Émile Picard

Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 397-420

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__397_0>

SUR LES

INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES

DE TROISIÈME ESPÈCE

DANS LA THÉORIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES,

PAR M. ÉMILE PICARD.

La théorie des intégrales de différentielles totales de *première* et de *seconde* espèce relatives aux surfaces algébriques est fixée dans ses grandes lignes (¹), et ce sont surtout des exemples particuliers qui sont à trouver pour fournir des applications des théorèmes généraux. Il en est tout autrement des intégrales de différentielles totales de *troisième* espèce, sur lesquelles se posent des questions qui restent jusqu'ici sans réponse. Malgré bien des efforts, je suis encore arrêté par des difficultés qui m'ont pendant quelque temps détourné de ces recherches. J'y ai été ramené par l'étude des intégrales doubles de seconde espèce dont je cherche à constituer une théorie générale; il y a en effet un lien intime entre les deux questions, comme je le montrerai bientôt. Mon principal objet, pour le moment, est d'indiquer une proposition générale sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce; il y figure, pour une surface donnée, un nombre ρ, dont on a facilement une limite supérieure, mais dont la recherche précise demandera encore quelques efforts. J'indique ensuite quelques types de surfaces algébriques pour lesquelles toutes les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-loga-

(¹) *Voir* ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, où j'ai rassemblé mes recherches sur ce sujet.

rithmiques. Ici encore, une question reste en suspens. Il n'est pas impossible que, *en général,* toutes les intégrales de différentielles totales relatives à une surface se ramènent à une combinaison algébrico-logarithmique. Si une surface a des intégrales de différentielles totales de seconde espèce, autres que des fonctions rationnelles, il y a manifestement des intégrales de troisième espèce qui ne sont pas réductibles à la combinaison indiquée, mais est-ce le seul cas? J'espère pouvoir revenir un jour sur toutes ces questions, qui touchent à la fois à l'Algèbre et à la théorie des fonctions, et je me permets aussi d'appeler sur elles l'attention des géomètres, qui y trouveront un vaste champ d'études.

I.

1. Considérons une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

n'ayant que des singularités ordinaires et n'occupant pas de position spéciale par rapport aux axes de coordonnées. Nous allons étudier les intégrales de différentielles totales de troisième espèce relatives à cette surface.

Si l'on envisage un certain nombre μ de courbes algébriques irréductibles sur la surface, il est possible qu'il n'existe pas d'intégrale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que ces μ lignes ou quelques-unes d'entre elles, mais nous allons montrer que ceci ne pourra pas arriver si μ dépasse une certaine limite dépendant uniquement de la surface.

Une courbe C de la surface peut être définie par les deux équations

$$\begin{aligned} A(x, y) &= 0, \\ z &= R(x, y), \end{aligned}$$

A désignant un polynome irréductible, et R une fraction rationnelle de x et y; le cylindre

$$A(x, y) = 0$$

coupe la surface f suivant la courbe C et une ou plusieurs autres courbes. Celles-ci ne doivent pas être des courbes logarithmiques.

2. Considérons sur la surface f de degré m une courbe C de degré d définie par les deux équations précédentes, et envisageons la famille de courbes définie par la relation entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0, \tag{1}$$

où y représente un paramètre arbitraire. On peut former une intégrale abélienne relative à cette courbe jouissant des propriétés suivantes : Elle n'a d'autres points singuliers à distance finie que les points (z, x) de la courbe correspondant aux équations

$$A(x, \bar{y}) = 0,$$
$$z = R(x, \bar{y}),$$

et la période polaire correspondant à chacun de ces points singuliers logarithmiques est égale à $+1$. De plus, relativement aux m points de la courbe à l'infini (qui sont indépendants de y) l'intégrale a seulement comme point singulier logarithmique l'un d'entre eux et la période correspondante est égale à $-d$; enfin elle est de la forme

$$\int S(x, \bar{y}, z)\, dx, \tag{I}$$

S étant une fonction rationnelle de x, y et z.

On se rend compte aisément qu'il est possible de satisfaire aux diverses conditions qui précèdent. On peut, par exemple, procéder de la manière suivante. Soient

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_d$$

les d points de la courbe C pour une valeur donnée de y, et désignons par M le point à l'infini de la courbe (1) qui doit être pour l'intégrale un point logarithmique.

Formons une intégrale de troisième espèce de la courbe

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

ayant les points logarithmiques

$$M_i \quad \text{et} \quad M$$

avec les périodes polaires respectives

$$+1 \quad \text{et} \quad -1;$$

on peut s'arranger de manière que les coefficients de cette intégrale soient fonctions rationnelles de y et de (z_i, x_i). En faisant la somme de ces intégrales pour

$$i = 1, 2, \ldots, d,$$

on obtiendra une intégrale du type cherché I.

