W. STEKLOFF

Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique (suite et fin)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 455-490

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__455_0>

SUR LES

PROBLÈMES FONDAMENTAUX

DE LA

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

(SUITE ET FIN).

PAR M. W. STEKLOFF.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES FONCTIONS FONDAMENTALES ET LEURS DIVERSES APPLICATIONS.

I. — Existence et propriétés des fonctions fondamentales.

1. Dans une Communication *Sur une équation différentielle de la Physique mathématique*, présentée à la Société mathématique de Kharkow le 16 décembre 1895, j'ai étudié le problème suivant :

Trouver une fonction v, harmonique à l'intérieur de la surface convexe (S) *et satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = hv + f \quad sur\ (S), \tag{1}$$

f étant une fonction donnée, continue sur (S), *h étant un paramètre.*

En employant la méthode connue de M. Poincaré, j'ai démontré que v est une fonction méromorphe de h, n'ayant que des pôles simples, réels et positifs, $\lambda_s (s = 1, 2, \ldots)$, dont les résidus correspondants V_s sont des fonctions harmoniques à l'intérieur de (S) satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial V_{si}}{\partial n} = \lambda_s V_s \quad \text{sur (S)}.$$

Un an après, M. H. Poincaré a découvert l'existence de ses fonctions remarquables, qu'il a appelées *fonctions fondamentales,* pour toute surface (S) admettant une certaine transformation ponctuelle (transformation de M. Poincaré).

Ce fait important a été démontré, en 1897-1898, par M. Éd. Le Roy, qui a généralisé le problème.

Les fonctions fondamentales de M. Éd. Le Roy dépendent d'une fonction arbitraire φ, positive et ne s'annulant pas sur (S).

En employant la même fonction φ, j'ai généralisé mes recherches mentionnées plus haut; j'ai remplacé la condition (1) par la suivante :

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = h\varphi v + \varphi f \quad \text{sur (S)},$$

et, par la même méthode de M. Poincaré, *j'ai démontré l'existence d'une infinité de nombres positifs*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_s, \quad \ldots$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_s, \quad \ldots$$

harmoniques à l'intérieur de (S) *et satisfaisant aux conditions*

$$\frac{\partial V_{si}}{\partial n} = \lambda_s \varphi V_s \quad \textit{sur (S)} \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

pourvu que la surface (S) admette la transformation de M. Poincaré.

J'ai exposé mon analyse dans une petite Note *Sur l'existence des fonctions fondamentales,* insérée aux *Comptes rendus* du 27 mars 1899 (1)

(1) *Voir* aussi ma Note *Sur la théorie des fonctions fondamentales* (*Comptes rendus,* 17 avril 1899).

et puis dans mon Ouvrage *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique*, paru récemment en russe.

Enfin, M. S. Zaremba, dans son Mémoire récent, a généralisé de plus le problème dont il s'agit.

Il a démontré l'existence des fonctions $V_s (s = 1, 2, \ldots)$ satisfaisant aux conditions

$$\Delta V_s + \xi V_s = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$
$$\frac{\partial V_{si}}{\partial n} = \lambda_s \varphi V_s \quad \text{sur (S),}$$

pour toute surface (S) jouissant des propriétés du n° 1 du Chapitre I dans le cas particulier de $\alpha = 1$.

Je pourrais maintenant, en m'appuyant sur les recherches des deux Chapitres précédents, étendre ma méthode au cas général des surfaces tout à l'heure mentionnées, mais je n'insisterai pas sur ce point.

J'adopterai dans ce Chapitre les notations les plus simples de M. Éd. Le Roy et *je démontrerai l'existence de ses fonctions, sans employer aucune transformation, pour toute surface* (S) *satisfaisant aux trois conditions* 1°, 2° et 3° (*n°* 1, *Chap.* I), *quel que soit le nombre* α, *plus petit ou égal à l'unité.*

2. Reprenons la fonction

$$W = \frac{1}{4\pi}\int f \frac{e^{-\mu r}}{r} ds \tag{2}$$

du n° 8 du Chapitre I.

Il est aisé de voir que les conditions

$$\Delta W - \mu^2 W = 0 \quad \text{à l'intérieur et à l'extérieur de (S),}$$
$$\frac{\partial W_i}{\partial n} - \frac{\partial W_e}{\partial n} = f \quad \text{sur (S),}$$
$$|W| < \frac{A}{\mu} f_0 \tag{3}$$

ont lieu, quelle que soit la surface (S), jouissant des propriétés du n° 1 du Chapitre I.

Désignons par dT l'élément de volume de l'espace tout entier et posons

$$\mathrm{K(F)} = \int \sum \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T}, \qquad \mathrm{K(F, \Phi)} = \int \sum \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} d\mathrm{T},$$

$$\mathrm{L(F)} = \int \mathrm{F}^2\, d\mathrm{T}, \qquad \mathrm{L(F, \Phi)} = \int \mathrm{F}\Phi\, d\mathrm{T},$$

$$\mathrm{M(F)} = \int \mathrm{F}^2\, ds, \qquad \mathrm{M(F, \Phi)} = \int \mathrm{F}\Phi\, ds,$$

F et Φ étant des fonctions quelconques.

Supposons que f, dans l'expression (2), ainsi que ses dérivées du premier ordre, restent continues à l'intérieur de (S).

La transformation de Green nous donne immédiatement

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{K(W)} + \mu^2 \mathrm{L(W)} = \mathrm{M}(\mathrm{W}, f), \\ &\mathrm{K}(\mathrm{W}, f) + \mu^2 \mathrm{L}(\mathrm{W}, f) = \mathrm{M}(f). \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que

$$\mathrm{M}^2(f) < [\mathrm{K(W)} + \mu^2\mathrm{L(W)}][\mathrm{K}(f) + \mu^2\mathrm{L}(f)],$$

d'où, en vertu de (4),

$$(5) \quad \mathrm{M}^2(f) < \mathrm{M}(\mathrm{W}, f)[\mathrm{K}(f) + \mu^2\mathrm{L}(f)] < \sqrt{\mathrm{M(W)}\,\mathrm{M}(f)}\,[\mathrm{K}(f) + \mu^2\mathrm{L}(f)].$$

Mais

$$\mathrm{M(W)} < \mathrm{Q}^2\mathrm{M}(f),$$

où Q désigne le maximum de l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{-\mu r}}{r}\, ds.$$

On peut poser, eu égard à (3),

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{A}}{\mu}.$$

L'inégalité (5) devient alors

$$\mathrm{M}(f) < \frac{\mathrm{A}}{\mu}[\mathrm{K}(f) + \mu^2\mathrm{L}(f)].$$

Supposons maintenant que f dépend linéairement de p constantes arbitraires $\alpha_s (s = 1, 2, \ldots, p)$,

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

$f_s (s = 1, 2, \ldots, p)$ étant des fonctions de même espèce que f.

En choisissant convenablement le nombre p, on peut disposer les $\alpha_s (s = 1, 2, \ldots, p)$ de façon que l'on ait

$$L(f) < \frac{B}{L_p} K(f)$$

[*voir*, n° 9 du Chapitre I, les inégalités (24) et (25)].

