

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. KORN

Les vibrations universelles de la matière. Théorie mécanique de la gravitation, du frottement dans les masses continues et des phénomènes électriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 20 (1903), p. 133-154

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__133_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES
VIBRATIONS UNIVERSELLES DE LA MATIÈRE.

THÉORIE MÉCANIQUE DE LA GRAVITATION,
DU FROTTEMENT
DANS LES MASSES CONTINUES ET DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES,

PAR M. A. KORN.

Les théories mécaniques dont je tâcherai ici d'expliquer les principes se rattachent aux expériences connues de M. C.-A. Bjerknes, et ont pour but de remplacer toute action à distance par des actions se propageant d'une manière continue dans une matière très fine qui obéit, du moins pour les mouvements très rapides, aux lois de l'hydrodynamique. Supposons que la matière pondérable se compose de particules faiblement compressibles, qui nagent dans un éther (théoriquement) incompressible et infini; alors l'Analyse mathématique nous apprend que ce système admet un nombre infini de vibrations dont les durées

$$T_0, T_1, T_2, \dots, T_j, \dots$$

(décroissantes avec j) dépendent du nombre, de la forme et de la situation relative des particules compressibles. Ces vibrations peuvent être regardées comme la cause des forces apparentes, avec lesquelles les particules de la matière pondérable semblent agir les unes sur les autres. Il y aura évidemment superposition des forces correspondant à des vibrations d'ordres différents, de manière qu'il suffit d'étudier chaque vibration séparément. L'étude des vibrations d'ordre zéro nous donnera une théorie mécanique de la gravitation, une explication de la loi d'attraction de Newton; l'étude des vibrations du premier ordre nous donnera une théorie mécanique du frottement dans les masses continues, une explication de la loi de répulsion de Maxwell.

Aussi longtemps que les particules de la matière pondérable se trouvent assez éloignées les unes des autres, la gravitation l'emporte

sur toutes les autres forces correspondant aux vibrations d'ordre supérieur; mais quand les particules se rapprochent, par exemple, dans un gaz que l'on cherche à comprimer, la force de répulsion gagne de l'importance, et l'on arrive aux phénomènes du frottement que l'on observe dans les gaz.

Nous ne nous occuperons ici que des vibrations d'ordre zéro et d'ordre un, qui nous fournissent une explication des forces de Newton et de Maxwell, mais je peux ajouter que les vibrations du deuxième ordre ne jouent pas un rôle moins important : elles sont la cause des forces capillaires.

*Quelques théorèmes généraux sur les vibrations universelles
et les actions à distance qu'elles semblent produire.*

Considérons un système de particules faiblement compressibles dans un liquide infini; supposons les vitesses u , v , w continues dans tout l'espace, et posons-nous la question de savoir s'il y a la possibilité d'une vibration

$$(1) \quad u = U \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad v = V \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad w = W \sin \frac{t}{T} 2\pi.$$

T (la durée de la vibration) étant très petite par rapport à l'unité de temps, U , V et W étant des fonctions inconnues des coordonnées x , y , z et du temps t , dont les dérivées par rapport à t ne contiennent pas de termes de l'ordre $\frac{1}{T}$.

Les équations hydrodynamiques nous donnent aussitôt la réponse suivante :

Pour qu'un tel mouvement soit possible, U , V , W doivent être les dérivées partielles d'une fonction Φ , que nous appellerons le *potentiel de la vibration* en question, soit

$$(2) \quad U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

et Φ doit satisfaire à l'équation

$$(3^a) \quad \Delta \Phi = 0 \quad (\text{à l'extérieur des particules}),$$

$$(3^b) \quad \Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (\text{à l'intérieur des particules})$$

où

$$(4) \quad k^2 = 4\pi^2 \frac{\alpha^2}{T^2},$$

α^2 étant une constante particulière à la matière pondérable. La fonction Φ doit être continue avec ses dérivées du premier ordre et s'annuler à l'infini.

On peut démontrer qu'il existe une infinité de nombres

$$k_0^2, \quad k_1^2, \quad \dots, \quad k_j^2, \quad \dots$$

(croissant indéfiniment avec j), qui satisfont aux conditions du problème énoncé; on voit donc la possibilité d'une infinité de vibrations universelles de la matière pondérable avec les durées

$$(5) \quad T_j = 2\pi \frac{\alpha}{k_j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

et les potentiels Φ_j . La démonstration analytique complète de ce résultat peut être faite en s'inspirant de la méthode imaginée par M. Poincaré pour le problème classique dans lequel on veut avoir

$$\Phi = 0 \quad (\text{sur une surface } S)$$

et

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \quad (\text{à l'intérieur}).$$

Il peut y avoir superposition d'un nombre quelconque de vibrations d'ordre différent, et aux vitesses (1) correspondantes à ces vibrations on peut encore ajouter des vitesses ordinaires que nous supposons assez petites en comparaison avec les valeurs des U, V, W .

Les forces apparentes qui sembleront agir sur une particule à un observateur n'ayant pas les sens assez subtils pour discerner les vibrations dans tous leurs détails, peuvent être calculées par les relations suivantes

$$(6) \quad \begin{cases} X = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_s p \cos(vx) ds dt, \\ Y = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_s p \cos(vy) ds dt, \\ Z = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_s p \cos(vz) ds dt, \end{cases}$$

où v représente la direction de la normale *intérieure* et p la pression hydrodynamique à la surface S de la particule considérée.