Ceci posé, si la courbe (1), entre x et z (pour y arbitraire), est de genre p, l'intégrale I a, outre les périodes polaires provenant des singularités logarithmiques, $2p$ périodes cycliques que nous désignerons par

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p},$$

de telle sorte que l'ensemble des périodes de I est

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}, \quad 1. \tag{2}$$

Elles sont, sauf la dernière, des fonctions de y. Nous avons supposé que y avait une valeur fixe, d'ailleurs arbitraire. Si l'on fait varier y et qu'on revienne au point de départ, l'ensemble des périodes (2), pour un contour déterminé, se transformera en

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_{2p}, \quad 1$$

et l'on aura la substitution S

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{\begin{array}{l} \omega'_1 \;\;= m_1^1\ \omega_1 + m_2^1\ \omega_2 + \ldots + m_{2p}^1 \omega_{2p} + \mu^1, \\ \omega'_2 \;\;= m_1^2\ \omega_1 + m_2^2\ \omega_2 + \ldots + m_{2p}^2 \omega_{2p} + \mu^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{2p} = m_1^{2p} \omega_1 + m_2^{2p} \omega_2 + \ldots + m_{2p}^{2p} \omega_{2p} + \mu^{2p}, \\ 1 \;\;\;= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1, \end{array}\right.$$

les m et les μ étant des entiers. Les m des $2p$ premières colonnes ne dépendent nullement de la courbe C, c'est-à-dire du polynome A et de la fraction rationnelle R. Ils sont les mêmes que ceux que nous aurions obtenus si, au lieu de considérer l'intégrale I, nous avions pris l'intégrale de *seconde* espèce

$$\int \frac{\mathrm{F}(x, \bar{y}, z)\, dx}{f'_z} \tag{3}$$

relative à la courbe (1), comme nous l'avons fait dans notre *Théorie* *des fonctions algébriques de deux variables* (p. 94); les

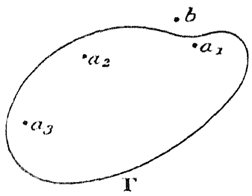
$$m_1^i, \quad m_2^i, \quad \ldots, \quad m_{2p}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

sont les mêmes que ceux de la substitution S de la page 99 (*loc. cit.*). Au contraire les μ^i dépendent essentiellement de la courbe C.

Les points singuliers des ω considérés comme fonctions de y ne dépendent nullement de la courbe C; c'est là un point très important pour la suite. Ces points singuliers ne peuvent être, en effet, d'une part que ceux correspondant aux valeurs de y pour lesquelles le genre de la courbe

$$(4) \qquad f(x, \bar{y}, z) = 0$$

s'abaisse, d'autre part que les valeurs de y pour lesquelles un des points logarithmiques se confond avec un point critique de la courbe. Les premiers sont les points critiques de l'intégrale (3), les seconds ne sont pas en réalité des points critiques. Car, soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$, les points critiques de la courbe (4), et b un point singulier logarithmique;



b et les a dépendent de y, et l'on suppose que, pour une certaine valeur α de y, le point b coïncide avec le point a_1. Soit ω une période correspondant à un contour Γ; à une petite courbe autour du point logarithmique b correspondra la période polaire $+1$. Quand y tourne autour de α et revient à sa position initiale, il faut montrer que ω revient à la même valeur; ceci est immédiat, puisque la période $\omega + 1$, correspondant à un contour qui entoure les quatre points a_1, a_2, a_3 et b, ne change pas quand y tourne autour de α.

Les substitutions S, faisant connaître l'ensemble des valeurs des ω pour toutes les circulations de y autour des divers points critiques, sont donc en un certain nombre k indépendant de la courbe C.

3. Ces résultats obtenus, considérons maintenant $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce $I_1, I_2, \ldots, I_{2p}$ de la courbe

$$f(x, \bar{y}, z) = 0, \tag{1}$$

en désignant par p le genre de cette courbe, pour $\bar{y}$ arbitraire. Soient aussi λ courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ et formons λ intégrales

$$J_1, J_2, \ldots, J_\lambda,$$

du type I, relatives respectivement aux courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$. Cherchons à déterminer, s'il est possible, les *fonctions rationnelles*

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2p},$$

et les *constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$ de telle sorte que l'intégrale abélienne, relative à la courbe (1)

$$a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_1 J_1 + \ldots + c_\lambda J_\lambda, \tag{5}$$

ait toutes ses périodes indépendantes de y.

Il en est bien ainsi pour les périodes polaires. Pour les périodes cycliques, il n'en sera pas ainsi, en général. Désignons par

$$K_1, K_2, \ldots, K_{2p},$$

les périodes, supposées indépendantes de y, correspondant aux $2p$ cycles initiaux, pour lesquels nous avons les substitutions fondamentales, désignées d'une manière générale par S. Supposons que celle-ci soit relative à la modification des périodes de J_1 pour une certaine circulation de y; pour la même circulation de y, on aura la même substitution pour $J_2, \ldots, J_\lambda$, sauf que les μ se trouveront remplacés par d'autres entiers $\nu, \ldots, \pi$. Dans ces conditions, on devra avoir, puisque l'on suppose que les K ne dépendent pas de y,

$$K_i = m_1^i K_1 + m_2^i K_2 + \ldots + m_{2p}^i K_{2p} + c_1 \mu^i + c_2 \nu^i + \ldots + c_\lambda \pi^i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

On aura $2p$ relations analogues pour chacune des k substitutions fondamentales du type S.