Nous trouverons alors

$$M(f) < \frac{A}{\mu}\left(1 + \frac{B\mu^2}{L_p}\right) K(f).$$

Cette inégalité aura lieu, quel que soit le nombre positif μ.

Posons

$$\mu^2 = L_p,$$

il viendra

$$M(f) < \frac{C}{\sqrt{L_p}} K(f),$$

L_p étant un nombre positif indéfiniment croissant avec l'indice p, ce qui démontre le théorème suivant, fondamental dans la théorie des fonctions fondamentales :

Théorème. — *Soit f une fonction dépendant de p constantes arbitraires $\alpha_s (s = 1, 2, \ldots, p)$,*

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

$F_s (s = 1, 2, \ldots, p)$ *étant des fonctions continues avec ses dérivées du premier ordre à l'intérieur de la surface donnée* (S).

On peut toujours disposer les α_s de façon que le rapport

$$\frac{\int f^2\, ds}{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau'}$$

soit plus petit qu'un nombre

$$\frac{C}{\sqrt{L_p}},$$

C *étant un nombre fixe ne dépendant que de* (S), L_p *étant un nombre positif qui dépend de* (S) *et de* p *et croît indéfiniment avec l'indice* p.

3. Cela posé, cherchons, avec M. Le Roy, une fonction harmonique v satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} - \frac{\partial v_e}{\partial n} = \lambda \varphi v + \varphi f \quad \text{sur (S)}, \tag{6}$$

λ étant un paramètre, f étant une fonction donnée, continue sur (S), φ étant une autre fonction donnée, continue et ne s'annulant pas sur (S).

Formons la série

$$v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \ldots + \lambda^k v_k + \ldots, \tag{7}$$

v_k étant des fonctions de x, y, z.

On trouve, en tenant compte de (6),

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_{0i}}{\partial n} - \frac{\partial v_{0e}}{\partial n} &= \varphi f \\ \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} - \frac{\partial v_{ke}}{\partial n} &= \varphi v_{k-1} \end{aligned}\right\} \text{sur (S)},$$

c'est-à-dire

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi f}{r}\, ds, \qquad v_k = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi v_{k-1}}{r}\, ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{8}$$

Envisageons de nouveau un cylindre de révolution (C) du n° 6 du Chapitre I.

Désignons par g_k le maximum de $|v_k|$ sur (S) et posons

$$I_k = \int \varphi v_k^2\, ds.$$

Nous trouverons, comme dans le numéro cité, l'inégalité suivante :

$$g_k < A\sqrt{I_{k-1}} + BR g_{k-1}, \tag{9}$$

R étant le rayon du cylindre (C), A et B étant des constantes positives ne dépendant que de (S).

Il s'ensuit que

$$(1-\mathrm{BR}\mu)\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k g_k < \mathrm{A}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\sqrt{\mathrm{I}_{k-1}}+\mathrm{BR}g_0\mu, \tag{10}$$

où μ désigne le module de λ.

Désignons par l le rapport

$$\lim_{k=\infty}\frac{\sqrt{\mathrm{I}_k}}{\sqrt{\mathrm{I}_{k+1}}}$$

et choisissons R de façon que l'on ait

$$1-\mathrm{BR}l>0.$$

L'inégalité (10) nous apprend que le rayon ρ de convergence de la série (7) est au moins égal à celui de la série

$$\sqrt{\mathrm{I}_0}+\mu\sqrt{\mathrm{I}_1}+\mu^2\sqrt{\mathrm{I}_2}+\ldots+\mu^k\sqrt{\mathrm{I}_k}+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$\rho \geqq l.$$

D'autre part, le rayon de convergence de la série (7) ne peut pas surpasser celui de la série

$$\int\varphi v_0^2\,ds+\mu\int\varphi v_0 v_1\,ds+\mu^2\int\varphi v_0 v_2\,ds+\ldots+\mu^k\int\varphi v_0 v_k\,ds+\ldots.$$

Or, il est aisé de voir, en tenant compte de (8), que

$$\int\varphi v_0 v_k\,ds=\int\varphi v_s v_{k-s}\,ds, \tag{11}$$

s étant un nombre entier plus petit que k.

Posons

$$k=2n,\qquad s=n.$$

Nous aurons

$$\int\varphi v_0 v_{2n}\,ds=\mathrm{I}_n.$$

On aura de même

$$\int\varphi v_{2n+1}v_0\,ds=\int\varphi v_n v_{n+1}\,ds=\int v_{n+1}\left(\frac{\partial v_{n+1,i}}{\partial n}-\frac{\partial v_{n+1,e}}{\partial n}\right)ds=\mathrm{W}_{n+1}>0$$

en posant dans (11)

$$k = 2n + 1, \qquad s = n.$$

Il résulte de là que ρ ne peut pas surpasser le rayon de convergence de la série

$$I_0 + \mu^2 I_1 + \mu^4 I_2 + \ldots + \mu^{2k} I_k + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\rho \leqq l.$$

On a donc précisément

$$\rho = l.$$

4. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int \sum \frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x} d\tau + \int \sum \frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x} d\tau' = I_k.$$

On trouve, en s'appuyant sur l'inégalité de Schwarz,

$$\frac{I_k}{W_k} < \frac{W_{k+1}}{I_k}.$$

D'autre part, il est évident que

$$\frac{W_{k+1}}{I_k} < \frac{I_{k+1}}{W_{k+1}}.$$

On a donc

$$\frac{I_0}{W_0} < \frac{I_1}{W_1} < \frac{I_2}{W_2} < \ldots < \frac{I_k}{W_k} < \frac{I_{k+1}}{W_{k+1}} < \ldots, \tag{12}$$

quelle que soit la fonction f.

Prenons maintenant dans (6), au lieu de f, la fonction suivante :

$$f_1 = \alpha_0 f + \alpha_1 v_0 + \alpha_2 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-2}$$

et cherchons la fonction harmonique w satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial W_i}{\partial n} - \frac{\partial W_e}{\partial n} = \lambda \varphi W + \varphi f_1 \quad \text{sur (S)} \tag{13}$$

sous la forme de la série

$$w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \ldots + \lambda^k w_k + \ldots. \tag{14}$$

Désignons par I'_k et W'_k ce que deviennent I_k et W_k quand on y remplace V_k par W_k.

D'après le théorème du numéro précédent, la série (14) converge absolument et uniformément sur (S) pour

$$(15) \qquad |\lambda| < \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{\Gamma'_k}}{\sqrt{\Gamma'_{k+1}}}.$$

Mais chacune des fonctions $W_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ dépend linéairement de p constantes arbitraires $\alpha_s (s = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$.