Nous savons que

$$(7) \quad p = -\mu \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \quad (1),$$

où

$$(8) \quad \varphi = \Phi \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

et où μ représente la densité du liquide extérieur.

En vertu des qualités (3^a) et (3^b) de la fonction Φ on peut sans difficulté transformer les équations (6) dans les deux formes suivantes

$$(9^a) \quad \begin{cases} X = -\frac{1}{4} \mu k^2 \int_S \Phi^2 \cos(vx) ds, \\ Y = -\frac{1}{4} \mu k^2 \int_S \Phi^2 \cos(vy) ds, \\ Z = -\frac{1}{4} \mu k^2 \int_S \Phi^2 \cos(vz) ds, \end{cases}$$

$$(9^b) \quad \begin{cases} X = \frac{\mu}{2} \int_S \left\{ U [U \cos(vx) + V \cos(vy) + W \cos(vz)] \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} (U^2 + V^2 + W^2) \cos(vx) \right\} ds, \\ Y = \frac{\mu}{2} \int_S \left\{ V [U \cos(vx) + V \cos(vy) + W \cos(vz)] \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} (U^2 + V^2 + W^2) \cos(vy) \right\} ds, \\ Z = \frac{\mu}{2} \int_S \left\{ W [U \cos(vx) + V \cos(vy) + W \cos(vz)] \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} (U^2 + V^2 + W^2) \cos(vz) \right\} ds. \end{cases}$$

La première forme, les équations (9^a) se recommandent par leur simplicité pour le calcul dans des cas spéciaux, pendant que les équations (9^b) se prêtent surtout à des conclusions générales. On arrive,

(1) Nous laissons de côté la constante additive qui n'a aucune influence sur les valeurs des X, Y, Z .

par exemple, à l'aide des équations (9^b), facilement à deux théorèmes importants :

I. *Le centre de gravité d'un système de particules faiblement compressibles se meut en ligne droite avec une vitesse constante.*

II. *Pour les forces apparentes entre deux particules faiblement compressibles il y a égalité entre l'action et la réaction.*

La vibration de l'ordre zéro et la théorie de la gravitation.

On aura le cas le plus simple d'un système de particules faiblement compressibles, si l'on ne considère qu'une seule particule dans un liquide infini.

En prenant le centre de la sphère comme origine, et en introduisant les coordonnées polaires r, θ, φ par les relations

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta \cos \varphi, \\z &= r \sin \theta \sin \varphi,\end{aligned}$$

nous devons trouver une fonction Φ continue avec ses dérivées du premier ordre et s'annulant à l'infini qui satisfait à l'équation

$$(10^a) \quad \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] + k^2 \Phi = 0$$

(à l'intérieur de la sphère),

$$(10^b) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

(à l'extérieur de la sphère).

Les solutions k_j, Φ_j de ce problème sont données par les équations ($j = 0, 1, 2, \dots$)

$$(11^a) \quad (2j+1) J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R) + 2k_j R J'_{j+\frac{1}{2}}(k_j R) = 0,$$

$$(11^b) \quad \begin{cases} \Phi_j = \frac{Y_j(\theta, \varphi)}{r^{j+1}} & \text{(à l'extérieur),} \\ \Phi_j = \frac{1}{R^{j+1}} \frac{\sqrt{k_j R}}{\sqrt{k_j r}} \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R)} Y_j(\theta, \varphi) & \text{(à l'intérieur),} \end{cases}$$

où R représente le rayon de la sphère, $J_{j+\frac{1}{2}}$ la fonction de Bessel ⁽¹⁾,

$$(12) \quad J_{j+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_0^j \lambda \frac{\Pi(j+\lambda)}{\Pi(\lambda)\Pi(j-\lambda)} \left(\frac{1}{2x}\right)^\lambda \cos\left[\left(j+1-\lambda\right)\frac{\pi}{2} - x\right]$$

et les $Y_j(\theta, \varphi)$ des fonctions sphériques.

Pour $j=0$, l'équation (11^a) devient

$$\cos(k_0 R) = 0,$$

et la plus petite valeur de k_0 est

$$(13^a) \quad k_0 = \frac{\pi}{2R},$$

la fonction Φ_0 correspondante

$$(13^b) \quad \begin{cases} \Phi_0 = \frac{c}{r} & (\text{à l'extérieur}), \\ \Phi_0 = \frac{c}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{R}\right) & (\text{à l'intérieur}), \end{cases}$$

c étant une constante quelconque; les formules (13^a) et (13^b) représentent la vibration de l'ordre zéro pour une particule dans un liquide infini.