Ceci posé, admettons qu'on puisse trouver $2p + \lambda$ constantes

$$K_1, K_2, \ldots, K_{2p}, \quad c_1, c_2, \ldots, c_\lambda,$$

non toutes nulles, et satisfaisant aux $2pk$ relations qui viennent d'être écrites : Nous allons montrer qu'*on pourra alors former une intégrale de différentielle totale ayant précisément les périodes précédentes.* C'est, comme on voit, la généralisation de l'analyse que j'ai développée dans ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables,* t. I, p. 93, pour étudier les intégrales de différentielles totales de seconde espèce.

4. Écrivons, en effet, que les périodes de l'intégrale

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_1 J_1 + \ldots + c_\lambda J_\lambda,$$

correspondant aux $2p$ cycles initiaux, sont égales aux constantes K_1, K_2, ..., K_{2p}. Nous aurons ainsi $2p$ équations qui vont déterminer

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_{2p};$$

il faut montrer que les a ainsi déterminés sont des fonctions rationnelles de y. Désignons par E_1, E_2, ..., E_{2p} les premiers membres de ces équations, nous aurons

$$E_1 = K_1, \qquad E_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad E_{2p} = K_{2p};$$

il suffit de faire voir que ce système d'équations reste invariable quand on fait décrire à y un contour fermé quelconque, soit le contour auquel correspond la substitution S.

Or, ces équations deviennent

$$\begin{array}{l}
m_1^1\ E_1 + m_2^1\ E_2 + \ldots + m_{2p}^1 E_{2p} + c_1 \mu^{(1)} \ + c_2 \nu^{(1)} \ + \ldots + c_\lambda \pi^{(1)} \ = K_1, \\
m_1^2\ E_1 + m_2^2\ E_2 + \ldots + m_{2p}^2 E_{2p} + c_1 \mu^{(2)} \ + c_2 \nu^{(2)} \ + \ldots + c_\lambda \pi^{(2)} \ = K_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
m_1^{2p} E_1 + m_2^{2p} E_2 + \ldots + m_{2p}^{2p} E_{2p} + c_1 \mu^{(2p)} + c_2 \nu^{(2p)} + \ldots + c_\lambda \pi^{(2p)} = K_{2p},
\end{array}$$

système équivalent au système

$$E_1 = K_1, \qquad E_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad E_{2p} = K_{2p},$$

d'après les équations que nous supposons vérifiées par les constantes K et c.

Nous avons donc obtenu une intégrale de troisième espèce, relative à la courbe entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

dont les périodes cycliques et polaires

$$K_1, K_2, \ldots, K_{2p}, \quad c_1, c_2, \ldots, c_\lambda,$$

sont indépendantes de y; désignons cette intégrale par

$$\int R(x, \bar{y}, z)\, dx.$$

5. Il va être facile maintenant de former une intégrale de différentielle totale de troisième espèce, relative à la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

ne pouvant avoir d'autre courbe logarithmique que les courbes

$$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda,$$

avec les périodes polaires correspondantes

$$c_1, c_2, \ldots, c_\lambda,$$

et peut-être, en outre, la courbe à l'infini de la surface. On va voir, en effet, qu'on peut déterminer une fonction rationnelle $S(x, y, z)$ telle que l'intégrale

$$\int R(x, y, z)\, dx + S(x, y, z)\, dy$$

satisfasse à ces diverses conditions.

La fonction $S(x, y, z)$, considérée comme fonction de x et y, doit satisfaire à la condition

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

On y satisfera de la manière suivante : Soit x_0 une valeur fixe arbitraire et désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les m racines de l'équation

$$f(x_0, y, z) = 0 \qquad (m \text{ étant le degré de } f).$$

Posons

$$S = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_0, z_1}^{x, z} R(x, y, z)\, dx + \ldots + \int_{x_0, z_m}^{x, z} R(x, y, z)\, dx \right];$$

S, ainsi déterminée, a une valeur unique en chaque point (x, y, z) de la surface, *puisque les périodes des intégrales ne dépendent pas de y.* Par suite, cette expression sera une fonction rationnelle de (x, y, z), car les points singuliers de cette fonction ne peuvent être des points singuliers essentiels. De plus, on voit immédiatement que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}[m\,R(x, y, z)] = \frac{\partial R}{\partial y},$$

comme nous voulons l'avoir.

Nous avons donc une intégrale de différentielle totale

$$\int R\,dx + S\,dy,$$

où R et S sont rationnelles en x, y et z.

L'intégrale précédente ne pourra visiblement avoir d'autres courbes logarithmiques que les courbes

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_\lambda,$$

la courbe à l'infini sur la surface, et peut-être aussi des sections planes de la surface correspondant à des plans

$$y = \text{const.}$$

Il serait aisé d'établir qu'il n'y a pas de lignes logarithmiques de cette dernière catégorie; il suffirait, pour cela, de répéter le raisonnement fait pages 104 et 105 de ma *Théorie des fonctions de deux variables,* pour une circonstance analogue, mais il est inutile d'insister sur ce point, car si la section

$$y = b,$$

donnant dans la surface une courbe indécomposable (ce qu'on peut toujours supposer, puisque les axes sont arbitraires), était une courbe logarithmique avec la période correspondante B, il suffirait de retrancher de notre intégrale

$$\frac{B}{2\pi i}\log(y - b)$$

pour avoir une intégrale possédant la propriété voulue.