D'après le théorème du n° 2, on peut disposer les α_s de façon que l'on ait

$$\frac{\Gamma'_{k+1}}{W'_{k+1}} < \frac{C}{\sqrt{L_p}}.$$

Or, cette inégalité entraîne l'inégalité

$$\frac{\Gamma'_k}{W'_k} < \frac{C}{\sqrt{L_p}}.$$

Il en résulte qu'on peut disposer les α_s de façon que l'on ait

$$\lim_{k=\infty} \frac{\Gamma'_k}{W'_k} < \frac{C}{\sqrt{L_p}}.$$

Nous aurons alors, en vertu de (12),

$$(12_1) \qquad \frac{\Gamma'_0}{W'_0} < \frac{\Gamma'_1}{W'_1} < \frac{\Gamma'_2}{W'_2} < \ldots < \frac{\Gamma'_k}{W'_k} < \ldots < \frac{C}{\sqrt{L_p}}.$$

Mais

$$W'_k < \sqrt{\Gamma'_k}\sqrt{\Gamma'_{k+1}}.$$

On a donc

$$\frac{\sqrt{\Gamma'_k}}{\sqrt{\Gamma'_{k+1}}} < \frac{C}{\sqrt{L_p}},$$

quel que soit l'indice k.

On voit donc, en tenant compte de (15), que la série (14) converge absolument et uniformément sur (S), pourvu que

$$(16) \qquad |\lambda| < \frac{\sqrt{L_p}}{C}.$$

Or, on peut toujours choisir le nombre p de telle manière que le nombre $\frac{\sqrt{L_p}}{C}$ soit plus grand qu'un nombre A donné à l'avance.

On peut donc disposer les α_s de façon que le rayon de convergence de la série (15) *soit aussi grand que l'on veut.*

5. Il est aisé de montrer ensuite que *w se représente sous la forme d'un potentiel de la simple couche et satisfait, en effet, à la condition* (13).

D'autre part, on s'assure aisément que

$$w = \alpha_0 v + \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1},$$

où

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\lambda}(v \quad - v_0), \\ u_2 &= \frac{1}{\lambda}(u_1 \quad - v_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{p-1} &= \frac{1}{\lambda}(u_{p-2} - v_{p-2}). \end{aligned}$$

On en conclut que

$$v = \frac{P}{D}, \tag{17}$$

où P est un potentiel de la simple couche qu'on peut représenter sous la forme de la série

$$P = P_0 + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \ldots + \lambda^k P_k + \ldots,$$

absolument et uniformément convergente sur (S), pourvu que λ satisfasse à l'inégalité (16), D est un polynome entier en λ à coefficients constants.

Cela nous suffit pour démontrer en toute rigueur le théorème suivant :

Théorème. — *Il existe, pour toute surface* (S) *jouissant des propriétés du n° 1 du Chapitre I, un potentiel v de la simple couche vérifiant l'équation*

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} - \frac{\partial v_e}{\partial n} = \lambda \varphi v + \varphi f, \tag{18}$$

où φ et f sont les fonctions données, continues sur (S), *dont la première reste positive et ne s'annule pas sur* (S).

Ce potentiel, considéré comme fonction du paramètre λ, est une fonction méromorphe en λ, n'ayant que des pôles simples, réels et positifs, qui font tous partie d'une suite infinie de nombres positifs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots$$

dépendant uniquement de la nature de la surface (S).

Les résidus relatifs aux pôles de la fonction v représentent une suite de potentiels des simples couches

$$V_a, \quad V_b, \quad \ldots, \quad V_k, \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial V_{ni}}{\partial n} - \frac{\partial V_{ne}}{\partial n} = \lambda_n \varphi V_n \quad \text{sur (S)} \qquad (n = a, b, \ldots, k, \ldots).$$

De ce théorème résulte immédiatement le suivant :

THÉORÈME. — *Toute surface* (S), *satisfaisant aux conditions du théorème précédent, donne lieu à une infinité de nombres positifs*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots$$

ne dépendant que de (S) *et indéfiniment croissants avec l'indice k, auxquels correspond, terme à terme, une suite de potentiels des simples couches*

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_k, \quad \ldots$$

vérifiant les équations

$$\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} - \frac{\partial V_{ke}}{\partial n} = \lambda_k \varphi V_k \quad \text{sur (S)}, \tag{19}$$

ou, ce qui revient au même,

$$V_k = \frac{\lambda_k}{4\pi} \int \varphi V_k \frac{1}{r}\, ds. \tag{20}$$

L'existence des fonctions fondamentales de M. Ed. Le Roy est ainsi établie, sans employer aucune transformation, pour toute surface (S) qui satisfait seulement aux conditions générales 1°, 2° et 3° du n° 1 du Chapitre I.

6. Reprenons la fonction v satisfaisant à la condition (18).

Supposons que f satisfasse à l'équation

$$\int \varphi f \mathrm{V}_k \, ds = 0.$$

Dans ce cas on trouve, en tenant compte de (18) et (19),

$$(\lambda_k - \lambda) \int \varphi \rho \mathrm{V}_k \, ds = 0,$$

ou, eu égard à (17),

$$\frac{\lambda_k - \lambda}{\mathrm{D}} \int \varphi \mathrm{P} \mathrm{V}_k \, ds = 0.$$

Je dis que le point $\lambda = \lambda_k$ ne pourra pas être un point critique de la fonction ρ.

Si λ_k avait été un pôle de ρ, nous aurions eu

$$\mathrm{M} \int \varphi \mathrm{V}_k^2 \, ds = 0 \ (^1),$$

M étant un nombre différent de zéro, ce qui est impossible.

Il est donc absurde de supposer que λ_k soit un pôle de la fonction ρ.

Il en résulte ce théorème :

Théorème. — *Si la fonction f satisfait aux conditions*

$$\int \varphi f \mathrm{V}_1 \, ds = 0, \qquad \int \varphi f \mathrm{V}_2 \, ds = 0, \qquad \ldots, \qquad \int \varphi f \mathrm{V}_p \, ds = 0,$$

la fonction ρ sera holomorphe en λ, pourvu que

$$|\lambda| \leqq \lambda_{p+1}.$$

7. Supposons maintenant que la fonction f soit continue dans l'espace tout entier, ainsi que ses dérivées du premier ordre, et telle que l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau',$$

étendue à l'espace tout entier, ait un sens bien déterminé.

---

(1) La fonction P se réduit à V_k pour $\lambda = \lambda_k$.

Posons

$$f = \sum_{s=1}^{p} A_s V_s + R_p, \tag{21}$$

où

$$A_s = \int \varphi f V_s \, ds.$$

Il est évident que R_p a les mêmes propriétés que f et satisfait, en outre, aux conditions

$$\int \varphi R_p V_1 \, ds = 0, \qquad \int \varphi R_p V_2 \, ds = 0, \qquad \ldots, \qquad \int \varphi R_p V_p \, ds = 0 \text{ (1)}.$$

Cherchons la fonction harmonique v vérifiant l'équation

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} - \frac{\partial v_e}{\partial n} = \lambda \varphi v + \varphi R_p \quad \text{sur (S)}.$$

D'après le théorème du numéro précédent, v sera holomorphe en λ, pourvu que

$$|\lambda| \leqq \lambda_{p+1}.$$

D'autre part, nous avons vu que le rayon de convergence de la série

$$v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \ldots + \lambda^k v_k + \ldots,$$

représentant la fonction v, est égal à (n° 3)

$$\lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{I_k}}{\sqrt{I_{k+1}}}.$$

On peut donc écrire

$$\lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{I_k}}{\sqrt{I_{k+1}}} \geqq \lambda_{p+1}.$$

---

(1) On sait que

$$\int \varphi V_n V_m \, ds = 0, \qquad \text{si} \qquad n \gtrless m.$$

On peut poser encore

$$\int \varphi V_k^2 \, ds = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Mais

$$\frac{I_k}{I_{k-1}} < \frac{I_{k+1}}{I_k},$$

quel que soit l'indice k.