Considérons maintenant un système d'un nombre quelconque de particules dans le liquide et supposons, pour simplifier les calculs, que toutes les particules soient des sphères du même rayon R ⁽²⁾ et que les distances soient très grandes en comparaison avec R . On peut

(1) On a, pour $j=0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{\frac{3}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \\ J_{\frac{5}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(3 \frac{\sin x}{x^2} - 3 \frac{\cos x}{x} - \sin x\right). \end{aligned}$$

(2) Pendant leurs vibrations les particules changent imperceptiblement leurs formes; leurs surfaces oscillent autour d'une sphère, dont nous désignons le rayon par R .

sans difficulté développer les solutions k_0 et Φ_0 en séries procédant suivant les puissances des $\frac{R}{\rho_{ik}}$, les ρ_{ik} désignant les distances de deux particules i, k . La méthode pour y arriver consiste à développer le potentiel Φ_0 en séries de polynômes sphériques aux surfaces S_k des particules

$$(14) \quad \Phi_0 = c_k - [c_{k1} \cos(\nu x) + c_{k2} \cos(\nu y) + c_{k3} \cos(\nu z)] + \dots$$

(à la surface S_k),

à construire, d'après des méthodes connues, les fonctions Φ_0 à l'intérieur et à l'extérieur des particules et à calculer finalement les valeurs des $c_k, c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}, \dots$ et k de manière que non seulement Φ_0 , mais aussi les dérivées du premier ordre de Φ_0 soient continues au passage des surfaces S_k . En choisissant parmi les valeurs possibles k_0 celle qui ne diffère de $\frac{\pi}{2R}$ que de termes d'ordre $\frac{R}{\rho_{ik}}$, on sera sûr d'avoir affaire à la vibration de l'ordre zéro.

Pour obtenir les forces apparentes qui agissent sur une particule avec la surface S_k on n'a qu'à introduire les valeurs de Φ à cette surface dans les équations (9^a). On arrivera ainsi à un résultat très simple.

III. *La vibration de l'ordre zéro produit dans un système de particules faiblement compressibles des forces attractives entre deux particules i et k*

$$\frac{c^2}{\rho_{ik}^2},$$

où ρ_{ik} désigne la distance des particules i et k , c^2 une constante positive, qui ne dépend nullement des ρ_{ik} ; on suppose que les particules soient des sphères du même rayon R (1) et que R soit extrêmement petit en comparaison avec les distances ρ_{ik} .

On dira que les masses de deux corps pondérables ont le rapport $m_i : m_k$, s'il y a n_i particules dans un corps, n_k dans l'autre, et si

$$n_i : n_k = m_i : m_k.$$

(1) *Comp.* la remarque de la page 138.

Après cette remarque, le théorème III nous mène aussitôt à la théorie de la gravitation, à la loi de Newton.

*La vibration du premier ordre et la théorie du frottement
dans les masses continues.*

Considérons de nouveau le cas le plus simple, une seule particule dans un liquide infini; les solutions k_j, Φ_j du problème des vibrations universelles sont données par les équations (11^a) et (11^b). Après $j=0$ nous nous occuperons maintenant du cas $j=1$. L'équation (11^a) devient

$$(15) \quad \frac{k_1^2 \sin(k_1 R)}{\sin(k_1 R) - k_1 R \cos(k_1 R)} = 0,$$

et la plus petite valeur de k_1 satisfaisant à cette condition est

$$(16^a) \quad k_1 = \frac{\pi}{R},$$

les valeurs correspondantes de Φ_1 (comp. 11^b)

$$(16^b) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_1 = \frac{c_1 \cos(rx) + c_2 \cos(r\gamma) + c_3 \cos(rz)}{r^2} & (\text{à l'extérieur}), \\ \Phi_1 = \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\pi \frac{r}{R}\right) - \pi \frac{r}{R} \cos\left(\pi \frac{r}{R}\right) \right] \frac{c_1 \cos(rx) + c_2 \cos(r\gamma) + c_3 \cos(rz)}{r^2} & (\text{à l'intérieur}), \end{array} \right.$$

où c_1, c_2, c_3 désignent des constantes quelconques.

Nous posons

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = c \cos(\sigma x), \\ c_2 = c \cos(\sigma \gamma), \\ c_3 = c \cos(\sigma z), \end{array} \right.$$

et nous appellerons σ la direction de l'oscillation de la particule en question; les équations (16^b) deviennent

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_1 = c \frac{\cos(r\sigma)}{r^2} & (\text{à l'extérieur}), \\ \Phi_1 = \frac{c}{\pi} \left[\sin\left(\pi \frac{r}{R}\right) - \pi \frac{r}{R} \cos\left(\pi \frac{r}{R}\right) \right] \frac{\cos(r\sigma)}{r^2} & (\text{à l'intérieur}), \end{array} \right.$$

r étant la distance et la direction

centre de la sphère $\rightarrow (xyz)$.

Les formules (16^a) et (18) représentent les vibrations possibles du premier ordre pour une particule dans un liquide infini; la constante c et la direction σ sont tout à fait arbitraires.

Passons maintenant au cas général qu'un nombre n quelconque de particules se trouve dans le liquide, et supposons seulement que toutes les particules aient le même rayon R et que leurs distances ρ_{ik} soient très grandes en comparaison avec R . Il s'agit de trouver une vibration k_i, Φ_i de telle sorte que

$$k_i = \frac{\pi}{R} + \varepsilon,$$

où ε est d'ordre $\frac{R}{\rho_{ik}}$ par rapport à $\frac{\pi}{R}$. Alors nous serons sûrs d'avoir affaire à des vibrations du premier ordre.