En résumé, si les constantes K et c satisfont aux $2pk$ relations à coefficients entiers du n° 3, *nous pouvons former une intégrale de diffé-*

rentielle totale

$$\int \mathrm{R}\,dx + \mathrm{S}\,dy$$

ayant les $2p+\lambda$ *périodes*

$$\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_{2p}, \quad c_1, c_2, \ldots, c_\lambda,$$

les λ *dernières étant des périodes logarithmiques correspondant aux courbes données à l'avance*

$$\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_\lambda.$$

Certaines quantités c peuvent être nulles, auquel cas il n'y aurait pas de courbe logarithmique correspondante. Si tous les c étaient nuls, nous aurions une intégrale qui ne pourrait avoir d'autre courbe logarithmique que la courbe à l'infini de la surface f; mais une intégrale ne pouvant avoir *une seule* courbe logarithmique, notre intégrale n'en aurait alors aucune, et nous aurions alors une intégrale de seconde espèce, conclusion qui est bien d'accord avec notre théorie des intégrales de seconde espèce.

II.

6. Au point de vue où nous nous sommes placé, les $2pk$ relations du n° 3 jouent un rôle essentiel. Remarquons, d'ailleurs, réciproquement que, s'il existe une intégrale de troisième espèce n'ayant à distance finie d'autres courbes logarithmiques que $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_\lambda$, les $2p+\lambda$ périodes de cette intégrale satisferont à $2pk$ relations du type précédent.

Au point de vue de possibilités qui peuvent se présenter pour une surface donnée, quelques observations intéressantes sont à faire. Désignons, d'une manière générale, par relations (α) les relations en question. Soit envisagée sur la surface une courbe algébrique irréductible quelconque C_1; il peut arriver, ou non, que les équations (α) correspondant à la seule courbe C_1 soient vérifiées pour une valeur de c_1 différente de zéro. Dans le premier cas, on aura une intégrale de troisième espèce ayant pour courbes logarithmiques la courbe C_1 et la courbe à l'infini; dans le second cas il n'y aura pas de telle intégrale. Si l'on est dans ce second cas, envisageons, outre C_1, une seconde courbe algébrique irréductible *quelconque* C_2, et concevons les équations (α) relatives aux deux courbes C_1 et C_2. Deux cas peuvent encore se présenter : il peut arriver ou non qu'on puisse satisfaire à ces équations, sans que c_2 soit nul. Dans le premier cas il y aura une intégrale de troisième espèce avec les deux courbes logarithmiques C_1 et C_2 et peut-être la courbe à l'infini ; il est visible que c_1 aussi ne sera pas nul. Dans le second cas, il n'y aura pas de telle intégrale. On peut ainsi continuer, mais non pas indéfiniment, car lorsque λ est assez grand, on pourra manifestement satisfaire aux équations (α), sans que tous les c soient nuls.

D'une manière plus précise, supposons que, pour λ courbes

$$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda,$$

il ne soit pas possible de satisfaire aux équations (α), sans que c_1, $c_2, \ldots, c_\lambda$ soient nuls. Considérons une $\lambda+1^{\text{ième}}$ courbe *arbitraire* $C_{\lambda+1}$ de la surface, et formons les équations (α) relatives à $C_1, C_2, \ldots, C_{\lambda+1}$; à un certain moment, il arrivera que ces dernières équations pourront être vérifiées sans que $c_{\lambda+1}$ soit nul. En effet, pour λ assez grand, les équations (α), dont le nombre $2pk$ ne dépend pas de λ, peuvent être vérifiées pour des valeurs des K et des c, les c n'étant pas tous nuls ; d'autre part, pour les équations (α) relatives à $C_1, C_2, \ldots, C_{\lambda+1}$ il ne peut arriver que $c_{\lambda+1} = 0$, car alors les équations (α) relatives à C_1, $C_2, \ldots, C_\lambda$ pourraient être vérifiées, $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$ n'étant pas tous nuls. Nous aurons donc alors une intégrale de troisième espèce ayant certainement pour courbe logarithmique $C_{\lambda+1}$ et de plus quelqu'une ou la totalité des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini.

