ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE BOREL

Contribution à l'étude des fonctions méromorphes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 18 (1901), p. 211-239

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__211_0>

CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE DES FONCTIONS MÉROMORPHES,

PAR M. ÉMILE BOREL.

Soit

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

un développement définissant une fonction méromorphe; on peut mettre $f(z)$ sous la forme du quotient de deux fonctions entières, c'est-à-dire que l'on a :

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)}, \tag{2}$$

les développements

$$F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots, \tag{3}$$

$$G(z) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots \tag{4}$$

étant convergents dans tout le plan. Chacune de ces fonctions entières peut être décomposée en facteurs primaires; si, pour abréger l'écriture, on suppose que leurs zéros sont tous simples, on pourra écrire :

$$F(z) = e^{F_1(z)} \Pi P_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right), \tag{5}$$

$$G(z) = e^{G_1(z)} \Pi P_{h_n}\left(\frac{z}{b_n}\right), \tag{6}$$

en désignant par $F_1(z)$ et $G_1(z)$ des fonctions entières et par $P_k(u)$

le facteur primaire de genre k défini par la relation

$$P_k(u) = (1-u)\, e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^k}{k}}.$$

Si, comme nous le supposerons dans ce Mémoire, les fonctions entières $F(z)$ et $G(z)$ sont de genre fini p, on peut prendre, quel que soit n,

$$k_n = h_n = p;$$

$F_1(z)$ et $G_1(z)$ sont dès lors des polynomes de degré au plus égal à p.

La fonction méromorphe $f(z)$ peut encore s'écrire

$$(7) \qquad f(z) = H(z) + \sum \alpha_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{\lambda_n}}{a_n^{\lambda_n+1}} \right),$$

$H(z)$ désignant une fonction entière et les λ_n étant des entiers convenablement choisis.

Le développement (7) est un cas particulier du suivant

$$(8) \qquad f(z) = K(z) + \sum \frac{Q_n(z)}{R_n(z)},$$

$K(z)$ étant une fonction entière, $Q_n(z)$ et $R_n(z)$ des polynomes.

Une théorie complète des fonctions méromorphes devrait comprendre tout d'abord l'étude des relations qui existent entre les divers développements (1), (3), (4), (5), (6), (7), (8); il y aurait lieu ensuite de rechercher comment se modifient ces divers développements lorsqu'on effectue des opérations simples portant sur une ou plusieurs fonctions méromorphes.

Ce programme est très vaste; nous n'en aborderons ici que quelques points.

Dans la première partie de ce Mémoire, j'étends aux fonctions méromorphes la fonction de l'*ordre* que j'ai introduite dans la théorie des fonctions entières; il en résulte diverses propositions relatives aux développements (5) et (6), c'est-à-dire à la décomposition en facteurs primaires du numérateur et du dénominateur de $f(z)$. Si l'on pose

$$(9) \qquad g(z) = \frac{M f(z) + N}{M' f(z) + N'},$$

M, N, M', N' étant des constantes ou des polynomes, il existe des rela-

tions simples entre les développements (5) et (6) relatifs à $f(z)$ d'une part et à $g(z)$ d'autre part.

Ces divers résultats ont une grande analogie avec des propriétés connues des fonctions entières; aussi est-il inutile d'y insister longuement. Dans la seconde partie, j'aborde un ordre de recherches tout différent : l'étude des relations qui existent entre les expressions (2) et (7) de la même fonction méromorphe $f(z)$. Cette étude m'amène à introduire une notion nouvelle que je crois appelée à jouer un rôle important dans bien des questions relatives aux fonctions entières : la distribution des zéros d'une telle fonction peut être *ordinaire* ou *extraordinaire*. Je donne de ces expressions une définition précise; leur choix me paraît justifié par le fait que la distribution des zéros est *ordinaire* pour toutes les fonctions entières étudiées jusqu'ici (1).

L'ordre de $G(z)$ et de $F(z)$ étant supposé fini, si de plus la distribution des zéros de $F(z)$ est ordinaire, on peut mettre $f(z)$ sous la forme (7) *en prenant pour* $H(z)$ *une fonction d'ordre fini*. Il peut ne pas en être de même lorsque la distribution des zéros de $F(z)$ est extraordinaire; dans ce cas il y a lieu d'employer à la place du développement (7) certains développements particuliers de la forme (8), que j'étudie avec quelque détail.

Enfin, dans une brève conclusion, j'ai cherché à indiquer, parmi les nombreux sujets de recherches pouvant être suggérés par la lecture de ce Mémoire, ceux qui me paraissent devoir être abordés les premiers, c'est-à-dire semblent être les plus faciles ou les plus importants.

PREMIÈRE PARTIE.

Étant donnée une fonction entière $F(z)$, en désignant par $M(r)$ le module maximum de $F(z)$ pour $|z| = r$, on sait que l'on appelle *ordre*

(1) *Voir* p. 234.

de la fonction entière la plus grande des limites de l'expression

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r},$$

lorsque r augmente indéfiniment (¹). Le nombre ρ ainsi défini est essentiellement positif; il peut être nul ou infini. Nous nous bornerons à considérer les fonctions d'ordre fini.

Si l'on désigne par a_n le $n^{\text{ième}}$ zéro de $F(z)$ (les zéros étant rangés par ordre de modules non décroissants), la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$$

est convergente, quelque petit que soit le nombre positif ε. Au contraire, la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$$

est divergente (²), *à moins que l'on ne se trouve dans le cas d'exception de M. Picard.*

L'ordre ρ peut donc généralement être défini de deux manières différentes, soit à l'aide de la fonction $M(r)$, soit à l'aide de la suite des a_n.

Dans le cas d'exception de M. Picard, ces deux définitions fournissent deux nombres différents; le premier est dit l'*ordre apparent* et le second, toujours inférieur au premier, l'*ordre réel.* Dans le cas où l'ordre apparent n'est pas entier, le cas d'exception ne peut pas se présenter; il n'y a alors aucun inconvénient à parler simplement de l'*ordre.*

Ces définitions étant rappelées, soit

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)} \tag{8}$$

(¹) Voir mes *Leçons sur les fonctions entières,* p. 108. On trouvera dans cet Ouvrage des renseignements bibliographiques sur la théorie des fonctions entières; lorsque j'y renverrai dans la suite, je le désignerai simplement par *Leçons.*

(²) Le nombre ρ défini par cette double condition s'appelle l'*exposant de convergence* de la suite $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, \ldots$.

une fonction méromorphe donnée comme le quotient de deux fonctions entières (1); par définition, *l'ordre de* $f(z)$ *sera égal au plus grand des ordres de* $F(z)$ *et de* $G(z)$. Soient ρ cet ordre et M, N, M', N' des *fonctions entières d'ordre inférieur à* ρ; en particulier, ce peuvent être des polynomes ou des constantes; si l'on pose

$$g(z) = \frac{Mf + N}{M'f + N'}, \tag{9}$$

l'ordre de $g(z)$ sera encore ρ.