La méthode pour obtenir cette solution consiste, comme dans le problème précédent (p. 138), à développer le potentiel Φ_i en séries de polynômes sphériques aux surfaces S_j des particules

$$\begin{aligned} (19) \quad \Phi_i = & a_{j1} \cos(vx) + a_{j2} \cos(vy) + a_{j3} \cos(vz) \\ & + [a_{j,11} \cos^2(vx) + a_{j,22} \cos^2(vy) + a_{j,33} \cos^2(vz)] \quad (1) \\ & + 2a_{j,23} \cos(vy) \cos(vz) + 2a_{j,31} \cos(vz) \cos(vx) + 2a_{j,12} \cos(vx) \cos(vy) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

(à la surface $S_j, j = 1, 2, \dots, n$),

à construire les fonctions Φ_i à l'intérieur et à l'extérieur des particules avec ces valeurs limites et à calculer finalement les $a_j, a_{j1}, \dots, a_{j,11}, \dots, a_{j,23} \dots$ et k , de manière que non seulement Φ_i mais aussi les dérivées du premier ordre de Φ_i soient continues au passage des surfaces S_j .

Je ne donnerai ici que les résultats en négligeant tous les termes qui sont sans importance pour notre résultat final concernant les

(1) $a_{j,11} + a_{j,22} + a_{j,33} = 0,$

pour que le terme [—] soit un polynôme sphérique du second ordre.

forces apparentes X, Y, Z. En posant

$$(20) \quad \begin{cases} a_j = A_j \sin(k_1 R), \\ a_{j1} = A_{j1} [\sin(k_1 R) - k_1 R \cos(k_1 R)], \quad \dots, \\ a_{j,11} = A_{j,11} [3 \sin(k_1 R) - 3 k_1 R \cos(k_1 R) - k_1^2 R^2 \sin(k_1 R)], \quad \dots, \\ a_{j,23} = A_{j,23} [3 \sin(k_1 R) - 3 k_1 R \cos(k_1 R) - k_1^2 R^2 \sin(k_1 R)], \quad \dots, \end{cases}$$

on trouve pour les constantes inconnues

$$k_1, \quad A_j, \quad A_{j1}, \quad \dots, \quad A_{j,11}, \quad \dots, \quad A_{j,23},$$

les relations suivantes ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$(21) \quad \begin{cases} A_{j1} \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \sum_i \frac{1}{\rho_{ji}^3} \{ A_{i1} - 3 \cos(\rho_{ji} x) \\ \quad \times [A_{i1} \cos(\rho_{ji} x) + A_{i2} \cos(\rho_{ji} y) + A_{i3} \cos(\rho_{ji} z)] \} \\ A_{j2} \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \sum_i \frac{1}{\rho_{ji}^3} \{ A_{i2} - 3 \cos(\rho_{ji} y) \\ \quad \times [A_{i1} \cos(\rho_{ji} x) + A_{i2} \cos(\rho_{ji} y) + A_{i3} \cos(\rho_{ji} z)] \} \\ A_{j3} \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \sum_i \frac{1}{\rho_{ji}^3} \{ A_{i3} - 3 \cos(\rho_{ji} z) \\ \quad \times [A_{i1} \cos(\rho_{ji} x) + A_{i2} \cos(\rho_{ji} y) + A_{i3} \cos(\rho_{ji} z)] \} \end{cases}$$

$$(22) \quad A_j = -R^2 \sum_i \frac{A_{i1} \cos(\rho_{ji} x) + A_{i2} \cos(\rho_{ji} y) - A_{i3} \cos(\rho_{ji} z)}{\rho_{ji}^2},$$

$$(23) \quad \begin{cases} A_{j,11} = \frac{15}{2\pi^2} R^4 \sum_i \frac{1}{\rho_{ji}^4} \{ [5 \cos^2(\rho_{ji} x) - 1] \\ \quad \times [A_{i1} \cos(\rho_{ji} x) + A_{i2} \cos(\rho_{ji} y) + A_{i3} \cos(\rho_{ji} z)] \\ \quad \quad \quad - 2 A_{i1} \cos(\rho_{ji} x) \}^i, \\ \dots \dots \dots \\ A_{j,23} = \frac{15}{2\pi^2} R^4 \sum_i \frac{1}{\rho_{ji}^4} \{ 5 \cos(\rho_{ji} y) \cos(\rho_{ji} z) \\ \quad \times [A_{i1} \cos(\rho_{ji} x) + A_{i2} \cos(\rho_{ji} y) + A_{i3} \cos(\rho_{ji} z)] \\ \quad \quad \quad - A_{i2} \cos(\rho_{ji} y) - A_{i3} \cos(\rho_{ji} z) \}^i, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

le signe $\sum_i$ indiquant que la sommation doit s'étendre à toutes les particules à l'exception de la particule j et ρ_{ji} désignant la distance et

la direction

centre de la particule $i \rightarrow$ centre de la particule j .

Les $3n$ équations (21) donnent :

k_1 et les rapports des A_{j1} , A_{j2} , A_{j3} ;

après avoir trouvé ainsi les A_{j1} , A_{j2} , A_{j3} à un facteur constant près (qui reste tout à fait arbitraire) nous pouvons obtenir les A_j , $A_{j,11}$, ..., $A_{j,23}$, ..., à l'aide des équations (22) et (23).