Ceci nous conduit au théorème suivant :

On peut, sur une surface f, tracer λ courbes algébriques irréductibles particulières

$$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$$

telles qu'il n'existe pas d'intégrales de différentielle totale de troisième espèce ayant pour courbes logarithmiques une ou plusieurs de ces courbes C *et de la courbe à l'infini, mais telles que, si l'on envisage une $\lambda+1^{\text{ième}}$ courbe* arbitraire $C_{\lambda+1}$, *il existera une intégrale de troisième espèce ayant pour courbes logarithmiques la courbe $C_{\lambda+1}$ et la totalité ou une partie des courbes $C_1, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini.*

7. Nous pouvons modifier l'énoncé, de manière à ne plus avoir à

parler de la courbe à l'infini. Supposons que, pour $C_{\lambda+1}$ arbitraire, l'intégrale I dont il vient d'être question admette la courbe à l'infini comme courbe logarithmique. En prenant une autre courbe $C'_{\lambda+1}$, nous aurons une intégrale I', ayant pour courbe logarithmique $C'_{\lambda+1}$ et la totalité ou une partie des $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini; on peut évidemment choisir la constante A de manière que l'intégrale

$$I' - AI$$

n'ait pas la courbe à l'infini comme courbe logarithmique. Cette considération conduit au théorème suivant, que nous avons surtout en vue dans cette étude :

Sur la surface f, à singularités ordinaires, on peut tracer ρ courbes algébriques irréductibles particulières

$$C_1, C_2, \ldots, C_\rho$$

telles qu'il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce, n'ayant d'autres courbes logarithmiques que la totalité ou une partie de ces courbes C, mais telles qu'il existe une intégrale ayant seulement pour courbes logarithmiques une $\rho + 1^{\text{ième}}$ courbe quelconque Γ de la surface, et la totalité ou une partie des courbes C.

D'après sa nature même ρ est au moins égal à *un*. L'analyse que nous venons de développer pour établir l'existence de ce nombre ne donne pas le moyen de le calculer. La recherche effective de ce nombre paraît, d'une manière générale, devoir être assez difficile, car elle est liée à l'étude des courbes algébriques tracées sur une surface donnée. Nous allons seulement pour le moment nous arrêter sur quelques cas particuliers.

Faisons toutefois encore une remarque générale : Pour deux surfaces qui se correspondent birationnellement, le nombre ρ n'a pas nécessairement la même valeur. C'est seulement quand la correspondance entre les deux surfaces ne présente pas de points fondamentaux et de courbes exceptionnelles qu'on peut, d'une manière générale, affirmer l'invariance du nombre ρ; il est clair alors qu'à une courbe C de la surface S on peut faire correspondre une courbe C' de la surface S', et que le nombre des lignes est le même de part et d'autre. Il peut en être autrement quand il y a des courbes exceptionnelles, parce qu'à une courbe logarithmique C passant par un point fondamental peut correspondre, outre la courbe C′, la courbe exceptionnelle transformée du point fondamental; il y a alors sur S′ deux courbes logarithmiques correspondant à la courbe logarithmique C de S.

8. Dans le cas d'un plan, on voit facilement que $\rho = 1$. En effet, soit

$$f(x, y) = 0 \tag{Γ}$$

une courbe algébrique irréductible quelconque de degré m. Il suffit de prendre pour C_1 une droite

$$ax + by + c = 0. \tag{C_1}$$

La fonction

$$\log \frac{f(x, y)}{(ax + by + c)^m}$$

n'a d'autres courbes logarithmiques que les courbes Γ et C_1.

9. Prenons, en second lieu, une surface hyperelliptique. En employant les notations de M. Humbert dans son Mémoire sur ces surfaces (*Journ. de Mathém.*, 1893), les coordonnées homogènes des points d'une telle surface peuvent se mettre sous la forme

$$x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les Θ_i étant des fonctions thêta normales de même ordre et de caractéristique nulle. Nous supposons, comme le fait M. Humbert dans le Mémoire cité, qu'il n'y a pas de relation homogène et linéaire à coefficients entiers entre certaines expressions très simples formées avec les périodes. Nous nous plaçons de plus dans l'hypothèse que les quatre Θ ne s'annulent pas simultanément pour un même système de valeurs de u et v, c'est-à-dire que notre surface S est représentable point par point sur le champ hyperelliptique; il n'y a pas alors dans cette correspondance de courbe exceptionnelle sur la surface.

D'après M. Humbert, toute courbe algébrique tracée sur la surface s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta formée avec les mêmes paires de périodes que les fonctions Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 ci-dessus, et réciproquement; de telle sorte que, $\Theta(u, v)$ représentant une fonction thêta normale de caractéristique nulle, l'équation d'une courbe algébrique quelconque peut se mettre sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

λ et μ étant des constantes.

Ceci posé, soit $\theta(u, v)$ la fonction thêta normale, de caractéristique nulle, et d'ordre *un*, la fonction

$$\theta^m(u, v)$$

sera d'ordre m et, par suite, le quotient

$$\frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\theta^m(u-\lambda, v-\mu)}$$

sera une fonction quadruplement périodique de u et v, et, par suite, une fonction rationnelle des coordonnées non homogènes x, y et z d'un point arbitraire de la surface. Si donc nous considérons l'expression

$$\log\frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\theta^m(u-\lambda, v-\mu)},$$

ce sera une intégrale de différentielle totale de troisième espèce (réductible manifestement à un logarithme), qui aura sur la surface les deux courbes logarithmiques

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0 \quad \text{et} \quad \theta(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Ceci nous permet de nous borner, pour l'étude des lignes de la surface S en tant que courbes logarithmiques d'intégrales de troisième espèce, aux lignes

$$\theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

λ et μ étant deux constantes arbitraires. Nous allons montrer que, si l'on prend *deux* quelconques de ces lignes,

$$\theta(u-\lambda_1, v-\mu_1)=0 \quad \text{et} \quad \theta(u-\lambda_2, v-\mu_2)=0,$$

que nous désignerons par C_1 et C_2, il y aura une intégrale de troisième espèce ayant seulement ces deux lignes comme courbes logarithmiques.