On suppose, bien entendu, que $MN' - M'N$ *est différent de zéro.*

On peut dire, pour abréger le langage, que la fonction $g(z)$, définie par la relation (9), dans laquelle M, N, M', N' satisfont aux conditions énoncées à l'instant, est une transformée homographique de $f(z)$. L'ensemble des transformées homographiques d'une même fonction $f(z)$ constitue une *classe,* laquelle est complètement définie par un quelconque de ses individus.

Ces définitions permettent de donner une forme très simple à un théorème bien connu de M. Picard et, en même temps, de le généraliser. Ce théorème consiste en ce qu'il existe au plus deux valeurs a et b (l'infini non exclu), que $f(z)$ ne prend pas une infinité de fois; en d'autres termes, si les trois équations différentes

$$f(z) = a,$$
$$f(z) = b,$$
$$f(z) = c$$

n'admettaient qu'un nombre limité de racines, on serait certain que la fonction méromorphe $f(z)$ est une fraction rationnelle.

Nous ferons dériver ce théorème et sa généralisation de l'étude de la classe des transformées homographiques de $f(z)$; nous distinguerons trois cas.

---

(1) On suppose, bien entendu, que les deux équations

$$F(z) = 0,$$
$$G(z) = 0$$

n'ont pas de racines communes et, de plus, que l'on ne peut pas abaisser l'ordre de $F(z)$ et de $G(z)$ en les multipliant par un même facteur exponentiel.

PREMIER CAS : *Aucune des transformées $g(z)$ n'est une fonction entière.* — Ce cas doit être regardé comme le plus général. *On peut alors affirmer que l'équation*

$$f(z) = -\frac{N'}{M'},$$

dans laquelle N′ *et* M′ *sont des fonctions entières quelconques d'ordre inférieur à* ρ, *non seulement a une infinité de racines, mais admet* ρ *comme exposant de convergence de la suite des modules de ces racines* (1). Cela revient à dire que la fonction entière

$$M'G(z) + N'F(z)$$

est d'ordre réel ρ.

En effet, si l'ordre réel de cette fonction entière était inférieur à ρ, on pourrait trouver une fonction entière M, d'ordre inférieur à ρ et ayant les mêmes zéros.

Si, dès lors, on pose

$$g(z) = \frac{Mf(z)}{M'f(z) + N'},$$

c'est-à-dire

$$g(z) = \frac{MG(z)}{M'G(z) + N'F(z)},$$

la fonction $g(z)$ est visiblement une fonction entière, contrairement à l'hypothèse.

DEUXIÈME CAS : *Parmi les transformées $g(z)$, il y a des fonctions entières, mais ces fonctions entières sont toutes d'ordre réel* ρ. — Désignons par $\gamma(z)$ l'une des fonctions entières transformées de $f(z)$; soit

$$\gamma(z) = \frac{\mu f(z) + \nu}{\mu_1 f(z) + \nu_1};$$

μ, ν, μ_1, ν_1, étant des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ, telles que $\mu\nu_1 - \nu\mu_1$ ne soit pas nul.

Par hypothèse $\gamma(z)$ est d'ordre réel égal à ρ; et l'on suppose qu'il

(1) *Leçons*, p. 26.

en est de même de toutes les fonctions

$$\gamma_1(z) = \mathbf{M}\gamma(z) + \mathbf{N},$$

$\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ étant deux fonctions entières d'ordre inférieur à ρ, dont la première n'est pas nulle.

Cela posé, soit

$$g(z) = \frac{\mathbf{M}f(z) + \mathbf{N}}{\mathbf{M}_1 f(z) + \mathbf{N}_1}$$

une transformée quelconque de $f(z)$; on a visiblement

$$g(z) = \frac{\mathbf{M}\gamma(z) + \mathbf{N}}{\mathbf{M}_1\gamma(z) + \mathbf{N}_1}.$$

Si $\mathbf{M}$ n'est pas nul, le numérateur est d'ordre réel égal à ρ; d'autre part, les racines communes au numérateur et au dénominateur vérifient la relation

$$\mathbf{M}\mathbf{N}_1 - \mathbf{M}\mathbf{N}_1 = 0,$$

dont le premier membre est d'ordre inférieur à ρ. Donc *l'exposant de convergence de la suite des modules des racines de l'équation*

$$g(z) = 0$$

est égal à ρ, *à moins que l'on n'ait*

$$\mathbf{M} = 0.$$

Or cette dernière relation peut s'écrire

$$\mathbf{M}\nu_1 - \mathbf{N}\mu_1 = 0.$$

Donc, *l'équation*

$$f(z) = -\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{M}}, \tag{10}$$

qui peut s'écrire

$$g(z) = \frac{\mathbf{M}f(z) + \mathbf{N}}{\mathbf{M}} = 0,$$

admet ρ *comme exposant de convergence de la suite des modules de ses racines, à moins que l'on n'ait*

$$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{M}} = \frac{\nu_1}{\mu_1}.$$

Telle est la généralisation du théorème de M. Picard; nous sommes ici dans le cas où il y a *une* équation exceptionnelle parmi l'ensemble des équations telles que (10), dans laquelle M et N désignent deux fonctions entières d'ordre inférieur à ρ.

Troisième cas : *Parmi les transformées $g(z)$ il y a des fonctions entières d'ordre réel inférieur à ρ.* — Soit $\gamma(z)$ l'une de ces fonctions entières; l'ordre apparent de $\gamma(z)$ est forcément égal à ρ, puisque l'ensemble des transformées de $\gamma(z)$ coïncide avec l'ensemble des transformées de $f(z)$. Le nombre ρ est donc nécessairement entier, et la fonction $\gamma(z)$ est de la forme

$$\gamma(z) = \mathrm{M}e^{\mathrm{P}(z)},$$

$\mathrm{P}(z)$ étant un polynome de degré ρ et M une fonction entière d'ordre inférieur à ρ. La fonction

$$\gamma_1(z) = \frac{\gamma(z)}{\mathrm{M}} = e^{\mathrm{P}(z)}$$

est visiblement une transformée de $f(z)$; *le troisième cas est donc caractérisé par le fait que $f(z)$ est la transformée d'une fonction de la forme $e^{\mathrm{P}(z)}$, c'est-à-dire que l'on a*

$$f(z) = \frac{\mu e^{\mathrm{P}(z)} + \nu}{\mu_1 e^{\mathrm{P}(z)} + \nu_1},$$

μ, ν, μ_1, ν_1 satisfaisant aux conditions déjà indiquées.