Il s'ensuit que

$$(22) \qquad \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_1}} \geqq \lambda_{p+1}.$$

Posons maintenant

$$T_p = \int \sum \left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 d\tau',$$

$$S_p = \int \varphi R_p^2 \, ds.$$

Il est aisé d'établir les inégalités suivantes :

$$\frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_1}} < \frac{I_0}{W_1} < \frac{W_0}{I_0} < \frac{S_p}{W_0} < \frac{T_p}{S_p},$$

qui nous donnent, en vertu de (22),

$$(23) \qquad \frac{T_p}{S_p} \geqq \lambda_{p+1}.$$

Formons maintenant l'expression de T_p.

L'égalité (21) donne

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau' = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2 + T_p;$$

d'où l'on conclut que T_p décroît avec p.

L'inégalité (23), ayant lieu quel que soit l'indice p, nous apprend que

$$(24) \qquad \lim_{p=\infty} S_p = 0,$$

c'est-à-dire

$$(25) \qquad \int \varphi f^2 \, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int \varphi f V_s \, ds.$$

Soit ψ une autre fonction satisfaisant à une seule condition

$$\int \psi^2 \, ds < Q,$$

Q étant un nombre assignable.

Nous trouverons, en tenant compte de (24),

$$\int \varphi f \psi \, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \qquad B_s = \int \varphi \psi V_s \, ds. \tag{26}$$

8. Supposons maintenant que f soit une fonction quelconque, continue sur (S).

D'après le théorème de M. E. Picard, on peut construire une suite de quantités données à l'avance

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_s, \quad \ldots,$$

formant une série convergente, et déterminer une suite de polynomes en x, y, z

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_s, \quad \ldots$$

tels que l'on ait

$$|P_s| < \varepsilon_s \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} P_s \quad \text{sur (S)} \text{ [1]}.$$

Quant à $P_s (s = 1, 2, \ldots)$, on peut les choisir de façon qu'ils satisfassent aux mêmes conditions que la fonction f du numéro précédent.

Moyennant ce théorème et les égalités (21) et (24), qui s'appliquent immédiatement aux fonctions $P_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$, nous démontrerons, comme dans le n° 26 du Chapitre précédent, les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si f est une fonction quelconque, continue sur* (S), *l'intégrale $\int \varphi f^2 \, ds$ peut se représenter sous la forme de la série suivante :*

$$\int \varphi f^2 \, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int \varphi f V_s \, ds.$$

Théorème II. — *Si f est une fonction continue sur* (S), *ψ est une autre*

---

[1] La série $\sum P_s$ converge uniformément.

fonction satisfaisant à une seule condition

$$\int \psi^2\, ds < Q,$$

Q *étant un nombre assignable; on aura les développements suivants :*

$$\int \varphi f \psi\, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \qquad B_s = \int \varphi \psi V_s\, ds,$$

$$\int f \psi\, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s C_s, \qquad C_s = \int \psi V_s\, ds.$$

Si les fonctions f *et* ψ *sont toutes les deux continues sur* (S), *on aura*

$$\int f \psi\, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s C_s = \sum_{s=1}^{\infty} D_s B_s, \qquad D_s = \int f V_s\, ds \quad (^1).$$

9. Nous pouvons généraliser un peu les résultats obtenus.

Soit (l) une courbe fermée, située sur (S). Supposons, pour plus de simplicité, qu'en tout point de (l) il existe une normale bien déterminée.

Prenons sur la normale en un point quelconque p de (l), de l'un et de l'autre côté de p, deux points p_i et p_e dont la distance de p est égale à une quantité positive δ qu'on peut prendre aussi voisine de zéro que l'on veut.

Le lieu géométrique des points p_i et p_e représentera deux lignes fermées (l_i) et (l_e), dont la première se trouve à l'intérieur, la seconde à l'extérieur de (l).

On obtient ainsi une zone sur (S), limitée par les lignes (l_i) et (l_e), que nous désignerons par (σ); la portion de (S) qui reste, nous la désignerons par (S_0).

Supposons maintenant que la fonction f de x, y, z reste continue en tous les points de (S_0), mais varie brusquement quand le point x, y, z traverse la ligne (l).

---

(1) J'ai exposé la démonstration détaillée de ces théorèmes dans mon Ouvrage *Les méthodes générales pour résoudre, etc.*, déjà cité (édition de la *Société mathématique de Kharkow*, 1901, p. 250-255).

On peut toujours trouver une fonction ψ, continue en tous les points de la surface donnée (S), et telle qu'on ait

$$\psi = f \qquad \text{sur } (S_0). \tag{27}$$

Posons

$$\psi = \sum_{s=1}^{p} B_s V_s + R_p, \qquad B_s = \int \varphi \psi V_s \, ds, \tag{28}$$

$$f = \sum_{s=1}^{p} A_s V_s + R'_p, \qquad A_s = \int \varphi f V_s \, ds, \tag{29}$$

$$S_p = \int \varphi R_p^2 \, ds, \qquad S'_p = \int \varphi R'^2_p \, ds.$$

Les quantités positives S_p et S'_p décroissent lorsque l'indice p croît indéfiniment, ce qui résulte immédiatement de l'égalité

$$\int \varphi f^2 \, ds = \sum_{s=1}^{p} A_s^2 + S_p, \tag{29_1}$$

ayant lieu quelle que soit la fonction f [1].

On a, en outre,

$$\lim_{p=\infty} S'_p = 0,$$

d'après le théorème I du numéro précédent.

Quant à R_p et R'_p, ils satisfont aux équations

$$\int \varphi R_p V_s \, ds = 0, \qquad \int \varphi R'_p V_s \, ds = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Les égalités (28) et (29) donnent

$$\int \varphi \psi R'_p \, ds = \int \varphi f R_p \, ds,$$

---

[1] Cette fonction doit satisfaire à une seule condition

$$\int f^2 \, ds < Q,$$

Q étant un nombre fixe.

d'où, en vertu de (27),

$$\int \varphi f R_p\, ds = \int \varphi f R'_p\, ds_0 + \int \varphi \psi R'_p\, d\sigma = \int \varphi f R'_p\, ds + \int \varphi(\psi - f) R'_p\, d\sigma,$$

ds_0 étant l'élément superficiel de la portion (S_0) de (S), $d\sigma$ étant l'élément superficiel de la zone (σ).

