déformée de la quadrique (32) et inversement.

[M. Servant a montré, en introduisant des éléments différents, que la déformation du parabolôïde quelconque est, à des opérations différentielles près qui n'introduisent que des constantes, un problème équivalent à la déformation de la sphère : *Sur les surfaces non-euclidiennes à courbure moyenne constante (Comptes rendus, 1900)*. — Voir aussi ma Note : *Sur la déformation du parabolôïde (Comptes rendus, 1901)*.]

$$1 + \mu^2 = 0, \quad \mu = i.$$

En faisant une substitution orthogonale, on peut supposer

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, \quad p_4 = i\lambda; \quad p_5 = \lambda,$$

λ étant une constante. Les équations (29) donnent

$$\sum p_k x'_k = i, \quad \sum p_k y'_k = -i$$

et, par conséquent,

$$x'_3 + ix'_4 = \frac{i}{\lambda}, \quad y'_3 + iy'_4 = -\frac{i}{\lambda},$$

d'où l'on déduit

$$\xi'_3 + i\xi'_4 = 0, \quad \eta'_3 + i\eta'_4 = 0, \quad z'_3 + iz'_4 = 0.$$

La sphère S, qui a pour coordonnées x'_1, \dots, x'_5 , a un rayon constant $\frac{\lambda}{i}$; son centre a pour coordonnées

$$\frac{\lambda}{i} x'_1, \quad \frac{\lambda}{i} x'_2, \quad \frac{\lambda}{i} x'_3;$$

il décrit une surface à courbure totale constante applicable sur la sphère décrite par le point qui a pour coordonnées

$$\frac{\lambda}{i} \alpha_1, \quad \frac{\lambda}{i} \alpha_2, \quad \frac{\lambda}{i} \alpha_3.$$

Remarquons maintenant que, si ρ est une solution commune de l'équation à laquelle satisfont les quantités x' et α , les deux points

$$A\left(\frac{x'_1}{\rho}, \dots, \frac{x'_5}{\rho}\right) \quad \text{et} \quad B\left(\frac{\alpha_1}{\rho}, \frac{\alpha_2}{\rho}, \frac{\alpha_3}{\rho}\right)$$

décrivent des réseaux applicables; ces réseaux sont 2 O, la coordonnée complémentaire étant $\frac{i}{\rho}$.

Si l'on prend pour ρ une combinaison linéaire isotrope de x'_1, x'_2, x'_3 ; par exemple

$$\rho = x'_1 + ix'_2,$$

on pourra réduire de deux unités le nombre des coordonnées de A; on aura deux réseaux de l'espace à trois applicables l'un sur l'autre.

Les coordonnées de ces réseaux sont :

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \frac{x'_3}{\rho}, \quad \frac{x'_4}{\rho}, \quad \frac{x'_5}{\rho} \\ \text{(B)} \quad & \frac{\alpha_1}{\rho}, \quad \frac{\alpha_2}{\rho}, \quad \frac{\alpha_3}{\rho} \end{aligned} \quad \rho = x'_1 + i x'_2.$$

Désignons par X_3, X_4, X_5 les coordonnées de A, la coordonnée complémentaire est

$$\frac{\lambda}{i} (iX_4 + X_5).$$

Il en résulte que l'équation du réseau admet la solution

$$X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 - \lambda^2 (X_3 + iX_4)^2,$$

c'est-à-dire que le réseau A est parallèle à un réseau de la quadrique

$$X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 - \lambda^2 (X_3 + iX_4)^2 = 1,$$

ce qui permet de déformer cette quadrique.

400. Nous allons indiquer rapidement les propriétés d'éléments de l'espace à quatre dimensions dont la recherche équivaut à celle des surfaces isothermiques.

Les systèmes O, 4O du cas général (n° 77) deviennent ici des systèmes O, 2L; c'est-à-dire des réseaux O de l'espace à quatre dimensions, applicables sur un réseau de l'espace à trois dimensions.

Ces réseaux correspondent au déterminant orthogonal θ_2 (n° 94); le réseau applicable de l'espace à trois correspond au déterminant orthogonal θ_1 (n° 94). Ces réseaux sont, en outre, applicables sur une infinité de réseaux de l'espace à cinq dimensions, correspondant aux déterminants θ' (n° 95).

Tout réseau orthogonal à un réseau O, 2L sera L, 2O; c'est-à-dire un réseau 2O applicable sur un réseau de l'espace à deux dimensions. On forme facilement ces réseaux L, 2O.

Soit M un réseau O, 2L; il y a deux congruences I qui lui sont conjuguées, le réseau étant 2L, ces congruences seront en général 2K; de plus, toute congruence I étant orthogonale à elle-même, elle ne peut être 2K sans être 2C.

Les paramètres de l'une de ces congruences G sont

$$X_1 = x_1 + iy_1, \quad X_2 = x_2 + iy_2, \quad X_3 = x_3 + iy_3, \quad X_4 = x_4 + iy_4,$$

les quantités x et y étant celles du déterminant θ_2 . Cette congruence est applicable sur la congruence $G(Y_1, \dots, Y_5)$ de l'espace à cinq dimensions dont les paramètres sont

$$Y_k = \frac{1}{\sin \theta} (y'_k + iz'_k),$$

les quantités y' et z' étant celles du déterminant θ' (n° 95).