L'équation

$$f(z) + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = 0 \tag{10}$$

est alors équivalente à la suivante

$$\frac{(\mathrm{M}\mu + \mathrm{N}\mu_1)\, e^{\mathrm{P}(z)} + \mathrm{M}\nu + \mathrm{N}\nu_1}{\mathrm{M}(\mu_1 e^{\mathrm{P}(z)} + \nu_1)} = 0,$$

et l'on voit aisément que l'exposant de convergence de la suite des modules de ses racines est égal à ρ, à moins que l'on n'ait, soit

$$\mathrm{M}\mu + \mathrm{N}\mu_1 = 0,$$

soit

$$\mathrm{M}\nu + \mathrm{N}\nu_1 = 0.$$

Il y a donc ici, parmi les équations (10), *deux* équations exceptionnelles (et deux seulement)

$$f(z) = \frac{\mu}{\mu_1}$$

et

$$f(z) = \frac{\nu}{\nu_1}.$$

Le théorème de M. Picard, généralisé, se trouve ainsi complètement démontré, puisque nous avons épuisé tous les cas possibles. On peut l'énoncer comme il suit :

THÉORÈME. — *Étant donnée une fonction méromorphe $f(z)$ d'ordre ρ, parmi les équations de la forme*

$$f(z) = \varphi(z)$$

dans lesquelles $\varphi(z)$ désigne une fonction méromorphe d'ordre inférieur à ρ, il y en a au plus deux qui sont exceptionnelles, c'est-à-dire telles que l'exposant de convergence de la suite des modules de leurs racines soit inférieur à ρ.

Dans le cas où il y a *une* équation exceptionnelle, on peut, par une transformation homographique, supposer que la fonction $\varphi(z)$ correspondante est l'*infini;* dans le cas où il y en a *deux* (1), on peut supposer que les valeurs de $\varphi(z)$ sont l'*infini* et *zéro;* on obtient ainsi les formes déjà étudiées.

Nous conviendrons de dire que la fonction méromorphe $f(z)$ est d'ordre *réel* ρ, lorsque l'*infini* n'est pas une valeur exceptionnelle, c'est-à-dire lorsqu'il n'existe pas de fonction méromorphe ayant les mêmes pôles, et dont l'ordre soit inférieur à ρ.

Le théorème de M. Picard généralisé peut alors s'énoncer ainsi : *Parmi les transformées homographiques de $f(z)$, il y en a au plus deux linéairement distinctes dont l'ordre réel soit inférieur à ρ.* Nous ne considérons pas comme linéairement distinctes deux fonctions méromorphes $f(z)$ et $f_1(z)$ liées entre elles par une relation de la forme

$$\mathrm{M}f(z) + \mathrm{M}_1 f_1(z) + \mathrm{N} = 0,$$

M, M_1, N étant des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ.

---

(1) Ce dernier cas ne peut se présenter que lorsque ρ est entier.

En terminant cette première Partie, ajoutons qu'il serait possible d'étendre aux fonctions méromorphes la notion de croissance régulière que j'ai introduite dans la théorie des fonctions entières (¹).

SECONDE PARTIE.

Nous allons maintenant étudier la décomposition de la fonction méromorphe $f(z)$ en *éléments simples*, c'est-à-dire en fractions rationnelles n'ayant qu'un seul pôle. Nous poserons, comme tout à l'heure,

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)} \tag{2}$$

et nous désignerons par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, les zéros de $F(z)$ que nous supposerons *simples*, pour abréger les écritures. Nous supposons que $f(z)$ est d'ordre *réel* ρ, c'est-à-dire que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$$

est convergente, tandis que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$$

est divergente, quelque petit que soit ε. On a, de plus, à partir d'une certaine valeur de $r = |z|$,

$$\begin{cases} |G(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \\ |F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}. \end{cases} \tag{11}$$

Le résidu de $F(z)$ relativement au pôle $z = a_n$ est, comme on sait,

$$\frac{G(a_n)}{F'(a_n)}.$$

(¹) *Leçons*, Note II.

L'inégalité (11) nous fait connaître une limite supérieure du numérateur; mais, pour avoir une limite supérieure du résidu, il faudrait connaître aussi une limite inférieure du dénominateur; or il est aisé de se rendre compte que les hypothèses faites jusqu'ici n'entraînent aucune conséquence à ce sujet; nous allons y adjoindre une nouvelle hypothèse : nous supposerons que la distribution des zéros de $F(z)$ est *ordinaire*.

Par définition, *on entend par là que*, r_n *désignant le module de* a_n *et* ρ *l'ordre de* $F(z)$, *on a*

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{\rho+\varepsilon}}, \tag{12}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, *à partir du moins d'une certaine valeur de* n (1).

Dans le cas où il n'en est pas ainsi, la distribution des zéros sera dite *extraordinaire;* nous y reviendrons plus loin (2).

L'étude particulière que nous allons faire du cas où la distribution des zéros de $F(z)$ est *ordinaire* est justifiée par le fait que cette hypothèse est vérifiée pour les fonctions entières usuelles : $\sin z$, σz, etc.; nous étudierons, d'ailleurs, à la fin de cette seconde Partie, la nature précise de cette hypothèse. Pour le moment, nous allons nous préoccuper uniquement de ses conséquences relativement aux fonctions méromorphes $f(z)$, d'ordre ρ, dans lesquelles $F(z)$ figure en dénominateur. Nous supposerons, non seulement que $F(z)$ est d'ordre ρ, mais que sa croissance est *régulière*, c'est-à-dire que, en désignant par $M(r)$ le module maximum de $F(z)$ pour $(z) = r$, on a, non seulement

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

(1) Nous supposons toujours les zéros simples; dans le cas où a_n aurait k comme ordre de multiplicité, il suffirait de remplacer, dans cette inégalité, $F'(a_n)$ par $F^{(k)}(a_n)$.

(2) Nous employons à dessein des expressions d'une nature imprécise, n'ayant pas la prétention de donner ici une terminologie définitive. Avant d'en adopter une, il sera nécessaire, en effet, d'approfondir plusieurs questions suggérées naturellement par cette étude. Par exemple, on pourrait donner un nom spécial aux fonctions méromorphes $f(z)$ telles que l'inégalité (12) n'est pas vérifiée par $|F'(a_n)|$, mais le serait par $\left|\frac{F'(a_n)}{G(a_n)}\right|$. D'autre part, dans le cas où cette inégalité (12) n'est pas vérifiée, il peut arriver qu'elle le soit en remplaçant ρ par un nombre fixe $\rho_1 > \rho$; il serait intéressant de distinguer ce cas de celui où il n'existe pas un tel nombre ρ_1.

mais encore

$$M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

quel que soit le nombre positif ε donné d'avance, pourvu que r soit assez grand.