Il s'ensuit que

$$(30) \qquad S'_p = \int \varphi f R_p\, ds + \int \varphi(f - \psi) R'_p\, ds.$$

Désignons par N^2 le maximum de $\varphi(f - \psi)^2$ sur (S), par l la longueur de la ligne (l) et posons

$$\int \varphi f^2\, ds = Q^2, \qquad N^2 Q^2 l = Q_1^2.$$

On tire de l'égalité (30)

$$S'_p < Q\sqrt{S_p} + Q_1\sqrt{\delta},$$

en remarquant que

$$S'_p \leqq \int \varphi f^2\, ds, \qquad \int \varphi(f - \psi)^2\, d\sigma < N^2 \int d\sigma < N^2 l \delta.$$

Or $\sqrt{\delta}$ ne dépend pas de p et représente une quantité arbitraire qu'on peut prendre aussi voisine de zéro que l'on veut.

D'autre part, S_p tend vers zéro lorsque p croît indéfiniment.

On a donc, en passant à la limite,

$$\lim_{p=\infty} S'_p = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int \varphi f^2\, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2.$$

Les raisonnements resteront les mêmes si nous supposons qu'il existe un nombre fini quelconque de lignes de la discontinuité de la fonction f qui peuvent, évidemment, ne pas être fermées.

On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème I. — *Soit f une fonction donnée du point x, y, z de la surface* (S).

Supposons que f reste finie et continue sur (S), *sauf pour certaines lignes, où elle varie brusquement lorsque le point x, y, z traverse une de ces lignes. Ces conditions étant remplies, on a toujours*

$$\int \varphi f^2 \, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int \varphi f V_s \, ds.$$

Ce théorème entraîne le suivant :

THÉORÈME II. — *Quelles que soient les fonctions f jouissant des propriétés du théorème précédent et ψ satisfaisant à une seule condition*

$$\int \psi^2 \, ds < Q,$$

Q *étant un nombre fixe, on a toujours*

$$\int \varphi f \psi \, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \qquad B_s = \int \varphi \psi V_s \, ds,$$

$$\int f \psi \, ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s C_s, \qquad C_s = \int \psi V_s \, ds.$$

Il importe de remarquer que *les séries*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s C_s$$

convergent ABSOLUMENT.

Pour s'en assurer, il suffit de tenir compte de cette inégalité évidente

$$|ab| < \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

ayant lieu quels que soient les nombres a et b.

Remplaçons, par exemple, a et b par A_s et B_s.

Nous aurons

$$|A_s B_s| < \frac{1}{2}(A_s^2 + B_s^2).$$

Les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \quad \sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

convergent, d'où l'on conclut que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s$$

converge absolument.

Il en est de même de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s C_s.$$

II. — Applications diverses des théorèmes précédents.

10. Considérons les corps matériels agissant les uns sur les autres par une force d'attraction mutuelle proportionnelle à leurs masses et à une fonction quelconque de la distance.

Supposons ces corps répandus sur la surface (S) avec une densité μ, μ étant une fonction de coordonnées ξ, η, ζ de la surface (S).

Prenons un autre point x, y, z, dont la masse est égale à l'unité; soit r la distance du point x, y, z au point variable ξ, η, ζ de (S).

La force que la masse $\mu\, ds$ exerce sur la masse 1 au point x, y, z est égale à

$$\mu f(r)\, ds.$$

Supposons que la fonction $f(r)$, ainsi que ses dérivées, restent continues dans l'espace tout entier, sauf, peut-être, pour le point

$$x=\xi, \qquad y=\eta, \qquad z=\zeta.$$

La composante F_p, suivant une direction quelconque p, de l'attraction exercée par la couche superficielle, répandue sur (S), sur le point x, y, z, se représentera sous la forme suivante :

$$F_p=\int \mu f(r) \cos(p, r)\, ds=\int \mu\psi\, ds,$$

où l'on a posé

$$\psi=f(r) \cos(p, r).$$

On peut considérer F_p comme une dérivée suivant la direction p de la fonction potentielle

$$V = \int \mu\, U(r)\, ds,$$

où

$$U(r) = -\int f(r)\, dr.$$

On peut donc écrire

$$F_p = \frac{\partial V}{\partial p}. \tag{31}$$

Quant à μ, nous supposerons seulement qu'il satisfasse à une seule condition

$$\int \mu^2\, ds < Q, \tag{32}$$

Q étant une constante donnée.

Supposons que le point x, y, z ne se trouve pas sur (S).

Dans ce cas, ψ, $U(r)$ sont les fonctions en ξ, η, ζ vérifiant les conditions telles qu'il est permis de leur appliquer les théorèmes du numéro précédent.

Si l'on pose

$$f(r) = \frac{1}{r^2},$$

on arrive à l'attraction universelle.

Nous considérons ce dernier cas comme le plus important.

11. Appliquons le théorème II du n° 9 à l'intégrale

$$V = \int \frac{\mu}{r}\, ds.$$

On trouve le développement suivant :

$$V = \sum_{s=1}^{\infty} \int \mu\, V_s\, ds \int \frac{\varphi\, V_s}{r}\, ds$$

valable pour tout point x, y, z, intérieur ou extérieur à (S).

L'égalité précédente donne, en vertu de (20),

$$V = 4\pi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{\lambda_s} V_s, \tag{33}$$

où l'on a posé

$$B_s = \int \mu V_s \, ds \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Ce développement aura lieu quelle que soit la fonction μ, satisfaisant à une seule condition (32).

Désignons par f la fonction à laquelle se réduit V sur (S).

On peut écrire

$$\int \frac{\mu}{r} ds = f \qquad \text{sur (S)},$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (20),

$$(34) \qquad B_s = \frac{\lambda_s}{4\pi} A_s, \qquad A_s = \int \varphi f V_s \, ds \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

ce qui nous donne, en vertu de (33),

$$(35) \qquad V = \int \frac{\mu}{r} ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s.$$

On arrive donc au théorème suivant :

Théorème. — *Le potentiel* V *de la simple couche, répandue sur la surface* (S), *jouissant des propriétés du n° 1 du Chapitre I, avec une densité* μ *satisfaisant à une seule condition*

$$\int \mu^2 ds < Q,$$

Q *étant un nombre fixe, est développable, pour tout point extérieur aux masses agissantes* [*intérieur ou extérieur à* (S)], *en série absolument convergente de la forme suivante :*

$$(36) \qquad V = \int \frac{\mu}{r} ds = \sum_{s=1} A_s V_s, \qquad A_s = \int \varphi f V_s \, ds,$$

f *étant la fonction à laquelle se réduit* V *sur* (S).

12. Considérons maintenant la composante F_p (n° 1).

On a

$$F_p = \int \frac{\mu \cos(r, p)}{r^2} ds.$$

Le théorème II du n° 9 s'applique évidemment à F_p et conduit au développement suivant :

$$F_p = \sum_{s=1}^{\infty} \int \mu V_s \, ds \int \frac{\varphi \cos(r, p) V_s}{r^2} \, ds = \sum_{s=1}^{\infty} B_s \int \frac{\varphi \cos(r, p) V_s}{r^2} \, ds.$$

Mais

$$\frac{\partial V_s}{\partial p} = \frac{\lambda_s}{4\pi} \int \frac{\varphi V_s \cos(r, p)}{r^2} \, ds.$$

On trouve donc, en tenant compte de (34),

$$F_p = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{\partial p}$$

pour tout point qui ne se trouve pas sur la surface attirante.