En substituant les valeurs de Φ aux surfaces S_j , que nous avons trouvées ainsi, dans les équations (9^a), nous aurons les forces apparentes qui agiront sur chaque particule j . Nous posons encore

$$(24) \quad \begin{cases} A_{j1} = \frac{c_j}{\pi R^2} \cos(\sigma_j x), \\ A_{j2} = \frac{c_j}{\pi R^2} \cos(\sigma_j y), \\ A_{j3} = \frac{c_j}{\pi R^2} \cos(\sigma_j z), \end{cases}$$

et nous appellerons c_j la vitesse, σ_j la direction de l'oscillation de la particule j ; nous pourrions alors énoncer le résultat de la manière suivante :

IV. *Le nombre k_1 , les vitesses c_j (1) et les directions σ_j des oscillations de chaque particule j , correspondant à une vibration du premier ordre, sont données par les équations*

$$(25) \quad \begin{cases} c_j \cos(\sigma_j x) \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i c_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^2}, \\ c_j \cos(\sigma_j y) \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \sum_i c_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^2}, \\ c_j \cos(\sigma_j z) \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial z_j} \sum_i c_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^2}, \end{cases}$$

le signe $\sum_i$ indiquant que la sommation doit s'étendre à toutes les particules à l'exception de la particule j , et ρ_{ji} désignant la distance et la

(1) Les c_j à un facteur constant près, qui reste tout à fait arbitraire.

direction

centre de la particule $i \rightarrow$ centre de la particule j ,

x_j, y_j, z_j les coordonnées du centre de la particule j .

En négligeant les termes dont les dénominateurs contiennent φ_{ik}^5 , chaque particule i semble agir sur chaque particule j avec les forces ⁽¹⁾

$$(26) \quad \begin{cases} X_{ji} = 2\pi c_i c_j \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\cos(\sigma_j \sigma_i) - 3 \cos(\rho_{ji} \sigma_j) \cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^3} \right], \\ Y_{ji} = 2\pi c_i c_j \mu \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\cos(\sigma_j \sigma_i) - 3 \cos(\rho_{ji} \sigma_j) \cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^3} \right], \\ Z_{ji} = 2\pi c_i c_j \mu \frac{\partial}{\partial z_j} \left[\frac{\cos(\sigma_j \sigma_i) - 3 \cos(\rho_{ji} \sigma_j) \cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^3} \right]. \end{cases}$$

Mais si l'on ne néglige que des termes dont les dénominateurs contiennent φ_{ik}^6 , on doit ajouter, pour chaque particule j , les forces

$$(27) \quad \begin{cases} \Xi_j = -\pi \mu R \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_i c_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^3} \right]^2, \\ \Pi_j = -\pi \mu R \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\sum_i c_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^3} \right]^2, \\ Z_j = -\pi \mu R \frac{\partial}{\partial z_j} \left[\sum_i c_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma_i)}{\rho_{ji}^3} \right]^2. \end{cases}$$

Considérons maintenant deux systèmes de particules avec des vibrations du premier ordre avec le même nombre k_1 ; si un des deux systèmes existait tout seul, le nombre k_1 , les vitesses c_j et les directions σ_j des oscillations de ce système seraient données par les équations (25); si l'autre existait tout seul, le nombre k_1 , les vitesses c'_j et les directions σ'_j des oscillations de ce système seraient données par les équations

$$(28) \quad \begin{cases} c'_j \cos(\sigma'_j x) \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial x'_j} \sum_i c'_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma'_i)}{\rho_{ji}^3}, \\ c'_j \cos(\sigma'_j y) \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial y'_j} \sum_i c'_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma'_i)}{\rho_{ji}^3}, \\ c'_j \cos(\sigma'_j z) \sin(k_1 R) = \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial z'_j} \sum_i c'_i \frac{\cos(\rho_{ji} \sigma'_i)}{\rho_{ji}^3}. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Ces forces sont proportionnelles à celles qu'une particule magnétique du moment c_j et de l'axe magnétique σ_j à l'endroit (x_j, y_j, z_j) exercerait sur une particule magnétique du moment c_i et de l'axe magnétique σ_i à l'endroit (x_i, y_i, z_i) .

Si nous appelons ρ la distance des deux systèmes, en supposant que les distances entre particules du même système soient extrêmement petites en comparaison avec ρ , on voit sans difficulté que le nombre k_i , les c_j , c'_j et les cosinus directeurs des directions σ_j , σ'_j pour le cas que les deux systèmes se trouvent en même temps dans le liquide infini, ne différeront de leurs valeurs antérieures que de termes d'ordre $\left(\frac{R}{\rho}\right)^3$. A ces petites variations près, les oscillations d'un système [(définies par les équations (25))] sont indépendantes des oscillations de l'autre système [(définies par les équations (28)], de manière qu'avec le système (25) il peut y avoir en même temps un système (28) aussi bien qu'un système dans lequel toutes les directions sont justement opposées à celles du système (28).