Supposons en effet que λ_2 et μ_2 soient respectivement très voisins de λ_1 et μ_1; les deux courbes C_1 et C_2 de même degré sont alors très voisines l'une de l'autre sur la surface S. Par conséquent, les substitutions du type S, envisagés au n° 2, et se rapportant respectivement à la courbe C_1 et à la courbe C_2 sont *identiques*, c'est-à-dire que l'on aura (*voir* n° 3)

$$\mu^{(i)} = \nu^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Par suite, les $2pk$ relations considérées au n° 3 entre les K et les c pourront être satisfaites en prenant tous les K nuls, et

$$c_1 + c_2 = 0.$$

Nous aurons alors une intégrale de troisième espèce, conformément à la théorie générale développée plus haut, ayant les deux seules lignes logarithmiques C_1 et C_2; la ligne à l'infini de la surface S ne peut être une courbe logarithmique pour cette intégrale, puisque C_1 et C_2 sont de même degré et que $c_1 = -c_2$. En faisant varier λ et μ par degrés assez petits, on voit que deux courbes *quelconques* du type

$$\theta(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

sont courbes logarithmiques d'une intégrale convenable de troisième espèce; on a, par suite, pour la surface S,

$$\rho = 1.$$

III.

10. Une question très importante, relative aux intégrales de différentielles totales de troisième espèce relatives à une surface, concerne la transcendance de ces intégrales. *Il se pourrait* qu'*en général* les intégrales de troisième espèce fussent des combinaisons *algébrico-logarithmiques,* de même que les intégrales de seconde espèce sont en général des fonctions algébriques. Il est clair que si une surface a des intégrales de seconde espèce non algébriques, elle aura des intégrales de troisième espèce non réductibles à une combinaison algébrico-logarithmique; est-ce le seul cas où il en soit ainsi? L'étude de cette question présente de sérieuses difficultés, et je ne suis pas en mesure

d'y répondre actuellement. Nous allons seulement examiner quelques types très simples de surfaces, pour lesquelles toutes les intégrales de différentielles totales sont des combinaisons algébrico-logarithmiques.

11. Envisageons les surfaces données par une équation du type

$$z^2 = f(x, y),$$

où f est un polynome en x et y. Toute intégrale de différentielle totale relative à cette surface est, en dehors d'une intégrale de fonction rationnelle, de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

P, Q et M étant des polynomes en x et y. Des réductions simples (*Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. I, p. 168) permettent de la ramener à

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\,AB\ldots L\sqrt{f(x, y)}},$$

$\chi(y)$ étant un polynome en y, et A, B, ..., L des polynomes en x et y irréductibles et premiers avec $f(x, y)$.

De plus, la surface

$$A(x, y) = 0$$

coupe nécessairement la surface proposée

$$z^2 = f(x, y)$$

suivant *deux* courbes distinctes, c'est-à-dire qu'on peut trouver deux polynomes P et Q premiers entre eux et tels que

$$P^2 - Q^2 f(x, y)$$

est divisible par $A(x, y)$. Les deux courbes sont alors

$$A(x, y) = 0, \qquad z = +\frac{P}{Q},$$

$$A(x, y) = 0, \qquad z = -\frac{P}{Q}.$$

Pour un polynome donné $f(x, y)$, l'étude des polynomes irréductibles $A(x, y)$ ne paraît pas facile. La remarque suivante va nous être utile :

Supposons qu'un polynome irréductible $\varphi(x, y)$ divise une expression

$$u^2 - v^2 f(x, y),$$

u et v étant deux polynomes en x et y, premiers avec φ, et désignons par m le degré de f. Alors pour

$$\varphi(x, y) = 0$$

on aura

$$\sqrt{f(x, y)} = \frac{u}{v} = \mathrm{R}(x, y),$$

R étant rationnelle en x et y. Ceci posé, cherchons à déterminer des polynomes U et V en x, à coefficients rationnels en y, tels que

$$\mathrm{U} - \mathrm{VR}(x, y) \tag{α}$$

s'annule, quand $\varphi(x, y) = 0$. Pour de tels polynomes, on a certainement le polynome en x

$$\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2 f(x, y)$$

divisible par le polynome en x, $\varphi(x, y)$; la lettre y entre rationnellement dans les opérations. On pourrait prendre

$$\mathrm{U} = u, \qquad \mathrm{V} = v,$$

mais arrangeons-nous de façon que le quotient de $\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2 f(x, y)$ par $\varphi(x, y)$ soit en x de degré le plus petit possible.