En remplaçant p par x, y, z, nous obtiendrons les développements des composantes de l'attraction suivant les axes de coordonnées

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{\partial x}, \qquad \ldots$$

par rapport à y, z.

Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Les dérivées par rapport à x, y, z de la série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

sont égales à la somme des dérivées de ses termes, pourvu que le point x, y, z ne se trouve pas sur la surface attirante.

Théorème II. — *La composante, suivant une direction quelconque, exercée par la simple couche, répandue sur* (S), *sur un point quelconque extérieur aux masses agissantes, est développable en série absolument convergente*

$$F_p = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{\partial p}. \tag{37}$$

Ces théorèmes représentent une généralisation des théorèmes connus sur le développement du potentiel de la simple couche en séries procédant suivant les fonctions sphériques, suivant les fonctions de Lamé, etc., dans le cas de la sphère, de l'ellipsoïde, etc.

13. Les théorèmes précédents nous donnent immédiatement la solution des problèmes suivants :

Problème I. — *Les valeurs du potentiel* V *de la simple couche, répandue sur* (S) *avec une densité quelconque* μ, *étant données en tous les points de* (S), *on sait seulement que* μ *satisfait à l'inégalité*

$$\int \mu^2 \, ds < Q, \tag{32_1}$$

Q *étant un nombre fixe; trouver les valeurs de* V *en tous les autres points, intérieurs ou extérieurs à* (S).

Problème II. — *Les valeurs du même potentiel* V *étant données sur* (S), *trouver la composante, suivant une direction quelconque* p, *de l'attraction exercée par la simple couche sur un point quelconque, qui ne se trouve pas sur* (S).

Les valeurs de V étant données sur (S), on peut calculer successivement les constantes

$$A_s = \int \varphi f V_s \, ds \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

La valeur de la fonction cherchée V en tout point, extérieur aux masses agissantes, se représentera sous la forme de la série (36); la valeur de la composante cherchée F_p au même point peut se calculer à l'aide de la série (37).

14. Désignons par V′ la somme de p premiers termes de la série (36), *en choisissant le nombre p assez grand pour que le théorème du n° 2 ait lieu.*

Proposons-nous de déterminer une limite supérieure de la différence

$$V - V'.$$

Remarquons d'abord qu'on peut toujours construire une fonction ψ des variables $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, continue dans l'espace tout entier, ainsi que ses dérivées du premier ordre, se réduisant à $\frac{1}{r}$ sur (S) et telle que l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 d\tau'$$

ait un sens bien déterminé.

Supposons, par exemple, que le point $P(x, y, z)$ soit à l'intérieur de (S).

Prenons, pour plus de simplicité, P pour l'origine des coordonnées et décrivons, du point P comme centre, une sphère (σ) dont le rayon est égal à la plus petite distance du point P de (S), que nous désignerons par δ.

On peut prendre pour ψ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\psi = \frac{1}{r}$$

dans le domaine extérieur à (σ);

$$\psi = \frac{1}{\delta} = \text{const.}$$

à l'intérieur de (σ).

Il est évident que la fonction ψ, ainsi déterminée, satisfait à toutes les équations demandées.

Désignons par $d\tau_0$ l'élément de volume du domaine (D_0), limité par la surface donnée (S) et par la sphère (σ).

On trouve

$$\int \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 d\tau' = \int \sum \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)^2 d\tau' + \int \sum \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)^2 d\tau_0 < \frac{4\pi}{\delta}.$$

Posons maintenant

$$\psi = \sum_{s=1} C_s V_s + R'_p,$$

où

$$C_s = \int \frac{\varphi V_s}{r} ds \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

On aura

$$\frac{1}{r} = \sum_{s=1}^{p} C_s V_s + R_p \qquad \text{sur (S)}, \tag{38}$$

R_p étant la valeur de R'_p sur (S).

Reportons-nous à l'inégalité (23) du n° 7. Conservant les notations y adoptées, on peut écrire

$$S_p \leqq \frac{T_p}{\lambda_{p+1}},$$

d'où

$$S_p = \int \varphi R_p^2 \, ds < \frac{4\pi}{N\delta p^{\frac{1}{3}}}, \tag{39}$$

puisque

$$T_p < \int \sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 d\tau' < \frac{4\pi}{\delta},$$

$$\lambda_{p+1} > N p^{\frac{1}{3}},$$

N étant un nombre ne dépendant que de (S).

Cela posé, multiplions l'équation (38) par $\mu \, ds$ et intégrons en étendant l'intégration à toute la surface (S).

On trouve

$$V = \int \frac{\mu}{r} ds = \sum_{s=1}^{p} A_s V_s + \int \mu R_p \, ds,$$

c'est-à-dire

$$|V - V'| < \left| \int \mu R_p \, ds \right| < \frac{\sqrt{Q}}{\alpha} \sqrt{S_p},$$

α étant le minimum de φ sur (S).

La simple comparaison de cette inégalité à l'inégalité (39) donne

$$|V - V'| < \frac{\sqrt{4\pi Q}}{\alpha\sqrt{NS}} \frac{1}{p^{\frac{1}{6}}} = \frac{k}{\sqrt[6]{p}\sqrt{\delta}}. \tag{40}$$

Il s'ensuit que, en calculant la fonction V approximativement à l'aide d'un nombre quelconque p (assez grand) de premiers termes de la série

$$\sum^{\infty} A_s V_s$$

on fait une erreur plus petite que

$$\frac{k}{\sqrt[4]{p}\sqrt{\delta}},$$

k étant un nombre fixe, ne dépendant que de (S), de la fonction donnée φ et du nombre donné Q, qui figure dans l'inégalité (32_1).

Les mêmes raisonnements s'appliquent à la série (37).

On peut, sans doute, trouver une limite plus précise de l'erreur admise, mais nous n'insisterons pas sur ce point.

J'ajouterai seulement que l'inégalité (40), au moins pour les surfaces admettant la transformation de M. Poincaré, peut être remplacée par la suivante :

$$|V - V'| < \frac{k}{\sqrt[4]{p}\sqrt{\delta}} \quad (^1).$$

15. Faisons quelques remarques relatives aux problèmes suivants :

PROBLÈME I. — *On sait par l'expérience les valeurs de la composante* F_p, *suivant une direction quelconque p, de l'attraction exercée par la simple couche, répandue sur la surface donnée* (S), *en k points quelconques* p_1, p_2, ..., p_k, *extérieurs à* (S).

Trouver la valeur du potentiel V *de cette couche en un point quelconque* x, y, z *qui ne se trouve pas sur* (S).

PROBLÈME II. — *On connaît les valeurs de* V *aux points* $p_1, p_2, \ldots, p_k$, *extérieurs à* (S) (*ou, plus généralement, extérieurs aux masses agissantes*); *trouver la valeur de la composante* F_p *en un point quelconque* x, y, z *ne se trouvant pas sur* (S).