Ces congruences $I, 2K, 2G$ sont les congruences $I, 6I$ du cas général.

Parmi les réseaux conjugués à cette congruence, il y en a ∞^3 qui sont $O, 2L$; les coordonnées de ces réseaux sont

$$\frac{X_1}{\rho}, \quad \frac{X_2}{\rho}, \quad \frac{X_3}{\rho}, \quad \frac{X_4}{\rho},$$

ρ étant une combinaison isotrope de Y_1, Y_2, \dots, Y_5 .

Ce passage des systèmes $O, 2L$ aux systèmes $I, 2K$ fournit une transformation des surfaces isothermiques.

Si M est un réseau $O, 2L$, il y a ∞^1 congruences harmoniques qui seront $G, 2I$; inversement, si G est une congruence $G, 2I$, tout réseau O harmonique à cette congruence sera $2L$. Ce passage des systèmes $O, 2L$ aux systèmes $G, 2I$ constitue une seconde transformation du problème.

Si une congruence est $G, 2I$, sa congruence orthogonale sera $K, 2I$. À chaque congruence $K, 2I$ on peut faire correspondre ∞^2 réseaux conjugués qui sont $L, 2O$; inversement, d'un réseau $L, 2O$ on déduit ∞^1 congruences conjuguées, qui sont $K, 2I$.

La congruence H' qui a pour paramètre les quantités x' [déterminant Π' (n° 96)], et la congruence H'' qui a pour paramètre les quantités x'' [déterminant Π'' (n° 96)] sont des congruences $2I, K$; elles sont applicables l'une sur l'autre. Elles sont, en outre, applicables sur une infinité de congruences H de l'espace à cinq dimensions; ces congruences ont pour paramètres les quantités x des déterminants Π (n° 96).

On voit que les congruences H' et H'' sont $2K$ d'une infinité de manières.

La congruence G' qui a pour paramètre les quantités y' du déterminant Π' est $\geq I, C$; il en est de même de la congruence G'' qui a pour paramètres les quantités y'' du déterminant Π'' .

On trouverait facilement les propriétés des autres éléments introduits dans le cas général.

401. Il est clair qu'on a une solution particulière du problème en cherchant les réseaux O, L ; c'est-à-dire les réseaux O de l'espace à quatre dimensions, applicables sur un réseau plan.

J'ai étudié ces systèmes dans mon Mémoire *Sur la déformation des surfaces* (*Journal de Mathématiques*, 1896, Chap. VI).

Ces réseaux O, L correspondent au déterminant orthogonal

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_4 \\ y_1 & \dots & y_4 \\ \xi_1 & \dots & \xi_4 \\ \eta_1 & \dots & \eta_4 \end{vmatrix},$$

ayant pour rotations

$$\begin{aligned} a &= \mu \cos \varphi, & e &= \mu \sin \varphi, & m &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ b &= -\mu \sin \varphi, & f &= \mu \cos \varphi, & n &= -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned}$$

où μ est une constante et où φ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\varphi = F(u + v) + F_1(u - v).$$

Si M est un réseau O, L , le réseau N qui lui est orthogonal est aussi O, L . Ces réseaux interviennent dans la déformation du paraboloid de révolution.

Les deux congruences I harmoniques au réseau M seront C et, par conséquent, K ; l'une de ces congruences a pour paramètres

$$\theta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad \theta_2 = \xi_2 + i\eta_2, \quad \theta_3 = \xi_3 + i\eta_3, \quad \theta_4 = \xi_4 + i\eta_4;$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ satisfont à l'équation

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \left(i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \theta.$$

En faisant varier μ on obtient tous les groupes de solutions quadratiques de l'équation (33). Toutes les congruences correspondantes sont applicables; ce qui montre que ces congruences sont K d'une infinité de manières.

A chacune de ces congruences sont conjuguées ∞^3 réseaux O, L. Soit $\theta_1, \dots, \theta_4$ quatre solutions quadratiques de (33); λ une solution quelconque; déterminons X_1, \dots, X_4 par les équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_k}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \theta_k}{\partial u} - \theta_k \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \\ \frac{\partial X_k}{\partial v} &= -\lambda \frac{\partial \theta_k}{\partial v} + \theta_k \frac{\partial \lambda}{\partial v}.\end{aligned}$$

Le point $A(X_1, \dots, X_4)$ décrit un réseau O. Si λ est une combinaison linéaire isotrope des quantités $\theta_1, \dots, \theta_4$, on pourra supprimer deux des coordonnées de A, le réseau A se réduit à un réseau O plan isothermique.

Si λ est une fonction linéaire non isotrope de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, on pourra réduire d'une unité le nombre des coordonnées de A; on a un réseau tracé dans l'espace ordinaire; si l'on prend, par exemple, $\lambda = \theta_1$, le point qui a pour coordonnées X_1, X_2, X_3 décrit une surface rapportée à ses lignes de courbure; on vérifie facilement que cette surface est une surface minima.