Dans ces conditions, on sait (¹) que, si l'on désigne par r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro a_n de $F(z)$, r_n est aussi une fonction de n à croissance régulière; il en résulte que l'on a, non seulement

$$r_n < n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon},$$

mais encore

$$r_n > n^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon},$$

quel que soit ε positif, pourvu que r soit assez grand.

Ces résultats étant rappelés, reprenons la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$$

et désignons par A_n son résidu relatif au pôle $z = a_n$;

$$A_n = \frac{G(a_n)}{F'(a_n)}.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$|A_n| < e^{r_n^{\rho+\varepsilon}}, \tag{13}$$

quel que soit le nombre positif ε donné d'avance, au moins à partir d'une certaine valeur de n.

En effet, $G(z)$ étant au plus d'ordre ρ, on a, pour n assez grand,

$$|G(a_n)| < e^{r_n^{\rho+\varepsilon}},$$

et, d'autre part, on a supposé que l'inégalité

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{\rho+\varepsilon}}$$

(¹) *Leçons*, Note II.

est vérifiée à partir d'une certaine valeur de n. On a donc

$$|A_n| < e^{2r_n^{\rho+\varepsilon}} < e^{r_n^{\rho+\varepsilon'}},$$

le nombre positif ε' étant arbitraire, puisque ε est arbitraire.

Il n'est pas inutile d'observer que, si l'on ne fait pas sur $G(z)$ d'autre hypothèse que de supposer son ordre égal à ρ; en d'autres termes, s'il n'y a pas de relations particulières entre $G(z)$ et $F(z)$, on ne peut obtenir, *par des hypothèses portant sur* $F(z)$, une inégalité plus avantageuse que l'inégalité (13). Il n'y aurait aucun avantage, en laissant $G(z)$ indéterminé, à remplacer l'hypothèse faite sur les $F'(a_n)$ par une hypothèse plus restrictive; il résultera de ce qui suit qu'on obtiendrait des résultats moins simples avec une hypothèse moins restrictive : ces remarques rendent assez naturel le choix que nous avons fait.

Nous pouvons toujours poser

$$|A_n| = e^{r_n^{\rho+\varepsilon_n}},$$

ε_n étant une fonction de n; d'après ce qui précède, quelque petit que soit le nombre positif ε, l'inégalité

$$\varepsilon_n < \varepsilon$$

sera vérifiée à partir d'une certaine valeur de n.

D'autre part, nous pouvons écrire

$$r_n = n^{\frac{1}{\rho+\eta_n}},$$

et l'on a, d'après nos hypothèses,

$$\lim_{n=\infty} \eta_n = 0.$$

Posons

$$\frac{\rho+\varepsilon_n}{\rho+\eta_n} = 1 + \theta_n.$$

Le nombre θ_n pourra, ainsi que ε_n, prendre de grandes valeurs négatives; mais on aura sûrement, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\theta_n < \theta,$$

quelque petit que soit le nombre positif θ donné d'avance.

Ceci posé, définissons un nombre μ'_n satisfaisant aux conditions suivantes : *c'est le plus petit nombre vérifiant à la fois les deux inégalités*

$$\mu'_n > \frac{2}{n}, \qquad \mu'_n > 2\theta_n.$$

Il résulte de la définition de μ'_n et des propriétés de θ_n que l'on a à la fois

$$\lim_{n=\infty} \mu'_n = 0,$$

$$\mu'_n - \theta_n > \frac{1}{n}.$$

Posons maintenant

$$r_n^{\lambda_n} = e^{n^{1+\mu_n}},$$

en désignant par μ_n le plus petit nombre supérieur à μ'_n et tel que λ_n soit entier; les μ_n vérifient visiblement les mêmes conditions que les μ'_n. Ces relations définissent les nombres λ_n; nous allons étudier la série

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}.$$

On peut appeler une telle série : *série canonique de fractions simples*.

Occupons-nous d'abord de la série

$$\sum \frac{|A_n| r^{\lambda_n}}{r_n^{\lambda_n}}.$$

Nous avons posé

$$|A_n| = e^{r_n^{\rho+\varepsilon_n}} = e^{n^{\rho+\eta_n}} = e^{n^{1+\theta_n}},$$

$$r_n^{\lambda_n} = e^{n^{1+\mu_n}}.$$

On a donc

$$n^{1+\mu_n} = \lambda_n \log r_n,$$

$$n^{1+\theta_n} = n^{\theta_n - \mu_n} \lambda_n \log r_n,$$

$$|A_n| = e^{\log r_n \cdot \lambda_n \cdot n^{\theta_n - \mu_n}} = r_n^{\lambda_n n^{\theta_n - \mu_n}},$$

et la série que nous étudions peut s'écrire

$$\sum \frac{r^{\lambda_n}}{r_n^{\lambda_n (1 + n^{\theta_n - \mu_n})}}.$$

Les nombres λ_n sont des entiers positifs; ils sont visiblement croissants (¹); prenons la racine $\lambda_n^{\text{ième}}$ du terme général, nous obtenons

$$\frac{r}{r_n^{1-n^{\theta_n-\mu_n}}} < \frac{r}{r_n^{1-\sqrt[n]{n}}},$$

puisque l'on a

$$\mu_n - \theta_n > \frac{1}{n}.$$

La série est donc convergente, puisque r_n augmente indéfiniment avec n; de plus, considérée comme fonction de r, cette fonction entière est d'ordre égal à la limite de

$$\frac{\log \lambda_n}{\log\left(r_n^{1-\sqrt[n]{n}}\right)},$$

dans le cas où la limite existe, ce qui est ici le cas. On a en effet, d'après la définition de λ_n,

$$\lambda_n \log r_n = n^{1+\mu_n}$$

$$\log \lambda_n = (1+\mu_n)\log n - \log\log r_n,$$

et d'autre part

$$\log r_n = \frac{1}{\rho+\eta_n}\log n.$$

L'ordre est donc égal à ρ.

Reprenons maintenant la série

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n},$$

et donnons à z une valeur telle que l'on ait, quel que soit n,

$$|z-a_n| > \frac{1}{r_n^s}.$$

Le point z est ainsi assujetti à être extérieur à une infinité de cercles c_n dont la surface totale est

$$\pi \sum \frac{1}{r_n^{2s}};$$

elle est finie si l'on suppose $2s > \rho$; nous ferons cette hypothèse.