Il suffit de considérer un de ces problèmes, par exemple le problème I.

On a, d'après le théorème du n° 12,

$$F_p = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{\partial p},$$

quel que soit le point x, y, z, extérieur aux masses agissantes.

(1) *Voir* mon Ouvrage *Les méthodes générales, etc.* Kharkow, 1901, p. 265.

En choisissant le nombre k assez grand, on trouve l'équation approchée

$$F_p = \sum_{s=1}^{k} A_s \frac{\partial V_s}{\partial p}. \tag{41}$$

Soit m un autre nombre assez grand, mais plus petit que k.

On peut écrire approximativement

$$V = \sum_{s=1}^{m} A_s V_s. \tag{42}$$

Il ne reste qu'à calculer les constantes A_s pour obtenir la solution approchée du problème.

Désignons par $U_n (n = 1, 2, \ldots, k)$ les valeurs données de F_p, par $\left(\frac{\partial V_s}{\partial p}\right)_n (n = 1, 2, \ldots, k)$ les valeurs connues de $\frac{\partial V_s}{\partial p}$ aux points p_1, $p_2, \ldots, p_k$.

L'équation (41) donne le système des équations

$$\begin{array}{l}
A_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_1 + A_2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_1 + \ldots + A_k\left(\frac{\partial V_k}{\partial p}\right)_1 = U_1, \\
A_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_2 + A_2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_2 + \ldots + A_k\left(\frac{\partial V_k}{\partial p}\right)_2 = U_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_k + A_2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_k + \ldots + A_k\left(\frac{\partial V_k}{\partial p}\right)_k = U_k,
\end{array}$$

d'où l'on tire les valeurs approchées des constantes $A_s (s = 1, 2, \ldots, k)$.

En les substituant dans l'équation (42), nous obtiendrons l'expression approchée de V en un point quelconque x, y, z, extérieur aux masses agissantes.

On peut résoudre de la même manière le problème II.

Ici nous avons la généralisation des idées bien connues de Gauss et de Riemann [1].

La méthode indiquée pour résoudre les problèmes dont il s'agit

---

[1] GAUSS, *Allgemeine Theorie der Erdmagnetismus*; Göttingen, 1867, p. 141, etc. — RIEMANN, *Schwere, Electricität und Magnetismus*; Hannover, 1880, p. 357 et 358.

entraîne une série de questions, à savoir : Comment faut-il disposer les points $p_1, p_2, \ldots, p_k$ à l'extérieur de (S)? comment faut-il choisir les nombres k et m pour calculer V avec une erreur la plus petite possible? mais ce n'est que dans quelques cas particuliers qu'on peut donner une réponse suffisante à ces questions.

16. Passons enfin au problème suivant :

Problème. — *Les valeurs du potentiel* V *étant données sur* (S), *trouver la densité* μ *des masses attirantes, quand on sait seulement que* μ *satisfait à une seule condition*

$$\int \mu^2\, ds < Q,$$

Q *étant un nombre fixe.*

Désignons, comme précédemment, par f la succession des valeurs données de V sur (S).

La fonction f étant donnée, on peut considérer comme connues les constantes

$$A_s = \int \varphi f V_s\, ds \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

et, par conséquent, les constantes

$$B_s = \int \mu V_s\, ds \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

[en vertu de (34)].

Soit (σ) une portion quelconque de la surface (S), soit (S_0) la portion de (S) qui reste. Désignons par $d\sigma$ l'élément superficiel de (σ), par σ l'aire de cette portion.

Désignons enfin par θ une fonction jouissant des propriétés suivantes :

$$\theta = 0 \quad \text{sur } (S_0),$$
$$\theta = 1 \quad \text{sur } (\sigma),$$

et considérons l'intégrale

$$\int \mu\theta\, ds.$$

Les fonctions θ (1) et μ satisfont aux mêmes conditions que f et ψ dans le théorème II du n° 9.

Ce théorème s'applique, par conséquent, à l'intégrale précédente et donne

$$\int \mu\, d\sigma = \int \mu\,\theta\, ds = \sum_{s=1}^{\infty} \int \mu \mathrm{V}_s\, ds \int \varphi\,\theta\,\mathrm{V}_s\, ds = \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{B}_s \int \varphi \mathrm{V}_s\, d\sigma.$$

En choisissant l'aire σ de la portion (σ) suffisamment petite, on trouve, au point de vue de la Physique, la densité cherchée :

$$\mu = \frac{1}{\sigma} \int \mu\, d\sigma = \frac{1}{\sigma} \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{B}_s \int \varphi\, \mathrm{V}_s\, d\sigma \quad (2).$$

17. Reprenons maintenant l'équation (29_1), ayant lieu quelle que soit la fonction f satisfaisant à une seule condition

$$\int f^2\, ds < \mathrm{Q},$$

Q étant un nombre fixe.

Supposons la fonction f choisie de telle sorte que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{A}_s \mathrm{V}_s$$

converge uniformément sur (S).

Dans ce cas, R_p dans l'équation (21) représentera une fonction continue sur (S), quel que soit le nombre p.

Nous aurons alors

$$\lim_{p=\infty} \int \varphi\, \mathrm{R}_p^2\, ds = \int \varphi \lim_{p=\infty} \mathrm{R}_p^2\, ds = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{p=\infty} \mathrm{R}_p = 0,$$

(1) La fonction θ a été employée pour la première fois par M. Liapounoff dans ses recherches sur la distribution de l'électricité sur un ellipsoïde. Voir : *Communications de la Société mathématique de Kharkow* (*Extrait des Procès-verbaux*, t. VI, n° 6, séances des 13 décembre 1896, 20 janvier et 7 mai 1897).

(2) *Comparer* mon Mémoire *Sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. II, 1900, p. 296).

ce qui nous donne

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} A_s V_s \quad \text{sur (S)}.$$

Le théorème suivant est donc démontré :

Théorème. — *La série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s, \qquad A_s = \int \varphi f V_s \, ds \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

représentera la fonction donnée f toutes les fois qu'elle sera uniformément convergente (1).

Dans ce cas, la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

représente une fonction harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de (S), *continue dans l'espace tout entier et se réduisant à la fonction donnée f sur* (S), *c'est-à-dire* la solution du problème de Dirichlet.

Il importe de remarquer que *tous les résultats de ce Chapitre ne dépendent point de toutes les autres recherches de ce Mémoire et s'appliquent à toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions générales* 1°, 2° *et* 3° *du n° 1 du Chapitre I* (c'est-à-dire quel que soit le nombre $\alpha \leq 1$).

III. — Problème de Dirichlet.

18. Faisons maintenant une hypothèse particulière relative à la surface (S), en prenant dans la condition 3° (n° 1, Chap. I) $\alpha = 1$.

A cette condition on pourra appliquer à (S) tous les résultats établis dans le Chapitre I.