Il résulte de ce raisonnement, qu'en calculant les forces que deux systèmes exerceront l'un sur l'autre, si nous admettons que dans chaque système les particules changent continuellement et assez vite leurs positions relatives, nous n'avons pas besoin de nous occuper des forces (26) qui sont linéaires pour les cosinus directeurs

$$\begin{aligned} &\cos(\sigma_j x), \quad \cos(\sigma_j y), \quad \cos(\sigma_j z); \\ &\cos(\sigma'_j x), \quad \cos(\sigma'_j y), \quad \cos(\sigma'_j z) \end{aligned}$$

parce que ces forces se détruiront si l'on forme leur somme pendant un temps assez petit. Il ne restera que les forces (27) qui sont inversement proportionnelles aux cinquièmes puissances des particules.

On obtiendra par ces calculs le résultat :

V. *Deux systèmes de particules faiblement compressibles, ayant le même nombre de particules, exerceront l'un sur l'autre, en conséquence d'une vibration du premier ordre, une force répulsive*

$$\frac{\alpha}{\rho^5},$$

où ρ représente la distance des deux systèmes et α une constante positive qui ne dépend nullement de ρ ; on suppose que les particules soient des sphères du même rayon R , que R soit très petit en comparaison avec les distances des particules du même système et celles-ci très petites en comparaison avec ρ .

Si un système contient n particules, l'autre n' particules, la force répulsive devient

$$\beta \frac{nn'}{\rho^3},$$

où β est de nouveau une constante positive ne dépendant ni de ρ ni des nombres n, n' .

Après notre définition (p. 139) que les masses de deux corps pondérables ont le rapport $m : m'$, s'il y a n particules dans un corps, n' dans l'autre, et si

$$n : n' = m : m';$$

le théorème V nous donne la force répulsive de Maxwell, qui nous permet d'expliquer les phénomènes du frottement dans les gaz.

Jé dois encore élucider un point que j'ai évité jusqu'à présent; quand nous parlons des forces qui agissent sur un système de particules, nous calculons ces forces à l'aide des équations

$$(29) \quad \begin{cases} X = \sum_j X_j, \\ Y = \sum_j Y_j, \\ Z = \sum_j Z_j, \end{cases}$$

en sommant les forces qui agissent sur chaque particule j du système, comme si, par exemple, les centres des particules étaient liés de la même manière que les points d'un solide. Cette supposition remplace provisoirement un résultat qui ne peut être déduit que d'une théorie de l'élasticité. Dans un système de particules qui a l'apparence d'un solide, nous devons supposer des vibrations d'un ordre supérieur, qui produisent des forces élastiques entre les particules, c'est-à-dire des forces attirantes, quand les distances surpassent une certaine longueur, des forces répulsives quand les distances sont au-dessous de cette limite. Comme la construction de telles forces est possible, on peut se contenter provisoirement des définitions formales (29).

Théorie hydrodynamique des phénomènes électriques.

Nous regardons les phénomènes électriques aussi bien que la gravitation comme produits par les vibrations de l'ordre zéro, de manière que les vitesses u, v, w ont partout où il y a des phénomènes électriques la forme suivante :

$$(30) \quad \begin{cases} u = u_0 + u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \\ v = v_0 + v_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + v_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \\ w = w_0 + w_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + w_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \end{cases}$$

T étant la durée des vibrations de l'ordre zéro et u_0, v_0, w_0 des vitesses ordinaires qui sont supposées assez petites en comparaison avec $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$.

En se servant des désignations de H. Hertz on pourra dire que les composantes électriques X, Y, Z seront proportionnelles à u_1, v_1, w_1 , les composantes magnétiques L, M, N proportionnelles à u_2, v_2, w_2 .

L'éther se comporte pour ces vibrations tout à fait comme un liquide, c'est-à-dire les fonctions u, v, w satisfont aux équations hydrodynamiques

$$(31) \quad \begin{cases} \mu \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \mu \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

mais les corps qu'on appelle *conducteurs* doivent être regardés comme des masses continues douées de frottement.

On s'est souvent servi, comme argument pour l'impossibilité d'une théorie hydrodynamique des phénomènes électriques, du fait que des ondes transversales sont impossibles dans un liquide parfait; mais s'il n'y a pas d'ondes transversales pour les vitesses u, v, w mêmes, il y en a pour les u_1, v_1, w_1 et les u_2, v_2, w_2 ; on peut démon-

trer qu'il y a des mouvements de la forme (30) compatibles avec les équations hydrodynamiques (31), qui satisfont aux équations suivantes :

$$(32^a) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\Lambda \left(\frac{\overline{du_2}}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} u_2 - \frac{\partial u_0}{\partial y} v_2 - \frac{\partial u_0}{\partial z} w_2 \right) \quad (1), \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\Lambda \left(\frac{\overline{dv_2}}{dt} - \frac{\partial v_0}{\partial x} u_2 - \frac{\partial v_0}{\partial y} v_2 - \frac{\partial v_0}{\partial z} w_2 \right), \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\Lambda \left(\frac{\overline{dw_2}}{dt} - \frac{\partial w_0}{\partial x} u_2 - \frac{\partial w_0}{\partial y} v_2 - \frac{\partial w_0}{\partial z} w_2 \right), \end{cases}$$

$$(32^b) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \Lambda \left(\frac{\overline{du_1}}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} u_1 - \frac{\partial u_0}{\partial y} v_1 - \frac{\partial u_0}{\partial z} w_1 \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = \Lambda \left(\frac{\overline{dv_1}}{dt} - \frac{\partial v_0}{\partial x} u_1 - \frac{\partial v_0}{\partial y} v_1 - \frac{\partial v_0}{\partial z} w_1 \right), \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = \Lambda \left(\frac{\overline{dw_1}}{dt} - \frac{\partial w_0}{\partial x} u_1 - \frac{\partial w_0}{\partial y} v_1 - \frac{\partial w_0}{\partial z} w_1 \right); \end{cases}$$

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

où Λ représente une constante très petite. On peut même démontrer qu'un tel état du liquide persistera toujours, si ces équations sont valables à un moment quelconque et si de certaines conditions sont prescrites à la surface du liquide.