(¹) Tout au moins, on peut affirmer qu'ils ne décroissent pas; le nombre des λ_n consécutifs qui peuvent être égaux n'est pas assez grand pour modifier nos conclusions.

On a, dès lors,

$$|\varphi(z)| < \sum \frac{|A_n| r^{\lambda_n}}{r^{\lambda_n - s}},$$

en désignant par r le module de z; la présence du nombre constant s ne modifie en rien les calculs précédents et l'on en conclut que l'on a, au moins pour r assez grand,

$$|\varphi(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Il en résulte que le produit

$$\varphi(z)\,F(z)$$

est une fonction entière d'ordre au plus égal à ρ. En effet, c'est une fonction entière, puisque $F(z)$ admet pour zéros les pôles de $\varphi(z)$; de plus l'inégalité

$$|\varphi(z)\,F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

est vérifiée quel que soit ε, au moins pour $r = |z|$ assez grand, *sauf peut-être lorsque z est intérieur à certains cercles d'étendue totale finie*; on montre aisément que le fait que le produit $\varphi(z)\,F(z)$ est une fonction entière permet de supprimer cette dernière restriction; la fonction entière est donc d'ordre ρ.

Posons maintenant

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)} - \varphi(z).$$

Il est clair que $H(z)$ est une fonction entière; car cette fonction méromorphe ne pourrait devenir infinie qu'aux points $z = a$ et, d'après la manière même dont a été construite la série $\varphi(z)$, $H(z)$ est finie en chacun de ces points.

On a d'ailleurs

$$H(z) = \frac{G(z) - \varphi(z)\,F(z)}{F(z)}.$$

La fonction *entière* $H(z)$ est donc, d'après ce qui précède, le quotient de deux fonctions entières, telles que l'ordre de chacune d'elles soit au plus égal à ρ; *elle est donc elle-même au plus d'ordre* ρ; tel est le résultat fondamental que nous voulions obtenir.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient* $F(z)$ *une fonction entière à croissance régulière, d'ordre* ρ, *dont la distribution des zéros est supposée ordinaire, et* $G(z)$ *une fonction entière dont on suppose seulement qu'elle est d'ordre au plus égal à* ρ. *On peut écrire*

$$\frac{G(z)}{F(z)} = \varphi(z) + H(z),$$

$\varphi(z)$ *étant une série canonique de fractions simples de la forme*

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n} = \sum \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{\lambda_n - 1}}{a_n^{\lambda_n}}\right)$$

et $H(z)$ *une fonction entière d'ordre au plus égal à* ρ.

Il est clair que si l'on remplace, dans $\varphi(z)$, certains des nombres λ_n par des nombres plus petits, on retranche de $\varphi(z)$ une fonction entière qui est au plus d'ordre ρ, comme on le voit aisément d'après ce qui précède. Il en résulte qu'*il suffit pour obtenir le développement précédent de choisir les* λ_n *de manière que la série* $\varphi(z)$ *converge quel que soit* z (¹). On obtient ainsi naturellement, pour la décomposition en éléments simples de forme canonique, une fonction entière d'ordre ρ comme terme complémentaire.

Nous allons voir que les choses se présentent d'une manière tout à fait différente lorsqu'on ne fait aucune hypothèse sur la distribution des zéros (²) de $F(z)$: cette fonction est seulement supposée d'ordre ρ et à croissance régulière.

On sait qu'il est possible de trouver une infinité de cercles C_1, $C_2, \ldots, C_n, \ldots$, de rayons croissants et tels que sur chacun d'eux l'on ait

$$|F(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

r désignant le module de z sur le cercle considéré. Soient $R_1, R_2, \ldots,$

(¹) Il faut, bien entendu, ne pas prendre les λ_n *beaucoup plus grands* qu'il ne serait nécessaire pour ce but; le sens exact de cette expression résulte clairement des calculs de la page 224.

(²) Nous supposerons cependant ces zéros *simples;* cette hypothèse simplifiera l'écriture et les calculs : *elle n'est pas essentielle.*

$R_n, \ldots$, les rayons des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$. On peut toujours supposer que ces rayons ne croissent pas rapidement en fonction de l'indice n; d'une manière précise, que l'on a (1) :

$$\alpha R_{n-1} < R_n < \beta R_{n-1},$$

α et β étant deux nombres quelconques, tels que $1 < \alpha < \beta$.

Désignons par Γ_n le contour d'intégration formé par le cercle C_n parcouru dans le sens direct et par le cercle C_{n-1} parcouru dans le sens rétrograde (le contour Γ_1 se compose du cercle C_1), et envisageons l'expression

$$H(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} \frac{x^{\lambda_n} G(z)\, dz}{z^{\lambda_n} F(z)(z-x)}. \tag{1}$$

Nous allons prouver d'abord que l'on peut choisir les exposants λ_n de manière que la série $H(x)$ converge, quel que soit x (non situé sur les contours d'intégration); nous montrerons ensuite que $H(x)$ est une fonction entière de x et nous chercherons son ordre.

Désignons d'ailleurs par $\frac{Q_n(z)}{R_n(z)}$ la fraction rationnelle (2) qui admet comme pôles les pôles de $\frac{G(z)}{F(z)}$ intérieurs à Γ_n (c'est-à-dire situés entre C_{n-1} et C_n) avec les mêmes résidus; l'égalité (1) peut s'écrire

$$H(x) = \frac{G(x)}{F(x)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{Q_n(x)}{R_n(x)} - \left[\frac{Q_n(x)}{R_n(x)}\right]_{\lambda_n} \right\},$$

en désignant d'une manière générale par

$$\left[\frac{Q(x)}{R(x)}\right]_{\lambda}$$

le polynome de degré $\lambda - 1$, formé par les λ premiers termes du développement de la fraction rationnelle $\frac{Q(x)}{R(x)}$ suivant les puissances croissantes de x.

---

(1) Voir *Leçons*, p. 80.

(2) Le degré du numérateur est supposé inférieur à celui du dénominateur.

On a ainsi l'expression de la fonction méromorphe donnée, sous la forme

$$\frac{G(x)}{F(x)} = H(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{Q_n(x)}{R_n(x)} - \left[\frac{Q_n(x)}{R_n(x)}\right]_{\lambda_n} \right\}.$$

Tout revient donc, comme nous l'avons dit :

1° A déterminer les λ_n de manière que la série (1) soit convergente;

2° A calculer l'ordre de la fonction entière $H(x)$.