Rappelons un de ces résultats :

Si la fonction donnée f, continue sur (S), satisfait à une telle con-

(1) *Comparer* Ed. Le Roy, *Sur l'intégration des équations de la chaleur* (*Annales de l'École Normale*, t. XV, 1898, p. 67).

dition que le potentiel de la double couche

$$\int \frac{f \cos\varphi}{r^2} ds$$

admette les dérivées normales sur (S), la fonction V, harmonique à l'intérieur (ou à l'extérieur) de (S) se représente sous la forme suivante (théorème IV, n° 17, Chap. I) :

$$V = \int f \frac{\partial G}{\partial n} ds. \tag{43}$$

Or, M. A. Liapounoff, dans son Mémoire *Sur certaines questions*, etc., a prouvé que la fonction

$$\int f \frac{\partial G}{\partial n} ds \tag{44}$$

tend toujours vers f sur (S), pourvu que la fonction f soit *continue* sur (S); il a énoncé aussi sans démonstration la proposition que l'intégrale (44) représente une fonction harmonique à l'intérieur (ou à l'extérieur) de (S).

Nous démontrerons ces propositions importantes en nous appuyant sur la théorie des fonctions fondamentales.

Il est évident d'abord que le potentiel de la double couche

$$\int \frac{V_s \cos\varphi}{r^2} ds$$

admet les dérivées normales sur (S), quel que soit l'indice $s = 1, 2, \ldots$, ce qui résulte immédiatement de la formule de Green

$$V_s = \frac{1}{4\pi} \int \frac{V_s \cos\varphi}{r^2} ds + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V_{si}}{\partial n} \frac{1}{r} ds,$$

ayant lieu, puisque chacune des fonctions fondamentales admet les dérivées normales sur (S).

On peut donc écrire, d'après le théorème IV du n° 17 du Chapitre I,

$$V_k = \int V_k \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad \text{à l'intérieur (ou à l'extérieur) de (S).} \tag{45}$$

Supposons maintenant que, dans l'intégrale

$$\int f \frac{\partial G}{\partial n} ds, \tag{46}$$

le point x, y, z tend vers un point de (S) et passons à la limite.

Il est aisé de s'assurer que cette expression limite est une fonction continue sur (S).

Considérons la fonction

$$u = \frac{1}{\varphi}\left(f - \int f \frac{\partial G}{\partial n} ds\right),$$

en entendant par l'intégrale du second membre de cette égalité la limite mentionnée.

Appliquons à u le théorème I du n° 8 de ce Chapitre.

On trouve

$$\int \varphi u^2 ds = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\int V_s \left(f - \int f \frac{\partial G}{\partial n} ds\right) ds\right]^2;$$

d'où, en intervertissant l'ordre des intégrations et en tenant compte de (45),

$$\int \varphi u^2 ds = 0,$$

c'est-à-dire

$$f = \int f \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad \text{sur (S)}.$$

Donc, *la fonction*

$$\int f \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

se réduit à f sur (S), *quelle que soit la fonction f, continue sur* (S).

19. Démontrons maintenant que *l'intégrale* (46) *représente une fonction harmonique à l'intérieur (ou à l'extérieur) de* (S).

La fonction $\frac{\partial G}{\partial n}$ reste continue sur (S), pourvu que le point x, y, z soit à l'intérieur (ou à l'extérieur) de (S).

Appliquons à l'intégrale (46) le théorème II du n° 8 de ce Chapitre.

On aura, en vertu de (45),

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int f\frac{\partial G}{\partial n}\,ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \int V_s \frac{\partial G}{\partial n}\,ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s \\ \text{à l'intérieur (ou à l'extérieur) de (S).}\end{array}\right.$$

Il est aisé de prouver que la série

$$(48)\qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

représente une fonction harmonique à l'intérieur (ou à l'extérieur) de (S).

Montrons d'abord qu'*on peut intégrer cette série comme une série uniformément convergente*.

Posons, comme précédemment,

$$f = \sum_{s=1}^{p} A_s V_s + R_p,$$

d'où

$$V = \int f\frac{\partial G}{\partial n}\,ds = \sum_{s=1}^{p} A_s \int V_s \frac{\partial G}{\partial n}\,ds + \int R_p \frac{\partial G}{\partial n}\,ds = \sum_{s=1}^{p} A_s V_s + \int R_p \frac{\partial G}{\partial n}\,ds.$$

Soit (S_i) une surface fermée, située à l'intérieur (ou à l'extérieur) de (S); désignons par ds_i l'élément superficiel de (S_i).

L'égalité précédente donne

$$\int V\,ds_i = \sum_{s=1}^{p} A_s \int V_s\,ds_i + \int R_p\left[\int \frac{\partial G}{\partial n}\,ds_i\right] ds.$$

Désignons par K_i le maximum de l'intégrale

$$\int \frac{\partial G}{\partial n}\,ds_i$$

sur (S).

On peut écrire

$$T = \left|\int R_p\left(\int \frac{\partial G}{\partial n}\,ds_i\right) ds\right| < \frac{K_i}{\alpha}\int \varphi\,|R_p|\,ds < N_i\sqrt{S_p},$$

N_i étant un nombre fixe ne dépendant que de φ et des surfaces (S) et (S_i).

On sait que S_p tend vers zéro lorsque p croît indéfiniment.

On peut donc, quel que soit le nombre positif ε, donné à l'avance, trouver un nombre $n > p$ tel qu'on ait

$$T < \varepsilon,$$

quel que soit le nombre n, plus grand que p.

On trouve ainsi

$$\int V\, ds_i = \int \left(\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s \right) ds = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \int V_s\, ds_i,$$

ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

Cela nous suffit pour démontrer, par la méthode connue, que la série (48) représente une fonction harmonique à l'intérieur (ou à l'extérieur) de (S) [1].

Il en est de même, par conséquent, en vertu de (47), de l'intégrale

$$\int f \frac{\partial G}{\partial n}\, ds,$$

quelle que soit la fonction f, *continue* sur (S).

En résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La formule*

$$V = \int f \frac{\partial G}{\partial n}\, ds$$

donne toujours la solution du problème de Dirichlet, quelle que soit la fonction continue f à laquelle doit se réduire sur (S) *la fonction harmonique cherchée, si la surface* (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *(pour $\alpha = 1$) du n° 1 du Chapitre I.*

20. Les recherches précédentes conduisent en même temps à une méthode pour résoudre le problème de Dirichlet, conformément aux

---

(1) *Voir*, par exemple, P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*. t. I, p. 222. Paris, 1891.

idées de Lamé, sous la forme de la série procédant suivant les solutions simples de l'équation de Laplace.

En effet, la série

$$V = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

représente une fonction V, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de (S) se réduisant à la fonction donnée f sur (S), ce qui résulte immédiatement des recherches des nos 18 et 19.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s, \qquad A_s = \int \varphi f V_s \, ds,$$

$V_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$ *étant les fonctions fondamentales correspondant à la surface donnée* (S) *et à la fonction donnée* φ, *représente une fonction harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de* (S) *se réduisant à une fonction donnée* f *sur* (S), *c'est-à-dire la solution du problème de Dirichlet, si la fonction* f *est* continue *sur* (S) *et la surface* (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° (*pour* $\alpha = 1$) *du n° 1 du Chapitre I.*