Dans le cas où les vitesses ordinaires u_0, v_0, w_0 sont très petites, les équations (32), (33) deviennent les équations de Maxwell-Hertz :

$$(34^a) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\Lambda \frac{\partial u_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial v_2}{\partial t}, & \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\Lambda \frac{\partial w_2}{\partial t}, \end{cases}$$

(1) $\frac{\overline{du_2}}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} u_0 + \frac{\partial u_2}{\partial y} v_0 + \frac{\partial u_2}{\partial z} w_0, \dots$

et

$$(34^b) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = A \frac{\partial u_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = A \frac{\partial v_1}{\partial t}, & \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = A \frac{\partial w_1}{\partial t}, \end{cases}$$

et $\frac{1}{A}$ aura la signification de représenter la vitesse de la propagation des ondes électriques (et de la lumière) dans l'éther.

Pour les états stationnaires les tourbillons sont nuls, il y aura deux fonctions φ_1, φ_2 de manière que dans l'éther

$$(35^a) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\ v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \\ w_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}; \end{cases} \quad \Delta \varphi_1 = 0,$$

$$(35^b) \quad \begin{cases} u_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ v_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ w_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}; \end{cases} \quad \Delta \varphi_2 = 0,$$

Nous supposons que, dans les corps conducteurs, les tourbillons des composantes électriques u_1, v_1, w_1 soient nuls :

$$(36^a) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

et que les composantes magnétiques u_2, v_2, w_2 satisfassent à la condition d'incompressibilité

$$(36^b) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0.$$

Comme $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$ doivent être continues ⁽¹⁾ au passage des surfaces des corps conducteurs, on trouve sans difficulté, pour les fonctions φ_1 et φ_2 , les relations

$$(37) \quad \varphi_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_i \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \frac{d\tau}{r},$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} u_2 &\equiv \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \int_i \left(w_2 \frac{\partial}{\partial y} - v_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{d\tau}{r}, \\ v_2 &\equiv \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{1}{4\pi} \int_i \left(u_2 \frac{\partial}{\partial z} - w_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{d\tau}{r}, \\ w_2 &\equiv \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \int_i \left(v_2 \frac{\partial}{\partial x} - u_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{d\tau}{r}, \end{aligned} \right.$$

si l'on étend les intégrales à tous les éléments $d\tau$ des corps conducteurs, r étant la distance

$$d\tau \rightarrow (xyz)$$

et

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} u_2 &= \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \\ v_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}, \\ w_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Nous appellerons

$$(40) \quad C = \sqrt{\frac{\mu}{8\pi}} \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dt$$

la charge électrique d'un corps conducteur et

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{\mu}{8\pi}} u_2, \\ V &= \sqrt{\frac{\mu}{8\pi}} v_2, \\ W &= \sqrt{\frac{\mu}{8\pi}} w_2, \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ A de petites quantités d'ordre $\frac{T}{\text{unité de temps}}$ près.

les composantes du courant électrique à un point quelconque d'un corps conducteur.

De petites particules chargées, les électrons, seront donc de petites sphères pulsantes, les courants électriques des tubes tourbillonnaires avec des vitesses vibratoires.

On s'est déjà, à l'occasion des expériences de M. Bjerknes, beaucoup occupé des difficultés qui semblent s'élever contre l'idée que les petits corps électrisés soient des sphères pulsantes. Je remarquerai d'abord qu'une objection de M. Poincaré (*Électricité et Optique*, 1901, p. 614) contre les sphères pulsantes n'est pas applicable à ma théorie; M. Poincaré dit :

« Deux sphères pulsantes, dont la phase est la même, sont assimilables à deux conducteurs portant de l'électricité de même nom; deux sphères dont la phase diffère de π sont assimilables à deux conducteurs portant de l'électricité de nom contraire; mais *deux sphères dont la différence de phase n'est ni 0 ni π ne sont assimilables à rien.* »

Conformément aux équations (30) on peut décomposer chaque vibration de la durée T dans leur partie électrique (u_1, v_1, w_1) et leur partie magnétique (u_2, v_2, w_2), et dans les pulsations des corps électrisés dont les charges sont données par l'équation (40), les phases ne peuvent différer que de 0 et de π , c'est-à-dire les valeurs (40) peuvent être pour deux corps conducteurs du même signe ou de signe contraire. Je crois ainsi que cette difficulté n'existe pas pour ma théorie.