Désignons par M_n le maximum du module de $\frac{G(z)}{H(z)}$ sur Γ_n, c'est-à-dire sur C_{n-1} et C_n; on peut écrire, d'après la manière même dont ces cercles ont été choisis,

$$|M_n| < e^{R_n^{\rho+\varepsilon_n}},$$

ε_n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Nous avions posé

$$H(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} \frac{x^{\lambda_n}}{z^{\lambda_n}} \frac{G(z)\,dz}{F(z)(z-x)}.$$

On en conclut immédiatement

$$|H(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{\delta_n} \left(\frac{|x|^{\lambda_n}}{R_n^{\lambda_n - 1}} + \frac{|x|^{\lambda_n}}{R_{n-1}^{\lambda_n - 1}} \right),$$

en désignant par δ_n le minimum de $|z - x|$ lorsque z décrit Γ_n.

Il suffit donc de choisir les λ_n de manière que la série

$$\sum \frac{e^{R_n^{\rho+\varepsilon_n}} |x|^{\lambda_n}}{R_{n-1}^{\lambda_n - 1}}$$

soit convergente quel que soit x; nous pouvons supposer que l'on a

$$R_{n-1} > \frac{1}{2} R_n.$$

Il suffit évidemment de prendre

$$\lambda_n = R_n^{\rho+\eta_n},$$

η_n est supérieur à ε_n ; nous supposerons que η_n est supérieur au plus grand des deux nombres $2\varepsilon_n$ et $\frac{2}{\sqrt{n}}$ et tel que λ_n soit entier.

Pour mettre en évidence le fait que $H(x)$ est une fonction entière, il suffit de remarquer que, le contour Γ_n se composant du contour C_n décrit dans le sens direct et C_{n-1} dans le sens rétrograde, on peut écrire

$$H(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C_n} \left(\frac{x^{\lambda_n}}{z^{\lambda_n}} - \frac{x^{\lambda_{n+1}}}{z^{\lambda_{n+1}}} \right) \frac{G(z)\,dz}{F(z)(z-x)}.$$

Il est manifeste que chaque terme de cette série est un polynome en x; la série $H(x)$ étant une série de polynomes uniformément convergente sur une infinité de cercles de rayons aussi grands que l'on veut, converge uniformément dans tout le plan et représente, par suite, une fonction entière.

Il nous reste à déterminer l'ordre de cette fonction entière; pour cela nous supposerons que l'on a

$$\frac{3}{2} R_{n-1} < R_n < 2 R_{n-1},$$

et nous donnerons à x une valeur telle que

$$|x| = \frac{R_n + R_{n-1}}{2}. \tag{2}$$

On a alors

$$\delta_n = R_n - |x| = |x| - R_{n-1} = \frac{R_n - R_{n-1}}{2} > \frac{1}{2} R_{n-1} > \frac{1}{4} R_n;$$

on a de plus, évidemment, pour $p \neq n$,

$$\delta_p > \frac{1}{4} R_p.$$

Il en résulte

$$|H(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{M_n |x|^{\lambda_n}}{\frac{R_n}{4} \left(\frac{R_n}{2} \right)^{\lambda_n}}. \tag{3}$$

Il est aisé d'évaluer l'*ordre* du second membre considéré comme

fonction entière de $|x|$; il suffit de prendre la racine $\lambda_n^{\text{ième}}$ du terme général; on obtient

$$\frac{2x}{R_n} e^{R_n^{\eta_n - \eta_n}} \sqrt[\lambda_n]{\frac{8}{R_n}}.$$

Or on a

$$\eta_n - \varepsilon_n > \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad R_n < 2^n R_1;$$

cette expression peut donc s'écrire

$$\frac{2x}{R_n}(1 + \theta_n),$$

θ_n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; nous devons pour avoir l'ordre de la fonction considérée prendre la limite du rapport

$$\frac{\log \lambda_n}{\log R_n},$$

cette limite est égale à ρ; le second membre de (3) considéré comme fonction entière de $|x|$ est donc d'ordre ρ; or, l'inégalité (3) est vérifiée pour toutes les valeurs de x de la forme (2), c'est-à-dire sur une infinité de cercles dont les rayons croissent indéfiniment, et croissent moins vite (1) que les termes d'une progression géométrique de raison (2); il en résulte que $H(x)$ est aussi d'ordre ρ.

Nous avons ainsi démontré la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Les fonctions entières* $G(z)$ *et* $F(z)$ *étant d'ordre* ρ, *on peut écrire*

$$\frac{G(z)}{F(z)} = H(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \left[\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \right]_{\lambda_n} \right\},$$

$H(z)$ *étant une fonction entière d'ordre* ρ, $Q_n(z)$ *et* $R_n(z)$ *des polynomes tels que le second soit de degré supérieur au premier et* $[f]_{\lambda_n}$ *désignant les* λ_n *premiers termes du développement de* f *suivant les puissances crois-*

(1) Une restriction de ce genre est indispensable; une fonction à *croissance irrégulière* peut être d'ordre supérieur à ρ, quoique inférieure à une fonction d'ordre ρ sur une infinité de cercles de rayons croissant indéfiniment (voir *Leçons*, Note III).

santes de z. De plus, on peut supposer que la fonction λ_n *croît moins vite que* $R_n^{\rho+\varepsilon}$, R_n *désignant un nombre tel que les zéros de* $R_n(z)$ *soient compris entre* R_n *et* $\frac{1}{2}R_n$ *et* ε *un nombre positif arbitrairement petit.*

On peut écrire

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \sum_{p=1}^{p_n} \frac{A_{n,p}}{z - a_{n,p}},$$

et l'on a évidemment

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \left[\frac{Q_n(z)}{R_n(z)}\right]_{\lambda_n} = \sum_{p=1}^{p_n} \frac{A_{n,p}}{z - a_{n,p}} \frac{z^{\lambda_n}}{a_{n,p}^{\lambda_n}}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{G(z)}{F(z)} = H(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{p_n} \frac{A_{n,p}}{z - a_{n,p}} \frac{z^{\lambda_n}}{a_{n,p}^{\lambda_n}} \right).$$

Cette formule ressemble beaucoup à celle que nous avons obtenue; elle s'en distingue cependant en un point important : *nous ne sommes pas assurés que la série du second membre convergerait si l'on supprimait les parenthèses;* il est même aisé de voir, par des exemples, que la série ainsi obtenue peut fort bien être divergente, le terme général ne tendant pas vers zéro; on s'en rend compte aisément si l'on remarque que $A_{n,1}$, par exemple, peut être une fonction de n à croissance aussi rapide que l'on veut.