Si μ est le degré de φ, on peut s'arranger de façon que l'expression (α) s'annule pour $\varphi(x, y) = 0$, en faisant $\mathrm{V} = 1$, et en prenant pour U un polynome en x de degré $\mu - 1$. Alors

$$\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2 f(x, y)$$

sera un polynome de degré $2\mu - 2$ au plus, si

$$2\mu - 2 \geqq m,$$

et le quotient de $\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2 f$ par φ sera de degré $\mu - 2$ au plus. Donc du polynome φ de degré μ, nous passons à un polynome $\varphi_1(x, y)$ de degré $\mu - 2$ au plus par rapport à x et à coefficients rationnels en y. De $\varphi_1(x, \bar{y})$ on passera à un polynome $\varphi_2(x, \bar{y})$ et ainsi de suite.

Il y a maintenant à distinguer suivant que m est pair ou impair.

Soit m impair. Si

$$2\mu - 2 = m + 1$$

on pourra encore faire la réduction, et l'on arrivera à un polynome de degré

$$\mu - 2 = \frac{m - 1}{2}.$$

Si l'on a

$$2\mu - 2 = m + 3,$$

on obtient un polynome de degré $\mu - 2 = \frac{m + 1}{2}$.

Mais on peut passer d'un polynome φ de degré $\frac{m+1}{2}$ à un polynome de degré $\frac{m-1}{2}$ au moyen du même raisonnement. On peut choisir un polynome U de degré $\frac{m-1}{2}$ de manière que

$$U^2 - f(x, y)$$

soit divisible par φ (division par rapport à x, bien entendu); le quotient est de degré

$$m - \frac{m+1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{m-1}{2}.$$

Donc, pour m impair, la réduction peut se faire jusqu'à ce que le polynome soit en x de degré $\frac{m-1}{2}$.

Soit m pair. Pour $2\mu - 2 = m$, nous ferons la réduction au degré

$$\mu - 2 = \frac{m}{2} - 1.$$

Pour $2\mu - 2 = m + 2$, nous ferons la réduction au degré

$$\mu - 2 = \frac{m}{2}.$$

Nous sommes donc ramenés au degré $\frac{m}{2}$ ou au degré $\frac{m}{2} - 1$ et il n'est pas possible ici de faire en général d'autre réduction. Mais il est cependant possible de passer du premier cas au second si dans $f(x, y)$ le coefficient de x est un carré parfait que l'on peut supposer être l'unité. Supposons en effet que, pour x satisfaisant à l'équation

$$x^{\frac{m}{2}} + \alpha_1 x^{\frac{m}{2}-1} + \ldots + \alpha_{\frac{m}{2}} = 0 \qquad (\alpha \text{ rationnel en } y),$$

le radical $\sqrt{(fx, y)}$ se mette sous la forme d'une fraction rationnelle en x et y. On pourra choisir les A rationnels en y de manière que

$$\left(x^{\frac{m}{2}} + A_1 x^{\frac{m}{2}-1} + \ldots + A_{\frac{m}{2}}\right)^2 - f(x, y)$$

s'annule pour les $\frac{m}{2}$ racines de l'équation précédente. Le quotient de cette expression par

$$x^{\frac{m}{2}} + \alpha_1 x^{\frac{m}{2}-1} + \ldots + \alpha_{\frac{m}{2}}$$

sera donc [dans $f(x, y)$ le coefficient de x^m est l'unité] un polynome de degré

$$\frac{m}{2} - 1 \text{ au plus,}$$

ce qui réalise la réduction cherchée.

12. Or, soit l'identité

$$U^2 - V^2 f(x, y) = \varphi . \psi,$$

U, V, φ et ψ étant des polynomes en x à coefficients rationnels en y, l'expression

$$(\beta) \qquad A \log \frac{U - V\sqrt{f}}{U + V\sqrt{f}} \qquad (A = \text{const.})$$

n'aura, à distance finie, d'autres courbes logarithmiques que des courbes de la forme

$$y = \text{const.}$$

et les courbes

$$\varphi = 0, \qquad z = \pm \frac{U}{V};$$

$$\psi = 0, \qquad z = \pm \frac{U}{V}.$$

Si donc une intégrale de troisième espèce a pour courbes logarithmiques les deux lignes

$$(\gamma) \qquad \varphi = 0, \qquad z = \pm \frac{U}{V},$$

quand on retranchera l'expression (β) avec une valeur convenable de A, on fera disparaître les courbes logarithmiques (γ) pour les remplacer par les courbes logarithmiques

$$\psi = 0, \qquad z = \pm \frac{U}{V}.$$

Une conséquence importante se déduit immédiatement de ce résultat. Si, pour le polynome donné $f(x, y)$, que nous supposerons, pour fixer les idées, de degré impair m en x, *il n'est pas possible* de trouver un polynome en x irréductible

$$\psi(x, y),$$

avec coefficients rationnels en y et de degré $\frac{m-1}{2}$ au plus, tel que pour

$$\psi(x, y) = 0,$$

$\sqrt{f(x, y)}$ soit susceptible de se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle en x et y, *on pourra, par la soustraction d'un certain nombre de logarithmes, faire disparaître d'une intégrale de différentielle totale toutes les courbes logarithmiques à distance finie, à l'exception des courbes*

$$y = \text{const.}$$

s'il peut y en avoir.

