Annales scientifiques de l'É.N.S.

S. Mangeot

Sur les surfaces symétriques par rapport au cône de révolution

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 35-38
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__35_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR

LES SURFACES SYMÉTRIQUES

PAR RAPPORT AU CONE DE RÉVOLUTION,

PAR M. S. MANGEOT.

Je conviens de dire qu'une figure a la symétrie *absolue* par rapport à une surface, qui peut dégénérer en courbe, lorsque les symétriques de chaque point de la figure par rapport à la surface appartiennent tous à la figure, ou, ce qui revient au même, lorsque tous les points de la figure qui sont sur une même normale quelconque de la surface sont deux à deux symétriques par rapport au point d'incidence de la normale.

Je me propose de déterminer, relativement à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, toutes les figures $\mathcal{F}$ qui ont la symétrie absolue par rapport au cône de révolution Γ satisfaisant à l'équation

$$x^2+y^2=z^2\tang^2\gamma.$$

Les points d'une figure $\mathcal{F}$ situés dans un plan méridien quelconque du cône sont deux à deux symétriques par rapport à chacune des deux génératrices du cône comprises dans ce plan. Je dois supposer l'angle 2γ de ces deux droites commensurable avec π. Soit $\gamma=\frac{k}{m}\pi$, k et m étant deux nombres entiers donnés premiers entre eux. Désignant par u et v les deux expressions

$$z+i\sqrt{x^2+y^2},\quad z-i\sqrt{x^2+y^2},$$

où x, y, z, sont les variables coordonnées, je pose, si m est impair,

$$\varphi = uv, \qquad \chi = \frac{y}{x}, \qquad \psi = u^m + v^m,$$

et, si m est pair,

$$\varphi = uv, \qquad \chi = x\frac{u^{\frac{m}{2}} - v^{\frac{m}{2}}}{2i\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \psi = y\frac{u^{\frac{m}{2}} - v^{\frac{m}{2}}}{2i\sqrt{x^2+y^2}}.$$

φ, χ, ψ sont trois fonctions rationnelles de x, y, z, qui sont entières dans le second cas.

Un point (x_0, y_0, z_0) de l'espace, non situé sur Oz; ses deux symétriques par rapport au cône Γ; les symétriques de ceux-ci par rapport à ce même cône, etc., forment un système μ de points en nombre égal à m ou à $2m$, selon que m est pair ou impair. Ce système peut être défini par les trois formules

$$\varphi = \varphi_0, \qquad \chi = \chi_0, \qquad \psi = \psi_0,$$

dont les seconds membres désignent les valeurs que prennent les premiers quand on y remplace x, y, z, par x_0, y_0, z_0 : en effet, les trois surfaces représentées par ces équations ont m ou $2m$ points communs suivant que m est pair ou impair, et ces points, dont l'un est le point (x_0, y_0, z_0), sont deux à deux symétriques par rapport au cône Γ.

Une figure $\mathcal{F}$ est un ensemble de systèmes μ.

Pour que le système défini par les trois formules qui précèdent se déplace en engendrant une surface ou une courbe, il faut et il suffit que les trois paramètres x_0, y_0, z_0 varient en restant assujettis à une ou à deux conditions. D'après cela, les surfaces S qui admettent la symétrie absolue par rapport au cône Γ peuvent être représentées par l'équation, indépendante de k,

$$f(\varphi, \chi, \psi) = 0, \tag{1}$$

où $f(\varphi, \chi, \psi)$ est une fonction arbitrairement choisie de φ, χ, ψ, qui soit définie pour $x = 0, y = 0$; et les courbes C qui jouissent de la même propriété sont les intersections des surfaces S deux à deux, ou les sections de ces surfaces par les plans méridiens du cône.

Aucune des surfaces S ne doit passer par l'axe du cône, à moins d'être décomposable. Celles de ces surfaces qui sont algébriques correspondent, si m est impair, aux équations entières

$$(2)\qquad \sum (uv)^p (u^m + v^m)^q \left(\frac{u^m - v^m}{2i\sqrt{x^2+y^2}} \right)^{2r} F_{2r}(x, y) = 0,$$

et, dans le cas contraire, à celles-ci

$$(3)\qquad \sum (uv)^p \left(\frac{u^{\frac{m}{2}} - v^{\frac{m}{2}}}{2i\sqrt{x^2+y^2}} \right)^{r} F_r(x, y) = 0,$$

en désignant par p, q, r trois nombres entiers quelconques positifs ou nuls, et par $F_\lambda(x, y)$ un polynome entier quelconque en x et y, homogène et de degré λ, ou une constante quand λ est nul.

Je suppose que l'on fasse tourner un polygone régulier convexe P_m de m côtés autour de l'un de ses apothèmes, placé sur Oz, le centre du polygone étant au point O. Le cône Γ est l'un des cônes de révolution Γ_m décrits par les rayons du polygone. Les surfaces S et les courbes C auront la symétrie absolue par rapport à chacun des cônes Γ_m.

Quand m est pair, les cônes Γ'_m décrits par les apothèmes du polygone sont différents des cônes Γ_m, et une surface représentée par l'équation (1) aura la symétrie absolue relativement à chacun des cônes Γ_m et Γ'_m si elle est symétrique par rapport à Oz, et seulement dans ce cas.

Soit K_m le solide engendré par la rotation du polygone P_m. C'est un type de corps qui possède, d'une manière évidente, la symétrie absolue par rapport à chacun des cônes Γ_m, Γ'_m. Il n'admet pas d'autre surface de symétrie absolue que ces cônes. En effet, si un point ayant pour coordonnées x, y, z se déplace sur une surface de symétrie absolue du solide K_m, les deux expressions $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2$, $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}$ doivent être identiques à deux fonctions ayant les formes $\alpha + \beta t$, $\alpha_1 + \beta_1 t$, où t désigne $x^2 + y^2$ et α, β, α_1, β_1, des fonctions rationnelles de z qui satisfont, si m est pair, aux conditions $\beta(z^2 - h^2) = 1$, $\beta_1(z^2 - h^2) = z$, et, si m est impair, à celles-ci : $\beta = 0$, $\alpha = a$, $2\beta_1(z - h) = 1$, a et h

étant deux constantes différentes de zéro. On en conclut que le point (x, y, z) doit vérifier l'équation

$$2(\alpha+\beta t)\left(\frac{d\alpha_1}{dz}+t\frac{d\beta_1}{dz}-1\right)-(\alpha_1+\beta_1 t)\left(\frac{d\alpha}{dz}+t\frac{d\beta}{dz}-4\beta_1\right)-2\beta t=0,$$

dont le premier membre est une fonction de t et de z qui n'est pas identiquement nulle, car le coefficient de t^2 ou celui de t ne s'évanouit pas. La surface doit donc être de révolution autour de Oz, et, le polygone P_m devant alors avoir la symétrie absolue par rapport à la section de cette surface par son plan, il est nécessaire que cette section soit formée des axes mêmes du polygone.

L'équation (2), quand m est impair, et, dans le cas contraire, l'équation (3), où r reçoit des valeurs de même parité, peuvent être regardées comme définissant toutes les surfaces algébriques qui admettent les surfaces de symétrie absolue du solide K_m, autres que les plans passant par l'axe de révolution du solide.