On peut cependant obtenir une série convergente de fractions simples; voici comment on peut procéder : Considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=2}^{p_n} \left(\frac{A_{n,p}}{z - a_{n,p}} \frac{z^{\lambda_{n,p}}}{a_{n,p}^{\lambda_{n,p}}} \right),$$

dans laquelle chaque terme des parenthèses doit être considéré, individuellement, comme un terme de la série; on sait que l'on peut choisir les exposants $\lambda_{n,p}$ assez grands pour que cette série converge absolument pour toute valeur de z, sauf aux pôles $a_{n,p}$; la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=2}^{p_n} \left| \frac{A_{n,p}}{z - a_{n,p}} \frac{z^{\lambda_{n,p}}}{a_n^{\lambda_{n,p}}} \right|$$

peut donc être supposée convergente.

Mais on a évidemment

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \left[\frac{Q_n(z)}{R_n(z)}\right]_{\lambda_n} - \sum_{p=2}^{p_n} \frac{A_{n,p}}{z-a_{n,p}} \frac{z^{\lambda_{n,p}}}{a_n^{\lambda_{n,p}}} = \frac{A_{n,1}}{z-a_{n,1}} - P_n(z),$$

$P_n(z)$ étant un polynome; la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_{n,1}}{z-a_{n,1}} - P_n(z)\right]$$

converge d'ailleurs absolument quel que soit z, comme on le voit immédiatement en se servant de l'égalité précédente. On a donc, finalement,

$$\frac{G(z)}{F(z)} = H(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_{n,1}}{z-a_{n,1}} - P_n(z) + \sum_{p=2}^{p_n} \left(\frac{A_{n,p}}{z-a_{n,p}} \frac{z^{\lambda_{n,p}}}{a_{n,p}^{\lambda_{n,p}}}\right)\right],$$

la série du second membre restant maintenant absolument convergente lorsque l'on considère individuellement toutes les fractions simples. Mais ce développement diffère essentiellement de celui que nous avons obtenu pour le cas où la distribution des zéros de $F(z)$ est ordinaire : *le polynome* $P_n(z)$ *n'est pas en relation simple avec la fraction* $\frac{A_{n,1}}{z-a_{n,1}}$; on sait seulement que ses λ_n premiers termes coïncident avec les λ_n premiers termes du développement en série de cette fraction. Dès lors, le fait que $H(z)$ est d'ordre ρ n'est plus ici d'aucun intérêt; on sait, en effet, que l'on peut toujours écrire

$$\frac{G(z)}{F(z)} = H(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A_n}{z-a_n} - P_n(z)\right],$$

en désignant par a_n les zéros de $F(z)$, par $P_n(z)$ des polynomes convenablement choisis et par $H(z)$ une fonction entière; posons

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

$$Q_n(z) = P_n(z) - c_n z^n,$$

on aura

$$\frac{G(z)}{F(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A_n}{z - a_n} - Q_n(z) \right],$$

formule dans laquelle la fonction entière se trouve avoir disparu; seulement chaque polynome $Q_n(z)$ n'est plus lié par une loi simple à la fraction rationnelle correspondante.

Donc, dans le cas où la distribution des zéros de $F(z)$ est extraordinaire, il y a lieu de s'en tenir à la formule donnée dans le théorème de la page 231, sans chercher à décomposer en éléments simples les fractions rationnelles qui y figurent.

Quelques exemples éclairciront la distinction entre les deux cas (¹).

Remarquons d'abord que, pour les fonctions entières usuelles, la distribution des zéros est *ordinaire*. Ce point est évident pour les fonctions simplement périodiques ou pour les dénominateurs des fonctions doublement périodiques; un calcul simple montre qu'il en est de même pour la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$, ...

Il est cependant très aisé de former des fonctions simples, pour lesquelles la distribution des zéros soit extraordinaire; il suffit qu'il y ait une infinité de paires de zéros indéfiniment rapprochés à l'infini. Posons, par exemple,

$$F(z) = \sin \pi z \sin \alpha \pi z,$$

α étant une constante que nous déterminerons ultérieurement; cette fonction s'annule pour $z = n$, et l'on a

$$F'(n) = \pi \sin \alpha \pi n.$$

Supposons que l'on ait

$$\alpha n = m + \varepsilon,$$

m étant un entier et ε un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue; il vient

$$F'(n) = (-1)^m \pi \sin \varepsilon \pi,$$

(¹) Comme nous l'avons déjà dit, une étude plus approfondie conduirait à une classification plus complète : chacun de nos deux cas, principalement le second, se subdiviserait en plusieurs autres.

c'est-à-dire

$$|F'(n)|<|\varepsilon|\pi^2.$$

Or, il est aisé de choisir le nombre incommensurable α de telle manière que, pour une infinité de valeurs de n, on ait

$$|\varepsilon|<\frac{1}{\varphi(n)},$$

quelque rapidement que croisse la fonction $\varphi(n)$; écrivons α sous forme de fraction continue

$$\alpha=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots+\cfrac{1}{a_p+\ldots}}},$$

et désignons par $\frac{P_p}{Q_p}$ la $p^{\text{ième}}$ réduite; il suffit de supposer

$$Q_{p+1}>\varphi(Q_p),$$

et l'on a

$$\left|\alpha-\frac{P_p}{Q_p}\right|<\frac{1}{Q_pQ_{p+1}}<\frac{1}{Q_p\varphi(Q_p)}.$$

Il suffit de prendre

$$m=P_p,$$
$$n=Q_p,$$

pour obtenir

$$|\alpha_n-m|=|\varepsilon|<\frac{1}{\varphi(Q_p)}=\frac{1}{\varphi(n)}.$$

Ainsi, par un choix convenable de la constante α, les expressions $\frac{1}{F'(n)}$ peuvent être supérieures en module à une fonction $\varphi(n)$ à croissance aussi rapide que l'on veut. C'est là un exemple nouveau d'un fait que j'ai déjà signalé à diverses reprises (1) : *l'introduction de constantes α d'une nature arithmétique inconnue peut amener des complications transcendantes indéfinies* (et même transfinies).

On ne peut éviter ces complications que si l'on connaît la nature arithmétique des constantes introduites; par exemple, si le nombre α

(1) *Voir* notamment, *Comptes rendus*, t. CXXI, p. 933 (16 décembre 1895), et t. CXXVIII, p. 490 (20 février 1899).

est un nombre algébrique dans le domaine naturel de rationalité, ou même dans le domaine obtenu en adjoignant le nombre e (1), on peut être assuré que la distribution des zéros de $F(z)$ est ordinaire (2).