Mais il y a encore une autre difficulté que l'on a souvent regardée comme décisive. Si l'on calcule, en s'appuyant sur les définitions données des corps électrisés et des courants, les forces apparentes entre corps conducteurs à l'aide des formules

$$(42) \quad \begin{cases} X = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_S p \cos(vx) ds dt, \\ Y = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_S p \cos(vy) ds dt, \\ Z = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_S p \cos(vz) ds dt, \end{cases}$$

(1) ds un élément de la surface S du corps conducteur avec la normale intérieure v ; p la pression hydrodynamique sur ds .

comme pour des particules faiblement compressibles (*comp.* p. 135), on trouve un accord complet avec les lois de Coulomb et d'Ampère en ce qui concerne les valeurs *absolues* de ces forces, mais les signes sont justement contraires; on trouve, par exemple, attraction entre sphères pulsantes de la même phase, etc.

Si d'autres ont trouvé ici une difficulté décisive, je n'ai pu tirer de ce fait que la conclusion que les équations (42), qui sont vraies pour les particules faiblement compressibles, ne le seront plus pour les systèmes plus compliqués que nous appelons des *corps conducteurs* ⁽¹⁾. On ne doit sûrement rien changer à l'éther, il doit être le même pour la gravitation, etc., et pour les phénomènes électriques, l'idée qu'il se comporte (en ce qui concerne des mouvements rapides) comme un liquide me semble la plus simple de toutes les idées possibles, mais rien ne nous empêche de regarder les corps conducteurs comme des mécanismes plus compliqués, une supposition qui s'impose déjà à cause du frottement indiqué par les phénomènes thermiques dans les courants, et par les conditions (36^a), (36^b), page 149, qui doivent être remplies dans les conducteurs. Il est évident qu'une telle complication du mécanisme des corps conducteurs peut entraîner un changement des formules (42).

Je fais une distinction entre masses *proprement continues* et *improprement continues*, tout en regardant la première manière de continuité comme une limite de la seconde et comme une abstraction mathématique. Dans les masses proprement continues, les quatre fonctions, densité et vitesses, sont des fonctions continues; dans les masses improprement continues seulement les valeurs moyennes de la densité et des vitesses dans des éléments très petits, ne diffèrent de fonctions continues que de quantités très petites, mais à l'intérieur de ces éléments, ces fonctions peuvent, comme dans la théorie cinétique des gaz, avoir des différences très grandes en comparaison avec les dimensions des éléments considérés.

Déjà, pour introduire le frottement dans les corps conducteurs,

(1) Ces idées sont justement contraires à celles de M. Lorentz; dans les théories de M. Lorentz les *petits corps électrisés* sont les éléments les plus simples, et il faut chercher une complication pour expliquer la *gravitation* en supposant, par exemple, que les forces absolues entre électricités de même nom soient différentes de celles entre électricités de nom contraire.

nous devons regarder ceux-ci comme des masses improprement continues, comme des systèmes de particules se repoussant d'après la loi de Maxwell dont nous avons essayé de donner une théorie mécanique; le manque de continuité impliqué par cette idée ne concerne que les vitesses, comme dans la théorie des gaz; il peut y avoir aussi un manque semblable de continuité pour la densité, et c'est justement ici que l'on doit, il me semble, chercher la raison du changement de signe dans les équations (42) pour les corps conducteurs. Je n'insisterai pas davantage ici sur les méthodes par lesquelles je suis arrivé à ce changement du signe qui complète l'accord entre la théorie hydrodynamique et l'expérience.

La théorie des forces électromotrices, ou la théorie de l'induction, résulte du principe de d'Alembert, en s'appuyant sur l'idée que les corps conducteurs soient des masses continues douées de frottement, et en tenant compte des conditions (36^a) et (36^b). Le principe de d'Alembert nous mène à quatre équations pour les corps conducteurs :

$$(43) \quad \frac{\bar{d}}{dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = 0 \quad (1),$$

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{\bar{d}u_2}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} u_2 - \frac{\partial u_0}{\partial y} v_2 - \frac{\partial u_0}{\partial z} w_2 = k \Delta u_2 & (2), \\ \frac{\bar{d}v_2}{dt} - \frac{\partial v_0}{\partial x} u_2 - \frac{\partial v_0}{\partial y} v_2 - \frac{\partial v_0}{\partial z} w_2 = k \Delta v_2, \\ \frac{\bar{d}w_2}{dt} - \frac{\partial w_0}{\partial x} u_2 - \frac{\partial w_0}{\partial y} v_2 - \frac{\partial w_0}{\partial z} w_2 = k \Delta w_2, \end{cases}$$

L'équation (43) démontre que les charges des corps conducteurs isolés doivent rester invariables; les équations (44) permettent de rendre compte de tous les phénomènes de l'induction, et la constante

$$(45) \quad l = \frac{1}{4\pi k}$$

$$(1) \quad \frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u_0 + \frac{\partial}{\partial y} v_0 + \frac{\partial}{\partial z} w_0.$$

(2) k étant une constante particulière du corps conducteur correspondant à son frottement intérieur.

aura la signification de représenter la conductibilité du corps conducteur.

A l'aide de notre théorie mécanique du frottement, la théorie hydrodynamique rend également compte de la chaleur produite par les courants électriques; on arrive sans difficulté à la loi de Joule.

Les diélectriques doivent être regardés comme composés de particules conductrices nageant dans l'éther, mais trop éloignées les unes des autres pour que la force de Maxwell puisse produire, comme dans les corps conducteurs, les phénomènes du frottement.