13. Le cas de $m = 3$ est particulièrement simple. On aura *un* pour le degré de ψ en x. Soit donc la surface

$$(\mathrm{S}) \qquad z^2 = f(x, y),$$

où f est du troisième degré en x; s'il n'est pas possible de satisfaire à la relation

$$z^2 = f(x, y),$$

en prenant pour z et x des fonctions rationnelles de y, on sera assuré que toutes les intégrales de différentielles totales, relatives à la surface S sont réductibles, par des soustractions de logarithmes ou de fonctions algébriques, à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où P et Q sont des polynomes en x, à coefficients rationnels en y, et la discussion de ces intégrales se fait d'après les méthodes que nous avons autrefois indiquées.

14. Si $f(x, y)$ est un polynome du troisième degré en x à coefficients entiers en y, *il n'existe pas, en général, de fonctions rationnelles z et x de y, telles que*

$$z^2 = f(x, y).$$

Nous le montrerons dans le cas particulier de l'équation

$$z^2 = x^3 + P(y),$$

où $P(y)$ est un polynome en y. Admettons, en effet, qu'on puisse trouver deux fonctions *rationnelles* z et x de y, satisfaisant à cette identité. Posons

$$x = \sqrt[3]{P(y)}\,X,$$

$$z = \sqrt{P(y)}\,Z,$$

on aura

$$Z^2 = X^3 + 1; \tag{1}$$

X et Z sont visiblement des fonctions rationnelles de y et de θ, en posant

$$\theta^6 = P(y). \tag{2}$$

L'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dX}{Z},$$

de la courbe (1), doit donc se transformer en une intégrale de première espèce de la courbe (2). Or $P(y)$ étant un polynome arbitraire, il n'y a pas d'intégrale de première espèce de la courbe (2) n'ayant que deux périodes; donc l'hypothèse faite est inadmissible.

Nous concluons de là que, pour les surfaces dont l'équation est de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynome du troisième degré en x dont les coefficients sont des polynomes *arbitraires* de y, *toutes les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques.* Nous nous servons, en outre, ici du fait que la surface précédente n'a pas, *en général,* d'autres intégrales de seconde espèce que des fractions rationnelles de x, y et z.

15. Ces résultats, si particuliers qu'ils soient, présentent cependant peut-être quelque intérêt, en ce qu'ils donnent au moins une indication de méthode générale pour la réduction des intégrales de troisième espèce.

Le cas où x entre au quatrième degré dans $f(x, y)$ est déjà moins simple que celui du troisième degré. Nous ne pouvons pas, avec les méthodes indiquées, pousser alors la réduction plus loin que le second degré, et nous nous trouvons devant la question suivante : Étant donné le polynome en x

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + \ldots + a_4,$$

où les coefficients sont des polynomes en y, peut-on trouver des fractions rationnelles a et b de y, telles que le polynome en x

$$(ax + b)^2 - (a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4)$$

admette un diviseur du second degré à coefficients rationnels en y?

Ceci revient à rechercher si une certaine équation

$$F(u, v, w, y) = 0,$$

où F est un polynome, peut être vérifiée par des fractions rationnelles u, v, w de y.

D'après la remarque qui termine le n° 11, si nous considérons le cas où

$$a_0 = 1,$$

la réduction peut se faire jusqu'au premier degré, c'est-à-dire qu'on est ramené à considérer, si elles existent, les fonctions z et x rationnelles en y, qui vérifient la relation

$$z^2 = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4.$$

Ici il y aura, en général, de telles fonctions, car on peut, *en général,* déterminer rationnellement p et q en y, de telle sorte que

$$(x^2 + px + q)^2 - (x^4 + a_1 x^3 + \ldots + a_4)$$

soit un polynome du premier degré en x.

Il y a des cas cependant où il en est autrement. Telle serait l'équation

$$z^2 = x^4 + P(y),$$

où $P(y)$ est un polynome arbitraire en y; on ne peut y satisfaire, en prenant pour z et x des fonctions rationnelles de y. On le démontrera, en toute rigueur, par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé au n° 14 pour l'équation

$$z^2 = x^3 + P(y).$$

Des conséquences analogues s'en déduisent *pour les intégrales de différentielles totales relatives à la surface*

$$z^2 = x^4 + P(y).$$

16. Je me propose de revenir sur toutes les questions qui sont ainsi soulevées et qui me paraissent de grand intérêt, tant au point de vue purement algébrique qu'au point de vue de la théorie des fonctions. Je rappelle seulement encore en terminant un cas particulier

sur lequel j'ai écrit récemment quelques pages dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (mai, 1901). Il s'agissait de l'équation

$$z^2 = f(x)\,\mathrm{F}(y),$$

f et F étant des polynomes du troisième degré respectivement en x et y. Nous avons vu dans quels cas on peut satisfaire à cette équation en prenant pour z et x des fonctions rationnelles de y, abstraction faite des solutions

$$z = 0, \qquad x = a,$$

a étant une racine de $f(x)$. En général, ce sont les seules solutions, et il est alors facile de montrer que, dans ce cas, les intégrales de différentielles totales relatives à la surface précédente se ramènent toutes à des combinaisons algébrico-logarithmiques.