Mais, pour qu'une théorie d'ensemble soit cohérente, il faudrait être assuré que les nombres qui s'introduisent naturellement par les opérations analytiques (périodes d'intégrales définies, constantes définies par des équations différentielles, etc.) ne présentent pas ces singularités dans leur approximation par des nombres commensurables (ou au moyen d'autres constantes précédemment définies). Mais c'est là un sujet difficile, sur lequel il est bien probable que l'on sera longtemps avant d'acquérir de nombreux résultats (3); il n'est donc pas possible, dans l'état actuel de l'Analyse, d'exclure systématiquement les fonctions pour lesquelles la distribution des zéros est extraordinaire; nous allons étudier d'un peu plus près, sur l'exemple donné plus haut, le mécanisme de leur décomposition en éléments simples. Nous allons définir le nombre α par un développement en fraction décimale et non en fraction continue (4); désignons par m_1, m_2, ..., m_p ... des entiers croissants et prenons

$$\alpha = \frac{1}{10^{m_1}} + \frac{1}{10^{m_2}} + \ldots + \frac{1}{10^{m_p}} + \ldots.$$

On a évidemment

$$10^{m_p}\alpha = A_p + \frac{1+\varepsilon_p}{10^{m_{p+1}-m_p}},$$

A_p étant un nombre entier et ε_p un nombre inférieur à l'unité.

Nous supposerons que l'on a

$$10^{m_{p+1}-m_p} = 10^{m_p}10^{m_p}10^{m_p}$$

c'est-à-dire

$$m_{p+1} = m_p + m_p 10^{m_p}10^{m_p};$$

---

(1) *Voir*, pour ce dernier point, ma Note *Sur la nature arithmétique du nombre e* (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, p. 596; 6 mars 1899).

(2) Il en est de même pour la fonction $F_1(z) = \sin\alpha z \sin\beta z \ldots \sin\lambda z$, où α, β, ..., λ, sont des nombres satisfaisant aux mêmes conditions.

(3) *Voir* ma Note du 20 février 1899 citée tout à l'heure.

(4) Ces développements singuliers en fraction décimale paraissent avoir été étudiés d'abord par Liouville; *voir* mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. II.

les nombres m_p sont ainsi complètement définis si l'on donne m_1; pour fixer les idées nous prendrons

$$m_1 = 1.$$

Cela étant, si l'on pose

$$10^{m_p} = n,$$

$$A_p = m,$$

on a

$$n\alpha - m = \frac{1+\varepsilon}{n^{n^n}},$$

ε étant inférieur à l'unité.

Considérons maintenant la fonction entière

$$F(z) = \sin\pi z \sin\alpha\pi z$$

et cherchons à décomposer en éléments simples la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{\sin\pi z \sin\alpha\pi z}.$$

Si la valeur de n est de la forme 10^{m_p}, le résidu A_n correspondant est

$$A_n = \frac{1}{F'(n)} = \frac{(-1)^m}{\pi \sin\dfrac{\pi(1+\varepsilon)}{n^{n^n}}} = \frac{n^{n^n}}{\pi^2(1+\varepsilon')},$$

ε' étant, ainsi que ε, inférieur à 1.

Si donc on veut que la série

$$\sum \frac{A_n}{n^{m_n}}$$

soit convergente, il sera nécessaire de prendre

$$m_n > n^n,$$

sinon la série renfermerait une infinité de termes supérieurs à

$$\frac{1}{2\pi^2}.$$

Posons maintenant

$$\eta = \frac{1+\varepsilon}{\alpha n^{n^n}};$$

nous aurons

$$\alpha(n-\eta)=m,$$

c'est-à-dire

$$\sin\alpha\pi(n-\eta)=0.$$

Donc $z=n-\eta$ est un zéro de $F(z)$; le résidu correspondant de $F(z)$ est

$$A'_n=\frac{1}{F'(n-\varepsilon')}=\frac{1}{\pi\alpha\sin\pi(n-\varepsilon')}=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\alpha\sin\pi\eta},$$

c'est-à-dire

$$A'_n=\frac{(-1)^{n+1}\alpha n^{n''}}{\pi^2\alpha(1+\varepsilon'')}=\frac{(-1)^{n+1}n^{n''}}{\pi^2(1+\varepsilon'')},$$

ε'' étant ainsi que ε inférieur à 1; d'ailleurs ε' et ε'' diffèrent d'autant moins de ε que n est plus grand; on voit que A'_n est de signe contraire à A_n; leur rapport diffère d'autant moins de -1 que n est plus grand.

Considérons les deux fractions simples

$$\frac{A_n}{z-n}+\frac{A'_n}{z-n+\eta}; \tag{1}$$

leur somme est

$$\frac{A_n\eta+(A_n+A'_n)(z-n)}{(z-n)(z-n+\eta)} \tag{2}$$

et l'on voit aisément d'après ce qui précède, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans le détail du calcul, que les coefficients du numérateur, considérés comme fonction de n, sont d'un ordre d'infinitude moins élevé que A_n et A'_n.

Dès lors, pour rendre convergente la série des fractions telles que (2), il suffit de retrancher bien moins de termes du développement suivant les puissances croissantes de z qu'il ne serait nécessaire si l'on considérait séparément les fractions (1). On voit ici nettement le mécanisme d'après lequel les zéros de $F(z)$, dont la distribution est extraordinaire, s'accouplent pour ainsi dire naturellement deux à deux; il y a là un phénomène analogue à celui que j'ai étudié ailleurs (1), pour d'autres séries de fractions rationnelles.

(1) *Acta mathematica*, t. XXIV, p. 329.

Conclusion.

Parmi les sujets de recherches suggérés naturellement par ce qui précède, il en est un sur lequel je n'insisterai pas, malgré sa grande importance, à cause de sa difficulté : la distribution des zéros est-elle ordinaire pour le produit de fonctions usuelles, par exemple pour le produit de deux fonctions σ correspondant toutes deux à des invariants g_2 et g_3 qui soient des nombres rationnels ou algébriques?

D'autres questions ne sont pas essentiellement distinctes de celles que l'on peut se poser sur les fonctions entières; j'insiste à nouveau ici sur l'importance particulière que présente l'étude des *fonctions à croissance régulière*, à la fois plus intéressantes et plus aisées à étudier que les autres.

Mais le point qui appellerait le plus de recherches est sans doute l'étude des séries de fractions rationnelles que l'on peut appeler *canoniques*, et qui s'obtiennent en retranchant d'une fraction rationnelle, dans laquelle le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, un certain nombre des premiers termes de son développement suivant les puissances ascendantes de la variable. C'est la forme sous laquelle se présente naturellement la dérivée logarithmique d'une fonction entière décomposée en facteurs primaires. Cette forme canonique a, de plus, l'avantage précieux d'être nettement définie et l'on sait que c'est seulement à cette condition que l'étude de séries de fractions rationnelles et de polynomes peut être profitable.